ACADEMIA

DAS BELLAS ARTES

ELEMENTOS

DE

ALGEBRA

ELEMENTOS

DE

ALGEBRA

COMPENDIO

ADOPTADO PELA ACADEMIA DE MARINHA DO RIO DE JANEIRO, COM APPROVAÇÃO DO GOVERNO

COMPILADO

Por C. B. Ottoni

Lente de Mathematica

RIO DE JANEIRO

Publicado e á venda em casa dos Editores

EDUARDO & HENRIQUE LAEMMERT

RUA DA QUITANDA N.º 77

1852

TYPOGRAPHIA UNIVERSAL DE LAEMMERT
Rua dos Invalidos, 61 B.

PREFACIO

Com a presente publicação tenho em vista desempenhar uma obrigação que contrahi perante o Governo e a Congregação dos Lentes da Academia de Marinha: reformar o ensino do primeiro anno, substituindo aos Compendios de Bézout outros, que sem desmerecer da clareza e mais dotes que adornão as producções desse Autor, utilisem tambem para a instrucção os trabalhos de mais modernos Escriptores, que fizerão progredir notavelmente as Mathematicas puras.

Pratiquei com a Algebra o mesmo que com a Arithmetica: escolhi entre os Classicos de melhor nota as obras de Bourdon, para cingir-me ao seu methodo, compilando as doutrinas, sem limitar-me a uma simples e fiel traducção. Conheço opinião de grande peso, que daria a preferencia ao tratado de Algebra de *Lefebure de Fourcy*, : mas, além de que não lhe julgo inferior o que adoptei, accresce que era vantajoso conservar uniformidade nos methodos e doutrinas; e para isso é de importancia estudar o calculo arithmetico e o calculo algebrico, segundo as vistas e o espirito de um mesmo Autor.

A parte da Algebra, cujo ensino pertence á minha cadeira, comprehende as operações e calculos algebricos; as equações e problemas do 1.° gráo; as do 2.° a uma só incognita; applicações do bynomio de Newton; e o complemento da theoria das progressões e logarithmos, começada a tratar na Arithmetica. Limitei-me a este programma, deixando de parte a theoria geral das equações, que compete ao segundo anno.

Estas doutrinas estão distribuidas por seis Capitulos, como na Algebra de Bourdon. Traduzindo e compilando, introduzi as alterações que me parecêrão convenientes, e outras, consequencia forçosa de omissões anteriores, determinadas pelos limites de tempo prescriptos pelos Estatutos da Academia. Seria trabalho inutil registar todas estas differenças: o critico curioso poderá nota-las. Mencionarei sómente a theoria das quantidades negativas, cuja exposição differe sensivelmente da de Bourdon, e mais se approxima do modo como esta doutrina é encarada pelo sabio Carnot: vejão-se os n.os 58 e 59 e a nota correspondente.

Estes *Elementos*, bem como os de Arithmetica já impressos, terão de soffrer as correcções que fôr suggerindo o estudo e a experiencia. Se aos meus desvelos e á riqueza das fontes a que recorro tiver eu a fortuna de ajuntar as reflexões dos Srs. Professores de Sciencias Exactas no Rio de Janeiro, ao menos daquelles que já houverão por bem adoptar a Arithmetica, poderei lisongear-me de não terminar a minha carreira do Magisterio sem haver prestado algum serviço ao ensino das Mathematicas Elementares: é esta a minha ambição, que não será por falta de constancia e de estudo que deixarei de ver satisfeita.

Rio, 1 de Maio de 1852.

C. B. Ottoni.

ALGEBRA

INTRODUCÇÃO.

1. *Algebra* é a parte das mathematicas, em que se empregão signaes proprios para abreviar e generalisar os raciocinios que exige a solução das questões relativas aos numeros.

Ha duas especies de questões, mui distinctas, a saber:

O theorema, que tem por objecto demonstrar certas propriedades, de que gozão numeros conhecidos:

O problema, cujo fim é determinar o valor de certos numeros, por meio de outros, dados, com os quaes conservão aquelles relações definidas pelo enunciado da questão.

Os signaes, que a Algebra emprega, são os dez mencionados na Arithmetica, n.º 93. O seu uso não só abrevia, mas generalisa os raciocinios: operando sobre numeros representados por letras, sente-se melhor, que tal ou tal propriedade pertence a muitos numeros a um tempo; ou que o modo de resolver um problema seja independente dos numeros particulares, comprehendidos no enunciado.

Antes de proseguir com as noções preliminares da Algebra, cumprirá neste lugar recordar a exposição citada (Arith. 93 a 99.) Bem entendida a significação dos signaes, vê-se que a Algebra é uma especie de lingua, representada por caracteres mui resumidos, por meio dos quaes se acompanha com mais facilidade, do que no idioma vulgar, a filiação das idéas nos raciocinios necessarios, ou para demonstrar um theorema, ou para resolver um problema.

2. As questões tratadas (Arith. 99) são exemplos das proposições precedentes. Bem ponderada a maneira por que forão resolvidas, vê-se como o emprego dos signaes algebricos descobre regras communs a muitas questões; isto é, demonstra que uma propriedade pertence a muitos numeros; ou ensina a resolver muitos problemas semelhantes, em que só differem os valores numericos.

Assim, provou-se que TODA A FRACÇÃO *cresce ou diminue, ajuntando ou tirando a ambos os termos o mesmo numero.*

Descobrio-se, que *a somma de dous numeros* QUAESQUER *multiplicada pela sua differença produz a differença dos quadrados dos mesmos numeros.*

Dos mesmos exemplos se collige a necessidade de estabelecer regras geraes para effectuar sobre as quantidades representadas pelos signaes algebricos, todas as operações que se effectuão sobre os numeros.

Estas operações serão o objecto do 1.° capitulo: é indispensavel ao estudante familiarisar-se com ellas, para bem comprehender e desenvolver os fecundos recursos, que a Algebra offerece, para a resolução de grande numero de questões.

CAPITULO I.

OPERAÇÕES ALGEBRICAS.

DEFINIÇÕES PRELIMINARES.

3. Toda a quantidade, representada por meio dos signaes da Algebra, se chama *quantidade algebrica*, ou *quantidade litteral*: tambem se diz, a *expressão algebrica* de uma quantidade.

Assim $3a$ é a *expressão algebrica* do triplo de a; $5a^3b^2$, *expressão algebrica* de cinco vezes o producto do cubo de a multiplicado pelo quadrado de b.

$2a^2 - 4b$, a *expressão algebrica* da differença entre o dobro do quadrado de a, e o quadruplo de b.

$3a^2 - 5ab + 4b^3$, a *expressão algebrica* do resultado obtido, subtrahindo do triplo do quadrado de a cinco vezes o producto de a por b, e ajuntando-lhe 4 vezes o cubo de b.

4. Chama-se *monomio* a quantidade algebrica, que não se acha combinada com outra por algum dos signaes $+$ ou $-$: *polynomio*, a que se compõe de partes, reunidas pelos mesmos signaes. O polynomio pois é composto de monomios; e cada um destes se denomina *um termo*. O polynomio de dous termos, toma o nome de binomio; e o de tres, *trinomio*.

5. Obtem-se o *valor numerico* de uma expressão algebrica (sendo dados valores particulares ás letras que nella existem), effectuando as operações arithmeticas, que indica a mesma expressão algebrica.

Assim o valor numerico da expressão $2a^3$,

Se for $a = 3$, será 54, que é o dobro do cubo de 3.

Se for $a = 5$, será 250, dobro do cubo de 5.

O valor numerico de um polynomio não se altera, invertendo de qualquer modo a collocação dos seus termos, com tanto que a cada um se conserve o seu signal. As quantidades $3a^2 - 5ab + 4b^3$; $3a^2 + 4b^3 - 5ab$; $4b^3 + 3a^2 - 5ab$ tem o mesmo *valor numerico*. É consequencia da natureza da addição e subtracção: e esta observação nos será util ao depois.

6. Em qualquer polynomio, os termos precedidos do signal $+$ são *additivos*; do signal $-$, *subtractivos*. Ordinariamente se chamão os primeiros, *termos positivos*; os outros, *termos negativos*; denominações improprias, mas consagradas pelo uso.

O termo, não precedido de signal algum, suppõe-se ter $+$: isso acontece as mais das vezes ao 1.º termo de um polynomio.

7. Chama-se *dimensão* de um termo, cada factor litteral, dos que o compoem: *grão*, o numero das *dimensões*: neste numero não se conta o coefficiente.

$3a$ é termo de uma dimensão, ou do 1.º gráo, ou *linear*.

$4ab$ tem duas dimensões, ou é do 2.º gráo.

$7a^3bc^2$ sendo equivalente a $7aaabcc$, tem seis dimensões ou é do 6.º gráo.

Em geral, *o gráo de um termo é a somma dos expoentes das letras, que nelle entrão:* quando a letra não tem expoente, subentende-se 1. O gráo de $8a^2bcd^3$ é $2+1+1+3=7$; o termo é do 7.º gráo.

Um polymonio se diz *homogeneo*, quando todos os seus termos são do mesmo gráo.

8. *Termos semelhantes* são os que se compoem das mesmas letras, com os mesmos expoentes. Quando um polymonio contém termos semelhantes, é susceptivel de simplificação.

Seja o polynomio

$$4a^2b-3\,a^2c+9ac^2-2a^2\mathrm{b}+7a^2c-6\,b^3.$$

que equival a

$$4a^2b-2a^2b+7a^2c-3a^2c+9ac^2-6b^3:$$

Ora evidentemente $4\,a^2b-2\,a^2b$ se reduz a $2\,a^2b$; e do mesmo modo $7a^2c-3a^2c$ reduz-se a $4a^2c$. Logo o polymonio póde converter-se em $2\,a^2b+4\,a^2c+9\,ac^2-6\,\mathrm{b}^3$.

Sejão, ainda, os seguintes termos, pertencentes a um mesmo polynomio

$$+2\,a^3bc^2, -4\,a^3\,bc^2, +6\,a^3ba^2, -8\,a^3bc^2, +11\,a^3bc^2.$$

Em primeiro lugar, a somma dos termos additivos $+2a^3bc^2+6a^3bc^2+11a^3bc^2$ é evidentemente igual a $19a^3bc^2$. Depois, a somma dos termos subtractivos $-4a^3bc^2-8a^3bc^2$ é equivalente a $-12a^3bc^2$. Logo os cinco termos reunidos equivalem a $+19a^3bc^2-12a^3bc^2=+7a^3bc^2$.

Se a somma dos subtractivos fosse maior que a dos additivos, seria preciso tirar esta daquella, e dar ao resultado o signal —. Assim $+5a^2b-8a^2b=-3a^2b$; porque, sendo $8a^2b=5a^2b+3a^2b$, a expressão dada é o mesmo que $5a^2b-5a^2b-3a^2b$, ou simplesmente $-3a^2b$.

9. Regra geral. *Para reduzir muitos termos semelhantes a um só, sommão-se os coefficientes dos additivos, e á parte os dos subtractivos; tira-se a menor somma da maior; o resto, com o signal da maior, será o coefficiente do termo pedido.*

(A reducção sempre se faz unicamente entre os coefficientes.)

A reducção de termos semelhantes é operação peculiar á Algebra, e a cuja pratica dão frequentes occasiões as operações algebricas, da *addição*, *subtracção*, *multiplicação*, e *divisão*; operações de que passamos a tratar.

Observação. A idéa que se deve formar destas operações, é a mesma que das operações correspondentes, na arithmetica, cujas definições não é necessario reproduzir neste compendio.

Todavia bem se vê, que os processos, e as regras não podem ser as mesmas, sendo os symbolos differentes. Na Algebra algumas vezes as operações se reduzem a meras simplificações, ou ainda são apenas *indicadas*, por meio dos signaes convencionados: em certos casos porém, *as operações se effectuão*; e para isto são necessarias regras correspondentes aos symbolos adoptados.

ADDIÇÃO ALGEBRICA.

10. Trate-se de sommar $3a$, $5b$, e $2c$. Indicada a addição, resulta o trinomio $3a + 5b + 2c$, que não se póde simplificar. Do mesmo modo a somma dos monomios $4a^2b^3$, $2a^2b^3$, $7a^2b^3$. é $4a^2b^3 + 2a^2a^3 + 7a^2b^5$, ou $13a^2b^3$, feita a reducção (n.° 9.)

Sejão agora para sommar os polynomios

$$3a^2 - 4ab,\ 2a^2 - 3ab + b^2,\ 2ab - 5b^2.$$

Para formar um polynomio igual á somma destes tres, notemos que ajuntar ao primeiro $2a^2 - 3ab + b^2$ é ajuntar-lhe a differença entre o numero expresso por $2a^2 + b^2$, e o que representa 3ab; o que seria facil, se dessemos a a e b valores particulares. Observemos porém, que a operação se reduz a ajuntar ao 1.° polynomio $2a^2 + b^2$, e tirar-lhe $3ab$; o que produz

$$3a^2 - 4ab + 2a^2 + b^2 - 3ab,$$
$$\text{ou } 3a^2 - 4ab + 2a^2 - 3ab + b^2.$$

Por uma razão semelhante, para ajuntar a este ultimo polynomio, $2ab-5b^2$, basta escrever

$$3a^2-4ab+2a^2-3ab+b^2+2ab-5b^2$$

somma das tres quantidades dadas, que pela *reducção* dos termos semelhantes se converte em $5a^2-5ab-4b^2$.

Regra geral. *Escrevem-se os polynomios uns depois dos outros, com seus signaes; e reduzem-se os termos semelhantes.*

Exemplo. Sommar os polynomios

$$\begin{array}{r} 3a^2-4ab+2b^2 \\ +5a^2+2ab-b^2 \\ +3ab-2b^2-3c^2: \\ \hline 8a^2+ab-b^2-3c^2 \end{array}$$

Somma, já reduzida $8a^2+ab-b^2-3c^2$

Na pratica, a medida que se vão reduzindo os termos semelhantes, assignala-se cada um com um leve traço, para evitar enganos. Os termos, não traçados são os que falta reduzir, e comprehender na somma final.

SUBTRACÇÃO ALGEBRICA.

11. Proponha-se diminuir $4b$ de $5a$: é claro que o resultado algebrico será $5a-4b$. É tambem claro que a differença entre $7a^3b$ e $4a_3b$ deve ser $7a^3b-4a^3b=3a^3b$.

Seja porém $2b-3c$ que se pretende diminuir de $4a$. Em primeiro lugar o resultado se póde assim exprimir $4a-(2b-3c)$; no que não se faz mais do que indicar a diminuição. Porém as questões d'Algebra exigem que se converta aquella expressão em um só polynomio: e *eis em que consiste principalmente a regra da subtracção algebrica.*

Para o conseguir, notemos que se a, b, c fossem dados em numeros, de $2b$ tirariamos $3c$, e de $4a$ a differença precedente.

Estas operações não se effectuão, no estado actual das quantidades: porém se de $4a$ tirarmos $2b$, o que dá $4a-2b$, a differença pedida estará desfalcada da quantidade $3c$, pois que não era $2b$ por inteiro, mas sim $2b-3c$ o que queriamos subtrahir: cumpre pois ajuntar $3c$, o que nos dará o resultado $4a-2b+3c$.

Se de $8a^2-2ab$ se houver de subtrahir $5a^2-4ab+3bc-b^2$, a operação será indicada deste modo

$$8a^2-2ab-(5a^2-4ab+3bc-b^2):$$

e o raciocinio precedente terá plena applicação, considerando a quantidade a diminuir, como a differença entre a somma dos termos additivos $5a^2+3bc$, e a dos subtractivos $4ab$, e b^2. O mesmo raciocinio pois demonstrará que cumpre tirar do subtrahendo os termos additivos $5a^2$ e $3bc$, e ajuntar-lhe os subtractivos $4ab$ e b^2: o que conduz ao resultado

$$8a^2-2ab-5a^2+4ab-3bc+b^2,$$

ou, reduzindo, $3a^2+2ab-3bc+b^2$.

Póde-se concluir esta REGRA GERAL, para diminuir de um polynomio outro: *Escrevem-se em seguida ao primeiro todos os termos do segundo, trocando-lhes os signaes; e faz-se a reducção, se apparecem termos semelhantes.*

12. A passagem de uma subtracção indicada para uma effectuada, e vice-versa, dá lugar a certas transformações nos polynomios, que muitas vezes são uteis. Assim por exemplo

$$6a^2-3ab+2b^2-2bc=6a^2-(3ab-2b^2+2bc)=$$
$$6a^2-3ab-(2bc-2b^2)$$

$$a+b-c+d-e=a+b-c-(e-d)=a+b-(c-$$
$$d+e)=a-(c-b-d+e)=a+b+d-(c+e).$$

MULTIPLICAÇÃO ALGEBRICA.

13. Demonstrou-se na Arithmetica, que o producto de dous ou mais numeros conserva-se o mesmo, qualquer que seja a ordem, em que se multipliquem. Supporemos demonstrado este principio em toda a sua generalidade.

Isto posto, tratemos da multiplicação algebrica; e em primeiro lugar do caso em que ambos os factores são monomios. Seja $7a^3b^2$ para multiplicar por $4a^2b$.

A 1.ª expressão do producto $7a^3b^2\times 4a^2b$ se poderá simplificar, observando que segundo o principio precedente, e a significação dos symbolos algebricos, o mesmo producto se reduz a $7\times4\times aaaaabbb$. Ora, quanto aos coefficientes, nada impede de effectuar a multiplicação 7×4, o que dá 28 para coefficiente do producto; e quanto ás letras, *aaaaa* equivale a a^5; e *bbb* a b^3. Logo será o producto $28a^5b^3$.

Applicando a mesma analyse a outros exemplos, reconhece-se que o producto se forma sempre segundo esta

Regra, para multiplicar dous monomios. 1.° *Multiplicão-se os coefficientes entre si.* 2.° *Escrevem-se em seguida todas as letras communs aos dous factores; dando a cada uma expoente igual á somma dos expoentes, que ella tinha em um e outro factor.* 3.° *Escrevem-se tambem cada letra das que só existião em um dos factores com o mesmo expoente que nelle tinha.*

A analyse supra, e alguma reflexão sobre a natureza dos expoentes, leva á evidencia a regra precedente. Segundo ella,

$$8a^2bc^2\times7abcd^3=56a^3b^2c^3d^3$$
$$5ab^3c^2\times9bcd^2e^3=45ab^4c^3d^2e^3$$

e assim nos mais casos. Passemos á multiplicação dos polynomios.

14. Sejão estes $a+b+c$, e $d+f$, compostos unicamente de termos additivos: o seu producto será $(a+b+c)(d+f)$, que se trata de reduzir a um só polynomio: *nisto consiste a multiplicação algebrica.*

Ora, multiplicar $a+b+c$ por $d+f$, é repetir o multiplicando d vezes, depois repetil-o f vezes, e sommar os dous productos. Mas tomar d vezes $a+b+c$, é tomar d vezes a, d vezes b, d vezes c, e ajuntar os tres productos, o que fórma $ad+bd+cd$. Pela mesma razão f vezes o multiplicando equivale a $af+bf+cf$. Logo o producto total é $ad+bd+cd+af+bf+cf$.

Assim, tendo os factores só termos additivos, *multiplica-se cada termo do multiplicando por cada termo do multiplicador, e ajuntão-se todos os productos.*

Se os termos tiverem coefficientes e expoentes, a cada multiplicação parcial se applicará a regra dos monomios. Assim

$$(5a^2+2ab+b^2)(3a+2b)=15a^3+6a^2b+3ab^2+10a^2b+4ab^2+2b^3$$

$$\text{e (feita a reducção)}=15a^3+16a^2\text{b}+7ab^2+2b\ .$$

15. Tratemos agora do caso mais geral, aquelle em que ambos os factores contêem termos additivos, e termos subtractivos. Neste caso, o multiplicando exprime a differença entre o numero representado pela somma dos termos additivos, e o numero representado pela somma dos termos subtractivos. O mesmo se entende do multiplicador.

Do que se segue que a multiplicação de dous polynomios quaesquer se reduz á de dous binomios da fórma $a-b$, e $c-d$; designando a e c as duas sommas de termos additivos; $-b$ e $-d$ as sommas de termos subtractivos nos dous factores.

Procuremos pois effectuar a operação $(a-b)(c-d)$. Multiplicar $a-b$ por $c-d$, é tomar $a-b$

tantas vezes quantas unidades ha em c, *menos* tantas vezes quantas unidades ha em d: por outra, multiplicar $a—b$ por c, e $a—b$ por d, e subtrahir o segundo producto do primeiro. Porém multiplicar $a—b$ por c, é o mesmo que multiplicar c por $a—b$, o que dá a vezes c, *menos* b vezes c, ou $ca—cb = ac—bc$. Pela mesma razão $(a—b)\ d=ad—bd$. Logo o producto dos dous binomios

$$(a-b)\ (c-d)=ac-bc-ad+bd.$$

Examinando a maneira, porque se fórma este producto, vê-se que é sempre necessario *multiplicar cada termo do multiplicando por cada termo do multiplicador*. Accresce porém esta distincção. *Em quanto se multiplicão pelos termos additivos do multiplicador, os do multiplicando (additivos e subtractivos), os signaes destes se conservão nos respectivos productos parciaes. Mas passando a multiplicar pelos termos subtractivos do multiplicador os termos do multiplicando (additivos e subtractivos), o signal de cada producto parcial é o contrario do que affecta o termo respectivo do multiplicando.*

Por outras palavras: *Quando os dous termos, que se multiplicão, têem o mesmo signal* (+ ou —)*; o producto tem o signal + Se os dous termos tiverem signaes diversos, o producto parcial terá o signal—. Diz-se tambem abreviadamente:*

+ *por* +, *ou* — *por* —, *dá* +.

+ *por* —, *ou* —, *por* +, *dá* —.

Expressão incorrecta, mas cuja concisão é parte, para que melhor se fixe a regra na memoria.

Isto posto, póde ordenar-se a operação, como se vê no seguinte exemplo:

$$\begin{array}{ll}
\text{Factores} & \left\{\begin{array}{l} 4a^3-5a^2b-8ab^2+2b^3 \\ 2a^2-3ab-4b^2 \end{array}\right. \\
\hline
\begin{array}{c}\text{Productos}\\ \text{parciaes}\end{array} & \left\{\begin{array}{l} 8a^5-10a^4b-16a^3b^2+4a^2b^3 \\ -12a^4b+15a^3b^2+24a^2b^3-6ab^4 \\ -16a^3b^2+20a^2b^3+32ab^4-8b^5 \end{array}\right. \\
\hline
\begin{array}{c}\text{Producto}\\ \text{reduzido}\end{array} & \left\{ 8a^5-22a^4b-17a^3b^2+48a^2b^3+26ab^4-8b^5 \right.
\end{array}$$

Em cada multiplicação, termo a termo, começa-se por examinar, segundo a regra precedente, qual será o signal do producto parcial respectivo; e em seguida applica-se aos coefficientes, letras e expoentes o processo da multiplicação dos monomios. A final reduzem-se os termos semelhantes.

Observações relativas á multiplicação algebrica.

16. Multiplicando, um pelo outro, dous polynomios homogeneos (n.° 7), *o producto será tambem homogeneo*. É consequencia das regras relativas a letras e expoentes, na multiplicação dos monomios. Das mesmas regras se segue que *o numero de dimensões do producto é a somma das dimensões do multiplicando e multiplicador*. Serve muitas vezes esta observação para descobrir erros de pratica na multiplicação.

(Quasi todas as questões que se resolvem algebricamente, e notadamente as questões de Geometria, conduzem a expressões homogeneas.)

17. Quando não ha reducções, *o numero de termos do producto final é igual ao numero de termos de um factor, multiplicado pelo numero de termos do outro factor*. Consequencia da regra (n.° 15).

Havendo termos semelhantes, é menor o numero dos termos do producto. Mas notão-se entre elles alguns que nunca soffrem reducção, a saber: 1.° *o producto dos termos em que uma mesma letra é affecta do mais alto expoente, no multiplicando, e no multiplicador;* 2.° *o producto dos termos, em que a mesma letra tem o menor expoente, em cada factor*. Com effeito, nestes productos parciaes, a letra mencionada deve ter expoente maior ou menor do que em qualquer outro: pelo que não acharáõ elles termos semelhantes, com os quaes soffrão reducção.

Esta observação será de muita utilidade na divisão.

18. A multiplicação de certos polynomios conduz a resultados notaveis e de uso frequente.

1.° O binomio $a+b$ elevado ao quadrado, ou

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

mostra que o *quadrado da somma de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, mais o da segunda, mais o dobro do producto das duas quantidades.*

2.° Se em vez de $a+b$, tivessemos $a-b$, seria

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2:$$

Isto é, *o quadrado da differença de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira, mais o quadrado da segunda, menos o dobro do producto das duas quantidades.*

Assim $(8a^3+5a^2b)^2=64a^6+25a^4b^2+80a^5b$

$(8a^3-5a^2b)^2=64a^6+25a^4b^2-80a^5b$.

3.° Multiplicando $a+b$ por $a-b$, resulta a^2-b^2. Logo *a somma de duas quantidades multiplicada pela sua differença dá em producto a differença dos quadrados das mesmas quantidades.*

Assim $(6a^2+5ab)(6a^2-5ab)=36a^4-25a^2b^2$.

Estas observações muïtas vezes abreviião os calculos.

19. Ha certos polynomios, cuja inspecção basta para poderem decompôr-se em factores, o que é frequentemente util. É facil de ver que

$$25a^4-30a^3b+15a^2b^2=5a^2(5a^2-6ab+3b^2)$$

e que $64a^4b^6-25a^2b^8=(8a^2b^3+5ab^4)(8a^2b^3-5ab^4)$.

DIVISÃO ALGEBRICA.

20. A Divisão em Algebra, como na Arithmetica, tem por fim:

Dado um producto, e um dos factores, achar o outro. Consideremos o caso de dous monomios.

Proponha-se dividir $72a^5$ por $8a^3$, o que se póde indicar deste modo $\frac{72a^5}{8a^3}$

Pede-se um terceiro monomio, que multiplicado pelo segundo reproduza o primeiro. Ora, segundo as regras da multiplicação dos monomios, o coefficiente pedido multiplicado por 8 deve dar 72, e o expoente da letra, sommado com 3 deve dar 5. Logo, cumpre dividir 72 por 8, e do expoente no dividendo 5, tirar 3, expoente no divisor; será pois o quociente $9a^2$, o que facilmente se verifica.

Descobre-se do mesmo modo que

$\frac{35a^3b^2c}{7ab}=5a^2bc$; e com effeito $5a^2bc\times 7ab=35a^3b^2c$.

Donde se vê, que para dividir um monomio por outro: 1.° *Divide-se coefficiente por coefficiente*; 2.° *Escreve-se no quociente cada letra das que existem em ambos os termos, com expoente igual ao excesso do expoente que tem a mesma letra no dividendo sobre o que tem no divisor*. 3.° *Escreve-se as letras, que só entrão no dividendo, com os mesmos expoentes*.

21. Desta regra resulta, que a divisão dos monomios não se póde effectuar, 1.° quando o coefficiente do dividendo não é multiplo do do divisor; 2.° quando o expoente d'alguma letra é maior no divisor, que no dividendo; 3.° quando alguma letra entra no divisor, e não no dividendo.

Em qualquer destes casos, o quociente conserva a fórma de um monomio fraccionario, que porém muitas vezes se póde simplificar. Consiste a simplificação em supprimir todos os factores, que forem communs ao numerador e denominador, o que não altera a fracção (Arith. 45).

22. Segue-se da mesma regra, que a letra que tiver o mesmo expoente nos dous termos da divisão não apparecerá no quociente.

Por exemplo $\frac{24a^3b^2}{8a^2b^2}=3a.$

Mas este resultado póde tomar fórma tal, que conserve o vestigio da letra b, que figurava na questão proposta, e desappareceu por occasião da divisão.

Com effeito, a regra dos expoentes, applicada *por convenção* á expressão $\frac{b^2}{b^2}$ a reduz a $b.^\circ$ Este novo symbolo $b.^\circ$ indica que a letra b *não é factor no quociente*, ou nelle não entra; mas tem a vantagem de conservar a lembrança de que na questão proposta figurava o numero b; e isto *sem alterar o resultado*. Porquanto, provindo b° da expressão $\frac{b^2}{b^2}$, que aliás é igual a 1, segue-se que $3ab^\circ=3a\times1=3a$.

Em geral, *toda a quantidade affecta do expoente* 0 *é equivalente á unidade*. Importa reflectir com madureza sobre a origem desta expressão; cumpre formar juizo claro e exacto dos symbolos empregados em Algebra.

Divisão dos Polynomios.

23. Como os processos e raciocinios, terão de conduzir-nos a dividir parcialmente um termo do dividendo por um do divisor, para não interromper a analyse por causa de distincções entre termos additivos, e subtractivos, anticipemos *a regra dos signaes na divisão.*

Para isso lembremos (n.º 15) que o producto de dous termos do mesmo signal é sempre additivo; e subtractivo o de dous termos de signaes contrarios. E attendendo tambem a que o quociente multiplicado pelo divisor reproduz o dividendo, conclue-se que

1.º *Se ambos os termos da divisão tem o signal* +, *o quociente terá* +

2.º *Se ambos tem o signal* —, *ainda o quociente tem* +

3.º *Se o termo do dividendo tem* +, *o do divisor* —, *ou vice-versa, terá sempre o quociente* —. Diz-se tambem, por abreviação:

+ dividido por +, ou — dividido por —, dá +;

+ dividido por —, ou — dividido por +, dá —

24. Proponha-se agora dividir o polynomio $26a^2b^2 + 10a^4 - 48a^3b + 24ab^3$ por $4ab - 5a^2 + 3b^2$. Para facilitar o calculo, dispõe-se á semelhança da divisão arithmetica:

$$\begin{array}{l|l}
\quad 26a^2b^2 + 10a^4 - 48a^3b + 24ab^3 & 4ab - 5a^2 + 3b^2 \\
\quad +8a^3b - 10a^4 + 6a^2b^2 & \overline{-2a^2 + 8ab} \text{ (quoc.)} \\
\cline{1-1}
(1^{\circ}\text{r.})\ 32a^2b^2 - 40a^3b + 24ab^3 & \\
\quad -32a^2b^2 + 40a^3b - 24ab^3 & \\
\cline{1-1}
(2^{\circ}\text{r.})\ \ldots\ldots\ 0 &
\end{array}$$

Da definição da divisão e da regra (n.° 15) resulta, que o dividendo é a *somma reduzida* de todos os productos parciaes de cada termo do divisor por cada termo do quociente. Mas, segundo a observação (n.° 17) o termo do dividendo $+10a^4$, em que a letra a tem o maior expoente, deve provir *sem reducção* do termo $-5a^2$, em que a mesma letra tem o maior expoente no divisor, multiplicado pelo termo analogo do quociente. Este termo pois se achará dividindo $+10a^4$ por $-5a^2$, o que dá $-2a^2$.

Obtido um termo do quociente, é claro que, multiplicando-o pelo divisor, e subtrahindo do dividendo o producto (para o que se escrevem logo os termos delle com signaes contrarios aos que dá a multiplicação), o resto conterá o producto do divisor pela parte que falta do quociente. Podemos pois tratar aquelle resto $32a^2b - 40a^3b + 24ab^3$ como um novo dividendo, e uma analyse semelhante á precedente conduzirá a dividir $-40a^3b$ por $-5a^2$, termos do dividendo e do divisor, em que a letra a tem o maior expoente. O resultado desta divisão parcial, $+8ab$, é o segundo termo do quociente, que será exactamente $-2a^2+8ab$, visto que não ficou 2.° resto.

E quando o houver, é claro que a esse 2.° resto, ao 3.°, 4.° &c. se applicará sempre o mesmo raciocinio que ao 1.°

Verifica-se o quociente achado, multiplicando-o pelo divisor, o que deve reproduzir o dividendo.

Sendo preciso, em cada divisão parcial, examinar qual o termo em que uma letra tem o maior expoente, facilita-se este exame *escrevendo á priori os termos do dividendo e do divisor de modo que os expoentes de uma letra vão diminuindo da esquerda para a direita*. Chama-se a isto *ordenal-os a respeito dessa letra*. Ordenado o dividendo e o divisor, *o primeiro termo* de cada dividendo parcial é sempre o que cumpre dividir pelo primeiro do divisor. Do que fica dito se deduz a seguinte

25. Regra geral. *Ordenados o dividendo e o divisor a respeito de uma mesma letra, divide-se o 1.° termo do dividendo pelo 1.° do divisor e obtem-se o 1.° do quociente. Multiplica-se o termo achado pelo divisor, e subtrahe-se o producto do dividendo. Pratica-se com o resto o mesmo que com o dividendo; e continuão-se as operações até chegar ao resto 0*. No qual caso a divisão se diz exacta.

Quando o 1.° termo do dividendo ou de qualquer dos restos não for divisivel pelo 1.° do divisor, a divisão total é impossivel; isto é, não ha polynomio inteiro, que multiplicado pelo divisor reproduza o dividendo.

26. Notaremos, que comquanto haja analogia entre a divisão algebrica e a arithmetica, já na disposição dos calculos, já nos fins da operação, ha comtudo entre uma e outra sensiveis differenças.

Na Arithmetica os quocientes parciaes se achão por tentativas; em quanto na Algebra a divisão do 1.° termo de cada resto pelo 1.° do divisor dá sempre um termo do quociente. No que é mais simples a divisão algebrica. Tambem nesta póde principiar-se pela direita, tomando, não o maior, mas o menor dos expoentes de uma letra, o que em nada altera os processos e raciocinios expostos. A divisão arithmetica só póde começar pela esquerda.

27. Póde succeder, que um dos polynomios, ou ambos, contenhão mais de um termo, em que a letra escolhida para se elles ordenarem tenha o mesmo expoente. Nesse caso cumpre tratar como um só termo a totalidade dos que contiverem a mesma potencia da letra: e na divisão attender a estes termos compostos, pela maneira que se passa a expôr. Seja por exemplo o divisor $5a^2+3ab-5bc$, e o dividendo $11a^2b-19abc+10a^3-15a^2c+3ab^2+15bc^2-5b^2c$ que, ordenado, se póde reduzir a esta fórma (n.° 19) $10a^3+(11b-15c)\,a^2+(3b^2-19bc)\,a+15bc^2-5b^2c$.

Tambem se usa da seguinte indicação:

$$10a^3+\left.\begin{matrix}11b\\-15c\end{matrix}\right)a^2+\left.\begin{matrix}3b^2\\19bc\end{matrix}\right)a+15bc^2-5b^2c.$$

Se representassemos por uma letra cada grupo de quantidades que multiplicão cada potencia de a, isto é, suppondo $11b-15c=m$, e $3b^2-19bc=n$, o dividendo se tornaria em $10a^3+ma^2+na+15bc^2-5b^2c$, cuja divisão facilmente seguiria a regra (n.° 25). Quando porém se tratar da divisão do termo ma^2, cumprirá notar que m representa um polynomio, a cuja divisão parcial se deve applicar a mesma regra (25).

O processo pois será, como se segue:

$$\begin{array}{l|l}
10a^3+\left.\begin{matrix}11b\\-15c\end{matrix}\right)a^2+\left.\begin{matrix}3b^2\\-19bc\end{matrix}\right)a+15bc^2-5b^2c & \underline{5a^2+3ab-5bc} \\
-10a^3-6b.a^2+10bc.a & 2a+b-3c \\
\hline
1.^{\circ}\text{ resto }+\left.\begin{matrix}5b\\-15c\end{matrix}\right)a^2+\left.\begin{matrix}3b^2\\-9bc\end{matrix}\right)a+15bc^2-5b^2c & \\
\qquad -5b.\,a^2-3b^2.\,a+5b^2c & \\
\qquad +15c.\,a^2+9bc.\,a-15bc^2 & \\
\hline
2.^{\circ}\text{ resto }\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;0. &
\end{array}$$

Divisão parcial $5b-15c \,\Big|\, \dfrac{5}{b-3c}$

Na divisão do 1.° resto, tendo de dividir o 1.° termo $(5b-15c)\,a^2$ por $5a^2$, o quociente será

$$\frac{(5b-15c)\,a^2}{5\,a^2}=\frac{5b-15c}{5}=b-3c$$

Effectuamos pois em separado esta ultima divisão, e o resultado $b-3c$ se deve ajuntar a $2a$, para formar o quociente pedido.

Basta este exemplo, para conhecer-se como se deve proceder nos mais casos semelhantes.

28. Outro caso notavel da divisão dos polynomios é aquelle *em que o dividendo contém diversas potencias de alguma letra que não entre no divisor*. Neste caso, ordenado o dividendo em relação a essa letra, *a divisão só poderá ser exacta, se cada termo do dividendo for separadamente divisivel por todo o divisor*. Este theorema, que ao depois nos será util, póde ser demonstrado pela maneira seguinte:

Seja o dividendo $Ma^4+Na^3+Pa^2+Qa+R$, e o divisor S, sendo M, N, P, Q, R, S monomios ou polynomios, nos quaes não entra a. Pois que o divisor S não contém a letra a, o quociente a conterá *com os mesmos expoentes, que tem no dividendo*; pois só assim, multiplicado o quociente pelo divisor, se reproduzirá o dividendo. Será pois o quociente da fórma $ma^4+na^3+pa^2+qa+r$, sendo m, n, p, q, r monomios ou polynomios, tambem independentes de a.

Ora, multiplicado este quociente pelo divisor S, deve ser o producto $Sma^4 + Sna^3 + Spa^2 + Sqa + Sr = Ma^4 + Na^3 + Pa^2 + Qa + R$

E como entre os termos que contém diversas potencias de a não póde haver reducção; segue-se que para poder ter lugar esta ultima igualdade, é necessario que seja

$$\left.\begin{aligned} Sma^4 &= Ma^4 \\ Sna^3 &= Na^3 \\ Spa^2 &= Pa^2 \end{aligned}\right\} \text{do que se segue} \left\{\begin{aligned} ma^4 &= \frac{Ma^4}{S} \\ na^3 &= \frac{Na^3}{S} \\ pa^2 &= \frac{Pa^2}{S} \end{aligned}\right.$$

e assim por diante. O que demonstra o nosso theorema, a saber:

Ordenado um polynomio a respeito de uma letra, para que seja divisivel por outro polynomio INDEPENDENTE *dessa letra, é necessario, que a parte affecta de cada uma das potencias da mesma letra seja separadamente divisivel pelo mesmo divisor.*

Sirva de exemplo o polynomio $3a^3b + 2a^2b^2 -$

$4abc^2 - 6a^3c - 4a^2bc + 8ac^3$ que se trata de dividir por b—2c.

Posto o dividendo debaixo da fórma

$$(3b-6c)\,a^3 + (2b^2-4bc)\,a^2 + (8c^3-4bc^2)\,a$$

para dividi-lo por $b-2c$, cumpre effectuar parcialmente as seguintes divisões:

$$1.^a \ldots \frac{(3b-6c)\,a^3}{b-2c} = 3a^3;\ 2.^a \ldots \frac{(2b^2 4-bc)\,a^2}{b-2c} = 2ba^2;$$

$$3.^a \ldots \frac{(8c^3-4bc^2)\,a}{b-2c} = -4c.^2a$$

Logo o quociente total será $3a^3 + 2a^2b - 4ac^2$, o que facilmente se verifica.

29. Entre os exemplos de divisão algebrica, nota-se que as expressões desta fórma

$$a^2-b^2,\ a^3-b^3,\ a^4-b^4,\ a^5-b^5, \ldots\ldots,\ a^m-b^m$$

são todas divisiveis por $a-b$, isto é, *a differença entre potencias semelhantes de duas quantidades, é sempre divisivel pela differença entre as mesmas quantidades.* Facil é a verificação.

30. Terminamos os preceitos da divisão algebrica, addicionando aos caracteres de uma divisão impossivel (nos 21 e 25) as seguintes considerações, que facilmente se deduzem dos principios estabelecidos.

1.° *Um monomio nunca póde ser divisivel por um polynomio.*

2.° *Um polynomio só póde ser divisivel por um mo-*

nomio, quando este dividir exactamente cada um dos termos do dividendo.

3.° *Nenhuma divisão é exacta quando o divisor contém alguma letra que não exista no dividendo.*

4.° *Um polynomio não é divisivel por outro polynomio, se os termos do dividendo e do divisor, em que entra uma mesma letra com o maior ou com o menor expoente, não fôrem divisiveis um pelo outro.* Esta ultima observação é util na pratica, para evitar tentativas inuteis.

FRACÇÕES ALGEBRICAS. MAIOR DIVISOR COMMUM.

31. As fracções algebricas devem ser tomadas na mesma accepção que as fracções arithmeticas, a saber: imagina-se dividida uma unidade em tantas partes, quantas são as unidades do denominador, e tomão-se dessas partes tantas, quantas unidades formão o numerador; podendo aliás, um e outro, ser representados por monomios ou polynomios. Portanto a addição, subtracção, multiplicação e divisão das fracções serão aqui effectuadas pelas mesmas regras da Arithmetica; devendo porém na applicação dessas regras ás fracções litterarias, attender-se aos processos especiaes estabelecidos para as expressões algebricas inteiras, monomios ou polynomios. Não é pois necessario reproduzir as mencionadas regras, que suppomos sabidas.

Todavia *a reducção das fracções á mais simples ex-*

pressão exige alguns desenvolvimentos, por causa de circumstancias mui especiaes que offerece o processo desta operação, applicado a fracções algebricas.

Quando os termos da fracção são ambos monomios (n.° 21), ou ao menos um delles (n.° 30, 1.° e 2.°), facil é reconhecer os factores que lhes são communs e completar a simplificação da fracção. Sendo ambos polynomios, ainda em certos casos particulares, basta a inspecção delles, para descobrir os factores communs. Por exemplo:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{5a^3-10a^2b+5ab^2}{8a^3-8a^2b}=\frac{5a(a^2-2ab+b^2)}{8a^2(a-b)}=\frac{5a(a-b)^2}{8a^2(a-b)}=\frac{5(a-b)}{8a}$$

Todas as vezes que o numerador e o denominador puderem tomar a fórma do quadrado de uma somma ou differença, ou da differença dos quadrados de duas quantidades, a observação do n.° 18 muito facilita a decomposição. Tratando-se porém de polynomios mais compostos, cumpre recorrer ao processo do *maior divisor commum*.

Esta theoria, para ser estabelecida em toda a sua extensão, depende de principios e noções que neste lugar dos Elementos não podemos ainda tornar claros: pelo que só aqui se trata da parte mais elementar da doutrina, deixando para outro lugar o complemento della.

Theoria Elementar do Maior Divisor Commum.

32. *O maior divisor commum de dous polynomios é o polynomio maior em relação a expoentes e coefficientes, que divide exactamente os dous propostos.*

A propriedade caracteristica do *maior divisor commum* é que dividindo por elle ambos os polynomios, os quocientes resultantes são *primos entre si*, isto é, não contém factor commum.

Esta proposição é simples corollario dos principios da divisibilidade dos numeros, estabelecidos na Arithmetica. Desses mesmos principios concluimos os seguintes:

1.° principio. *O maior divisor commum a dous numeros inteiros contém como factores todos os divisores parciaes communs aos dous numeros, e não póde conter outros factores.*

2.° principio. *O maior divisor commum entre dous numeros inteiros é o mesmo que entre o menor delles e o resto da divisão de um pelo outro.*

A theoria do maior divisor commum algebrico funda-se nestes dous principios, cuja demonstração, geral e algebrica, não póde aqui ter lugar. O segundo foi demonstrado na Arithmetica (n.° 52); e o 1.° é corollario das propriedades dos numeros (Arit. 105 e 106).

Isto posto, procuremos descobrir o maior divisor commum aos dous polynomios, já ordenados em relação á letra a:

$$15a^5b^2+10a^4b^3+4a^3b^4+6a^2b^5-3ab^6$$
$$12a^4b^2+38a^3b^3+16a^2b^4-10ab^5.$$

Começando por examinar os factores monomios, notamos que o 1.° polynomio é divisivel por ab^2, e o 2.° por $2ab^2$. Ora, sendo ab^2 factor commum, cumpre reservar-se para multiplicar pelos outros factores communs que se descobrirem; e o factor 2 que divide sómente o 2.° polynomio, não influindo no pedido divisor commum (1.° principio) póde ser supprimido. Assim simplificaremos o calculo, dividindo o 1.° polynomio por ab^2, o 2.° por $2ab^2$, e teremos

$$1.° \ \ldots\ldots \ 15a^4+10a^3b+4a^2b^2+6ab^3-3b^4$$

$$2.° \ \ldots\ldots \ 6a^3+19a^2b+8ab^2-5b^3.$$

Para achar o *maior divisor commum* a estes dous polynomios, o processo começará dividindo o maior pelo menor (maior e menor em relação aos expoentes de a). Mas, não sendo $15a^4$ divisivel por $6a^3$, podemos evitar fracções observando que esta divisão se torna exacta, multiplicando o 1.° polynomio por 2, e que a introducção deste factor 2 não influe no divisor commum, porque não divide elle o 2.° polynomio. Será pois a

Primeira divisão.

$$\begin{array}{l|l}
30a^4+20a^3b+8a^2b^2+12ab^3-6b^4 & 6a^3+19a^2b+8ab^2-5b^3 \\
\underline{-30a^4-95a^3b-40a^2b^2+25ab^3} & \overline{5a-25b} \\
\qquad -75a^3b-32a^2b^2+37ab^3-6b^4 & \\
(\times 2)-150a^3b-64a^2b^2+74ab^3-12b^4 & \\
\qquad \underline{+150a^3b+475a^2b^2+200ab^3-125b^4} & \\
1.° \text{ resto } \ldots \ +411a^2b^2+274ab^3-137b^4 & \\
\text{que é igual a, } \quad 137b^2\,(3a^2+2ab-b^2) &
\end{array}$$

Actualmente, em virtude do 2.º principio, devemos achar o *maior divisor commum* entre o polynomio menor e o resto; e como este resto é divisivel por $137b^2$, e o outro polynomio não o é, póde-se omittir o factor $137b^2$ (1.º principio). Portanto

Segunda divisão.

$$\begin{array}{l|l} \quad 6a^3+19a^2b+8ab^2-5b^3 & 3a^2+2ab-b^2 \\ \cline{2-2} -6a^3-4a^2b+2ab^2 & 2a+5b \\ \cline{1-1} \quad +15a^2b+10ab^2-5b^3 & \\ \quad -15a^2b-10ab^2+5b^3 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

2.º resto. . . . . 0.

Será $3a^2+2ab-b^2$ o maior divisor commum entre os polynomios, depois de preparados para a divisão; e como nestas preparações omittimos o factor tambem commum ab^2, o maior divisor commum entre os polynomios propostos será

$$(3a^2+2ab+b^2)\,ab^2=3a^3b^2+2a^2b^3+ab^4$$

Do mesmo modo se discorre em qualquer outro exemplo; e a analyse das operações conduz á seguinte:

33. Regra geral. 1.º *Examina-se se ha algum factor monomio, commum a ambos os polynomios; e havendo-o omitte-se.* 2.º *Supprime-se em cada polynomio qualquer factor monomio que não divida exactamente o outro polynomio.* 3.º *Pratica-se a regra do maior divisor commum, dada na Arithmetica.* 4.º *Em cada nova divisão, começa-se sempre por supprimir em cada poly-*

nomio todo o factor que não o seja do outro. 5.° *Quando o* 1.° *termo de algum dividendo parcial tem coefficiente não divisivel pelo primeiro do divisor, obtem-se esta divisibilidade, multiplicando o dividendo parcial pelo numero que for preciso, comtanto que não seja factor do divisor.* 6.° *Obtida uma divisão exacta, o ultimo divisor se multiplica pelos factores communs, que no começo da operação se tinhão supprimido; e o producto é o* MAIOR DIVISOR COMMUM PEDIDO.

Quando o ultimo resto não é zero, será independente da letra, a respeito da qual se ordenarão os polynomios; os quaes em tal caso são primos entre si; salvo se tem algum factor commum *independente da letra*, e que no principio da operação houvesse escapado ao exame (n.° 28).

N. B. Casos ha em que a regra precedente se acha insufficiente; mas sendo difficil tratar esses casos, só com os principios até aqui estabelecidos, contentamo-nos por ora com o que fica dito, e passamos á resolução dos problemas e equações do 1.° gráo.

CAPITULO II.

PROBLEMAS DO PRIMEIRO GRÁO.

NOÇÕES PRELIMINARES SOBRE AS EQUAÇÕES.

34. Não considera a Algebra ordinariamente, senão os Problemas cujo enunciado traduzido nos symbolos algebricos se acha representado por *equações*. Chama-se *equação* a expressão da igualdade de duas quantidades.

A resolução de taes problemas compõe-se de duas partes distinctas. A primeira tem por fim representar algebricamente as condições do problema, ou *pô-lo em equação:* a segunda ensina a *resolver a equação ou equações*, isto é, derivar dellas o valor ou valores das incognitas.

As regras relativas á 1.ª parte deste processo tem, como se verá, alguma cousa de vago, e que fica dependente da sagacidade do calculista; pelo contrario na 2.ª parte se seguem processos definidos e invariaveis. Pelo que tratamos primeiramente desta 2.ª parte, ou da *resolução das equações*.

Considerão-se diversas especies de igualdades:

1.° A igualdade que existe entre numeros conhecidos e dados *á priori*, mas representados por letras: taes são estas $a-b=c-d$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, que se verificão numericamente, substituindo ás letras numeros particulares, entre os quaes existão as relações indicadas. Esta 1.ª especie conserva o nome de *igualdade.*

2.° A igualdade evidente por si mesma, ou que se verifica sem dependencia dos valores numericos das letras: taes são $19=13+6$, $3a-5b=a-b+2a-4b$. Chama-se a esta *identidade.*

3.° A igualdade, que sómente se verifica, substituindo a alguma ou algumas das letras que representão incognitas *certos valores*, dependentes dos numeros conhecidos que entrão na igualdade. A esta é que se dá especialmente o nome de *equação;* e della passamos a occupar-nos. *N.B.* As quantidades incognitas se representão, é de estylo, por alguma das ultimas letras do alphabeto.

4.° A *equação identica*, que adiante se definirá.

As *equações* são *numericas* ou *litteraes*. Chamão-se *numericas*, quando nellas só entrão numeros particulares, excepto a letra que representa a incognita. *Litteraes* aquellas em que tambem algumas quantidades dadas são representadas por letras.

As equações a uma só incognita tambem se classificão em diversas especies ou *gráos*. Chamão-se *do primeiro gráo* as que só contém a 1.ª potencia da incognita. *Do segundo gráo*, quando encerrão a 2.ª potencia da *incognita;* do *terceiro*, se contém a 3.ª potencia; e assim por diante. Demos exemplos de equações numericas e litteraes de diversos gráos:

do 1.° $3x-5=17-2x$; $ax+b=c+dx$:
do 2.° $4x-5x^2=35-3x^2$; $ax^2-bx=d$:
do 3.° $5x^3+4x^2+3x=2-x^2$; $2ax^3-5a^2x^2+ab^2x=a^2b^2$.

Tratamos por ora sómente das do 1.° gráo: a sua resolução tem por fim *procurar um valor para a incognita, que substituido a ella na equação, torne o 1.° membro identicamente igual ao 2.°*

Chama-se 1.° membro a quantidade que precede ao signal $=$, e 2.° a que se acha depois do mesmo signal.

§ 1.° *Equações e Problemas do primeiro gráo a uma incognita.*

35. É principio commum a toda a especie de igualdades, e que se póde ter por evidente; que sem perturba-las, se póde 1.° *ajuntar ou tirar a ambos os membros a mesma quantidade:* 2.°, *multiplicar ou dividir ambos os membros pela mesma quantidade.* O que significa que, se antes da operação erão iguaes os dous membros, tambem o são depois della. Isto é evidente. Daqui resultão duas transformações que são de uso continuo na resolução das equações.

1.ª *Transformação.* Convém muitas vezes *passar um termo de um para outro membro;* para o que *basta mudar-lhe o signal.*

Seja por exemplo $5x-6=8+2x$. Se tirarmos $2x$ de ambos os membros, teremos

$$5x-6-2x=8+2x-2x; \text{ ou } 5x-6-2x=8.$$

E se a um e outro membro desta ultima ajuntarmos 6, resultará

$$5x-6-2x+6=8+6, \text{ ou } 5x-2x=8+6.$$

Vê-se pois que o termo $2x$, additivo no 2.° membro, passa a ser subtractivo no 1.° e o termo 6 subtractivo no 1.° tornou-se additivo no 2.°

Do mesmo modo se prova que a equação

$$ax+b=d-cx \text{ se muda em } ax+cx=d-b.$$

Logo, em geral, *póde-se transferir qualquer termo de um membro para outro, mudando-lhe o signal.*

36. 2.ª *Transformação.* Quando os termos de uma equação ou alguns delles são fraccionarios, póde ella reduzir-se a outra, que só tenha termos inteiros. Seja a equação

$$\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}=11-\frac{x}{5},$$

que, reduzindo as fracções ao mesmo denominador, converte-se nesta

$$\frac{40x}{60}-\frac{45}{60}=11-\frac{12x}{60}.$$

Multiplicando ambos os membros por 60 (n.° 43), o que se reduz a supprimir o denominador 60, e por elle multiplicar o inteiro 11, teremos

$$40x-45=660-12x.$$

Vê-se pois que todo o processo consiste em *reduzir os termos fraccionarios ao mesmo denominador*, o *qual se omitte; e multiplicar por esse denominador os termos inteiros.*

N. B. Se na reducção ao mesmo denominador houver simplificações, não ha razão para omitti-las; e a sua pratica tornará mais simples a equação final.

Sendo a equação algebrica, a regra precedente tem plena applicação: segundo ella, a equação

$$\frac{ax}{b}-\frac{2c^2x}{ab}+4a=\frac{4bc^2x}{a^3}+\frac{5a^3}{b^2}-3b$$

se muda em $a^4bx-2a^2bc^2x+4a^4b^2=4b^3c^2x+5a^6-3a^3b^3$.

O denominador commum dos termos fraccionarios é a^3b^2.

37. Proponha-se agora resolver a equação

$$\frac{4x}{9}-\frac{3}{5}=2x-\frac{5}{6},$$

a qual pela segunda transformação se muda em $40x-54=180x-75$.

Transpondo os termos $180x$ para o 1.° membro, e para o 2.°-54, resulta $40x-180x=54-75$, ou $-140x=-21$.

A mesma transposição (n.° 35) applicada á ultima equação a converte em $21=140x$, ou $140x=21$, e desta, dividindo ambos os membros por 140, resulta

$$x=\frac{21}{140}=\frac{3}{20}.$$

N. B. Incidentemente fica provado que *mudar os signaes a ambos os membros não altera a equação.*

Resolvamos tambem a equação litteral acima transformada

$$a^4bx-2a^2bc^2x+4a^4b^2=4b^3c^2x+5a^6-3a^3b^3.$$

Transpondo os termos de modo que no 1.º membro sómente existão aquelles em que entra x, teremos

$$a^4bx-2a^2bc^2x-4b^3c^2x=5a^6-3a^3b^3-4a^4b^2.$$

Ora, o 1.º membro póde ter a fórma de um producto, posto em evidencia o factor x, commum a todos os termos, deste modo

$$(a^4b-2a^2bc^2-4b^3c^2)\,x=5a^6-3a^3b^3-4a^4b^2;$$

e é claro, que dividindo ambos os membros desta pelo polynomio, multiplicador de x, se obterá o valor desta incognita, o qual será

$$x=\frac{5a^6-3a^3b^3-4a^4b^2}{a^4b-2a^2bc^2-4b^3c^2}$$

38. Regra geral para resolver uma equação do 1.º grão, numerica, ou litteral. 1.º *Expellem-se os denominadores, se os ha* (n.º 36). 2.º *Collocão-se no 1.º membro todos os termos em que entra a incognita, e no 2.º os termos conhecidos* (n.º 35). 3.º *Reduzem-se os termos semelhantes; e se a equação é litteral, põe-se em evidencia o factor* x, *commum aos termos do 1.º membro.* 4.º *Dividem-se ambos os membros pelo numero, ou pelo monomio, ou polynomio, que multiplica* x.

39. Passemos á 1.ª parte da *resolução dos problemas*, cujas regras, como fica dito, não tem a mesma invariabilidade que as da 2.ª parte, ou *resolução das equações*. Ás vezes, o enunciado do problema se traduz immediatamente em equação: outras, é necessario sagacidade para perceber nesse enunciado as condições susceptiveis de serem expressadas algebricamente. E ainda succede não serem as mesmas condições propostas, porém outras, dellas derivadas, as que formão a equação ou equações. Neste caso se dá o nome ás propostas, de *condições explicitas*, e as que dellas se deduzem *condições implicitas*.

Eis-aqui o unico preceito geral, apropriado para bem encaminhar o estudante nestas investigações: *Considerar o problema como resolvido, e effectuar com o auxilio dos signaes algebricos sobre as quantidades conhecidas, numeros ou letras, e sobre a incognita sempre representada por uma letra, as mesmas operações e raciocinios que serião necessarios se o valor da incognita já estivesse determinado, e se tratasse de verifica-lo.*

A pratica deste preceito não offerece uniformidade que permitta estabelecer-se regra mais precisa e definida : applicando-o porém com discernimento, sempre se obtem duas expressões algebricas da mesma quantidade ; e igualando essas duas expressões, forma-se a equação. Passemos a exemplos.

40. Primeiro Problema. *Achar um numero, tal que a metade delle, mais um terço, e mais um quarto, juntos a 45, produzão a somma 448.*

Represente x o numero pedido. Conhecido o seu valor, seria preciso, *para verifica-lo*, sommar o valor de $\frac{x}{2}$, o de $\frac{x}{3}$, o de $\frac{x}{4}$ com o numero 45, a vêr se a somma é 448: logo (n.° 39) a equação do problema é

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+45=448,$$

ou tirando 45 de ambos os membros

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=403.$$

Expellindo desta os denominadores, temos $6x+4x+3x=4836$, ou, reduzindo, $13x=4836$: donde

$$x=\frac{4836}{13}=372.$$

Com effeito, $\frac{372}{2}+\frac{372}{3}+\frac{372}{4}+45=186+124+93+45=448$.

41. Segundo Problema. *Ajustou-se um trabalhador, que vence por cada dia de trabalho* 1.280 *réis, com a condição de pagar por cada dia que não trabalhar* 560 *rs. pelo seu sustento. No fim de* 30 *dias, recebe unicamente* 1.600 *réis. Pergunta-se quantos dias trabalhou.*

Se conhecessemos este numero de dias, é claro que multiplicando-o por 1.280, e o restante dos 30 dias por 560; subtrahindo o 2.° producto do 1.° deveria ser o resto 1.600. Assim, applicando a regra (n.° 39), seja x o numero de dias de trabalho; será $x\times1280=1280x$ a quantia ganha pelo jornaleiro; $30-x$ os dias de ociosidade; e $(30-x)560=16800-560x$ a quantia a descontar-se.

Logo a eq. do prob. é $1280x—16800+560x=1600$, que se muda em . . $1840x=16800+1600=18400$:

Donde $x=\frac{18400}{1840}=10$, e $30—x=20$;

Isto é, que o jornaleiro só trabalhou 10 dias, dos 30 do ajuste.

Verificação. $1280 \times 10 — 560 \times 20=12800—11200=1600$.

42. Este problema se póde generalisar, representando por

n, o numero total dos dias até o ajuste de contas,
a, o salario ou ganho de cada dia de effectivo trabalho,
b, a perda ou despeza em cada dia de ociosidade,
c, a quantia que a final recebe o jornaleiro.

Seja ainda

x, o numero de dias de trabalho: será tambem
$n—x$, o numero de dias de ociosidade:

e a equação do problema será $ax—b(n—x)=c$, ou feita a multiplicação

$$ax—bn+bx=c.$$

Donde $ax+bx=c+bn$

ou $(a+b)x=c+bn$

e finalmente $=x\frac{c+bn}{a+b}$

Esta expressão ou *formula* resolve todos os problemas semelhantes ao proposto, isto é, cujas condições fôrem as mesmas, variando sómente os numeros. Semelhante formula geral se póde deduzir para qualquer outro problema ; e esta generalidade é das principaes vantagens que offerece o emprego dos symbolos algebricos.

43. Terceiro Problema. *Dividir um numero representado por* a, *em quatro partes que estejão entre si, como os numeros* m, n, p, q, *isto é, que seja* 1.ª : 2.ª : 3.ª : 4.ª :: m : n : p : q.

A primeira vista parece o problema encerrar quatro incognitas, a saber : as quatro partes do numero dado. Mas, bem entendidas as condições propostas, torna-se evidente que achada a 1.ª parte, será facil determinar cada uma das outras por estas proporções

$$1.^a : 2.^a :: m : n$$
$$1.^a : 3.^a :: m : p$$
$$1.^a : 4.^a :: m : q$$

Pelo que tratamos como incognita sómente a 1.ª parte, que se representa por x. É claro que as quatro partes sommadas devem reproduzir o numero a ; e segundo as proporções precedentes, sendo a 1.ª x, teremos

$$\left.\begin{array}{l} x:2.^a::m:n \\ x:3.^a::m:p \\ x:4.^a::m:q \end{array}\right\} \text{Logo a} \left\{\begin{array}{l} 2.^a=\dfrac{nx}{m} \\ 3.^a=\dfrac{px}{m} \\ 4.^a=\dfrac{qx}{m} \end{array}\right.$$

Será pois a equação do problema

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}+\frac{qx}{m}=a$$

ou expellindo os denominadores,

$$mx+nx+px+qx=am,$$

ou ainda $(m+n+p+q)x=am$; donde $x=\dfrac{ma}{m+n+p+q}$.

Obtida a 1.ª parte, é facil determinar as outras, cuja expressão algebrica será

2.ª$=\dfrac{nx}{m}=\dfrac{na}{m+n+p+q}$; 3.ª$=\dfrac{px}{m}=\dfrac{pa}{m+n+p+q}$; 4.ª $=\dfrac{qx}{m}=\dfrac{qa}{m+n+p+q}$.

Os valores numericos destas quatro expressões se achão facilmente *dividindo o numero dado* a *pela somma dos numeros* m, n, p, q, *e multiplicando successivamente o quociente por cada um dos mesmos numeros*. Regra, que coincide com a da Arithmetica (n.º 178): assim devia ser, porque o presente problema não é mais do que a Regra de Sociedade de que trata o numero citado.

Seja por exemplo o numero 351, para dividir em quatro partes proporcionaes a 3, 5, 7, 11: é o mesmo que suppôr $a=351$, $m=3$, $n=5$, $p=7$ e $q=11$. E substituindo estes numeros nas formulas deduzidas, ou seguindo a regra que dellas deriva, acha-se para o quociente mencionado

$$\frac{351}{26}=13,5.$$

E assim a 1.ª parte$=13,5\times3=40,5$; 2.ª$=13,5\times5=67,5$; 3.ª$=13,5\times7=94,5$; 4.ª$=13,5\times11=148,5$.

Verificação. $40,5+67,5+94,5+148,5=351$.

§ 2.º *Equações e Problemas do 1.º grão, a duas ou mais incognitas.*

44. Suppõe-se aqui o numero das equações igual ao das incognitas; e depois se verá que só neste caso o problema póde ser determinado, isto é, não admittir uma infinidade de soluções. Tratando de resolver qualquer systema de equações, comecemos por notar que o valor de cada incognita será facil de calcular, logo que se forme uma equação em que só entre essa incognita; e isto sempre se consegue por algum dos *methodos de eliminação*, de que passamos a tratar.

Sejão em primeiro lugar duas equações a duas incognitas

$$5x+7y=43$$
$$11x+9y=69.$$

Se x ou y tivesse em ambas o mesmo coefficiente, é visivel que essa incognita desappareceria pela subtracção das equações, membro a membro. Ora, multiplicando os dous membros da 1.ª por 9, coefficiente de y na 2.ª, e os membros da 2.ª por 7 coefficiente de y na 1.ª, o coefficiente de x, em ambas se tornará em 7×9 ou $9\times7=63$. Resulta

$$\begin{array}{l} 45x+63y=387 \\ \underline{77x+63y=483} \end{array}$$

e subt. a 1.ª da 2.ª $\quad 32x=96$, donde $x=\frac{96}{32}=3$.

Igualmente, multiplicando a 1.ª equação por 11, a 2.ª por 5, temos

$$\begin{array}{l} 55x+77y=473 \\ \underline{55x+45y=345}, \text{ e subtrahindo a 2.ª da 1.ª} \end{array}$$

$$32y=128\,;\ \text{logo } y=\frac{128}{32}=4.$$

São pois 3 e 4 os valores das incognitas nas equações dadas: o que se verifica, substituindo estes numeros a x e y, em cada uma dellas, que se tornaráõ em identidades.

É claro que se os termos em x, ou em y, não tivessem o mesmo signal em ambas as equações, seria preciso empregar em vez de subtracção, a addição para eliminar uma incognita, e determinar a outra.

N. B. Sendo este processo mui analogo á reducção das fracções ao mesmo denominador, seria facil introduzir simplificações no caso de terem os coefficientes algum factor commum: comtudo as mais das vezes é preferivel empregar a regra geral, e simplificar, se fòr possivel, a equação final; o que não embaraça, se fação em algum caso particular as abreviações que fòrem obvias.

45. Passemos a tres equações a tres incognitas, e sejão

$$5x-6y+4z=15$$
$$7x+4y-3z=19$$
$$2x+\ y+6z=46.$$

O processo precedente applicado á 1.ª e á 2.ª póde eliminar dellas z; e do mesmo modo entre a 1.ª e a 3.ª Resultaráõ duas equações, só contendo x e y; o que reduz a questão ao precedente caso: tratando-as pois, segundo o mesmo processo, determina-se x e y; e depois destas z. Eis o calculo mencionado:

$$1.^{a}\text{ e }2.^{a}\left\{\begin{array}{l}15x-18y+12z=45\\ 28x+16y-12z=76\\ \hline 43x-2y=121\end{array}\right.$$

$$1.^{a}\text{ e }3.^{a}\left\{\begin{array}{l}30x-36y+24z=\ 90\\ \ 8x+\ 4y+24z=184\\ \hline 22x-40y=-94\end{array}\right.$$

São pois as duas equações entre x e y

$$43x-\ 2y=121$$
$$11x-20y=-47$$

(Dividindo por 2 ambos os membros da 2.ª). Ora, tentando applicar a estas duas o processo, nota-se que basta multiplicar a 1.ª por 10, e do resultado subtrahir a 2.ª, o que dá $419x=1257$;

donde $$x=\frac{1257}{419}=3.$$

Poder-se-hia recomeçar o processo para eliminar x e z, e determinar y; e para, eliminando y e x, achar o valor de z. Porém ha methodo mais breve. O valor de x, substituido em uma das ultimas equações, dá

$$129-2y=121\text{; donde } 2y=129-121=8\text{; e } y=4.$$

E substituidos ambos os valores de x e y em uma das tres equações dadas, por exemplo na 3.ª, resulta

$$6+4+6z=46, \text{ ou } 6z=36, \text{ donde } z=6.$$

O systema de valores, $x=3$, $y=4$, $z=6$ satisfaz completamente as equações propostas, como se póde verificar pelas substituições.

46. Bem considerando os processos precedentes, applicaveis a qualquer systema de equações e outras tantas incognitas, somos conduzidos á seguinte:

Regra geral. *Combine-se uma das equações com cada uma das outras, eliminando sempre a mesma incognita: resultará um systema de menos uma equação e menos uma incognita do que o proposto. Pratique-se com este o mesmo que com o 1.° systema e continue-se do mesmo modo até chegar a uma equação e uma incognita. Achado o valor desta, determinão-se os das outras por substituições successivas, em ordem inversa á das eliminações*. De modo que a 1.ª incognita eliminada, é a que em ultimo lugar se determina.

A pratica melhor esclarecerá a regra precedente.

47. Tal é o methodo de *eliminação, por addição e subtracção*. São conhecidos outros methodos, entre os quaes dous principaes, *por substituição*, e *por comparação*.

O methodo *por substituição* consiste em *tirar de uma equação o valor de uma incognita*, como se as outras estivessem já determinadas, *e substitui-lo em cada uma das outras equações;* obtendo assim um systema de menos uma equação e menos uma incognita; o qual se trata do mesmo modo, continuando até chegar a uma só equação; obtido o valor da ultima incognita, achão-se os das outras por meio de substituições successivas em ordem inversa á das eliminações.

O methodo *por comparação* consiste em *tirar de cada equação o valor da mesma incognita; e igualando um destes valores a cada um dos outros formar o 2.° systema de equações que se tratão do mesmo modo*, &c.

O objecto de todos estes methodos é eliminar progressivamente as incognitas até chegar a uma equação unica. O 1.° delles tem sobre os outros a vantagem de concluir a eliminação, sem complicar as equações com denominadores; quando no 2.° e 3.° quasi sempre cada novo systema de equações contém termos fraccionarios, que é preciso fazer desapparecer.

48. Succede ás vezes que cada uma das equações propostas não contenha todas as incognitas: então com alguma sagacidade se obtem a eliminação com mais presteza. Sejão por exemplo:

$$2x-3y+2z=13$$
$$4u-2x=30$$
$$4y+2z=14$$
$$5y+3u=32.$$

Eliminando z entre a 1.ª e a 3.ª; e u entre a 2.ª e a 4.ª, apparecem logo duas equações contendo x e y, que facilmente se resolvem.

$$1.^a \text{ e } 3.^a \ldots\ldots 7y-2x=1:$$

$$2.^a \text{ e } 4.^a \begin{cases} 12u-\ 6x=\ 90 \\ 20y+12u=128 \end{cases} 20y+6x=38.$$

Examinando as duas ultimas equações, vê-se que para eliminar x basta multiplicar a 1.ª por 3, e somma-las: assim

$$\begin{array}{r} 21y-6x=\ 3 \\ 20y+6x=38 \\ \hline 41y=41 \end{array} \quad \text{logo } y=1;$$

valor que substituido na equação $7y-2x=1$, dá $7-2x=1$, donde $2x=6$, e $x=3$; e na equação $4y+2z=14$, dá $4+2z=14$, donde $2z=10$, e $z=5$.

Estas abreviações varião, segundo as circumstancias particulares de cada systema de equações, e segundo a destreza do calculador.

49. Dissemos (n.° 44) que para ser *determinado* um problema é necessario que sejão tantas as equações, quantas as incognitas. Actualmente é facil demonstrar que havendo maior numero de incognitas que de equações, o problema será *indeterminado*, isto é, terá infinidade de soluções.

Seja uma equação a duas incognitas $5x-3y=12$, da qual se deduz:

$$x=\frac{3y+12}{5}$$

É claro que x só ficará determinado quando se der a y um valor; e este valor é arbitrario, pois não ha condição que o determine. Suppondo, por exemplo:

$$y=1,\ 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\ 7,\ \&c.,$$

$$\text{será } x=3,\ 3\tfrac{3}{5},\ 4\tfrac{1}{5},\ 4\tfrac{4}{5},\ 5\tfrac{2}{5},\ 6,\ 6\tfrac{3}{5}\ \&c.:$$

qualquer destes systemas de valores correspondentes de x e y, igualmente satisfaz a equação. O problema pois tem infinitas soluções.

Em outro lugar se tratará do caso em que apparece menor numero de incognitas, do que de equações. Passamos agora á resolução de alguns problemas.

50. QUARTO PROBLEMA. *Pedem-se dous numeros, cuja somma seja* a, *e a differença* b.

Representando por x e y os dous numeros, e tendo em vista o preceito n.º 39, formão-se as duas equações $x+y=a$, e $x-y=b$; das quaes se deduz:

sommando-as $\qquad 2x=a+b$, donde $x=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$

e subtrah. a 2.ª da 1.ª, $2y=a-b \quad$ » $\quad y=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$.

Estes resultados significão que dada a somma de dous numeros e a sua differença, *o maior é igual a meia somma mais meia differença*: *e o menor igual a meia somma menos meia differença.*

A *verificação* dos valores achados consiste em substituil-os por x e y nas duas equações, que se tornão nas identidades

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=a;$$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=b.$$

51. QUINTO PROBLEMA. *Sabe-se que ajuntando 1 ao numerador de certa fracção, ficará esta* $=\frac{1}{3}$; *e que ajuntando 1 ao denominador, valerá* $\frac{1}{4}$: *pede-se o numerador e denominador da fracção.*

Seja esta $\frac{x}{y}$; será segundo as condições do problema

$$\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3}; \text{ e } \frac{x}{y+1}=\frac{1}{4},$$

ou expellindo os denominadores, $3x+3=y$, e $4x=y+1$.

Destas equações resulta $x=4$, $y=15$, sendo pois a fracção pedida $\frac{4}{15}$. Com effeito

$$\frac{4+1}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}, \text{ e } \frac{4}{15+1}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

52. SEXTO PROBLEMA. *Um negociante, misturando tres qualidades de vinhos, obtem os seguintes resultados:*

Com 3 medidas do 1.°, 5 do 2.°, e 7 do 3.°, fica sendo o custo da mistura 735 réis a medida.

Misturando duas medidas do 1.º com 4 do 2.º e 6 do 3.º, vale o mixto a 720. Com 4 *medidas do* 1.º, 9 *do* 2.º *e* 16 *do* 3.º, *forma terceira qualidade de custo de* 690 *a medida.*

Pede-se o preço de cada um dos vinhos que entrárão nas misturas.

Se fossem conhecidos estes preços, facil seria verificar cada uma das misturas: por exemplo, calculando a importancia de 3 medidas do 1.º preço, 5 do 2.º e 7 do 3.º, a somma dividida por 15 medidas daria o custo da 1.ª mistura 735. Assim tambem das outras. Sejão pois x, y, z os tres preços pedidos: indicando algebricamente a verificação precedente, será para a

1.ª mistura. . . . $\dfrac{3x+5y+7z}{15}=735$

2.ª » $\dfrac{2x+4y+6z}{12}=720$

3.ª » $\dfrac{4x+9y+16z}{29}=690$

ou, expellindo os denominadores $\begin{cases} 3x+5y+7z=11025 \\ 2x+4y+6z=8640 \\ 4x+9y+16z=20010 \end{cases}$

Estas são as equações do problema. Eliminando x entre a 1.ª e a 2.ª; e entre a 2.ª e a 3.ª resultão

$$y+2z=1935$$
$$y+4z=2730.$$

E diminuindo uma da outra $2z=795$; logo $z=397,5$.

Este valor, substituido na 2.ª das duas equações, entre y e z, produz

$$y=2730-4z=2730-1590=1140.$$

E por meio dos dous valores de y e z, e de qualquer das equações primitivas, se obtem $x=847,5$.

Forão pois comprados os vinhos, o 1.º a 847 réis e meio; o 2.º a 1140 e o 3.º a 397 réis e meio, cada medida.

A verificação é facil e obvia.

N. B. Todos os problemas, como é o precedente, em que se trata de misturas de liquidos, ligas de metaes, e questões semelhantes, são por alguns reunidos debaixo do titulo—Regra de Liga—de que em muitas Arithmeticas se encontrão preceitos e methodos. Estes forão omittidos no Compendio de Arithmetica adoptado para a Academia de Marinha; porque, em geral, ou as questões de ligas se resolvem por simplices multiplicações e divisões, ou se são mais complicadas, o recurso ás equações algebricas é preferivel a regras não demonstradas, como as que se encontrão na Arithmetica de Bézout.

53. Sirvão para exercicio os seguintes problemas, de que damos sómente o enunciado das condições e o resultado.

7.º Problema. *Um jornaleiro executa o trabalho* a *no tempo* b*: outro, o trabalho* c *no tempo* d*: um terceiro o trabalho* e *no tempo* f. *Pergunta-se em que* *tempo os tres jornaleiros, trabalhando juntos, concluirão uma obra, representada por g?*

$$Solução\ .\ .\ x=\frac{bdfg}{adf+bcf+bde}\ .$$

8.° PROBLEMA. *Supponda que em 32 libras d'agua do mar ha uma de sal, pergunta-se quantas libras d'agua doce devem ajuntar-se áquellas 32, para que em 32 libras da mistura só haja duas onças de sal?*

Solução. . . 224 libras.

9.° PROBLEMA. *A somma dos tres algarismos de um numero é 11: o das unidades é o dobro do das centenas: e sommando a esse numero 297, a somma se fórma dos mesmos algarismos em ordem inversa. Pede-se o numero que goza de taes propriedades.*

S. É o numero 326.

10.° PROBLEMA. *Alguem emprega um capital de 53:600$, parte a 5, e parte a 6 por cento, e recebe de juros 2:934$ em um anno. Pergunta-se que parte do capital rende a 5 °/。 e que parte a 6 °/。.*

S. 28:200$ *a* 5, *e* 25:400$ *a* 6 *por cento.*

11.° PROBLEMA. *Uma pessoa tem em gyro um capital que rende certo juro. Outra, que tem 10.000 francos mais do que a primeira e percebe mais 1 °/。, realisa annualmente 800 francos mais que a 1.ª E uma 3.ª pessoa, tendo 15.000 fr. mais que a 1.ª e vencendo de mais*

2 °/₀ *tem de renda mais* 1.500 *fr. Pedem-se os capitaes e juros respectivos.*

S. 1.ª 30.000 fr. a 4 °/₀; 2.ª 40.000 fr. a 5 °/₀; 3.ª 45.000 fr. a 6 °/₀.

§ 3.° SOLUÇÕES NEGATIVAS DOS PROBLEMAS. THEORIA DAS QUANTIDADES NEGATIVAS.

54. A resolução dos problemas, pelas regras d'Algebra, apresenta algumas vezes circumstancias singulares, que á primeira vista causão embaraço; mas, bem interpretadas, dão a conhecer novas propriedades que amplião e generalisão a *lingua algebrica*. A analyse de dous problemas mui simplices, em que apparecem as circumstancias a que nos referimos, tornará mais claras algumas reflexões e preceitos que ensinaráõ a interpretar circumstancias semelhantes.

Proponha-se esta questão: *Achar um numero, que sommado ao numero* b, *produza somma igual ao numero* a.

Chamando x o numero pedido, a equação será evidentemente $b+x=a$, donde $x=a-b$. Expressão, ou *formula*, que dará o valor de x, para cada caso particular da questão proposta.

Sendo $a=46$, $b=27$; $x=46-27=19$.
Se fôr $a=25$, $b=38$; $x=25-38$,

diminuição que não se póde effectuar.

Reflectindo porém que $38=25+13$, o valor ultimo de x póde tomar a fórma

$$x=25-25-13=-13.$$

Eis o resultado a que se chama *uma solução negativa*: procuremos interpretal-o.

A questão proposta é no caso presente: *Achar o numero que sommado a* 38 *produz* 25. É claro que nenhum numero póde satisfazer a tal condição: o problema, qual se propõe, é impossivel.

Entretanto, mudando na equação x em $-x$, será para este caso particular $38-x=25$, donde se deduz $x=13$.

Ora, a ultima equação representa evidentemente este problema: *Achar um numero que subtrahido de* 38 *dê o resto* 25, problema que só differe do proposto em que o numero pedido, de additivo que era, se tornou subtractivo.

E considerando que bastou mudar o signal ao valor de x, para tornar possivel a questão, conclue-se que *a solução negativa* $x=-13$ indica que o problema, como foi enunciado, é impossivel, mas que modificado convenientemente, tem por solução o mesmo numero absoluto que apparecêra affecto do signal —.

55. Seja a 2.ª questão: *Sendo actualmente* a *a idade de um pai, e* b *a de seu filho, pergunta-se daqui a quantos annos será a idade do filho a quarta parte da do pai.*

Solução. Seja x o numero de annos pedido; será no fim delles a idade do pai $a+x$, e a do filho $b+x$: será pois a equação

$$b+x=\frac{a+x}{4}\text{, ou } 4b+4x=a+x\text{, ou } 3x=a-4b\,;$$

donde $x=\frac{a-4b}{3}$

Se por exemplo for $a=54$, $b=9$, teremos $x=\frac{54-36}{3}=6$.

Com effeito, sendo actualmente as idades do filho e do pai 9, e 54 annos, daqui a 6, serão 15, e 60; e $15=\frac{60}{4}$.

Seja porém $a=45$ e $b=15$, será

$$x=\frac{45-60}{3}=15-20=-5.$$

Para interpretar este resultado, voltemos á equação do problema, que no presente caso particular é

$$15+x=\frac{45+x}{4}$$

É facil de ver que esta equação encerra contradicção, porque reduzindo o segundo membro á fórma $\frac{45}{4}+\frac{x}{4}$, é claro que ambas estas addições são menores do que as duas $15+x$; pelo que não podem as sommas ser iguaes. Portanto o resultado negativo $x=-5$ indica impossibilidade, como no primeiro caso.

Mudando porém x em $-x$, a equação se tornará em

$$15-x=\frac{45-x}{4}\text{, da qual se deduz } x=5.$$

Pois que nesta equação o intervallo de tempo x se subtrahe das duas idades, segue-se que ella exprime este problema: *Sendo actualmente 45 a idade de um pai, 15 a de seu filho, pergunta-se: ha quantos annos era a idade do filho a quarta parte da do pai.* Enunciado que só differe do primeiro em que o intervallo decorrido se subtrahe, em vez de sommar-se ás duas idades. Interpretação que coincide com a do resultado precedente.

Neste ultimo caso a impossibilidade do problema se verifica por outro meio.

Sendo actualmente a relação entre as idades $\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$, e crescendo, de quantidades iguaes os dous termos desta fracção, não póde ella tornar-se igual a $\frac{1}{4}$: porque ficou provado em outra parte, que ajuntando o mesmo numero ao numerador e denominador, a fracção cresce; e $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$.

56. A analogia conduz ao seguinte principio geral: 1.° *Em um problema do 1.° grão todo o valor negativo da incognita indica um vicio na expressão das condições, ou na equação que as representa.* 2.° *Esse valor, prescindindo do signal, é solução de um problema que só differe do proposto, em que certas quantidades de additivas que erão se tornárão subtractivas ou reciprocamente.*

Demonstração. Toda a solução negativa resulta sempre de que o problema e sua equação nos conduzirão a subtrahir um numero maior de outro menor, *operação inexequivel*. A questão pois, que della depende, tal qual foi proposta, não tem solução possivel.

Quanto á 2.ª parte do principio, já notamos em dous exemplos que a mudança de x em $-x$ torna a equação em outra, que representa uma questão possivel, e tendo por solução o mesmo numero absoluto, que apparecera com o signal —.

Esta observação póde ser generalisada. Seja a solução negativa $x=-p$: pois que esta expressão resultou da equação primitiva, por meio de transformações que não a alterão essencialmente, por outra, não é mais do que a sua expressão resumida; querendo mudar x em $-x$ na equação do problema, é bastante introduzir a hypothese na expressão resumida $x=-p$: ora feita a mudança, resulta $-x=-p$, donde $x=p$; solução de um problema possivel.

Se a mudança se effectuar na equação primitiva, será o resultado que os termos affectos da incognita se tornaráõ, os additivos em subtractivos, e os subtractivos em additivos. Logo a nova equação exprimirá problema só diverso do proposto em que algumas quantidades passão de additivas a subtractivas, ou viceversa. Eis o que se tratava de demonstrar.

Para enunciar o novo problema, o meio mais seguro é *mudar na equação* x *em* —x, *e traduzir a nova equação em linguagem ordinaria*.

57. *Observação*. O principio estabelecido no n.º precedente, é rigorosamente verdadeiro para as equações; mas, para que seja applicavel tambem aos problemas, necessario é que as suas condições tenhão sido completa e exactamente traduzidas para a linguagem algebrica. Em alguns problemas ha circumstancias, que as equações não exprimem (do que se verão exemplos, principalmente nas applicações a questões de Geometria) e então a regra (n.° 56) verdadeira quanto á equação, póde não ser applicavel á questão proposta. Ter-se-ha notado que os raciocinios empregados referem-se todos ás equações, e não á enunciação dos problemas.

58. A interpretação das soluções negativas dos problemas torna necessario considerar expressões negativas isoladas, e applicar-lhes as regras dos signaes estabelecidas para sommar, diminuir, multiplicar ou dividir os termos subtractivos dos polynomios. Porém semelhante *extensão* não parece susceptivel de uma demonstração *à priori*: ao menos aquelles que tentárão dá-la, não puderão fazê-lo com tal methodo e clareza, que satisfaça os espiritos reflectidos. As demonstrações de regras de signaes no capitulo 1.° todas considerão os termos subtractivos dos polynomios, como devendo effectivamente ser diminuidos da somma dos additivos: essas demonstrações nenhuma idéa clara offerecem ao espirito, quando se tenta applica-las a expressões totalmente negativas.

Assim, por exemplo, tendo-se provado que $(a-b)c=ac-bc$, póde notar-se que se fôr $a<b$, será tambem $ac<bc$; o que significa que a expressão negativa $a-b$ multiplicada pela quantidade positiva c, dá producto negativo $ac-bc$. Porém o raciocinio que nos conduzio á igualdade $(a-b)c=ac-bc$, suppõe

essencialmente que seja possivel a subtracção $a—b$, ou $a>b$, pois ninguem comprehende o que seja tirar 9 de 5, ou 4 de 0: assim, logo que occorre a hypothese $a<b$, o mesmo raciocinio deixa de ser rigoroso ou ao menos intelligivel.

A difficuldade provém de que no calculo das expressões negativas se procede, como se ellas representassem quantidades de uma especie particular distincta das positivas; proposição que alguns têem avançado, mas que ninguem conseguio demonstrar, e nem ainda tornar sufficientemente clara e comprehensivel, para poder ser incluida nos Elementos da Algebra.

Qual seja, em geral, a significação das expressões negativas, é questão que tem occupado os maiores genios que illustrárão a historia das Mathematicas. Comtudo, todas as theorias que pretendem dar-lhes existencia propria, e distincta das positivas parecem-nos origem de duvidas, contradicções e obscuridade. A noção mais clara e intelligivel, é a que deriva da propria origem destes symbolos, a saber:

Uma expressão negativa é a indicação de uma subtracção impossivel.

Ou *é uma formula algebrica, que exprime a differença de duas quantidades, das quaes a que se suppoz maior na deducção da formula, achou-se menor em certa hypothese particular*.

As soluções dos dous problemas (n.° 54 e 55) confirmão e acclarão esta definição.

Comtudo, *por abreviação*, tratão no calculo as expressões negativas como quantidades; e applicão-lhes *por convenção* as regras dos signaes, tornando extensivos aos monomios negativos os preceitos do calculo dos termos subtractivos dos polynomios. Esta *extensão convencional* dos processos demonstrados é confirmada *á posteriori* pela exactidão dos resultados a que conduzem as regras e principios algebricos.

Processos desta natureza são especiaes e caracteristicos da Algebra. Em Arithmetica e Geometria os raciocinios se referem a objectos reaes, cuja existencia sem difficuldade comprehendemos: em Algebra porém, muitas vezes se discorre, e se combinão expressões, que realmente não significão quantidade alguma; symbolos, representando operações inexequiveis.

Se estes symbolos, depois de praticadas as operações que exige a questão, conservão o seu caracter de inexequibilidade, prestão o serviço de indicar a existencia de alguma contradicção ou impossibilidade nas hypotheses em que se baseou o calculo. É esta, como vimos, a significação das soluções negativas dos problemas.

Se porém os mesmos symbolos se modificão no decurso dos calculos, de modo que venhão a exprimir relações ou combinações possiveis, a questão proposta se acha resolvida. Muitas vezes um problema, que depende de calculo de quantidades negativas, recebe a final uma solução directa positiva, que satisfaz completamente as condições propostas.

Em um dos capitulos seguintes se encontrará uma nova confirmação da observação precedente: veremos que as expressões $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-a}$ (que se chamão *imaginarias*) não representão quantidade alguma; e todavia estas formulas, incluindo symbolos de operações inexequiveis, sendo sujeitas aos processos ordinarios, algumas vezes se modificão e conduzem a resultados verdadeiros, que por outros meios podem verificar-se.

É consequencia da convenção—*tratar como quantidades as expressões negativas, e applicar-lhes as regras ordinarias da Algebra*—é consequencia que as palavras somma e differença em Algebra não tem a mesma accepção que na Arithmetica: em Algebra, nem a addição inclue necessariamente a idéa de augmento; nem a subtracção a idéa de diminuição.

A somma de $-b$ com a é $a-b$, menor que a. A differença entre as mesmas quantidades é $a+b$, maior que a.

O polynomio $2a^3-3a^2b+5ab^2-76^3$, é a *somma algebrica* dos monomios $2a^3$, $-3a^2b$, $5ab^2$, e $-7b^3$; entretanto que a sua accepção propria é a differença arithmetica entre a somma dos termos additivos, e a dos subtractivos.

59. A necessidade de praticar sobre as *expressões negativas* as mesmas operações que sobre as quantidades absolutas conduz o algebrista a proposições, que parecem absurdas e tem sido objecto de interminaveis controversias. Taes são estas:

1.ª *Toda a quantidade negativa é menor que zero.*

2.ª *De duas quantidades negativas é menor aquella cujo valor absoluto ou positivo é maior.*

Assim $-1<0$, $-2<-1$, $-3<-2$, &c. Os que pretendem demonstrar estas proposições, fundão-se no seguinte raciocinio: Pois que de 0 é preciso tirar 1 para chegar ao resto -1, segue-se que este resto é menor que zero. E tirando de 0, 2, 3, 4 &c., os restos -2, -3, -4, &c, devem ser successivamente menores; porque do mesmo subtrahendo 0, quanto mais se tira menos deve restar.

Por muito obscuro que seja este raciocinio, parece que não o podem regeitar os que considerão as expressões negativas como quantidades. Todavia, é forçoso confessar que tirar de zero, 1, 2, 3, &c., são palavras que não exprimem idéa clara, nem podem levar aos espiritos a convicção dos principios enunciados.

Admittimos pois aquellas expressões, não como relações entre quantidades existentes, mas simplesmente como symbolos algebricos, resultante da convenção — applicar, *por extensão*, as regras d'Algebra ás expressões negativas.

Dissemos, que esta extensão se confirma *á posteriori*, porque proseguindo os calculos, e modificados os symbolos, conduzem a resultados verdadeiros e exactos, aliunde verificaveis.

Ora admittindo $0>-a$ e tambem $-a>-(a+m)$; ajuntando a ambos os membros $a+m$, resulta $a+m>m$, $m>0$, proposições evidentes (a e m são aqui numeros absolutos).

Em resumo, aceitamos o calculo das expressões negativas, e bem assim os corollarios $-1<0$, $-2<-1$, &c., não como combinações e relações entre quantidades, mas simplesmente como convenções, cuja possibilidade e utilidade se verifica *á posteriori* e por meio das quaes a Algebra combina resumidamente os seus symbolos, para chegar ao resultado pelo caminho mais curto (*).

§ 4.° DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS E EQUAÇÕES DO 1.° GRÁO.

60. Resolvido um problema genericamente, isto é, representando os dados por letras, convem examinar a que se reduzem os valores das incognitas em cada hypothese particular que se possa formar ácerca dos dados: esta investigação é o que se acha a *discussão de um problema*, ou de sua equação ou equações. Para poder estabelecer os principios que regulão este exame ou discussão, comecemos por deduzir formulas geraes dos valores das incognitas para uma equação, ou para um systema de duas, tres, ou mais equações.

Em primeiro lugar toda a equação a uma incognita póde reduzir-se á fórma $ax=b$, exprimindo a a somma algebrica dos multiplicadores de x; e b a dos termos conhecidos, previamente transferidos para o segundo membro.

(*) A melindrosa *theoria das quantidades negativas*, até hoje, não foi esclarecida quanto convinha: a Algebra de Bourdon, de que são estes Elementos mera compilação, nessa parte não satisfez o nosso espirito. Estudando a doutrina com outros autores, escolhemos as noções que nos parecêrão mais claras e rasoaveis; e a fórma em que as redigimos, pareceu-nos a que torna mais plausiveis as regras do calculo das quantidades negativas. Uma primeira redacção dos n.os 58 e 59 talvez por não ter sido o nosso pensamento exposto com toda a clareza, desagradou a alguns illustres collegas, cujas observações obsequiosas muito auxiliárão a redacção, que apresentamos. Tivemos em vista não illudir difficuldades, mal vencidas por grandes capacidades; mas pareceu-nos que qualquer das theorias que tem pretendido resolver completamente a questão, só serviria para fazer nascer no espirito do alumno idéas erroneas, e crear-lhe embaraços, quando contrahido nas Aulas o habito do estudo, deseje aprofundar a metaphysica das quantidades negativas.

Desta equação se deduz

$$=\frac{b}{a}$$

formula geral do valor da incognita, unico que satisfaz a equação $ax=b$.

61. Sejão agora duas equações a duas incognitas: é claro que cada uma dellas se póde reduzir á fórma $ax+by=c$, expellindo os denominadores, e chamando a, b, c as sommas algebricas dos multiplicadores de x, dos de y, e dos termos conhecidos. Tomemos pois por equações geraes a duas incognitas

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x+b'y&=c' \end{aligned}$$

Applicando a estas qualquer dos methodos de eliminação (n.° 45 a 47) se concluem os seguintes valores das incognitas (*formulas geraes*)

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

62. Semelhantemente tres equações a tres incognitas, poderão sempre tomar a fórma

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=d \\ a'x+b'y+c'z&=d' \\ a''x+b''y+c''z&=d'' \end{aligned}$$

das quaes se podem deduzir formulas geraes dos valores das incognitas.

Seria facil, bem que longo, organisar formulas semelhantes para o caso de quatro ou mais incognitas.

63. A applicação destas formulas consiste em substituir nellas, em lugar de a, b, c, a', b', &c., os valores numericos que competem a cada caso particular. Por exemplo, o problema 10.° (n.° 53) posto em equação, e expellidos os denominadores, conduz ás duas equações

$$x+y=53600$$
$$5x+6y=293400 \ . \ . \ . \ (*)$$

e confrontadas estas com as duas equações geraes a duas incognitas, resulta $a=1, b=1, c=53600, a'=5, b'=6, c'=293400$, valores que substituidos nas formulas geraes de x e y, as tornão em

$$x=\frac{53600\times6-293400\times1}{6-5}=\frac{321600-293400}{1}=28.200$$

$$y=\frac{293400\times1-53600\times5}{6-5}=\frac{293400-268000}{1}=25.400$$

Quando alguma das letras tem valor negativo, cumpre attender ao signal na substituição, e nas operações arithmeticas.

Passamos á discussão das formulas geraes.

64. Sendo cada valor da incognita uma fracção, em que cada termo póde ser positivo negativo ou zero, facilmente se vê que nas applicações particu-

(*) Toma-se por unidade o *mil réis*, para simplificar os calculos.

lares as incognitas podem ter cinco especies de valores, a saber: 1.° *o valor* 0; 2.° *valores positivos*; 3.° *negativos*; 4.° *da fórma* $\frac{A}{0}$; 5.° *da fórma* $\frac{0}{0}$. Pretende-se estabelecer de modo geral a significação de cada um destes resultados.

1.° O valor 0 ordinariamente representa uma solução do problema, no sentido das condições com que foi enunciado.

Se v. gr. a incognita é a differença entre duas quantidades, aquelle resultado significa que ellas são iguaes; se a questão é de um movimento ou de um lapso de tempo, o valor 0 indica a origem do movimento, ou o 1.° instante do tempo: a interpretação em cada caso é simples, attendendo ás circumstancias particulares.

2.° Os *valores positivos* são tambem de ordinario soluções do problema, tal qual foi proposto. Exceptua-se o caso em que alguma condição essencial não tenha sido expressa na equação; pois neste caso os valores de x, que satisfazem á equação podem não satisfazer ao problema. Se, por exemplo, além das condições traduzidas algebricamente, se exige que sejão inteiros os numeros pedidos, qualquer valor fraccionario positivo, embora verifique a equação, não é solução do problema.

3.° A interpretação dos *valores negativos* das incognitas ficou estabelecida no n.° 56. E ainda que alí se tratou sómente de uma incognita, reflectindo nos raciocinios então feitos, se conhece que são applicaveis ao caso de duas ou mais incognitas: o principio pois é geral, e a elle voltaremos nas applicações.

65. 4.° Procuremos agora interpretar as expressões da fórma $\frac{A}{0}$.

Em primeiro lugar, seja a equação a uma incognita.

$$ax=b, \text{ donde } x=\frac{b}{a}.$$

Se de alguma hypothese particular ácerca dos dados resulta $a=0$, o valor de x será

$$x=\frac{b}{0}$$

Ora, neste caso, a equação se muda em $0\times x=b$, que nenhum numero determinado póde verificar. O problema pois é impossivel.

É porém de notar que podendo a equação ultima reduzir-se á fórma

$$0=\frac{b}{x}$$

se dermos a x valores crescentes indefinidamente, quanto maiores forem, mais a fracção $\frac{b}{x}$ se approximará de 0, e assim a equação será proximamente exacta. Podemos pois tomar para valor de x um numero tão grande que torne a fracção $\frac{b}{x}$ menor que qualquer fracção que se determine, por pequena que seja.

Por esta razão se diz que o *infinito* satisfaz neste caso á equação, ou que o valor de x é *infinito*. Tal a significação do valor $\frac{b}{0}$.

Este valor, em algum caso, constitue verdadeira solução, do que se verão exemplos nos problemas de Geometria: mas é certo que a equação não admitte para x valor algum determinado, ou *finito*.

Sejão agora as duas equações a duas incognitas $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}$ das quaes deduzimos $\Bigg\}$ $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$, $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$

Admittamos que seja $ab'-ba'=0$, não o sendo os dous numeradores, que por abreviação chamaremos A e B: teremos

$$x=\frac{A}{0},\ y=\frac{B}{0}$$

Para interpretar estes resultados (que, como vimos, só podem ter por valor o *infinito*) notemos que da hypothese $ab'-ba'=0$ se deduz $a'=\frac{ab'}{b}$, valor que substituido na segunda equação $a'x+b'y=c'$, a converte nesta

$$\frac{ab'}{b}x+b'y=c',\ \text{ou em}\ ax+by=\frac{bc'}{b'},$$

expellindo os denominadores, e dividindo por b'. Ora sendo o 1.º membro desta ultima equação, identico com o da 1.ª $ax+by=c$, deverão tambem ser iguaes os 2.os membros, isto é,

$$c=\frac{bc'}{b'}\ \text{ou}\ cb'=bc'$$

mas esta igualdade é impossivel, pois que o numerador do valor de x não é zero. Vê-se pois, que *as equações são incompativeis*, isto é, *não podem ser ambas satisfeitas por nenhum systema de valores finitos de* x e y. *N. B.* É de ver que não póde x tomar a fórma $\frac{A}{0}$, sem que y se reduza tambem a $\frac{B}{0}$.

Se fossem tres ou mais equações, provar-se-hia de modo analogo que *todo o valor de qualquer incognita, da fórma* $\frac{A}{0}$, *corresponde a uma impossibilidade de resolver o problema, ou ao menos de verificar a equação.*

66. 5.° Passamos aos valores que se tornão em $\frac{0}{0}$. Terá esta fórma o valor de x, no caso de uma equação a uma incognita, se fôr ao mesmo tempo $a=0$, e $b=0$. Porém na mesma hypothese a equação é $o\times x=0$: e todo o numero *finito*, positivo ou negativo, póde satisfazer a esta equação. *Assim o problema é indeterminado.*

67. Antes de passar a duas equações, notemos uma excepção que occorre frequentemente ao principio que se acaba de estabelecer. Algumas vezes o *symbolo* $\frac{0}{0}$ *indica apenas a existencia de um factor commum aos termos da fracção, factor que se torna em zero na hypothese particular: então a fracção simplificada póde ter valor determinado.* Nos exemplos melhor se comprehende esta observação.

Supponha-se que resolvendo um problema, chegamos ao resultado $x=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$, que no caso de ser $a=b$, se muda em $x=\frac{0}{0}$.

Notemos porém, que o numerador a^3-b^3 é o producto dos dous factores a^2+ab+b^2 e $a-b$; e o denominador $a^2-b^2=(a+b)\ (a-b)$: assim o valor de x se transforma em

$$x=\frac{(a^2+ab+b^2)\ (a-b)}{(a+b)\ (a-b)}:$$

o factor $a-b$ anniquila-se na hypothese $a=b$, e é isso o que reduz a expressão a $\frac{0}{0}$. Porém, supprimindo o factor commum, será

$$x=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

expressão que, sendo $a=b$, se reduz a

$$x=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3a}{2}$$

desapparecendo assim o symbolo de indeterminação.

Seja para segundo exemplo

$$x=\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}=\frac{(a+b)\ (a-b)}{(a-b)\ (a-b)}.$$

Suppondo $a=b$, apparece $x=\frac{0}{0}$ por causa do factor commum $a-b$; mas, supprimido este, e na mesma hypothese,

$$x=\frac{a+b}{a-b}=\frac{2a}{0}$$

valor *infinito*, ou symbolo de impossibilidade de satisfazer a equação.

Vê-se pois que *o symbolo* $\frac{0}{0}$ *algumas vezes desapparece, simplificando-se a fracção que tomou aquella fórma, antes de applicar-lhe a hypothese particular que reduzira a zero os dous termos.*

68. Sejão agora as duas equações a duas incognitas (n.° 61) e nellas supponha-se $cb'-bc'=0$, e $ab'-ba'=0$; será $x=\frac{0}{0}$.

Reflictamos porém que admittida a hypothese $ab'-ba'=0$, as duas equações se transformão nas seguintes como já vimos (n.° 65)

$$ax+by=c$$
$$ax+by=\frac{bc'}{b'};$$

e que da outra hypothese $bc'=cb'$ se deduz $c=\frac{bc'}{b'}$; pelo que as duas equações coincidem; e o *problema*, sendo de duas incognitas e uma só equação, é *indeterminado* (n.° 49).

Em geral, *quando o valor de uma incognita toma a fórma* $\frac{0}{0}$, a não dar-se o caso de um factor commum (n.° 67) *este valor é indeterminado; e tambem o é o problema, se alguma outra incognita não tomar a fórma* $\frac{A}{0}$, *ou se não apparecer outro symbolo de impossibilidade.*

É facil de vêr que no caso de duas equações sendo x indeterminado, ou da fórma $\frac{0}{0}$, o mesmo succede a y. Com effeito, combinando as duas hypotheses $cb'-bc'=0$, e $ab'-ba'=0$, deduzimos da 2.ª $b=\frac{ab'}{a'}$, e substituindo este valor na 1.ª,

$$cb'-\frac{ab'c'}{a'}=0, \text{ ou } a'cb'-ab'c'=0, \text{ ou } ca'-ac'=0.$$

Logo o valor de y tambem se reduz a $\frac{0}{0}$. Esta propriedade não pertence a maior numero de equações, e sómente ao caso de duas.

69. Na pratica muitas vezes apparecem signaes de indeterminação, ou de impossibilidade, apparentemente diversos dos mencionados. Se na resolução de equações particulares se faz uso das formulas geraes, apparece sempre algum dos symbolos analysados: resolvendo porém directamente as equações particulares, ás vezes os resultados parecem diversos. Por exemplo, succede que eliminando alguma incognita, appareça $0=0$, que exprime tambem indeterminação; ou $0=a$ (sendo a um numero *finito*) que exprime impossibilidade.

Porém $0=0$ realmente não differe de $0\times x=0$, donde $x=\frac{0}{0}$; $0=a$ equivale a $0\times x=a$, que dá $x=\frac{a}{0}$.

Já se provou (n.º 49) que todo o problema que conduz a menor numero de equações que de incognitas, é *indeterminado*. É tempo de examinar o caso de apparecerem mais equações do que incognitas.

Sejão, em geral, m equações a n incognitas, sendo

$m > n$. Applicando o processo da eliminação, póde fazer-se desapparecer todas as incognitas, e restarão $m-n$ equações ou igualdades entre os dados da questão. *Se estas igualdades (que se chamão equações de condição) se verificarem, o problema será possivel; e no caso contrario absurdo.*

Em resumo: 1.° Havendo menos equações do que incognitas, o problema é indeterminado.

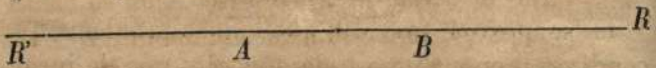
2.° Todo o problema possivel e determinado conduz a tantas equações quantas incognitas.

3.° Sendo maior o numero de equações que o das incognitas, o problema só é possivel se se verificarem as *equações de condição* que resultão de eliminar todas as incognitas.

N. B. Para que sejão verdadeiros os principios precedentes, devem as equações ser distinctas: se alguma resultar de outra ou outras, ou nellas estiver comprehendida, não póde essa entrar na conta das mencionadas na recopilação precedente. De tudo veremos exemplos na

DISCUSSÃO DE ALGUNS PROBLEMAS

70. Tomemos para exemplo o seguinte problema cuja discussão offerece as principaes circumstancias que analysamos.



12.° Problema. *Um correio parte de* A *e caminha na direcção* AR, *fazendo* m *legoas por hora: no mesmo instante outro parte de* B, *na mesma direcção, cami-*

nhando n *legoas por hora. Pergunta-se a que distancia dos pontos* A *e* B *terão de encontrar-se.*

Solução. Seja R o ponto de encontro; x e y as duas distancias AR e BR, em legoas; e a a distancia conhecida AB. Segue-se do enunciado da questão, que

$$x-y=a$$

e será esta a primeira equação do problema. Para formar a outra, notemos que os caminhos x e y devem ser feitos em tempos iguaes. Ora, se o 1.° correio anda m legoas n'uma hora, andará x legoas no tempo $\frac{x}{m}$; o que se conclue da proporção

$$m : 1 :: x : \frac{x}{m}$$

Do mesmo modo para o 2.° correio.

$n : 1 :: y : \frac{y}{n}$, tempo em que anda y legoas.

Será pois a segunda equação

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}, \text{ ou } nx-my=0.$$

Combinada esta com a primeira $x-y=a$, obtem-se

$$x=\frac{am}{m-n}, y=\frac{an}{m-n}.$$

Discussão. 1.° Seja, para primeira hypothese, $a=0$, (sendo m differente de n); della resulta $x=0$, $y=0$. Porém $a=0$ significa evidentemente que os correios partem do mesmo ponto; e então $x=y=0$ indica que o encontro é no ponto da partida, o que aliás é evidente.

2.° Não sendo $a=0$; emquanto fôr $m>n$, os valores de x e y são positivos e exprimem uma solução da questão. Com effeito, $m>n$ quer dizer que o correio que está mais atrazado anda mais; logo depois de certo tempo ha de alcançar o outro.

3.° Se fôr $m<n$, ou $m-n$ negativo os valores de x e y serão negativos e podem assim exprimir-se

$$x=-\frac{am}{n-m};\ y=-\frac{an}{n-m}$$

Estes valores negativos devem indicar uma modificação nas condições do problema para que seja possivel: para descobrir em que consiste esta modificação, notemos que segundo a hypothese $m<n$, o correio que está mais atrazado tem menor velocidade; e assim é impossivel que alcance o outro depois da partida. Porém a clausula de sómente se moverem desde A e B não foi expressada algebricamente, e sim a de partirem (ou passarem) no mesmo instante pelos dous pontos. Supponha-se pois que elles se movião anteriormente, por tempo indefinido, segundo a linha AB, e ambos da esquerda para a direita, achando-se o 1.° em A, quando o 2.° passou por B. Então os dous correios devem ter-se encontrado antes desse momento em um ponto R', depois do qual o de mais velocidade começou a adiantar-se. Ora, as distancias AR' e BR' são precisamente os valores negativos de x e y. Com effeito, para exprimir algebricamente a nova hypothese, basta mudar os signaes

de x e de y, e então as duas equações se mudão em

$\left.\begin{array}{l} y-x=a \\ my-nx=0 \end{array}\right\}$ e os valores das incognitas em $\left\{x=\frac{am}{n-m}, \text{ e } y=\frac{an}{n-m},\right.$

solução do problema, modificado suppondo o encontro antes, e não depois da estada simultanea dos dous correios em A e B.

É facil a verificação dos ultimos valores de x e y por meio das equações respectivas.

4.° Seja agora $m=n$, ou $m-n=0$; os valores das incognitas serão

$$x=\frac{am}{0} \quad y=\frac{an}{0}$$

symbolos do *infinito*, que revelão impossibilidade do problema, como ficou provado. Recorrendo ao enunciado, o mesmo se descobre, pois sendo $m=n$, os dous correios tem igual velocidade, e assim partindo de pontos diversos, na mesma direcção, conservão sempre entre si a mesma distancia, e pois *nunca se encontrão*.

O *infinito* se representa tambem pelo signal ∞ : pelo que uma quantidade menor do que qualquer grandeza dada, ou 0, póde tambem representar-se por $\frac{A}{\infty}$. Assim

$$\frac{A}{0}=\infty \; ; \; \frac{A}{\infty}=0.$$

5.° Se tivermos ao mesmo tempo $m-n=0$, e $a=0$, os valores das incognitas serão

$$x=\frac{0}{0}, \; y=\frac{0}{0}$$

que significão ser o problema interminado, ou ter uma infinidade de soluções. Com effeito $a=0$ significa que os correios partem do mesmo ponto; $m-n=0$ indica que as velocidades são iguaes: ora, nestas circumstancias, nunca se separão elles, e pois o encontro é em todos os instantes do movimento.

As equações do problema tambem mostrão a indeterminação: porque sendo $a=0$, e $m=n$, ellas se mudão em

$$\left.\begin{array}{r} x-\ \ y=0 \\ mx-my=0 \end{array}\right\}\text{ou}\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right.$$

Temos pois uma só equação a duas incognitas, que exprime um problema indeterminado.

71. 13.° Problema. *Tem-se duas especies de moedas; o numero a das primeiras faz uma dobla: e são precisas b das segundas para fazer a mesma quantia. Quer-se fazer pagamento de uma dobla em c moedas, dos dous valores: e pergunta-se quantas se darão de cada especie.*

As equações do problema são

$$x+y=c,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ ;\ \text{donde}$$

$$x=\frac{a(c-b)}{a-b},\ \text{e}\ y=\frac{b(a-c)}{a-b}.$$

Servirá de exercicio a discussão destas formulas: para encaminhal-a, apontaremos unicamente as hypotheses que conduzem a resultados notaveis.

1.ª hyp. $c=b$, ou $c=a$... uma incognita positiva, outra igual a zero; *pagamento em moedas de um só valor.*

2.ª hyp. $a>c>b$..... valores positivos; *resolvem o problema (se forem inteiros) tal qual foi proposto.*

3.ª hyp. $c>a>b$, ou $c<b<a$.... valores, um positivo, outro negativo: *pagamento em uma especie, e troco em outra.*

4.ª hyp. $a=b$, sendo c differente..... valores infinitos: *problema impossivel.*

5.ª hyp. $a=b=c$: *problema indeterminado.*

72. 14.º PROBLEMA. *Pedem-se dous numeros que estejão entre si como* m : n, *e taes que ajuntando* a *ao primeiro, e* b *ao segundo, o producto dos dous receba o augmento* p. As equações são

$$nx=my$$
$$bx+ay=p-ab;$$

$$\text{logo}\quad x=\frac{m(p-ab)}{na+mb}\ \text{e}\ y=\frac{n(p-ab)}{na+mb}.$$

A discussão destes resultados tem toda a analogia com os precedentes.

CAPITULO III.

PROBLEMAS INDETERMINADOS.

73. Dos principios e regras estabelecidas no capitulo precedente, e especialmente em o n.° 49 se conclue que todo o problema, representado por menor numero de equações, do que o das incognitas, é *indeterminado*. Isto significa, que as suas equações podem ser satisfeitas por uma infinidade de *systemas de valores* das incognitas.

Ás vezes porém exige a natureza da questão, que os numeros pedidos sejão inteiros; e então á incognita ou incognitas, cujo valor é arbitrario, sómente se podem attribuir valores inteiros, e ainda unicamente aquelles, que substituidos nas equações fizerem tambem inteiros os valores das outras incognitas. Esta condição restringe muito o numero das soluções; maxime, tratando sómente das soluções directas, isto é, em numeros positivos, caso em que podem até reduzir-se a uma só, ou mesmo a nenhuma; do que se verão exemplos.

Resolver em numeros inteiros os problemas indeterminados do 1.° *grão*, é o objecto do presente capitulo: e sómente incluimos nestes Elementos as questões em que se considera *mais uma incognita* do que o numero das equações.

§ 1.° QUESTÕES DE DUAS INCOGNITAS.

74. Toda a equação do 1.° gráo a duas incognitas póde reduzir-se á fórma $ax+by=c$ (n.° 61) sendo a, b, c numeros inteiros, positivos ou negativos.

Quando os coefficientes a, b *tem algum divisor commum, que não o seja de* c, *a equação não póde ser satisfeita em numeros inteiros*. Porque chamando h o divisor commum de a e b, e dividindo por elle a equação, temos

$$\frac{a}{h}x+\frac{b}{h}=y\frac{c}{h}:$$

ora, segundo a hypothese, o 1.° membro é a somma de dous numeros inteiros; logo só poderá verificar-se a equação, se fôr c divisivel por h.

E pois que o factor commum aos tres coefficientes póde ser supprimido, segue-se que sempre *podemos suppôr* a *e* b *primos entre si*.

Isto posto, passemos á resolução dos problemas indeterminados; e notemos que todos os systemas de valores das incognitas facilmente se determinão, uma vez obtidas expressões desta fórma

$$x=mp+n$$
$$y=m'p+n'$$

sendo m, m', n, n' numeros conhecidos e p qualquer n.°, todos inteiros. Porquanto, fazendo $p=0, 1, 2, 3,$ &c., cada um destes numeros substituido nas formulas dá para x e y valores, tambem inteiros.

Os valores geraes das incognitas da fórma mencionada, costumão denominar-se *funcções inteiras* de uma indeterminada: formão-se ellas em cada caso particular, por meio de um artificio analytico, que nos exemplos facilmente se percebe, mas que não é igualmente simples traduzir em regra geral.

75. 1.° Problema. *Pagar* 159 *francos*, *tendo sómente moedas de* 8 *e outras de* 13 *francos*.

Seja x o numero de moedas de 8 francos, y o de 13. Será a equação do problema

$$8x+13y=159,$$

equação que se trata de resolver em numeros *inteiros e positivos*. Della se deduz

$$x=\frac{159-13y}{8}=19-y+\frac{7-5y}{8} \text{ (esgotando a divisão).}$$

Ora, sendo y inteiro, para que o seja tambem x *é necessario e é bastante* que o valor de y seja tal, que torne em numero inteiro a fracção $\frac{7-5y}{8}$. Chamando a este numero inteiro, temos a equação

$$\frac{7-5y}{8}=a; \text{ ou } 7-5y=8a; \text{donde}$$

$$y=\frac{7-8a}{5}=1-a+\frac{2-3a}{5}.$$

O valor de x se muda $19-y+a$. Pelo que todo o valor inteiro de a, que fizer $2-3a$ divisivel por 5, dará para x e y valores inteiros; tudo pois se reduz á condição de que a fracção $\frac{2-3a}{5}$ se torne em numero inteiro: representando-o por b, será

$$\frac{2-3a}{5}=b;\ \text{ou}\ 2-3a=5b;\ \text{donde}$$

$$a=\frac{2-5b}{3}=-b+\frac{2-2b}{3}.$$

Esta ultima fracção deve ainda tornar-se inteiro: seja

$$\frac{2-2b}{3}=c,\ \text{será}\ 2-2b=3c,\ b=\frac{2-3c}{2}=1-c-\frac{c}{2}.$$

E suppondo finalmente $\frac{c}{2}=d$, resulta $c=2d$, de fórma inteira.

Substituindo este valor nos de b, a, y, x, obtemos

$$b=1-2d-d=1-3d$$
$$a=-1+3d+2d=-1+5d$$
$$y=1+1-5d+1-3d=3-8d$$
$$x=19-3+8d-1+5d=15+13d.$$

As ultimas expressões ou valores das incognitas representão o problema, do mesmo modo que a equação $8x+13y=159$. Com effeito, esta equação se reproduz, eliminando entre aquelles dous valores a quantidade d; o que serve de verificação.

Fazendo successivamente $d=0$, 1, 2, 3, 4, &c., ou $d=-1,-2,-3$, &c., teremos para x e y *uma infinidade de systemas de valores inteiros*, positivos ou negativos. Desejando porém sómente os positivos, o seu numero se torna mui limitado; porque o valor

$$y=3-8d$$

sómente é positivo, suppondo d negativo ou zero; pelo que ficão excluidas todas as hypotheses $d=1$, 2, 3, 4, &c. Demais, sendo $d=-2$, -3, -4, &c., em todos estes casos a formula

$$x=15+13d$$

se torna negativa, e unicamente $d=-1$ faz x positivo.

Existem pois duas unicas soluções directas da questão; a saber:

Sendo $d=0$; $x=15$, e $y=3$
» $d=-1$; $x=2$, e $y=11$.

O que significa que se podem pagar os 159 francos, ou com 15 moedas de 8 francos, e 3 de 13; ou com 2 das primeiras, e 11 das outras. Com effeito

$$8\times15+13\times3=120+39=159$$
e tambem $8\times2+13\times11=16+143=159$.

76. Um processo analogo ao precedente deve sempre conduzir a uma ultima expressão, em que o coefficiente de uma indeterminada seja *a unidade*: porquanto, analysada a operação, vemos que se dividio *o maior pelo menor dos coefficientes de x e* y (13 *por* 8); *o menor pelo resto da* 1.ª *divisão* (8 *por* 5) e assim por diante: o que equivale a procurar o maior divisor commum dos dous coefficientes; e como estes são primos entre si, apparecerá necessariamente afinal o resto 1. Sendo este o divisor na seguinte transformação desapparecem as fracções.

77. Se entre os dous coefficientes houver divisor commum que não se tenha advertido, o calculo mostrará a impossibilidade de verificar a equação em numeros inteiros. Por exemplo

$$49x-35y=11$$

(7 divide 49 e 35, e não divide 11). Deduz-se:

$$y=\frac{49x-11}{35}=x+\frac{14x-11}{35}.$$

Suppondo $\frac{14x-11}{35}=+a$ ou $14x-11=35a$,

resulta $x=\frac{35a+11}{14}=2a+\frac{7a+11}{14}$:

Seja tambem $\frac{7a+11}{14}=b$, ou $7a+11=14b$,

conclue-se $a=\frac{14b-11}{7}=2b-1-\frac{4}{7}$

equação evidentemente *impossivel em numeros inteiros*. Logo tambem o é a equação proposta.

78. Este processo admitte frequentemente simplificações que abrevião o resultado: simplificações que consistem em tornar o menor que fôr possivel o coefficiente de cada indeterminada nas transformações successivas: mostremos em um exemplo estas abreviações. Seja a equação

$$17x-49y=-8$$

della se deduz $x=\frac{49y-8}{17}=2y+\frac{15y-8}{17}$.

Verifica-se esta divisão parcial notando que $49=2\times17+15$: porém como tambem $49=3\times17-2$, podemos em lugar da expressão supra, admittir esta

$$x=\frac{49y-8}{17}=3y+\frac{-2y-8}{17}3=y-\frac{2(y+4)}{17},$$

mais vantajosa que a 1.ª por ter y menor coefficiente.

Demais, devendo a ultima fracção converter-se em inteiro, e sendo 2 primo com 17, deve ser $y+4$ divisivel por 17; pelo que

$$\frac{y+4}{17}=a,\ y+4=17a\ ;\ y=17a-4$$

Logo $x=51a-12-2a=49a-12$.

Neste exemplo, a não se empregarem abreviações serião necessarias mais duas transformações para chegar ao resultado precedente.

As formulas $x=49a-12$, $y=17a-4$ mostrão que todas as hypotheses $a=0,-1,-2,-3$, &c. tornão as incognitas negativas; porém estas $a=1$, 2, 3 &c. ao infinito as fazem positivas. Logo a questão tem infinitas soluções. Assim

Sendo $a=1$, $x=37$, $y=13$
» $a2$, $=x=86$, $y=30$
» $a=3$, $x=135$, $y4=7$

e assim por diante.

O methodo seguido, assim como as abreviações, sómente se explicão com clareza em exemplos particulares; porém dos casos tratados facilmente se collige o que em outros se deve praticar.

79. 2.° Problema. *Achar o numero, que dividido por 9 dê o resto 7, e dividido por 11 dê o resto 4.*

Chamando N o numero pedido, x e y os quocientes delle por 9 e por 11, deve ser

$$N=9x+7, \text{ e } N=11y+4.$$

Temos pois a equação

$$9x+7=11y+4, \text{ ou } 9x-11y=-3.$$

Applicando a esta as conhecidas transformações, temos

$$x=\frac{11y-3}{9}=y+\frac{2y-3}{9}$$

$$\frac{2y-3}{9}=a,\ 2y-3=9a,\ y=\frac{9a+3}{2}=4a+1+\frac{a+1}{2}$$

$$\frac{a+1}{2}=b,\ a=2b-1.$$

Logo $y=8b-4+1+b=9b-3$.

Seria facil obter o valor de x, por semelhante substituição: mas isso é inutil; pois x e y não são mais do que *incognitas auxiliares*, sendo N o numero pedido, ou a incognita da questão. Ora, substituido o valor de y na expressão $N=11y+4$, resulta

$$N=99b-33+4=99b-29,$$

que resolve a questão.

Vê-se desta formula que todos os valores negativos dados a b, e ainda a hypothese $b=0$ fazem N negativo, mas que todo o valor inteiro e positivo de

b, produz para N valor inteiro e positivo. Tem pois a questão infinitas soluções, a saber:

$$b=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ \&c.$$
$$N=70\ ,\ 169\ ,\ 268\ ,\ 367\ ,\ \&c.$$

Estes numeros formão progressão por differenças, e o mesmo acontece todas as vezes que a questão tem infinitas soluções.

80. Ter-se-ha notado nas equações e questões resolvidas, que o numero de soluções inteiras e positivas é ás vezes illimitado, e outras vezes mui circumscripto. Á simples inspecção dos signaes da equação $ax+by=c$ se póde determinar, se o numero de soluções é ou não limitado.

1.° *Se os dous termos* ax *e* by *tiverem o mesmo signal, o numero de valores positivos é necessariamente limitado.*

Com effeito, a equação neste caso, tem a fórma

$$ax+by=\pm c,\ \text{donde}\ x=\frac{\pm c-by}{a}:$$

ora, suppondo $-c$, será x essencialmente negativo; pelo que *o problema não tem solução alguma em numeros inteiros e positivos.*

E quando tivermos na formula $+c$, para ser x positivo, é preciso que seja

$$by<c,\ \text{ou}\ y<\frac{c}{b}$$

o que *limita* o numero de soluções.

2.° *O numero de soluções é illimitado, quando os termos* ax *e* by *tem signaes diversos na equação.*

Demonstração. Da equação $ax-by=\pm c$ se deduz

$$x=\frac{by\pm c}{a}.$$

Este valor, no caso de $+c$ é essencialmente positivo, para todo o valor positivo de y; logo existem infinitas soluções.

Se tivermos na formula $-c$, para fazer x positivo, é necessario que seja $by>c$, ou $y>\frac{c}{b}$. Mas esta condição não limita o numero de valores de y, porque acima do numero determinado $\frac{c}{b}$ se podem tomar infintios valores para y: o que fornece *infinitas soluções.*

§ 2.° Problemas indeterminados a tres, ou mais incognitas.

81. Se em lugar de uma equação a duas incognitas, conduzir a questão a duas equações a tres incognitas, eliminando uma dellas, ficaremos reduzidos ao caso precedente; e depois de achadas as formulas para as duas incognitas, será necessario substitui-las em alguma das equações, achar o valor da incognita eliminada, e se este tiver fórma fraccionaria sujeita-lo ás mesmas transformações que ficão expostas. Esta regra se tornará clara nos exemplos.

3.° Problema. *Tendo-se moedas de ouro do valor de* 20$, 16$ *e* 9$ *réis, quer-se prefazer a quantia de* 750$ *em* 47 *moedas dos tres valores.*

N. B. Tomando por unidade *um mil réis*, as quantias que figurão no problema ficão reduzidas a 20, 16, 9, 750, supprimidas em cada uma tres zeros. Esta simplificação occorre muitas vezes nos calculos da nossa moeda.

As equações do problema são

$$x+y+z=47$$
$$20x+16y+9z=750$$

A eliminação de z se obtem, multiplicando a 1.ª por 9, e subtrahindo o resultado da 2.ª: assim se fórma a equação

$$11x+7y=327, \text{ da qual } y=\frac{327-11x}{7}=46-x+\frac{5-4x}{7}:$$

Seja $\frac{5-4x}{7}=a$, teremos $x=\frac{5-7a}{4}=1-2a+\frac{1+a}{4}$

$$» \quad \frac{1+a}{4}b= \qquad » \qquad a=4b-1$$

e fazendo as substituições em x e y, e na 1.ª equação

$$x=1-8b+2+b=3-7b$$
$$y=46-3+7b+4b-1=42+11b$$
$$z=47-3+7b-42-11b=2-4b.$$

N. B. Por ter z na 1.ª equação o coefficiente 1, o seu valor se achou logo de fórma inteira: se assim não fosse, proseguiria a transformação do valor de z, e nos de x e y se substituiria por b o seu valor, expressso na ultima indeterminada.

Examinando os tres valores das incognitas, concluimos:

1.° Sendo b positivo, para que o sejão x e z é preciso que seja $7b<3$, e $4b<2$; ou $b<\frac{3}{7}$, $b<\frac{2}{4}$: logo, devendo b ser inteiro, não póde ter valor algum positivo.

2.° sendo $b=0$; $x=3$, $y=42$, $z=2$, 1.ª solução do problema.

3.° Se fôr b negativo, serão positivos x e z, porém y unicamente no caso de ser $11b<42$, ou $b<3\frac{9}{11}$. Isto é, que são sómente admissiveis as hypotheses $b=-1,-2,-3$. Mais tres soluções.

Resumindo: a questão proposta se resolve de quatro maneiras que se achão pelas formulas supra, a saber:

Suppondo $b=0$; $x\ 3=$, $y=42$, $z=2$
» $b=-1$; $x=10$, $y=31$, $z=6$
» $b=-2$; $x=17$, $y=20$, $z=10$
» $b=-3$; $x=24$, $y=9$, $z=14$

É facil verificar que qualquer destes systemas de numeros satisfaz ás equações, e á questão proposta.

82. O mesmo processo se applica ao caso de tres equações a quatro incognitas, ou ainda a maior numero dellas, suppondo sempre mais uma incognita do que equações. Por meio de eliminações, sempre se obtem a final uma equação a duas incognitas : e achadas as expressões destas duas, substituem-se nas equações e sujeita-se cada uma das outras incognitas a semelhantes transformações, até que todas sejão *funcções inteiras* de uma indeterminada.

4.° Problema. *Achar para* x *um valor inteiro que torne tambem numeros inteiros as expressões*

$$\frac{x-11}{29},\ \frac{x-17}{19},\ \frac{x-7}{15}.$$

A questão é verdadeiramente de tres equações a quatro incognitas, porque chamando y, z, v os quocientes indicados, teriamos

$$x-11=29y$$
$$x-17=19z$$
$$x-71=5v$$

Porém neste caso é mais commodo prescindir das equações, e operar as transformações sobre as proprias fracções propostas.

1.° Devendo $\frac{x-11}{29}$ ser numero inteiro, e chamando a este a, temos a equação

$$\frac{x-11}{29}=a, \text{ da qual } x=29a+11.$$

Qualquer que seja o valor inteiro dado a a, tornará x n.° inteiro, que satisfará a primeira condição.

2.° Pela segunda, deve ser numero inteiro a fracção

$$\frac{x-17}{19}=\frac{29a+11-17}{19}=\frac{29a-6}{19}=a+\frac{10a-6}{19}$$

Não tendo esta expressão a fórma inteira, cumpre ainda igualar a ultima fracção á outra indeterminada b: e proseguir em transformações semelhantes até chegar a exprimir as indeterminadas umas nas outras, sem denominadores. Assim se obtem

$$b=6-10c,$$
$$a=12-19c;$$

Conseguintemente $x=348-551c+11=359-551c$.

3.° Este 2.° valor de x verifica as duas 1.as condições: para examinar se satisfaz tambem a 3.a ou transforma-lo para esse fim, cumpre substitui-lo por x na ultima fracção, assim:

$$\frac{x-7}{15}=\frac{352-551c}{15}=23-36c+\frac{7-11c}{15}$$

e operando sobre a ultima fracção de modo analogo ao precedente, chegamos aos resultados

$$e=4f-3,$$
$$d=10-11f,$$
$$c=15f-13;$$

e portanto $x=359-8265f+7163=7522-8265f.$

Vê-se nesta formula, 1.° que sendo $f=0$, $x=7522$, 1.ª solução do problema; 2.° para todos os valores $f=1, 2, 3, 4$, &c., x é negativo; 3.° que suppondo $f=-1, -2, -3$, &c., teremos infinitas soluções. Como f deve ser negativo para x tornar-se positivo, é mais commodo mudar-lhe o signal na expressão de x, e serão todas as soluções da questão representadas directamente pela formula

$$x=7522+8265f$$

na qual se podem attribuir a f, indifferentemente os valores 0, 1, 2, 3, 4....... ao infinito.

Sirva para exercicio mais esta questão:

83. 5.° Problema. *Achar tres numeros taes, que a somma de seus productos respectivamente por* 3, 5, *e* 7, *seja igual a* 560; *e a somma dos productos por* 9, 25, *e* 49 *seja igual a* 2920.

As equações do problema são

$$3x+5y+7z=560$$
$$9x+25y+49z=2920,$$

das quaes se deduzem estas formulas:

$$x=35b-20\ ,\ y=124-42b\ ,\ z=15b:$$

conclue-se que o problema tem sómente duas soluções directas, a saber:

$$b=1\ ;\ x=15\ ,\ y=82\ ,\ z=15$$
$$b=2\ ;\ x=50\ ,\ y=40\ ,\ z=30.$$

CAPITULO IV.

RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS E EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRÁO.

84. Introducção. Quando as condições de um problema, traduzidas algebricamente, conduzem a uma *equação em que apparece a incognita multiplicada por si mesma*, como em $ax^2=b$; a equação se diz do segundo gráo, e por analogia tambem o problema. Neste caso os principios estabelecidos nos dous capitulos precedentes não são bastantes para se achar o valor da incognita. Porém, quando a equação tem a a fórma $ax^2=b$ podendo esta mudar-se em

$$x^2=\frac{b}{a},$$

a questão se reduz a *extrahir a raiz quadrada da quantidade representada por* $\frac{b}{a}$.

Se em lugar de b e a tivessemos na equação numeros particulares, a extracção da raiz seguiria as regras da Arithmetica: tratando-se porém de equações litteraes, convém antes de entrar na sua resolução estabelecer os preceitos relativos á extracção da raiz quadrada das quantidades algebricas ou litteraes.

§ 1.° FORMAÇÃO DO QUADRADO, E EXTRACÇÃO DA RAIZ DAS QUANTIDADES ALGEBRICAS. CALCULO DOS RADICAES DO SEGUNDO GRÁO.

85. Tratemos primeiro dos monomios; e analysemos a formação dos seus quadrados, para descobrir o processo da extracção da raiz.

Segundo as regras da multiplicação, para elevar um monomio ao quadrado, *quadra-se o coefficiente, e dobrão-se os expoentes de todas as letras*. Logo, para voltar do quadrado á raiz, será necessario, 1.° *extrahir a raiz quadrada do coefficiente; 2.° tomar metade de cada um dos expoentes*. Assim

$$\sqrt{64a^6b^4}=8a^3b^2,\text{ e com effeito}$$
$$(8a^3b^2)^2=8a^3b\times 8a^3b^2=64a^6b^4$$
$$\sqrt{625a^2b^4c^8}=25ab^2c^4,\text{ porque}$$
$$(25ab^2c^4)^2=625a^2b^4c^8.$$

Resulta desta regra que um monomio só póde ser o quadrado de outro, 1.° *sendo o coefficiente quadrado perfeito; 2.° sendo pares todos os expoentes*. Não sendo o monomio quadrado perfeito, como succede a $18a^3bc^2$, a raiz indica-se com o signal $\sqrt{}$, deste modo $\sqrt{18a^3bc^2}$; e as expressões desta especie chamão-se *monomios irracionaes* ou *radicaes do segundo gráo*.

86. Taes expressões porém admittem muitas vezes simplificações, fundadas neste principio: *A raiz de um producto de dous ou mais factores, é igual ao producto das raizes dos factores, isto é,*

$$\sqrt{a.b.c....}=\sqrt{a}.\sqrt{b}\ \sqrt{c}....$$

Demonstração. Segundo a definição de raiz quadrada, é claro que

$$(\sqrt{a.b.c....})^2=a.b.c....$$

mas tambem $(\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}....)^2=(\sqrt{a})^2.(\sqrt{b})^2.(\sqrt{c})^2....=a.b.c....$

Logo, sendo iguaes os quadrados de $\sqrt{a.b.c....}$ e de $\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}....$ estas quantidades tambem o são.

Isto posto, a expressão precedente $\sqrt{18a^3bc^2}$ póde transformar-se em $\sqrt{9a^2c^2\times 2ab}=\sqrt{9a^2c^2}\times\sqrt{2ab}$; e pois que $\sqrt{9a^2c^2}=3ac$, será

$$\sqrt{18a^3bc^2}=3ac.\sqrt{2ab}.$$

Em regra, para simplificar um monomio irracional, *extrahem-se as raizes de todos os factores quadrados perfeitos, e estas raizes se escrevem á esquerda do signal* $\sqrt{\ }$, *ao qual se submettem os factores não quadrados*. Assim

$$\sqrt{45a^2b^3c^2d}=\sqrt{9a^2b^2c^2\times 5bd}=3abc\sqrt{5bd}.$$
$$\sqrt{39a^3b^2}\ =\sqrt{a^2b^2\times 39a}=ab\sqrt{39a}.$$

As quantidades fóra do radical, como nos exemplos precedentes $3ac$, $3abc$, ab chamão-se *coefficientes do radical*.

87. Para completar a regra do n.° 74, cumpre attender ao signal que affecta o monomio que se eleva ao quadrado, ou de que se extrahe a raiz. Sendo o quadrado o producto do monomio por si mesmo, segue-se do n.° 15 que, *seja qual fôr o seu signal, o quadrado será positivo.* $(+5a^2b^3)^2$, ou $(-5a^2b^3)^2$ produz igualmente $+25a^4b^6$.

Do que se segue que, *sendo positivo um monomio, a sua raiz quadrada póde ter indifferentemente o signal + ou —.* Por exemplo $\sqrt{4a^2}=\pm 2a$, $\sqrt{25a^4b^6}=\pm 5a^2b^3$. O signal $\pm$ se lê *mais ou menos.*

Sendo negativo um monomio, a extracção de sua raiz é impossivel; pois que todo o quadrado é essencialmente positivo. Assim $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-4a^2}$ $\sqrt{-5}$ são symbolos algebricos que representão operações impossiveis. Costumão elles ser denominados *quantidades* ou *expressões imaginarias:* são signaes de *impossibilidade* ou de *absurdo*, que muitas vezes apparecem na resolução dos problemas do segundo grão.

Comtudo, por extensão, se usa applicar a estes symbolos as mesmas simplificações que ás expressões irracionaes. Assim, segundo o n.° 75,

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9\times -1}=3\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-4a^2}=\sqrt{4a^2\times -1}=2a.\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-8a^3b}=\sqrt{4a^2\times 2a\times -b}=2a.\sqrt{2a}.\sqrt{-b}.$$

88. Procuremos agora para qualquer polynomio, a lei da formação do seu quadrado, da qual se deduza o processo da extracção da raiz.

Vimos (n.° 18) que o quadrado de qualquer binomio, como $a+b$, tem a fórma $a^2+2ab+b^2$.

Tratando do trinomio $a+b+c$, acha-se pela multiplicação

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$

do que se infere que o *quadrado de um trinomio se compõe da somma dos quadrados dos tres termos, e do dobro de cada producto dos mesmos termos, multiplicados dous a dous*. Composição em tudo semelhante á do quadrado de um binomio.

Elevando ao quadrado polynomios de 4, 5, e mais termos, observa-se sempre a mesma *lei*, ou principio geral: *O quadrado de qualquer polynomio se forma dos quadrados de todos os termos, e dobro de cada um dos productos dos mesmos termos, multiplicados dous a dous.*

Exemplos:

$$(3a^2-2ab+4b^2)^2=9a^4-12a^3b+4a^2b^2-16ab^3+16b^4$$
$$+24a^2b^2=9a^4-12a^3b+28a^2b^2-16ab^3+16b^4.$$
$$(5a^2-4ab+6bc-3ac)^2=25a^4-40a^3b+16a^2b^2+60a^2bc$$
$$-30a^3c-48ab^2c+24a^2bc+36b^2c^2-36abc^2+9a^2c^2.$$

Passemos á extracção da raiz quadrada.

89. Designemos por N o polynomio cuja raiz se pede, e por R esta raiz: e conceda-se que os dous polynomios achão-se *ordenados* em relação a uma letra, v. gr. a.

Isto posto, examinando a formação do quadrado de R (n.° 77) facilmente se conhece que os dous primeiros termos desse quadrado não soffrem reducção com outros, pois contém a letra a com expoentes maiores do que todos os termos seguintes: estes dous primeiros termos são: quadrado do primeiro e dobro do primeiro pelo segundo. Logo, *se* N *é quadrado perfeito*: 1.° *o seu primeiro termo tambem o deve ser, e a raiz desse primeiro termo é o* 1.° *do polynomio pedido*: 2.° *O* 2.° *termo de* N *será divisivel pelo dobro* *do termo achado, e o quociente será o 2.° da raiz pedida.*

Para obter os termos seguintes, *formemos o quadrado do binomio achado, e diminua-se de* N. O resto que chamaremos N', contém ainda o dobro dos productos do 1.° e 2.° termos pelos seguintes, e as mais partes do quadrado. Porém o dobro do 1.° pelo 3.° contém expoente superior ao das seguintes partes de N', com as quaes não soffre reducção. Portanto, *dividindo o 1.° termo do resto pelo dobro do 1.° da raiz, se obterá o 3.°*

Semelhantemente, *elevando o trinomio ao quadrado, subtrahindo-o do polynomio proposto* N, *e dividindo o 1.° termo do resto pelo dobro do 1.° da raiz, se achará o 4.°* O processo continúa do mesmo modo.

N. B. É absolutamente indispensavel, depois de ter achado os dous termos da raiz, subtrahir do polynomio N o quadrado do binomio determinado: porque de ordinario o quadrado do 2.° termo de R tem o mesmo expoente de a, que o dobro do 1.° pelo 3.°; portanto, estas duas partes podem ter soffrido reducção. Assim é preciso subtrahir o quadrado do 2.° para poder affirmar-se que o 1.° termo do resto é o dobro do 1.° pelo 3.° da raiz. Semelhante observação se applica aos 3, 4, &c. primeiros termos da raiz.

Facil é actualmente organisar a regra para a extracção da raiz quadrada de um polynomio: basta para isso reunir as diversas phrases que no decurso deste numero se achão *em caracteres italicos*. Servirá de exercicio aos Alumnos o enunciado desta regra, bem como o desenvolvimento dos raciocinios, de que apenas apontámos os fundamentos.

Seja exemplo extrahir a raiz de $49a^2b^2-24ab+25a^4-30a^3b+16b^4$.

$$
\begin{array}{l|l}
25a^4-30a^3b+49a^2b^2-24ab^3+16b^4 & 5a^2-3ab+4b^2 \\
\underline{-25a^4+30a^3b-9a^2b^2} & \overline{10a^2} \\
1.^\circ\text{resto} + \quad 40a^2b^2-24ab^3+16b^4 & \\
\underline{-25a^4+30a^3b-9a^2b^2-40a^2b^2+24ab^3-16b^4} & \\
2.^\circ\text{ resto} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 0 &
\end{array}
$$

Ordenado o polynomio em relação a a, extrahe-se a raiz do 1.° termo que é $5a^2$, e divide-se o 2.° $-30a^3b$ por $10a^2$: serão os 1.os termos da raiz $5a^2-3ab$.

Eleva-se este binomio ao quadrado, subtrahe-se do polynomio proposto, e divide-se por $10a^2$ o 1.° termo do resto $+40a^2b^2$: o quociente $4b^2$ é o 3.° termo da raiz.

Eleva-se ao quadrado o trinomio $5a^2-3ab+4b^2$; subtrahe-se do polynomio proposto; e sendo 0 o resto, conclue-se que o trinomio achado é a raiz pedida, exacta.

A observação do n.° 86, applicada aos polynomios mostra que a raiz precedente tambem póde ser tomada com signaes contrarios: assim os trinomios $5a^2-3ab+4b^2$, e $-(5a^2-3ab+4b^2)$, ou $-5a^2+3ab-4b^2$ são indistinctamente raizes do polynomio proposto; como se póde verificar.

90. Terminamos com estas observações:

1.ª *Um monomio não póde ser quadrado de um polynomio.*

2.ª *Um binomio nunca póde ser quadrado perfeito.*

3.ª *Um trinomio só póde ser quadrado perfeito, sendo quadrados o* 1.º *e* 3.º *termos* (suppondo o trinomio ordenado) *e* demais *sendo o* 2.º *termo o dobro do producto das raizes do* 1.º *e* 3.º Resulta da formação do quadrado de um binomio.

4.ª Quando na extracção da raiz de um polynomio apparecer algum resto, cujo 1.º termo não seja divisivel pelo dobro do 1.º da raiz, póde concluir-se que o polynomio dado não é quadrado perfeito.

5.ª As simplificações do n.º 75 podem applicar-se ás raizes dos polynomios, não *quadrados perfeitos*. Sirva de exemplo a expressão $\sqrt{a^3b+4a^2b^2+4ab^3}$.

A quantidade affecta do signal $\sqrt{\ }$ não é quadrado; mas póde decompôr-se em dous factores ab $(a^2+4ab+4b^2)$, o segundo dos quaes é evidentemente o quadrado de $a+2b$. Será pois

$$\sqrt{a^3b+4a^2b^2+4ab^3}=\sqrt{ab(a^2+4ab+4b^2)}$$
$$=(a+2b)\sqrt{ab}.$$

E assim nos casos semelhantes.

CALCULO DOS RADICAES DO SEGUNDO GRÁO.

91. Da extracção da raiz quadrada das quantidades litteraes se origina uma nova especie de *expressões algebricas*, denominadas *quantidades irracionaes*, ou *radicaes do segundo gráo*: convem pois estabelecer as regras necessarias para effectuar sobre estas quantidades as quatro operações fundamentaes.

Definição. Dous radicaes do segundo gráo se dizem *semelhantes*, quando a quantidade submettida ao signal $\sqrt{\ }$ é a mesma em ambos os radicaes. Assim $3a\sqrt{b}$, e $5c\sqrt{b}$; $9\sqrt{2}$, e $7\sqrt{2}$ são *radicaes semelhantes*.

Addição e subtracção. Para sommar ou subtrahir radicaes semelhantes, *somma-se ou subtrahe-se os dous coefficientes, e a somma ou differença se escreve á esquerda do radical commum*. Assim

$$3a\sqrt{b}\pm 5c\sqrt{b}=(3a\pm 5c)\sqrt{b}$$
$$7\sqrt{2a}+3\sqrt{2a}=10\sqrt{2a};\ 7\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}=4\sqrt{2a}.$$

Dous radicaes não semelhantes algumas vezes vem a sê-lo, por virtude das simplificações do n.° 75. Por exemplo:

$$\sqrt{48ab^2}+b\sqrt{75a}=4b\sqrt{3a}+5b\sqrt{3a}=9b\sqrt{3a}$$
$$2\sqrt{45}-3\sqrt{5}=6\sqrt{5}-3\sqrt{5}=3\sqrt{5}.$$

Não sendo semelhantes os radicaes, não se faz mais do que indicar a addição ou subtracção.

92. *Multiplicação*. Para multiplicar dous radicaes, *multiplica-se as quantidades debaixo do signal* $\sqrt{\ }$ *e affecta-se o producto do mesmo signal*. $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, é consequencia do principio, n.° 75.

Havendo coefficientes, *multiplicão-se um pelo outro, e o producto é o coefficiente do resultado*. Exemplos:

$$3\sqrt{5ab}\times 4\sqrt{20a}=12\sqrt{100a^2b}=120a\sqrt{b}.$$
$$2a\sqrt{a^2+b^2}\times -3a\sqrt{a^2+b^2}=-6a^2\sqrt{(a^2+b^2)^2}$$
$$=-6a^2(a^2+b^2.)$$

N. B. Succede muitas vezes, como no ultimo exemplo, que o producto de duas expressões irracionaes, mesmo imaginarias, é uma quantidade racional.

93. *Divisão.* Para dividir um radical por outro, *dividem-se as quantidades affectas do signal* $\sqrt{\ }$ *e o quociente se affecta do mesmo signal.* Assim

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Com effeito os quadrados de ambas estas expressões são iguaes á mesma quantidade $\frac{a}{b}$: logo são ellas iguaes. Se ha coefficientes, o quociente de um dividido pelo outro será o coefficiente do resultado. Exemplos:

$$5a\sqrt{b} : 2b\sqrt{c}=\frac{5a}{2b}\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

$$12ac\sqrt{6bc} : 4c\sqrt{2b}=\frac{12ac}{4c}\sqrt{\frac{6bc}{2b}}=3a\sqrt{3c}.$$

94. Ha duas *transformações* que são de muito uso, já na avaliação numerica dos radicaes, já preparando-os para facilitar o seu calculo algebrico.

A *primeira transformação* consiste em fazer passar o coefficiente do radical para baixo do signal $\sqrt{\ }$. Seja a expressão $3a\sqrt{5b}$, que (por ser $3a=\sqrt{9a^2}$) se póde converter em

$$\sqrt{9a^2}\times\sqrt{5b}=\sqrt{45a^2b}.$$

Regra geral. Para fazer passar para dentro do radical um factor que se acha fóra, basta elevar esse factor ao quadrado.

Eis aqui uma applicação numerica desta transformação. Querendo avaliar em numeros inteiros $6\sqrt{13}$, mudamos esta expressão em

$$\sqrt{6^2\times 13}=\sqrt{468}=21$$

sem differença de uma unidade. Se se extrahisse em inteiros a raiz de 13, como indica a primeira expressão, a fracção desprezada, tendo de multiplicar-se por 6 poderia avultar a mais de 1.

95. *A segunda transformação* tem por fim tornar racionaes os denominadores de expressões da fórma

$$\frac{a}{p+\sqrt{q}} \text{ ou } \frac{a}{p-\sqrt{q}},$$

sendo a, p, q quaesquer numeros, e não sendo q *quadrado perfeito*. A resolução dos problemas conduz muitas vezes a taes expressões; e é facil de ver que sendo o denominador racional, mais simplesmente se ajuiza da grandeza representada pela fracção, ou do gráo de approximação obtida nas applicações numericas.

Effectua-se a transformação multiplicando ambos os termos da primeira fracção por $p-\sqrt{q}$, ou os da segunda por $p+\sqrt{q}$.

Em ambos os casos, apparece no denominador o producto da somma pela differença das duas quantidades p e $\sqrt{q}$: e como este producto é a differença dos quadrados das mesmas quantidades, será o denominador p^2-q, expressão racional.

$$\frac{a}{p+\sqrt{q}}=\frac{a(p-\sqrt{q})}{(p+\sqrt{q})(p-\sqrt{q})}=\frac{ap-a\sqrt{q}}{p^2-q}$$

$$\frac{a}{p-\sqrt{q}}=\frac{a(p+\sqrt{q})}{(p-\sqrt{q})(p+\sqrt{q})}=\frac{ap+a\sqrt{q}}{p^2-q}$$

Podem reunir-se as duas expressões em uma formula, desta sorte

$$\frac{p\pm\sqrt{q}}{a}=\frac{a(p\mp\sqrt{q})}{(p\pm\sqrt{q})(p\mp\sqrt{q})}=\frac{ap\mp a\sqrt{q}}{p^2-q}$$

Para bem julgar da utilidade desta transformação, appliquemo-la a dous exemplos numericos:

$$1.^{\circ}\ \frac{7}{3-\sqrt{5}}=\frac{7(3+\sqrt{5})}{9-5}=\frac{21+7\sqrt{5}}{4}=\frac{21+\sqrt{245}}{4}$$

$$2.^{\circ}\ \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{5}(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{11-3}=\frac{7\sqrt{55}-7\sqrt{15}}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{2695}-\sqrt{735}}{8}$$

Resta sómente extrahir as raizes dos tres numeros 245, 2695, e 735; limitando-nos á parte inteira dessas raizes, teremos a 1.ª fracção approximada até o valor $\frac{1}{4}$, e a 2.ª até $\frac{1}{8}$: facil é porém obter maior approximação.

§ 2.° EQUAÇÕES E PROBLEMAS DO SEGUNDO GRÁO A UMA INCOGNITA.

96. As equações do segundo gráo se classificão em duas especies: *equações a dous termos, ou incompletas, e equações completas, ou de tres termos.*

As primeiras sómente contém termos conhecidos, e termos affectos do quadrado da incognita. Chamão-se *a dous termos* porque mediante as transformações n.[s] 35 e 36, é sempre possivel reduzi-las á forma $ax^2=b$. Por exemplo a equação

$$\frac{7}{11}+\frac{1}{5}x^2=\frac{2}{23}x^2+\frac{8}{7}$$

se converte, expellidos os denominadores, em

$$5635+1771x^2=770x^2+10120$$

ou transpondo e reduzindo, $1001x^2=4485$.

Se a equação fôr litteral, como esta

$$a-bx^2+c=ex^2+d-fx^2$$

tambem se reduzirá a dous termos, dando-lhe a fórma

$$(f-b-e)x^2=d-a-c.$$

97. *A equação a dous termos* $ax^2=b$ resolve-se facilmente: della se deduz

$$x^2=\frac{b}{a}, \text{ donde } x=\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Quando $\frac{b}{a}$ fôr quantidade negativa, o valor de x será *imaginario* (n.° 76): o que significa que *o problema é impossivel,* ou que não ha numero inteiro ou fraccionario, exacto ou approximado, que satisfaça a equação.

Mas, se $\frac{b}{a}$ fôr numero positivo, a sua raiz póde ter o signal $+$ ou $-$ (n.° 76); e serão os valores da incognita

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Applicando este processo ás duas equações do n.° precedente, temos

$x=\pm\sqrt{\frac{4485}{1001}}=\pm\sqrt{4,48}=\pm 2,12$ sem differença de 0,005;

e $$x=\pm\sqrt{\frac{d-a-c}{f-b-e}}.$$

Pela substituição se verifica que qualquer destes valores satisfaz á respectiva equação.

98. *Equação completa do segundo grão.* Toda a equação desta natureza, contendo termos conhecidos, termos affectos da incognita, e outros do seu quadrado, póde mediante as transformações (n.° 35 e 36) reduzir-se á fórma $ax^2+bx=c$, e dividindo todos os termos pelo coefficiente de x^2, e suppondo por abreviação

$$\frac{b}{a}=p\ ,\ \frac{c}{a}=q$$

tomará a equação a fórma $x^2+px=q$, que se trata de resolver.

N. B. Reduzir uma equação do segundo gráo a esta fórma é o que se chama *prepara-la*.

Observemos que, se fôr possivel converter o primeiro membro no quadrado de um binomio, uma simples extracção de raiz quadrada reduzirá a equação a outra do primeiro gráo.

Ora, comparando o 1.º membro x^2+px, com o quadrado do binomio $x+a$, ou com $x^2+2ax+a^2$, vê-se que além do 1.º termo commum, basta suppôr $a=\frac{p}{2}$, para que seja $2ax=px$: e assim para que x^2+px se torne no quadrado de $x+a$, ou de $x+\frac{2}{p}$ só falta ajuntar-lhe o termo a^2 ou $\frac{p^2}{4}$; e sendo preciso para não alterar a equação, ajuntar a mesma quantidade ao 2.º membro, teremos

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=q+\frac{p^2}{4} \text{ ou } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=q+\frac{p^2}{4}.$$

Logo, extrahindo a raiz,

$$q+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(x+\frac{p^2}{4}\right)}; \text{ donde } x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}.\right)}$$

Assim, em toda a equação do 2.º gráo a incognita tem dous valores, e ambos se achão representados na *formula* precedente.

Esta *formula* se póde traduzir na seguinte

REGRA GERAL. *Preparada a equação, iguala-se a incognita á metade do seu coefficiente tomado com signal contrario, mais ou menos a raiz quadrada do termo conhecido sommado com o quadrado da metade do coefficiente da incognita.*

99. Exemplo :

Seja a equação $\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=8-\frac{2}{3}x-x^2+\frac{273}{12}$

que se reduz, expellidos os denominadores, a

$$10x^2-6x+9=96-8x-12x^2+273$$

ou $22x^2+2x=360$, e dividindo por 22

$$x^2+\frac{1}{11}x=\frac{360}{22}, \text{ donde } x=-\frac{1}{22}\pm\sqrt{\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2}$$

Para effectuar os calculos numericos, convém começar por converter a quantidade affecta do signal $\sqrt{\ }$ em uma só fracção, cujo denominador seja quadrado perfeito: ora

$$\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2=\frac{360\times 22+1}{(22)^2}=\frac{7921}{(22)^2};$$

logo $$\sqrt{\frac{360}{22}+\left(\frac{1}{22}\right)^2}=\sqrt{\frac{7921}{(22)^2}}=\frac{89}{22}.$$

Serão pois os valores de x

$$x=-\frac{1}{22}\pm\frac{89}{22}=\frac{-1\pm 89}{22},$$

ou separando-os

$$x=\frac{-1+89}{23}=\frac{88}{22}=4,\text{ e } x=\frac{-1-89}{22}=\frac{-90}{22}=-\frac{45}{11}.$$

Seja agora a equação litteral

$$4a^2-2x^2+2ax=18ab-18b^2$$

que se transforma nesta

$$x^2-ax=2a^2-9ab+9b^2:$$

applicando-lhe a regra, serão os valores da incognita

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+2a^2-9ab+9b^2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{9a^2}{4}-9ab+9b^2}$$
$$=\frac{a}{2}\pm\left(\frac{3a}{2}-3b\right)$$

ou, separando-os e fazendo as reducções,

$$x=\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}-3b=2a-3b\,;\ x=\frac{a}{2}-\frac{3a}{2}+3b=3b-a.$$

100. Appliquemos estes principios e regras á resolução de alguns problemas.

1.° Problema. *Achar um numero, cujo triplo junto ao dobro do seu quadrado, conforme a somma* 65.

Chamando x o numero pedido, será a equação do problema

$$2x^2+3x=65$$

$$\text{ou } x^2+\frac{3}{2}x=\frac{65}{2};\text{ donde}$$

$$x=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{65}{2}}=-\frac{3}{4}\pm\frac{23}{4}.$$

Separando estes valores, e effectuando os calculos temos $x=5$, e $x=-\frac{13}{2}$. O primeiro valor 5 satisfaz á questão, como foi proposta, porque

$$2(5)^2+3\times5=50+15=65.$$

Para interpretar o valor negativo, notaremos que mudando na equação x em $-x$, a nova equação $2x^2-3x=65$ exprime evidentemente outra questão em que se proponha *achar um numero, cujo triplo diminuido* (em vez de sommado) *do dobro do seu quadrado deixe o resto* 65. Esta nova questão é resolvida pelo valor $\frac{13}{2}$; e com effeito, resolvendo a equação $2x^2-3x=65$, apparecem os mesmos valores precedentes, mas de signaes contrarios, isto é

$$x=-5, \text{ e } x=\frac{13}{2}:$$

é facil de verificar que este ultimo numero satisfaz ao problema tal qual foi ultimamente enunciado.

101. 2.º Problema. *Alguem comprou duas peças do mesmo panno, cada uma por* 53000 *réis: uma porém tem* 7 *covados menos que a outra, e custou por isso cada covado mais* 100 *réis. Pergunta-se qual o numero de covados da peça maior?*

Conhecido este numero, tirando-lhe 7, resta o numero de covados da menor; e dividindo por cada um o custo 53000, obtem-se os dous preços, cuja differença deve ser 100 réis. Logo, chamando x o numero pedido,

$$\frac{53000}{x-7}-\frac{53000}{x}=100.$$

Preparando esta equação e resolvendo-a se acha $x=64,5$, e $x=-57,5$. O primeiro valor satisfaz ao problema, como se póde verificar: quanto ao segundo $-57,5$, mudando na equação x em $-x$, resulta

$$\frac{53000}{-x-7}-\frac{53000}{-x}=100, \text{ ou } \frac{53000}{x}-\frac{53000}{x+7}=100,$$

da qual se deduz $x=57,5$ e $x=-64,5$. Ora, esta ultima equação (e portanto o valor 57,5) resolve este problema: *Custando duas peças de panno a mesma quantia* 53000, *mas tendo uma* 7 *covados mais que a outra, custou cada covado menos* 100 *réis. Pede-se o numero de covados da peça menor.*

N. B. Vê-se que nos dous problemas precedentes os resultados negativos têm a mesma significação que nas equações do 1.° gráo; porém o ultimo offerece uma observação especial; e vem a ser, que os dous enunciados não differem senão em chamar x o comprimento da peça maior ou da menor. E os dous valores dados por uma só equação, prescindindo dos signaes, exprimem os tamanhos das duas peças 64,5; 57,5, cuja differença é 7 covados.

102. 3.° Problema. Um mercador, vendendo um cavallo por 24 *doblas, perdeo tantos por cento do preço* *da compra quantas doblas tinha custado o animal. Pede-se o preço da compra.*

Equação $\frac{x^2}{100}=x-24.$ ou $x^2-100x=-2400.$

Valores da incognita $x=60$ e $x=40$.

Ambos estes valores satisfazem ao problema que tem duas soluções. Com effeito, sendo a compra por 60 doblas a perda, a perda ou 60 por cento de 60 doblas é 36; e o preço da venda 24.

Sendo 40 doblas, os 40 por cento desta quantia importão em 16 doblas, perda que deduzida de 40 dá 24 para preço da venda.

§ 3.° DISCUSSÃO GERAL DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRÁO.

103. Quando as quantidades conhecidas, nos problemas do segundo gráo, em vez de serem numeros particulares, como até aqui, forem representadas por letras ou symbolos genericos, os resultados obtidos representaráõ, como nos do primeiro gráo, *formulas geraes*, proprias a resolver todos os problemas semelhantes, uma vez dados em numeros os valores das letras. Interpretar estes resultados, segundo as diversas circumstancias em que se acharem os dados, é o objecto da *discussão dos problemas do segundo gráo*.

Os preceitos geraes desta discussão resultão da analyse da equação geral do segundo gráo, e do respectivo valor de x, a saber:

$$x^2+px=q\,;\; x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}.$$

Notemos, em primeiro lugar, que estes valores de x só serão *reaes*, isto é, só podem ser avaliados exactamente ou por approximação, quando a quantidade submettida ao radical fôr positiva.

Ora, qualquer que seja o signal de p, é sempre positivo o termo $\frac{p^2}{4}$; e portanto o signal da quantidade $q+\frac{p^2}{4}$ depende principalmente do signal de q, ou do termo conhecido da equação.

104. 1.° *Sejão pois* q *e* p *ambos positivos;* e separemos os dous valores de x

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}} \quad x=-\frac{p}{2}-\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}.$$

Estes dous valores são ambos reaes, e se podem avaliar exacta ou approximadamente, segundo a quantidade debaixo do radical fôr ou não fôr *quadrado perfeito*.

O 1.° valor é *essencialmente positivo*, por ser $\sqrt{q+\frac{q^2}{4}}>\frac{p}{2}$, como é facil de vêr. Este valor satisfaz á equação e ao problema que ella representa.

O segundo valor, *evidentemente negativo*, satisfaz não a mesma equação proposta, mas depois de mudar-lhe x em $-x$. Com effeito, praticada esta mudança e resolvida a equação apparecem os mesmos valores precedentes, mas de signaes contrarios.

105. 2.º *Seja ainda* q *positivo, mas* p *negativo.* A equação tomará a fórma

$$x^2-px=q\text{; donde } x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}:$$

prova-se do mesmo modo, que ainda estes dous valores são, o 1.º positivo e o 2.º negativo: pelo que tem as mesmas significações que os precedentes.

106. 3.º *Seja agora* q *negativo e* p *positivo.* A equação será da fórma

$$x^2+px=-q,\text{ donde } x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

A raiz indicada só póde extrahir-se, sendo $q<\frac{p^2}{4}$: mas satisfeita esta condição os dous valores são reaes. E demais, sendo numericamente

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}<\frac{p}{2},$$

os dous valores de x são *ambos negativos.*

107. 4.º *Sejão finalmente* q *e* p *ambos negativos.* Teremos a equação $x^2-px=-q$, e os dous valores

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\text{ e } x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

ambos positivos.

N. B. Este ultimo caso merece particular attenção.

A equação respectiva mudando-lhe os signaes, se torna

$$px - x^2 = q\,,\ \text{ou}\ x(p-x) = q$$

e é a traducção algebrica deste problema: *Dividir o numero* p *em duas partes, cujo producto seja igual ao numero* q.

Porque, chamando x uma das partes, a outra será $p-x$, e o seu producto $x(p-x)$, que se deve igualar a q.

E note-se que a equação é a mesma, ou seja x a maior ou a menor parte: pelo que a mesma equação deve dar o valor de ambas; e tal é a razão da existencia das duas soluções directas ou positivas.

108. Recopilando: *se a quantidade* q *é positiva, qualquer que seja o signal de* p, *os dous valores de* x *são reaes, e de signaes contrarios.*

Se q *é negativo e* p *positivo, os dous valores são ambos negativos.*

Sendo q *e* p *negativos, são os valores ambos positivos.*

E finalmente, nos dous ultimos casos, serão os valores de x *imaginarios, se fôr*

$$q > \frac{p^2}{4},$$

caso em que o problema é impossivel.

109. Além das hypotheses até agora feitas, a respeito dos signaes de p e de q, podem occorrer circumstancias particulares, dependentes das grandezas representadas por essas duas letras: e ainda que em cada problema especial melhor se apreciāo os resultados notaveis, todavia podem elles indicar-se geralmente com referencia ás formulas estabelecidas; eis-aqui os principaes:

No 3.° e 4.° casos (106 e 107) representados pela equação $x^2+px=-q$ (sendo p positivo ou negativo) se acontecer que seja $q=\frac{p^2}{4}$, o termo $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, que entra em ambos os valores de x, é igual a zero, logo os dous valores se tornaráō ambos em $x=-\frac{p}{2}$, valores iguaes.

Se fôr $q=0$, os valores de x serão

$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2};\ \text{ou}\ x=0,\ \text{e}\ x=-p.$$

Sendo ao mesmo tempo $q=0$, e $p=0$, teremos $x=0$, $x=0$.

Qualquer destes tres resultados se verificāo introduzindo a hypothese respectiva na equação geral $x^2+px=q$, e resolvendo-a de novo.

Passemos á discussão de um problema

C'' A C B C'

110. 4.° Problema. *Achar na linha em que se achão duas luzes differentes* A *e* B *o ponto que ambas allumião com igual intensidade.*

Suppõe-se conhecido este principio de physica: *as intensidades de uma luz a distancias diversas são na razão inversa dos quadrados dessas distancias.*

Solução. Seja a a distancia AB entre as duas luzes; b e c as intensidades destas duas luzes, na distancia 1. Seja C o ponto pedido, e $AC=x$; donde $BC=a-x$. Procuremos a equação do problema.

Pois que a luz A tem a intensidade b, e a luz B a intensidade c na distancia 1, para saber a intensidade de cada uma, nas distancias x e $a-x$ teremos applicando o principio de physica, para a 1.ª luz

$$x^2:1::b:\frac{b}{x^2}\text{; e para a 2.ª } (a-x)^2:1::c:\frac{c}{(a-x)^2}$$

e devendo ser iguaes estas duas intensidades, temos a equação

$$\frac{b}{x^2}=\frac{c}{(a-x)^2},\text{ ou preparando-a, } x^2-\frac{2ab}{b-c}=-\frac{a^2b}{b-c}:$$

resolvendo-a, e reduzindo segundo o n.º 75, teremos

$$x=\frac{a(b\pm\sqrt{bc})}{b-c}.$$

Esta expressão ainda se póde simplificar, porque

$$b\pm\sqrt{bc}=\sqrt{b}.\sqrt{b}\pm\sqrt{b}.\sqrt{c}=(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})\sqrt{b}$$
$$\text{e } b-c=(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2=(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c}):$$

logo, separando os valores,

$$x=\frac{a(b-\sqrt{bc})}{b-c}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})\sqrt{b}}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$
$$x=\frac{a(b+\sqrt{bc})}{b-c}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})\sqrt{b}}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

Trata-se de discutir estes dous valores de x, ou da distancia AC.

Discussão. 1.° Seja em primeiro lugar $b>c$, ou a luz A mais forte do que B. Então os dous valores são ambos positivos, isto é, o problema tem duas soluções. Demais, o 1.° ponto existe entre os dous A e B, e mais proximo deste: porque, sendo $\sqrt{b}>\sqrt{c}$, conclue-se

$2\sqrt{b}>\sqrt{b}+\sqrt{c}$, donde $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}>\frac{1}{2}$, e pois AC, ou

$$\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}>\frac{a}{2}.$$

O segundo ponto fica á direita do ponto B, porque evidentemente

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}>1, \text{ logo } \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}>a.$$

2.° *Seja* $b<c$. O 1.° valor de x será ainda positivo, porém menor que a, porque, sendo $\sqrt{b}<\sqrt{c}$, teremos $2\sqrt{b}<\sqrt{b}+\sqrt{c}$, pelo que

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}<\frac{1}{2}, \text{ donde } x \text{ ou } \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}<\frac{a}{2}.$$

Donde se segue que este 1.° ponto ainda se acha entre A e B, porém mais proximo de A.

O 2.° valor de x é negativo, e só póde ter significação suppondo um ponto C' á esquerda de A. Era de esperar este resultado, por se ter supposto a luz B mais forte do que A.

3.° *Seja agora* $b=c$: serão os dous valores de x

$$x=\frac{a}{2}, \text{ e } x=\frac{a\sqrt{b}}{0}=\infty.$$

O 1.° destes valores indica o meio da linha AB, o que mesmo *á priori* era evidente. O 2.° valor, ∞, mostra que não se póde marcar um outro ponto, ou que elle dista de A, quantidade maior, do que qualquer que se arbitre, por grande que seja. É de vêr que quanto menor é a differença $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, ou o denominador do segundo valor x, maior se torna este; pelo que, sendo $\sqrt{b}-\sqrt{c}=0$, isto é, menor do que toda e qualquer quantidade, o valor de x deve tornar-se infinito.

N. B. Observemos de passagem, que se esta ultima hypothese $b=c$ se applicasse aos valores não simplificados que deduzimos da equação

$$x=\frac{a(b-\sqrt{bc})}{b-c} \text{ se mudaria em } x=\frac{0}{0}$$

$$x=\frac{a(b+\sqrt{bc})}{b-c} \text{ tornar-se-hia } x=\frac{2ab}{0}.$$

O symbolo de indeterminação que aqui apparece, depende do factor commum que foi omittido $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, o qual com effeito se torna em zero na presente hypothese (n.° 67).

4.° Se fôr $a=0$, $x=0$: isto é, reunidas no mesmo ponto duas luzes desiguaes, só esse mesmo ponto póde ser por ambas igualmente allumiado.

5.° Se além de $a=0$, fôr tambem $b=c$, será $x=0$, $x=\frac{0}{0}$. O 1.° valor indica o ponto em que estão as luzes; mas o 2.° um ponto qualquer. Em verdade, duas luzes iguaes no mesmo ponto prestaráõ igual claridade a um ponto qualquer no espaço.

Se de cada valor de x, ou AC derivarmos o correspondente de $a-x$, ou BC, analysados estes nas mesmas hypotheses, darão resultados em harmonia com os precedentes.

Esta discussão é mais um exemplo da precisão com que a Algebra resolve as questões, e deduz os corollarios de todas as circumstancias comprehendidas no enunciado do problema.

DAS DESIGUALDADES.

111. Nas discussões dos problemas, temos tido occasião de estabelecer entre certas quantidades relações de desigualdade, representadas pelo signal $>$; e de sujeitar estas *desigualdades* a transformações analogas ás que soffrem as equações. Ora, ainda que em geral os principios dos n.os 35 e 36 sejão applicaveis tanto a igualdades como a desigualdades, comtudo a respeito destas soffrem elles excepções, provenientes da applicação das regras do calculo ás *expressões negativas*, como se fossem quantidades absolutas: dessas excepções cumpre estar prevenido para evitar erros.

Recapitulemos todas as transformações que soffre uma desigualdade tornando salientes as excepções.

112. Transformação por addição e subtracção. *Sommando ou diminuindo a mesma quantidade aos* *dous membros de uma desigualdade, esta subsiste no mesmo sentido*. É evidente.

Sendo

$$8>3, \text{ é tambem } 8+5>3+5, 8-5>3-5$$
$$-3<-1 \text{ » } -3+5<-1+5, -3-5<-1-5., \&.$$

Sommando membro a membro duas ou mais desigualdades no mesmo sentido, nesse mesmo subsiste a desigualdade resultante.

Sendo $a>b$, $c>d$, evidentemente $a+c>b+d$,

Estes dous principios não soffrem excepção.

Não acontece o mesmo, subtrahindo membro a membro duas ou mais desigualdades. A resultante ás vezes é no mesmo sentido, outras vezes no opposto. Por exemplo, de ser

$$\left.\begin{matrix}4<7\\2<3\end{matrix}\right\} \text{ segue-se } 4-2<7-3, \text{ ou } 2<4.$$

Mas sendo $9<10$, $6<8$, não é $9-6<10-8$ ou $3<2$.

113. Transformação por multiplicação e divisão. *Multiplicando ou dividindo ambos os membros por um numero positivo ou absoluto, a desigualdade subsiste no mesmo sentido.*

Principio evidente, e que serve para eliminar os denominadores.

Multiplicando ou dividindo ambos os membros por quantidade negativa, a desigualdade subsiste em sentido contrario.

Sendo $8>5$, $8\times-3<5\times-3$ ou $-24<-15$.

Logo, *para usar desta transformação, sendo o mul-*

tiplicador ou divisor algebrico, cumpre examinar se o dito multiplicador ou divisor é positivo ou negativo.

Corollario. *Mudando os signaes a ambos os membros inverte-se a desigualdade.* Porque isto equivale a multiplica-los por -1.

114. Tranformação por quadrado e raiz quadrada. *Sendo os dous membros da desigualdade ambos positivos, entre os seus quadrados ou as suas raizes, subsiste a desigualdade no mesmo sentido.*

Sendo $8>5$, $8^2>5^2$ ou $64>25$: e $\sqrt{8}>\sqrt{5}$.

É evidente.

Se fôrem ambos os membros negativos, a desigualdade entre os quadrados é em sentido contrario.

Sendo $-11<-7$, $(-11)^2>(-7)^2$, ou $121>49$.

Tendo os dous membros signaes diversos, nada se póde decidir sobre o sentido da desigualdade entre os quadrados. Por exemplo:

$-5<6$ se transforma em $(-5)^2<(6)^2$, ou $25<36$.
$-5<3$ reduz-se a $(-5)^2>(3)^2$ ou $25>9$.

N. B. Nos dous ultimos casos não se trata de extracção de raiz, porque a raiz quadrada do membro negativo é imaginaria.

115. Para exercicio dos principiantes, propomos novos problemas do 2.° gráo.

5.° Problema. *Dous negociantes se associárão para uma empreza: o 1.° concorreo com a quantia* a, *e o 2.°*

não se sabe com quanto: mas ganhárão ao todo a quantia b, *e a entrada do* 2.° *é tal que sommada com o lucro respectivo forma o valor* c. *Pede-se a entrada do segundo, e o ganho de cada um.*

Equação $x^2+(a+b-c)x=ac$.

6.° Problema. *Achar um numero, cujo quadrado seja para o producto das differenças entre o mesmo numero e dous dados* a *e* b, *em uma razão conhecida* p: q.

$$\text{Equação } x^2-\frac{(a+b)p}{p-q}x=-\frac{abp}{p-q}.$$

7.° Problema. *Devia repartir-se a quantia* a *por certo numero de pessoas: mas alguns* (m *pessoas*) *por ausentes perdem o direito, e esta circumstancia augmenta a quantia* b *á parte de cada um dos presentes. Pergunta-se quantas erão as pessoas.*

$$\text{Equação } x^2-mx=\frac{ma}{b}.$$

N. B. A equação deste problema é a mesma do problema 2.° (n.° 90): as condições de um e de outro, ainda que á primeira vista differentes, reduzem-se ao mesmo, a saber: *um numero a dividir por* x, *e por* x—m, *sendo dada a differença dos quocientes.* Á mesma equação se reduz o seguinte

8.° Problema. *Obrigárão-se alguns negociantes a pagar entre si a quantia* a; *mas fallindo alguns* (m) *cresceo aos outros a despeza* b. *Quantos erão?*

Estas diversas questões, reduzidas á mesma equação, são proprias para mostrar a estenção das applicações de uma formula algebrica, e a utilidade de, na resolução dos problemas, representar por letras as quantidades conhecidas.

§ 4.° EQUAÇÕES E PROBLEMAS DO SEGUNDO GRÁO A DUAS OU MAIS INCOGNITAS.

116. Esta theoria não póde ser aqui completamente desenvolvida, porque (como depois se verá) a resolução de duas equações do segundo grão a duas incognitas depende, em geral, da resolução de uma equação a uma incognita, do quarto grão. Comtudo ha casos especiaes, em que se consegue pelos methodos precedentes resolver o problema: por exemplo este:

Achar dous numeros, cujo producto seja p, *e taes que* a *vezes o primeiro mais* b *vezes o segundo forme a somma* 2s.

Equações do problema

$$xy=p$$
$$ax+by=2s$$

Da 2.ª se deduz $y=\frac{2s-ax}{b}$, e substituido este valor na 1.ª,

$ax^2-2sx=-bp$, donde $x=\frac{s}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{s^2-abp}$, e por substituição no valor precedente $y=\frac{s}{b}\mp\frac{1}{b}\sqrt{s^2-abp}$

Estes valores serão reaes, quando s^2 não fôr menor do que abp:

Sendo reaes, são todos positivos, porque

$s > \sqrt{s^2 - abp}$. Logo o problema tem duas soluções directas, representadas pelos dous systemas de valores de x e y.

Sendo $a = b = 1$, os valores supra mudão-se em $x = s \pm \sqrt{s^2 - p}$, $y = s \mp \sqrt{s^2 - p}$. Nota-se aqui, que os valores de y são os mesmos de x em ordem inversa; isto é, que tendo cada incognita dous valores, comtudo o problema tem uma só solução: o que se torna claro separando os valores:

$$1.° \; x = s + \sqrt{s^2 - p}; \quad y = s - \sqrt{s^2 - p}$$
$$2.° \; x = s - \sqrt{s^2 - p}; \quad y = s + \sqrt{s^2 - p}.$$

Para bem interpretar esta circumstancia, voltemos ás equações do problema, que na hypothese presente se mudão em

$$xy = p$$
$$x + y = 2s.$$

Estas em nada se alterão mudando x em y, e y em x, logo as duas incognitas devem depender da mesma equação do segundo gráo, e esta dar ao mesmo tempo os dous valores de x e de y. Tivemos um exemplo semelhante no problema n.° 107.

117. Dissemos que duas equações do segundo gráo a duas incognitas, eliminada uma dellas, conduzem a uma do quarto gráo. Facil é prova-lo sem ser preciso desenvolver os calculos. Sejão as equações geraes

$$ax^2 + byx + cx + dy + ey^2 + f = 0$$
$$a'x^2 + b'yx + c'x + d'y + e'y^2 + f' = 0.$$

Tratando x^2 e x como incognitas diversas e do 1.°

gráo, póde-se eliminar x^2, e chegar a uma equação em x; e o valor desta incognita substituido em qualquer das propostas, conduzirá a uma equação final em y. Ora, pois que no valor de x, entrão necessariamente os termos ey^2, $e'y^2$; e tendo de elevar-se este valor ao quadrado, para a substituição em ax^2+ &c., apparecerá necessariamente uma equação do 4.º gráo. Para a resolução destas equações não são bastantes os principios precedentes.

118. Comtudo, entre as equações do 4.º gráo, e em geral de gráos pares, ha algumas que se resolvem pela formula das do segundo gráo; e são as que têem a fórma

$$x^{2m}+px^m+q=0.$$

Porque esta, suppondo $x^m=y$, se transforma em $y^2+py+q=0$, equação do segundo gráo, que facilmente se resolve. Será pois y ou

$$x^m=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\text{, donde}$$

$$x=\sqrt[m]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

A ultima formula contém dous valores de x, quando m é impar; valores que serão imaginarios, se fôr negativa a quantidade $\frac{p^2}{4}-q$; reaes, se esta quantidade fôr positiva.

Quando m fôr par, a formula dará 4 valores para

x, pois verdadeiramente deve escrever-se neste caso,

$$x=\pm\sqrt[m]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}};$$

valores que serão todos reaes, ou todos imaginarios, ou dous reaes, e dous imaginarios, conforme os valores de p e q fizerem positivas ou negativas as quantidades submettidas a cada um dos radicaes.

119. Muitos problemas conduzem a equações da natureza da precedente; v. gr. este:

Achar dous numeros cujo producto seja 6, *e a somma dos cubos* 35.

As equações são

$$xy=6$$
$$x^3+y^3=35.$$

O valor de y, dado pela 1.ª e substituido na 2.ª conduz á equação

$$x^6-35x^3=-216;\text{ donde}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{35}{2}\pm\sqrt{\frac{(35)^2}{4}-216}}=\sqrt[3]{\frac{35\pm19}{2}}.$$

Separando os dous valores, e calculando os correspondentes de y, temos

$$x=\sqrt[3]{\frac{35+19}{2}}=3\,;\ y=\frac{6}{x}=2$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{35-19}{2}}=2\ ;\ y=3.$$

Donde se vê que cada incognita tem dous valores, sendo na realidade uma unica solução. Cabe aqui a observação do n.° 104.

120. Quando m é par e superior a 2, a resolução da equação depende de uma extracção de raiz do gráo m, sobre o que nos faltão preceitos: comtudo, tratando de numeros, essa raiz se póde extrahir por logarithmos (Arith. 195).

Seguem tres exemplos de equações do 4.° gráo, que, resolvidas pela formula precedente, dão á incognita

Quatro valores reaes:

$$x^4-25x^2=-144\ ;\ x=\pm 4\ ,\ \text{e}\ x=\pm 3.$$

Dous reaes e dous imaginarios:

$$x^4-7x^2=8\ ;\ x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}\ ,\ \text{e}\ x=\pm\sqrt{-1}.$$

Todos os valores imaginarios:

$$x^4+12x+11=0\ ,\ x=\pm\sqrt{-6\pm\sqrt{36-11}}\ ;\ \text{ou}$$
$$x=\pm\sqrt{-1}\ ,\ \text{e}\ x=\pm\sqrt{-11}.$$

CAPITULO V.

POTENCIAS E RAIZES DE TODOS OS GRÁOS.

---

121. *Introducção*. Assim como a resolução das equações do segundo gráo suppõe conhecidas as regras para extracção da raiz quadrada; do mesmo modo para se poder resolver as equações do 3.º 4.º gráo, &c., é necessario saber extrahir as raizes dos gráos respectivos de qualquer quantidade, numerica ou litteral.

Trataremos no presente capitulo da elevação ás potencias, da extracção das raizes, e do calculo dos radicaes *de qualquer gráo*.

Ainda que qualquer potencia de uma quantidade se póde formar pelas regras da multiplicação arithmetica ou algebrica, entretanto essas potencias seguem uma *lei de composição*, que é indispensavel conhecer, porque é della que se derivão as regras para a extracção das raizes.

Já se mostrou (n.º 88) que a composição do quadrado de qualquer quantidade, algebrica ou numerica, depende da expressão do *quadrado de um binomio*.

Veremos que, em geral, a *lei de composição* de uma potencia de qualquer quantidade deduz-se facilmente da expressão algebrica da potencia do mesmo gráo de um binomio.

Começamos pois esta nova theoria, procurando o *desenvolvimento da potencia de qualquer gráo de um binomio*.

§ 1.° BINOMIO DE NEWTON.

122. Proponha-se elevar a qualquer potencia o binomio $x+a$.

Por meio de multiplicações successivas se formão os seguintes resultados :

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$
$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$
$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$
$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$, &.

Á simples inspecção destes polynomios, facilmente se conhece a lei que todos elles seguem pelo que toca aos expoentes de a e de x: mas não assim quanto aos coefficientes, a não ser o do 1.° termo, que é 1, e o do 2.° igual ao expoente da potencia. Para descobrir a composição dos outros coefficientes, recorre-se a um artificio algebrico, que consiste em analysar os productos de qualquer numero de binomios, tendo sómente o 1.° termo commum, taes como $x+a$, $x+b$, $x+c$, &.; e depois suppôr iguaes os 2.os termos, o que converte os productos em potencias. Nesses productos não apparecem reducções; e assim evitados os resultados numericos, mais facilmente se conhece o como são formados os multiplicadores ou coefficientes de cada termo. Eis-aqui alguns dos productos mencionados:

$$(x+a)(x+b)=x^2+\left.\begin{matrix}a\\+b\end{matrix}\right\}x+ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\left.\begin{matrix}a\\+b\\+c\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}ab\\+ac\\+bc\end{matrix}\right\}x+abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+\left.\begin{matrix}a\\+b\\+c\\+d\end{matrix}\right\}x^3+\left.\begin{matrix}ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{matrix}\right\}x+abcd.$$

Do mesmo modo se podem formar outros productos de qualquer numero de binomios, sempre applicando as regras ordinarias da multiplicação algebrica.

123. O exame attento destes productos descobre, que são elles constantemente formados segundo as leis seguintes :

1.° O expoente de x começa por ser igual ao numero de binomios multiplicados ; decresce de uma unidade, de termo em termo, até o ultimo, em que é zero.

2.° Os multiplicadores das potencias de x são :

No 1.° termo a unidade ;

No 2.° a somma dos segundos termos dos binomios ;

No 3.° a somma dos productos distinctos que se póde formar com os mesmos segundos termos, combinados dous a dous ;

No 4.° a somma dos productos distinctos que se formão dos segundos termos dos binomios , tres a tres ;

No 5.° a somma dos productos dos segundos termos, quatro a quatro ;

E assim por diante.

124. Actualmente, suppondo em todos os productos acima, $a=b=c=\ldots\ldots$, os mesmos productos se tornaráõ em $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$,..... e em geral, sendo m o numero de binomios, $(x+a)^m$.

Quanto aos multiplicadores das diversas potencias de x,

O do 1.° termo é sempre 1.

O do 2.° $a+b+c+\ldots\ldots$ se muda evidentemente em ma.

O do 3.° termo $ab+ac+bc+\ldots\ldots$ torna-se $a^2+a^2+a^2+\ldots\ldots$ ou a^2 repetido tantas vezes quantos são os productos de m letras combinadas duas a duas.

O do 4.° $abc+abd+acd+\ldots\ldots$ muda-se em a^3 tomado tantas vezes, quantos productos se formão de m letras tres a tres:

O do 5.° será a^4, multiplicado pelo numero de productos de m letras, quatro a quatro.

É facil continuar esta lei, extendendo-a a todos os outros coefficientes.

Logo, representando por M, N, P, Q, R, &c., o numero de productos de m letras, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, 5 a 5, 6 a 6, &c., será

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+Ma^2x^{m-2}+Na^3x^{m-3}$$
$$+Pa^4x^{m-4}+\ldots\ldots\ldots+a^m.$$

Pelo que, para ficar determinado o desenvolvimento da potencia $(x+a)^m$, só nos resta descobrir em geral os valores de M, N, P, &c.; a saber: o numero de productos distinctos de m letras, combinadas 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, &c. Este problema e outros semelhantes fazem parte da *theoria das combinações*, cujos principios nos serão uteis em outras occasiões.

125. *Theoria das combinações*. Para abreviar o que temos de expôr a este respeito, cumpre ter bem presentes ao espirito algumas definições.

Chama-se *permutações de um producto* as diversas collocações em que se podem achar os factores do mesmo producto: *abc*, *acb*, *cab*, *bca*, &c., são *permutações* do producto *abc*.

Combinações são arranjos de certo numero de letras, 2 a 2, 3 a 3, &c., não entrando em cada um delles letra alguma repetida. As 5 letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, combinadas 2 a 2 dão as *combinações ab*, *ba*, *ac*, *ca*, além de outras. Combinadas 3 a 3 dão *abc*, *acb*, *abd*, *cab*, e outras mais.

Productos distinctos são combinações que differem uma da outra, pelo menos em uma letra: como *ab*, *ac*, *bc*, &c.

Os principios da *theoria das combinações* necessarios e uteis á demonstração da *formula do binomio*, se resumem na resolução dos tres problemas que se seguem.

126. 1.° Problema. *Determinar o numero total de permutações de um producto de* n *letras*. Seja x este numero.

Um producto de 2 letras, evidentemente só póde escrever-se de dous modos, *ab*, e *ba*. *Numero de permutações* 1×2.

Sendo de 3 letras, *abc*, é claro que principiando por uma dellas *a*, restão duas a permutar, o que dará 1×2 permutações: mas podendo ser qualquer das tres a letra inicial, o numero de permutações será tres vezes o precedente, ou $1\times2\times3$.

Em um producto de 4 letras, começando por uma dellas, e permutando as tres restantes, temos $1\times2\times3$ permutações: e como cada uma das quatro póde ser collocada em primeiro lugar, será o numero total de permutações $1\times2\times3\times4$.

Continuando estes raciocinios, conclue-se por inducção tão clara, quanto rigorosa, que para o producto de n letras, o numero pedido de permutações será

$$x=1\times2\times3\times\ldots\ldots\ldots\times n,$$

isto é, *o producto de todos os numeros inteiros desde* 1 *até* n, *inclusivamente.*

127. 2.° Problema. *Determinar o numero total de combinações de* m *letras* n *a* n. Chamemos a incognita y.

Para combinar m letras 2 a 2, é claro que cumpre combinar cada uma dellas com todas as restantes que são $m-1$; logo o numero de combinações 2 a 2 é $m(m-1)$.

Combinemos as m letras 3 a 3. Cada combinação de 2 com cada uma das letras restantes, que são $m-2$ dará $m-2$ combinações de tres; e pois que o mesmo se applica a cada uma das $m(m-1)$ combinações de duas, será o numero total das combinações de 3 $m(m-1)(m-2)$.

Por um raciocinio em tudo semelhante se mostra que o numero de combinações 4 a 4 é $m(m-1)(m-2)(m-3)$.

E as combinações 5 a 5 $m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)$.

Analysando o ultimo factor de cada um destes productos, vemos que para o caso de n letras em cada combinação será o dito ultimo factor $m-(n-1)$ ou $m-n+1$. Logo, combinadas m letras n á n, é o numero das combinações,

$$y=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots\ldots(m-n+1).$$

Isto é, *o producto de todos os numeros inteiros desde o numero das letras* m *até* m—n+1 *inclusivamente.*

128. 3.° Problema. *Quantos productos distinctos se formão de* m *letras* n a n? Representemos este numero por z.

Se fossem conhecidos os *productos distinctos*, formar-se-hião as combinações escrevendo cada producto de todos os modos possìveis: assim *o numero dos productos multiplicado pelo numero de permutações de um delles dá o numero total das combinações*. Logo entre as quantidades x, y, z ha necessariamente esta relação

$$y=xz$$

da qual se deduz o numero de productos distinctos

$$z=\frac{y}{x}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n.}$$

129. *Formula do binomio: conclusão*. Voltando á expressão do n.° 123, é claro que para achar os valores de M, N, P, &c., basta no valor de z, que se acaba de deduzir, suppôr $n=2,3,4$, &c., successivamente.

Assim teremos:

Suppondo $n=2, M=\frac{m(m-1)}{1\times 2}$

» $n=3; N=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}$

» $n=4; P=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\times 2\times 3\times 4}.$

E assim por diante. Estes valores, substituidos na expressão de $(x+a)^m$ (n.° 123), a tornão em

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\times 2}a^2x^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times 2\times 3}a^3x^{m-3}+\ldots\ldots\ldots+a^m.$$

formula do desenvolvimento de qualquer potencia de um binomio; e que se denomina — *O binomio de Newton* —, do nome do celebre Geometra que a descobrio.

130. Analysando os diversos termos da *formula do binomio*, facilmente se descobre o modo simples de formar qualquer coefficiente por meio do anterior.

Forma-se o coefficiente de qualquer termo, multiplicando o coefficiente do termo precedente pelo expoente de x *no mesmo termo, e dividindo o producto pelo numero dos termos que precedem ao termo pedido.*

Por esta regra, que é mera traducção da formula, é facil elevar um binomio a uma potencia em particular. Formados os primeiros dous termos (o que é simples á vista da formula x^m+max^{m-1}) os seguintes se formaráõ, calculando os coefficientes pela regra, e successivamente augmentando 1 ao expoente de a, diminuindo 1 ao de x. Assim

$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$$
$$(x+a)^{10}=x^{10}+10ax^9+45a^2x^8+120a^3x^7+210a^4x^6$$
$$+252a^5x^5+210a^6x^4+120a^7x^3+45a^8x^2+10a^9x+a^{10}.$$

N. B. Se acaso os coefficientes e expoentes do binomio não são iguaes a 1, como em $x+a$, cumpre não confundir estes coefficientes e expoentes com os que resultão da elevação a uma potencia: indicando os calculos, para depois effectua-los em cada termo, evitão-se enganos e obtem-se o resultado com segurança. Por exemplo:

$$(2b^4-3c^3)^5=(2b^4)^5+5(-3c^3)(2b^4)^4+10(-3c^3)^2(2b^4)^3$$
$$+10(-3c^3)^3(2b^4)^2+5(-3c^3)^4 2b^4+(-3c^3)^5=32b^{20}$$
$$-240b^{16}c^3+720b^{12}c^6-1080b^8c^9+810b^4c^{12}-243c^{15}.$$

§ 29. EXTRACÇÃO DAS RAIZES DOS NUMEROS.

Os processos expostos na Arithmetica para extrahir de qualquer numero a raiz quadrada e a raiz cubica podem ser ampliados de modo que se appliquem ás raizes de todos os gráos. Ou antes, do processo geral, que passamos a tratar, são casos particulares os relativos ás raizes quadrada e cubica. Assim, tendo já desenvolvido convenientemente o modo de extrahir estas duas raizes, bastará expôr a regra geral, para que se applique aos casos particulares da extracção da raiz 4.ª, raiz 5.ª, &c.

131. *Extracção da raiz do gráo* n, *de um numero inteiro*. Representemos este numero por N.

Se o numero dado não tiver mais de n *algarismos, a* *sua raiz (ou a parte inteira della) terá um só. Para descobrir esse algarismo, formão-se as potencias do grão* n *dos numeros* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: *se alguma destas potencias coincidir com o numero* N, *a sua raiz será a pedida exactamente: senão, a raiz não se poderá obter exactamente; e será a sua parte inteira a raiz do menor dos dous numeros, entre os quaes se achar o proposto* N.

Funda-se esta regra em que a potencia n de 10 ou $(10)^n$ é a unidade seguida de n cifras, ou o menor dos numeros de $n+1$ algarismos.

Quando o numero tiver mais de n algarismos, a sua raiz terá dous ou mais, isto é, poderá decompôr-se em dezenas e unidades: pelo que chamando a as dezenas, b as unidades, o numero dado poderá representar-se por

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \text{\&c.}$$

Donde se vê que o numero N, considerado como potencia n de outro numero, constará de diversas partes, a saber: a potencia n das dezenas da raiz (a^n) mais n vezes a potencia $n-1$ das dezenas, multiplicadas pelas unidades $(na^{n-1}b)$, mais outras partes. Porém a potencia n das dezenas, devendo ser um numero seguido de n cifras, não se contém nem influe nos ultimos n algarismos, dos quaes por este motivo se póde prescindir por emquanto. Logo:

Separando os ultimos n *algarismos, se os restantes forem* n, *ou menos, a raiz desse numero será as dezenas da raiz pedida.*

Se restarem á esquerda mais de n algarismos, um discurso semelhante nos conduz a separar outros n, e procurar a raiz dos restantes á esquerda.

Em geral, *divide-se o numero em classes de* n *letras, da direita para a esquerda, e procura-se qual a maior potencia* n *contida na classe da esquerda, a raiz dessa potencia será o* 1.° *algarismo da raiz pedida*, ou as dezenas da raiz do numero composto das duas classes da esquerda.

Subtrahe-se da 1.ª *classe a potencia achada; ao resto se ajunta a classe seguinte.* Assim forma-se um numero que contém além de outras partes n vezes a potencia $n-1$ do 1.° algarismo (dezenas) multiplicada pelo segundo (unidades). E porque a potencia $n-1$ das dezenas é numero terminado em $n-1$ cifras:

Prescinde-se de $n-1$ *algarismos, e dividindo os restantes (que vem a ser o resto com o* 1.° *algarismo da* 2.ª *classe) por* n *vezes a potencia* $n-1$ *do algarismo achado, obtem-se o segundo algarismo da raiz, ou um algarismo um pouco acima delle.*

Para verifica-lo, *eleva-se a raiz achada á potencia* n, *e subtrahe-se das duas classes já consideradas*, se esta subtracção é possivel. Não o sendo, tira-se 1 á raiz achada, e repete-se a verificação.

Á direita do 2.° *resto se escreve o* 1.° *algarismo da* 3.ª *classe; e divide-se por* n *vezes a potencia* n—1 *da raiz achada.*

Continúa-se do mesmo modo até haver contemplado todas as classes do numero dado.

Sirva de exemplo extrahir a raiz 5.ª de 550731776,

$$\begin{array}{r|l}
550731776 & 56 \\
\cline{2-2}
3125 & 3125 \\
\cline{1-1}
33823 & \\
550731776 & \\
\cline{1-1}
0. &
\end{array}$$

Separados os cinco algarismos da direita, o resto 5507 se comprehende entre 3125 5.ª potencia de 5, e 7776 5.ª potencia de 6. Pelo que as dezenas são 5, e a sua 5.ª potencia 3125 subtrahida da classe 5507 deixa o resto 2382, que com o 1.º algarismo da 2.ª classe forma o dividendo 23823. O divisor é 3125, 5 vezes a 4.ª potencia de 5, e o quociente 7. Mas como elevado 57 a 5.ª potencia, dá numero maior que o proposto, verificamos 56 que é exactamente a raiz pedida.

Acha-se do mesmo modo

$$\sqrt[7]{94931877133}=37, \text{ exactamente}$$

$$\sqrt[5]{20904551}=18, \text{ com o resto } 200887.$$

132. *Extracção de raizes por approximação*. A raiz de qualquer gráo de numero que não seja potencia perfeita do mesmo gráo, é sempre *incommensuravel*, isto é, impossivel de ser determinada exactamente.

Esta proposição já demonstrada pelo que toca ás raizes quadrada e cubica, é geral, e funda-se em que segundo os principios demonstrados (Arith. 103) sendo $\frac{a}{b}$ uma fracção irreduzivel, a sua potencia n ou $\frac{a^n}{b^n}$ igualmente o será; isto é, a^n e b^n serão primos entre si sempre que o forem a e b.

Do que se segue que não póde haver fracção, cuja potencia n seja numero inteiro; e portanto o numero inteiro que não tiver raiz exacta e inteira, tambem não a terá fraccionaria. Esta comtudo se póde approximar em decimaes, tanto quanto se queira.

133. *Pede-se*, por exemplo, *a raiz* 6.ª *de* 23 *até a casa dos centesimos*. Pois que centesimos elevados a 6.ª potencia devem produzir 12 casas de dizima, daremos ao numero proposto esta fórma

$$23{,}000000.000000$$

e extrahindo a raiz sexta deste numero, como se fosse inteiro, teremos 168, de que separando duas casas de dizima será finalmente

$$\sqrt[6]{23}=1{,}68\text{ , sem differença de }0{,}01.$$

Em geral: *ajuntão-se ao numero tantas classes de* n *cifras, quantas casas de dizima se querem na raiz; e extrahida esta, como nos inteiros, separão-se com a virgula as casas decimaes, que exige a questão proposta.*

Se o numero proposto tem algarismos decimaes, as cifras devem ser as necessarias para completar á direita da virgula, tantas classes de n letras, quantas casas de dizima se pedem. Assim se determina

$$\sqrt[4]{29{,}437}=2{,}329\text{, sem differença de }0{,}001.$$

Estas regras são simplices corollarios da formação das potencias e do calculo dos decimaes.

§ 3.° POTENCIAS E RAIZES DAS QUANTIDADES ALGEBRICAS.

Tratemos em primeiro lugar das regras para elevar um monomio a qualquer potencia, ou extrahir-lhe a raiz de qualquer grão.

134. Seja o monomio $2a^3b^2$ para elevar á 5.ª potencia: teremos, segundo a definição,

$$(2a^3b^2)^5 = 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2.$$

Ora, neste producto o coefficiente 2 é 5 vezes factor, e cada expoente deve ser repetido 5 vezes: logo

$$(2a^3b^2)^5 = 32a^{15}b^{10}, \text{ e do mesmo modo}$$
$$(5ab^3c^4)^6 = 15625a^6b^{18}c^{24}.$$

Regra geral. Para elevar um monomio a qualquer potencia, *eleva-se a ella o coefficiente, e multiplica-se cada expoente pelo indice da potencia.*

Logo, reciprocamente, para extrahir qualquer raiz de um monomio, *extrahe-se do coefficiente e divide-se cada um dos expoentes pelo indice da raiz.*

Donde se segue que um monomio só póde ser potencia perfeita de qualquer gráo, quando: 1.° *o coefficiente for potencia perfeita;* 2.° *cada um dos expoentes fôr divisivel pelo indice da raiz.*

Não se dando qualquer destas circumstancias, a raiz sómente se indica; mas a sua expressão poderá em muitos casos simplificar-se, como depois veremos.

135. Pelo que toca aos signaes, póde affirmar-se:

1.° *Toda a potencia par de quantidade positiva ou negativa é essencialmente positiva.*

Porque a potencia do gráo $2n$ é equivalente á potencia n do quadrado da mesma quantidade, $a^{2n} = (a^2)^n$: mas o quadrado a^2 é essencialmente positivo. Assim

$$(\pm 3a^2bc^3)^4 = +81a^8b^4c^{12}.$$

2.° *Toda a potencia impar deve ter o mesmo signal da quantidade.* Porque a potencia impar é sempre igual a uma potencia par, multiplicada pela mesma quantidade, $a^{2n+1}=a^{2n}\times a$.

Destes principios se conclue, que

1.° *A raiz de grão impar de qualquer monomio deve ter o mesmo signal da quantidade*

$$\sqrt[5]{+32a^{10}b^5}=+2a^2b,\ \sqrt[5]{-32a^{10}b^5}=-2a^2b.$$

2.° *A raiz de grão par de qualquer monomio positivo póde ter indifferentemente o signal + ou —*. Exemplo:

$$\sqrt[4]{81b^4c^8}=\pm 3bc^2.$$

3.° *A raiz de grão par de quantidade negativa é uma raiz impossivel.* Porque não ha quantidade que elevada a potencia par, dê resultado negativo.

$\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-b}$ *são symbolos imaginarios*, como $\sqrt{-a}$

Passemos aos polynomios.

136. Tendo já mostrado como por meio da formula de Newton se eleva um binomio a qualquer potencia, mostraremos agora o modo de applicar a mesma formula aos trinomios, e a quaesquer outros polynomios. Seja em primeiro lugar $x+y+z$ para elevar ao cubo. Suppondo $x+y=u$, teremos

$$(x+y+z)^3=(u+z)^3=u^3+3zu^2+3z^2u+z^3=(x+y)^3$$
$$+3z(x+y)^2+3z^2(x+y)+z^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$+3zx^2+6xyz+3zy^2+3z^2x+3z^2y+z^3.$$

Para applicar commodamente este methodo a qualquer trinomio, convirá representar cada termo por uma letra, desenvolver a potencia, e depois fazer substituições, e effectuar os calculos indicados.

Por modo semelhante se eleva qualquer outro polynomio a uma potencia de qualquer gráo.

137. *Extracção da raiz* m *de um polynomio.* Seja P o polynomio, que supporemos ordenado em relação a uma letra; e seja a raiz $x+y+z+.....$ que se póde suppôr tambem ordenada em relação á mesma letra, a por exemplo. Elevando esta raiz á potencia m, e tratando como um só termo a quantidade $y+z+.....$ será $(x+y+z+...)^m$ ou

$$P=x^m+mx^{m-1}(y+z+....)+m\frac{m-1}{2}x^{m-2}(y+z+.)^2+\&.$$

Dos principios da multiplicação algebrica se conclue que o termo x^m, devendo conter um expoente de a, superior aos de todos os outros termos, não soffre reducção alguma, e é necessariamente o 1.° termo do polynomio ordenado P. *Extrahindo pois a raiz deste* 1.° *termo ter-se-ha* x, 1.° *da raiz pedida.*

Subtrahindo x^m de P, teremos chamando ao resto R,

$$R=P-x^m=mx^{m-1}(y+z+.....)+m\frac{m-1}{2}x^{m-2}$$
$$(y+z+.....)^2+\text{\&c.}$$

Neste ultimo polynomio é facil de provar que o termo $mx^{m-1}y$ contém o maior dos expoentes de a, e não soffre reducção. Com effeito tomando sómente o 1.° termo de cada producto dos que estão indicados (sómente os 1.^{os} termos, porque nesses entrão os maiores expoentes de a), cumpre mostrar, que $x^{m-1}y$ é de um gráo a respeito de a, superior a $x^{m-2}y^2$, $x^{m-3}y^3$, $x^{m-4}y^4$ &c., em geral a $x^{m-n}y^n$

Ora, as duas expressões que comparamos

$$x^{m-1}y \text{ e } x^{m-n}y^n$$

divididas ambas por $x^{m-n}y$, reduzem-se a

$$x^{n-1} \text{ e } y^{n-1}$$

e nestas é evidente que o gráo da 1.^{a} excede o da 2.^{a}, pois que x contém maior expoente de a, do que y.

Logo $mx^{m-1}y$ representa o 1.° termo do polynomio ordenado R, e dividindo-o por mx^{m-1} teremos o 2.° termo da raiz y.

Diminuindo de P a potencia m de $x+y$, prova-se semelhantemente que $mx^{m-1}z$ é o 1.° termo do 2.° resto R' ou $P-(x+y)^m$. Pelo que dividindo esse 1.° termo por mx^{m-1} obtem-se o 3.° z da raiz.

138. De tudo isto resulta a seguinte

Regra geral. *Ordenado o polynomio, extrahe-se a raiz do* 1.° *termo, que será o* 1.° *da raiz pedida. Eleva-se á potencia* m, *e subtrahe-se do polynomio.*

Divide-se o 1.° *termo do resto por* m *vezes a potencia* m—1 *do* 1.° *termo da raiz; e o quociente será o* 2.° *termo.*

Eleva-se o binomio á potencia m, *subtrahe-se do polynomio dado, e divide-se o* 1.° *termo do novo resto pelo mesmo divisor precedente; será o quociente o* 3.° *termo da raiz.*

Continúa-se do mesmo modo: a cada novo termo achado, eleva-se toda a raiz á potencia m, subtrahe-se do polynomio dado, divide-se o 1.° termo do resto por m vezes a potencia $m-1$ do 1.° termo da raiz. Este divisor é sempre o mesmo.

Facilmente se applica esta regra á raiz 3.ª, 4.ª, 5.ª, &c.

Calculo dos Radicaes.

139. A extracção da raiz do monomio ou polynomio que não fôr potencia perfeita do gráo proposto, sómente póde indicar-se, fazendo preceder á quantidade o signal $\sqrt{}$, dentro do qual se colloca o numero que exprime o gráo da raiz: este numero toma o nome de *indice do radical*.

Esta indicação dá origem ás *expressões radicaes*, ou *irracionaes* de diversos gráos. Taes expressões admittem muitas vezes simplificações, fundadas em um principio analogo ao do n.° 84, a saber: *A raiz de um producto é igual ao producto das raizes do mesmo gráo de cada factor*. Em termos algebricos,

$$\sqrt[m]{a.b.c.d.....}=\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{c}.\sqrt[m]{d}.....$$

Com effeito, elevando estas duas expressões a potencia m, ambas conduzem ao resultado $abcd.....$; o que só é possivel sendo ellas iguaes.

Isto posto, seja a expressão $\sqrt[3]{54a^4b^3c^2}$, que não é equivalente a monomio algum racional, porque 54 não é cubo perfeito, e os expoentes de a e c não são divisiveis por 3. Porém

$$\sqrt[3]{54a^4b^3c^2}=\sqrt[3]{27a^3b^3}\times\sqrt[3]{2ac^2}=3ab\sqrt[3]{2ac^2}:$$

do mesmo modo

$$\sqrt[6]{192a^7bc^{12}}=\sqrt[6]{64a^6c^{12}}\times\sqrt[6]{3ab}=2ac^2\sqrt[6]{3ab}.$$

Nas expressões finaes as quantidades, como $3ab^4$, $2ac^2$, que precedem ao radical, e que o multiplicão, se chamão *coefficientes do radical*.

140. Outra simplificação tem lugar algumas vezes, *dividindo o indice do radical por um numero, e extrahindo a raiz do mesmo gráo da quantidade sujeita ao signal* $\sqrt{\ }$. Por exemplo, dividindo o indice por 2, e tirando a raiz quadrada á quantidade, conclue-se

$$\sqrt[6]{4a^2}=\sqrt[3]{2a}$$

$$\sqrt[4]{36a^2b^2}=\sqrt{6ab}$$

E em geral

$$\sqrt[mn]{a^n}=\sqrt[m]{a}.$$

Com effeito, para elevar um numero á potencia mn, cumpre eleva-lo á potencia m, e o resultado á potencia n; do que segue-se que extrahir a raiz mn equivale a extrahir a raiz n, e do resultado a raiz m. Uma destas raizes, nos exemplos adoptados e nos casos semelhantes, extrahe-se exactamente, a outra se conserva indicada.

141. Reciprocamente póde-se *multiplicar o indice do radical por qualquer numero*, *elevando á* potencia do mesmo gráo a *quantidade submettida ao signal* $\sqrt{\ }$.

Serve este principio para *reduzir dous ou mais radicaes ao mesmo gráo*, o que é muitas vezes util.

Multiplica-se o indice de cada radical pelo producto dos outros indices, e eleva-se a quantidade á potencia do gráo indicado pelo mesmo producto.

Assim

$$\sqrt[3]{2a} \text{ e } \sqrt[4]{(a+b)}$$

se reduzem a

$$\sqrt[12]{(2a)^4}, \text{ ou } \sqrt[12]{16a^4} \text{ e } \sqrt[12]{(a+b)^3}.$$

Passemos ás operações sobre os radicaes.

142. *Addição e subtracção.* Dous radicaes se dizem semelhantes quando são do mesmo gráo, e é a mesma a quantidade debaixo do radical.

A subtracção e addição dos radicaes que não são são semelhantes, apenas póde ser indicavel. Se fôrem semelhantes, opera-se sobre os coefficientes, cuja somma ou differença se faz coefficiente do mesmo radical. Muitas vezes reconhece-se a semelhança dos radicaes depois das simplificações, n.os 139 e 140.

Exemplos:

$$3\sqrt[3]{b}+2\sqrt[3]{b}=5\sqrt[3]{b}\ ;\ 3\sqrt[3]{b}-2\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b}.$$

$$3a\sqrt[4]{b}\pm 2c\sqrt[4]{b}=(3a\pm 2c)\sqrt[4]{b}.$$

$$\sqrt{48ab^2}+b\sqrt{75a}=4b\sqrt{3a}+5b\sqrt{3a}=9b\sqrt{3a}.$$

$$3\sqrt[6]{4a^2}-2\sqrt[3]{2a}=3\sqrt[3]{2a}-2\sqrt[3]{2a}=\sqrt[3]{2a}.$$

143. *Multiplicação e divisão.* Sejão primeiramente dous radicaes do mesmo gráo para multiplicar ou dividir, por exemplo $\sqrt[m]{a}$ e $\sqrt[m]{b}$.

E facil de vêr que

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}\ ,\ \text{e}\ \sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Porquanto elevando á potencia m os dous membros de cada uma destas igualdades, os da primeira conduzem ambos a ab, e os da segunda a $\frac{a}{b}$.

Logo: *para multiplicar ou dividir radicaes do mesmo grão, multiplicão-se ou dividem-se as quantidades affectas do signal* $\sqrt{\ }$, *e submette-se o resultado ao mesmo signal*. Havendo coefficientes, por elles se começa a operação.

Assim

$$2a\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{c}}\times-3a\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^2}{d}}=-6a^2\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^3}{cd}},$$

$$\text{ou simplificando}\ =\frac{-6a^2(a^2+b^2)}{\sqrt[3]{cd}};$$

$$\frac{\sqrt{a^2b^2+b^4}}{\sqrt{\frac{a^2-b^2}{8b}}}=\sqrt[3]{\frac{8b(a^2b^2+b^4)}{a^2-b^2}}=2b\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}.$$

Se os radicaes não fôrem do mesmo grão, cumpre reduzi-los (n.° 140).

144. *Formação de potencias e extracção de raizes.* Porquanto

$$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\ldots\ldots=\sqrt[m]{a^n};$$

para elevar á potencia n *um radical, basta elevar a* *quantidade affecta do signal.* O coefficiente se eleva á mesma potencia.

Exemplos:

$$(\sqrt[4]{4a^3})^2=\sqrt[4]{16a^6}=2a\sqrt[4]{a^2}=2a\sqrt{a}$$
$$(3\sqrt[3]{2a})^5=243\sqrt[3]{32a^5}=486a\sqrt[3]{4a^2}.$$

Quanto á extracção das raizes: cumpre *multiplicar o indice do radical pelo da raiz que se quer extrahir, sem alterar a quantidade submettida ao radical.*

Esta regra é simples corollario do n.° **139.**

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{3c}}=\sqrt[12]{3c}\ ;\ \sqrt[3]{\sqrt{5a}}=\sqrt[6]{5a}.$$

Todas as vezes que se calculão radicaes, cumpre examinar se o resultado admitte alguma das simplificações, n.° 138 e 139, e pratica-la para abreviar as expressões finaes.

145. *Observação.* O calculo dos radicaes qual fica exposto, quando se applica a expressões imaginarias, isto é, a *symbolos puramente algebricos*, soffre algumas vezes modificações e excepções, que sómente se poderáõ reduzir a preceitos geraes quando se houverem mostrado as diversas formas que póde tomar a raiz de qualquer gráo de uma expressão algebrica; o que depende de noções da theoria geral das equações que não queremos anticipar. Contentamo-nos de dar aqui alguns exemplos destas modificações com os resultados do calculo

1.° Pela regra geral

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{+a^2}=\pm a.$$

Porém o signal $\pm$ exprime a duvida se o $+a^2$ proveio de multiplicar $+a$ por $+a$, ou $-a$ por $-a$; e como esta duvida no caso presente não existe, deve adoptar-se o 2.° valor $-a$. Alias

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=(\sqrt{-a})^2=-a.$$

2.° Peça-se o producto $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$, que pela regra geral seria $\sqrt{+ab}$. Attendendo porém a que

$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$ e $\sqrt{-b}=\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$, será

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{ab}\times(\sqrt{-1})^2=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}.$$

3.° Proponha-se multiplicar $\sqrt[4]{-a}$ por $\sqrt[4]{-b}$. Empregando um artificio semelhante ao precedente para destacar de uma e outra quantidade o factor imaginario, obtemos

$$\sqrt[4]{-a}=\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-1} \text{ e } \sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{b}\times\sqrt[4]{-1};$$

$$\text{porém } \sqrt[4]{-1}\times\sqrt[4]{-1}=(\sqrt[4]{-1})^2=\left(\sqrt{\sqrt{-1}}\right)^2=\sqrt{-1}$$

$$\text{Logo } \sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{b}\times(\sqrt[4]{-1})^2=\sqrt[4]{ab}\sqrt{-1}.$$

Dos Expoentes em geral.

146. É tempo de dar a conhecer dous novos symbolos de uso mui commodo nos calculos algebricos, a saber: os *expoentes fraccionarios*, e os *expoentes negativos*. São origem destes symbolos as regras estabelecidas para a extracção das raizes, e para a divisão dos monomios.

1.° Proponha-se extrahir a raiz n da quantidade a^m. Vimos que se fôr m multiplo de n, cumpre dividir o expoente m pelo indice n. Mas, se esta divisão não é exacta, caso em que a extracção da raiz é impossivel algebricamente, póde ser indicada a operação, indicando-se a divisão dos expoentes. Assim, segundo a regra da extracção das raizes dos monomios

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}\;;\;\sqrt[4]{a^7}=a^{\frac{7}{4}}\;;\;\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

2.° Haja de dividir-se a^m por a^n: será o quociente a^{m-n}. Se porém fôr $m<n$, caso em que a divisão é impossivel algebricamente, convém indica-la praticando quanto fôr possivel a subtracção dos expoentes.

Seja p a differença absoluta entre m e n, isto é, $n=m+p$. Donde

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+p}}=a^{m-m-p}=a^{-p}\,;$$

mas tambem $\frac{a^m}{a^{m+p}}=\frac{a^m}{a^m \times a^p}=\frac{1}{a^p}$: Logo $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$.

Portanto a expressão a^{-p} é o *symbolo de uma divisão que não se póde effectuar;* e o seu verdadeiro valor é 1 *dividido por* a *elevado ao mesmo expoente* p, *tomado positivamente*. Assim

$$a^{-3}=\frac{1}{a^3},\; a^{-5}=\frac{1}{a^5}\;\&c.$$

Estas notações teem a vantagem de simplificar as expressões algebricas, omittindo os radicaes nas expressões irracionaes, e dando ás fraccionarias a fórma inteira.

Da combinação de ambas as notações precedentes resulta outra, o *expoente fraccionario negativo*.

Se houver de extrahir-se a raiz n de $\frac{1}{a^m}$, que equivale a^{-m}, será

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}$$

concluimos que as expressões $a^{\frac{m}{n}}$, a^{-p}, $a^{-\frac{m}{n}}$ são convenções fundadas nas regras d'Algebra: ellas equivalem a estas indicações respectivamente

$$\sqrt[n]{a^m},\ \frac{1}{a^p},\ \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}};$$

e podem substituir-se umas ás outras, reciprocamente.

147. *O calculo das quantidades affectas de expoentes fraccionarios ou negativos se pratica segundo as mesmas regras applicaveis aos expoentes inteiros e positivos.*

Demonstra-se este preceito em relação a qualquer das operações d'Algebra, passando das expressões dadas para a indicação de radicaes ou de fracções, effectuando as operações, e exprimindo os resultados pelos novos symbolos. Demonstremos o principio pelo que toca á *multiplicação;* e ficará claro o modo de proceder a respeito da *divisão, formação das potencias e extracção das raizes.*

Affirma-se que

$$a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{19}{15}}.$$

Ora $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$, e $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$: logo

$$a^{\frac{3}{5}} + a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{a^9} \times \sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[15]{a^{19}} = a^{\frac{19}{15}}.$$

Do mesmo modo

$a^{-7} \times a^{-3} = \frac{1}{a^7} \times \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{10}} = a^{-10}$; ora -10 é a somma algebrica dos expoentes $-7-3$.

Em geral:

$$a^{-\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} \times \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{\frac{1}{a^{mq}}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{np}}{a^{mq}}}$$

$$= a^{\frac{np-mq}{nq}};$$

e é facil de vêr que o ultimo expoente é igual á somma dos dous $-\frac{m}{n}$, e $\frac{p}{q}$.

Logo a regra da multiplicação dos monomios é sempre a mesma, quaesquer que sejão os expoentes; e o mesmo se diz da divisão, da formação de potencias, e extracção de raizes.

Applicações da Formula do Binomio.

148. Pois que as regras das operações algebricas se applicão ao caso de expoentes fraccionarios, positivos ou negativos, é natural pensar, que a lei das potencias representada pela *formula do binomio* tambem se estende a quaesquer expoentes; isto é, que o desenvolvimento de $(x+a)^m$ conserva a mesma fórma, quer m seja inteiro, quer fraccionario, positivo ou negativo: porquanto á formula do binomio foi demonstrada, analysando-se as multiplicações e outras operações necessarias á formação de uma potencia; operações e regras que não são peculiares aos expoentes inteiros e positivos. Esta illação nos parece sufficientemente clara, para dispensar uma demonstração directa: accresce que applicando a formula a expoentes fraccionarios ou negativos, os resultados obtidos se podem verificar, e achão-se sempre exactos.

A demonstração da formula do binomio em toda a sua generalidade, se deduz pelo *methodo dos coefficientes indeterminados*, de que depois trataremos: póde vêr-se na Algebra de Bourdon essa demonstração que omittimos na presente compilação.

Para fazer applicação a quaesquer expoentes, convém uma transformação na formula

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m\tfrac{m-1}{2}a^2x^{m-2} + m.\tfrac{m-1}{2}.\tfrac{m-2}{3}\,a^3x^{m-3} + \&c.;$$

transformação que consiste em pôr em evidencia o factor commum x^m, de todos os termos, o que muda a formula nesta

$$(x+a)^m = x^m\left(1 + m\frac{a}{x} + m\frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} + m\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3} + \&c.,\right).$$

Veremos que com esta nova fórma o binomio de Newton presta-se mui commodamente á maior parte das applicações.

149. *Desenvolver em serie a expressão* $\sqrt[n]{x+a} = (x+a)^{\frac{1}{n}}$.

Suppondo $m=\frac{1}{n}$, e fazendo substituições na formula precedente, obtem-se

$$\sqrt[n]{(x+a)}=x^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{x}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}-1}{2}\cdot\frac{a^2}{x^2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{n}-2}{3}\cdot\frac{a^3}{x^3}+\&c.\right)$$

$$=x^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{a}{x}-\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{a^2}{x^2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{3n}\cdot\frac{a^3}{x^3}-\&c.\right)$$

Basta observar a lei destes cinco termos para vêr o modo de formar os seguintes: façamos desta serie uma applicação numerica.

Pede-se a raiz cubica de 31. Sendo 27 o maior cubo contido em 31, façamos $x=27$, $a=4$, e ao mesmo tempo $n=3$, será $\frac{a}{x}=\frac{4}{27}$; e $x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$: portanto

$$\sqrt[3]{31}=(27+4)^{\frac{1}{3}}=3\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{27}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{16}{729}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{5}{9}\frac{64}{19683}-\&c.\right)$$

$$=3+\frac{4}{27}-\frac{16}{2187}+\frac{320}{531441}-\&c.$$

$$=3+0,14815-0,00731+0,00060-\&c.$$

O termo seguinte só terá unidades da 5.ª casa de dizima: querendo approximar sómente 4 alg. decimaes, contentamo-nos com os 5 termos acima, que reduzidos dão $\sqrt[3]{31}=3,1414$. Para maior approximação seria preciso continuar a serie.

150. A exemplo do que acabamos de praticar com a raiz cubica, se póde extrahir qualquer raiz approximadamente. *Querendo a raiz* n *de um numero, divida-se este em duas partes, uma das quaes seja potencia perfeita do grão* n; *e substituindo estas partes na formula por* x *e* a, *desenvolve-se a serie, da qual se aproveitão os termos necessarios, segundo a approximação que se deseja.*

Este methodo é tanto mais vantajoso, quanto menor é a fracção $\frac{a}{x}$; porque então os termos da serie decrescem mais rapidamente, o que habilita a calcular poucos termos. Quando a serie é pouco convergente a necessidade de aproveitar muitos termos obriga a calculos muito laboriosos. Convém pois que seja $x>a$, o mais que fôr possivel.

Applicando a regra á raiz 4.ª de 260, decompõe-se este numero em 256 e 4, e sendo 256 a 4.ª potencia de 4, faremos $n=4$, $x=256$, $a=4$; será

$$x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{256}=4\,,\ \frac{a}{x}=\frac{4}{256}=\frac{1}{64}.\ \text{Logo}$$

$$\sqrt[4]{260}=\sqrt[4]{(256+4)}=4\Big(1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{64}$$

$$-\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{4096}+\ \&c.\Big)$$

$$=4+\frac{1}{64}-\frac{3}{32768}+\ \&c.=4,01553$$

exacta até a casa dos decimos millesimos.

Acha-se do mesmo modo

$\sqrt[7]{108}=\sqrt[7]{(128-20)}=1,95204$, com a mesma approximação.

151. *Outras applicações*. A formula do binomio serve tambem para desenvolver em series as expressões algebricas. Seja a expressão

$$\frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}.$$

Na formula $(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+$ &c., faremos $m=-1$, $x=1$, $a=-z$; e substituindo teremos

$$(1-z)^{-1}=1-1.(-z)-1.\frac{-1-1}{2}(-z)^2-1.\frac{-1-1}{2}.$$
$$\frac{-1-2}{3}(-z)^3-\&c.;\text{ ou}$$
$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+\&c.$$

O mesmo resultado se obtem, praticando a divisão.

Seja segundo exemplo a expressão

$$\frac{2}{(1-z)^3}=2(1-z)^{-3}$$

Neste caso $m=-3, x=1, a=-z$; e assim

$$2(1-z)^{-3}=2(1-3\times(-z)-3\times\frac{-3-1}{2}(-z)^2$$
$$-3\times\frac{-3-1}{2}\times\frac{-3-2}{3}(-z)^3+\ \&c.,\text{ ou}$$
$$\frac{2}{(1-z)^3}=2(1+3z+6z^2+10z^3+15z^4+\ \&c.)$$

Para desenvolver em serie $\sqrt[3]{2z-z^2}$, começamos por esta transformação

$$\sqrt[3]{2z-z^2}=\sqrt[3]{2z\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\sqrt[3]{2z}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

e applicando á formula do binomio $\left(1-\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, faremos $x=1$, $a=-\frac{z}{2}, m=\frac{1}{3}$: e logo

$$\sqrt[3]{2z-z^2}=\sqrt[3]{2z}\Big(1+\frac{1}{3}\times-\frac{z}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\left(-\frac{z}{2}\right)^2$$
$$+\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\times\frac{\frac{1}{3}-2}{3}\left(-\frac{z}{2}\right)^3+\&c.$$
$$=\sqrt[3]{2z}\left(1-\frac{1}{6}z-\frac{1}{36}z^2-\frac{5}{648}z^3-\&c.\right)$$

§ 4.º METHODO DOS COEFFICIENTES INDETERMINADOS.

152. Tem este nome um methodo, empregado frequentemente em Algebra, para desenvolver em serie qualquer expressão algebrica. Para expô-lo com clareza, supponha-se que se trata de desenvolver $\frac{a}{b+cx}$ em uma serie que proceda segundo a ordem ascendente das potencias de x, inteiras e positivas. É claro que tal póde ser a serie, porque a expressão dada se reduz a $a\,(b+cx)^{-1}$, e esta potencia, desenvolvida pela formula do binomio, segue a lei indicada.

Seja pois

$$\frac{a}{b+cx}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.,$$

sendo os coefficientes A, B, C, D, E..... funcções de a, b, c, independentes de x; coefficientes que se trata de determinar, e que por isso se costuma chamar (bem que talvez sem muita propriedade) *coefficientes indeterminados*.

Para determina-los expellem-se os denominadores da equação precedente; e transpondo todos os termos para o 2.° membro e ordenando, obtem-se

$$0=(Ab-a)+(Bb+Ac)x+(Cb+Bc)x^2+(Db+Cc)x^3 \\ +(Eb+Dc)x^4\ \&c.+$$

Ora, esta equação, assim como a 1.ª de que ella se deriva, deve verificar-se qualquer que seja o valor de x; porém suppondo $x=0$, torna-se ella em

$$0=Ab-a\ ,\quad \text{donde } A=\frac{a}{b}:$$

será pois este o valor de A, independente de x; e a sua substituição na equação faz desapparecer o termo $(Ab-a)$. Supprimindo-o, e dividindo a equação por x, resulta

$$0=(Bb+Ac)+(Cb+Bc)x+(Db+Cc)x^2+Eb \\ +Dc)x^3+\&.$$

Applicando a esta 3.ª equação o mesmo raciocinio que á segunda, teremos para $x=0$

$$Bb+Ac=0\ ;\ \text{logo } B=-\frac{Ac}{b}=-\frac{c}{b}\times\frac{a}{b}=-\frac{ac}{b^2};$$

e este será o valor de B, independente de x. Supprimindo pois o termo $Bb+Ac$, e dividindo a equação por x, apparece

$$0=(Cb+Bc)+(Db+Cc)x+(Eb+Dc)x^2+ \text{\&c.},$$

e como precedentemente

$$Cb+Bc=0\ ,\ C=-\frac{Bc}{b}=-\frac{c}{b}\times-\frac{ac}{b^2}=\frac{ac^2}{b^3}.$$

Acha-se do mesmo modo

$$Db+Cc=0\ ,\ D=-\frac{Cc}{b}=-\frac{c}{b}\times\frac{ac^2}{b^3}=-\frac{ac^3}{b^4}$$

e assim por diante.

Logo

$$\frac{a}{b+cx}=\frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}x+\frac{ac^2}{b^3}x^2-\frac{ac^3}{b^4}x^3+\text{\&c.}$$

153. Reflectindo sobre a analyse presente, vê-se que o fundamento do methodo consiste neste principio: *Uma equação da fórma* $0=M+Nx+Px^2+Qx^3+$ &c., (*sendo* M, N, P, Q,..... *independentes de* x) *só poderá verificar-se para todo e qualquer valor de* x, *se fôr cada um dos coefficientes, separadamente, igual a zero.*

A analyse empregada no exemplo constitue uma demonstração deste principio, que aliás se póde dar por evidente. Porquanto, sendo M, N, P, &c. independentes de x, não póde haver reducção entre M e Nx, entre Nx e Px^2, &c.; logo deve ser

$$M=0,\ N=0,\ P=0,\ Q=0,\ \text{\&c.}:$$

formão-se deste modo tantas equações quantos coefficientes se tem de determinar.

A equação que se acha nas circumstancias da precedente, isto é, que *deve verificar-se, qualquer que seja o valor da letra, a cujo respeito se achão ordenados os termos*, toma o nome de *equação identica*: distingue-se da *equação ordinaria*, em que esta só póde ser verificada por certos valores attribuidos á mesma letra.

154. Póde acontecer que a alguma expressão algebrica não convenha a fórma do desenvolvimento, segundo as potencias inteiras de x; e nesse caso o methodo dos coefficientes indeterminados não terá immediata applicação: o mesmo calculo o advertirá. Trate-se, por exemplo, de desenvolver

$$\frac{1}{3x-x^2}=A+Bx+Cx^2+D\,x^3+\text{ \&c.}$$

Expellindo desta equação os denominadores, resulta

$$0=-1+3Ax+(3B-A)x^2+(3C-B)\,x^3+ \\ (3D-C)x^4+\text{ \&c.};$$

e applicando a esta o principio precedente, conclue-se

$$-1=0,\ 3A=0,\ 3B-A=0,\ \text{\&c.}$$

Ora, a 1.ª condição $-1=0$, sendo absurda, mostra que a serie $A+Bx+Cx^2+$ &c. não convém á fracção proposta. Se esta porém se transforma em

$\frac{1}{x}\times\frac{1}{3-x}$, poderá $\frac{1}{3-x}$ igualar-se ao polynomio $A+Bx+Cx^2$ &c., e teremos

$$\frac{1}{3x-x^2}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{3-x}+\frac{1}{x}(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.):$$

appplicando o methodo, se acha

$$A=\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{9},\ C=\frac{1}{27},\ D=\frac{1}{81}$$

Logo

$$\frac{1}{3x-x^2}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{1}{27}x^2+\ \&c.\right)$$
$$=\frac{1}{3}x^{-1}+\frac{1}{9}x^0+\frac{1}{27}x+\frac{1}{18}x^2+\&c.$$

A formula do binomio e o methodo dos coefficientes indeterminados, teem muitas outras applicações, e consequencias uteis , algumas das quaes se verão em outra parte deste curso: reunimos aqui sómente o que nos pareceu mais proprio da *Algebra Elementar*.

CAPITULO VI.

APPLICAÇÃO DOS PRINCIPIOS D'ALGEBRA ÁS PROGRESSÕES E LOGARITHMOS.

Este capitulo completa os conhecimentos de Algebra, absolutamente indispensaveis ao estudo da *Trigonometria* e da *Applicação* da Algebra á Geometria.

§ 1.° PROGRESSÕES POR DIFFERENÇAS.

155. Recordemos que se chama *progressão por differenças* uma serie de termos, cada um dos quaes excede ao precedente, ou é por elle excedido, em uma quantidade constante, que se chama *razão* da progressão.

Seja $\div a.\ b.\ c.\ d\ldots\ldots\ h.\ i.\ l.$

Chamando n o numero dos termos até o termo l inclusive, e r a razão, será, como se demonstrou na Arithmetica,

Para as progressões crescentes, $l=a+(n-1)r$
e para as decrescentes $l=a-(n-1)r$.

A primeira formula abrange a segunda, uma vez que a r se possa dar valor positivo, ou valor negativo.

A equação $l=a+(n-1)r$ determina qualquer das 4 quantidades a, r, n, e, l, conhecidas as outras tres; do que vimos exemplos na Arithmetica.

156. Proponha-se agora est'outra questão: *Achar a somma dos termos da progressão* $\div a. b. c. d. e.$ &c., continuada até o termo l inclusivamente.

Notemos em primeiro lugar, que sendo x e y dous termos em igual distancia dos termos a e l, será $x+y=a+l$, isto é, *a somma de quaesquer dous termos, equidistantes dos extremos, é igual á somma dos extremos*. Chamando p o numero dos termos que precedem a x, será

$$x=a+pr;$$

Se porém invertermos a progressão, começando pelo termo l, haverá p termos ante de y; e porque a progressão decrescente se tornou decrescente, ou viceversa,

$$y=l-pr.$$

Logo $x+y=a+l$, o que demonstra a proposição.

Daqui se segue, que *os extremos, e dous termos em igual distancia delles, formão equidifferença.*

Isto posto, consideremos a progressão dos dous modos, a que nos referimos, a saber:

$$\div a. b. c. \ldots\ldots\ldots h. i. l$$
$$\div l. i. h. \ldots\ldots\ldots c. b. a;$$

e chamando s a somma dos termos, será a somma de ambas as progressões

$$2s=(a+l)+(b+i)+(c+h)\ldots\ldots\ldots+(h+c)+(i+b)$$
$$+(l+a).$$

Ora, como ficou provado, as sommas $a+l, b+i$, &. são todas iguaes e o numero dellas é n: logo

$$2s=(a+l)n, \text{ donde } s=\frac{(a+l)\,n}{2}.$$

Exemplos. Pede-se a somma dos 50 primeiros termos da progressão ÷ 2. 9. 16. 23. 30. &.

1.° Sendo $n=50, l=2+49\times7=345$.

2.° $s=\frac{(2+345)\,50}{2}=347\times25=8675$.

Para determinar o 100.° termo e a somma dos cem termos da progressão decrescente

÷ 582.577.572. &,

faremos $n=100$, e será $l=582-99\times5=87$

e $$s=\frac{(582+87)100}{2}=33450.$$

157. As formulas $l=a+(n-1)r$, e $s=\frac{(a+l)n}{2}$, em que se achão combinadas as 5 quantidades a, l, n, r, s, prestão-se á resolução deste problema geral:

Das cinco quantidades, primeiro e ultimo termo de uma progressão, razão, numero de termos, e a sua somma, sendo dadas tres, calcular as duas restantes.

Este problema se subdivide em tantos problemas quantos são os productos distinctos de cinco letras, combinadas duas a duas, numero que póde ser determinado pela formula $\frac{m-1}{2}$ (n.° 128), a qual suppondo $m=5$ se muda em $5\times\frac{4}{2}=10$.

Estes problemas dependem de equações do 1.° grão, á excepção de dous, nos casos em que fôrem as incognitas a e n ou l e n; porque estas letras, entrando em ambas as equações, na segunda se achão multiplicadas uma pela outra; o que eleva a equação ao 2.° grão. Seguem exemplos de algumas destas questões.

158. *Conhecendo* a, l, n, *determinar* r *e* s*;* isto é, *dados o* 1.° *termo e ultimo e o numero dos termos de uma progressão, calcular a somma delles e a razão.*

Da formula $l=a+(n-1)r$, se deduz a razão $r=\frac{l-a}{n-1}$; e a segunda formula $s=\frac{(a+l)n}{2}$ dá immediatamente a somma dos termos.

O valor de r, que acabamos de determinar, ensina a inserir meios differenciaes entre dous numeros a e l.

Por exemplo, para inserir 12 meios differenciaes entre 12 e 77, basta fazer $a=12$, $l=77$, $n=14$, e será

$$r=\frac{77-12}{13}=\frac{65}{13}=5$$

Logo ÷ 12.17.22.27.32.........72.77.

A somma dos termos será $s=\frac{(12+77)14}{2}=623$.

Achar a somma dos numeros naturaes 1, 2, 3, &c. *desde* 1 *até* n. Neste caso $a=1$, $l=n$; logo

$$s=\frac{n(n+1)}{2}$$

Querendo *a somma dos* n *primeiros termos da serie dos numeros impares* 1, 3, 5, 7, &c., faremos $a=1$, $r=2$, e logo $l=1+(n-1)2=2n-1$; e $s=\frac{(2n-1+1)n}{2}$ $=n^2$, ou o *quadrado do numero dos termos.*

A somma dos n primeiros numeros pares 2, 4, & é $s=n(n+1)$.

§ 2.° PROGRESSÕES POR QUOCIENTES.

159. Chama-se progressão por quocientes a uma serie de numeros taes, que cada um dividido pelo antecedente dá sempre um quociente constante, que se chama razão da progressão. Seja esta

$$\div\!\!\div a:b:c:d:e:\ldots\ldots\ldots i:k:l.$$

Chamando n o numero dos termos até l inclusive e r a razão será, como se provou na Arithmetica, $l=ar^{n-1}$. Esta formula ensina a calcular qualquer termo, sem dependencia dos anteriores.

160. Proponha-se *achar a somma dos termos da progressão* desde a até l, inclusive.

Segundo a definição, temos

$$b=ar,\ c=br,\ d=cr,\ e=dr,\ldots\ldots\ldots k=ir,\ l=kr:$$

e sommando estas duas equações,

$$b+c+d+\ldots\ldots+k+l=(a+b+c+\ldots\ldots+i+k)r:$$

ou, chamando s a somma dos termos,

$$s-a=(s-l)r=sr-lr;\ \text{donde}\ s=\frac{lr-a}{r-1}.$$

Quando a progressão fôr decrescente, $r<1$, $l<a$, e tambem $lr<a$: em tal caso ambos os termos da fracção se tornão negativos, mas podem fazer-se positivos, dando ao valor de s esta fórma

$$s=\frac{a-lr}{1-r}.$$

A primeira formula, substituindo-se em lugar de l o seu valor ar^{n-1}, muda-se nesta

$$s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

Exemplos. 1.° Pede-se o 8.° termo, e a somma dos 8 termos da progressão $\div 2:6:18:$&c. Temos $a=2$, $r=3$, $n=8$; logo

$$l=ar^{n-1}=2\times 3^7=4374$$

$$\text{e}\ s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{2(3^8-1)}{2}=6560.$$

2.° Seja a progressão decrescente, com doze termos,

$$\div 64:16:4:1:\frac{1}{4}:\&.$$

Teremos $a=64$, $r=\frac{1}{4}$, $n=12$; logo

$$l=ar^{n-1}=64\times\left(\frac{1}{4}\right)^{11}=\frac{1}{65536}.$$

$$s=\frac{a-lr}{1-r}=\frac{64-\frac{1}{65536}\times\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{256-\frac{1}{65536}}{3}=85\frac{21845}{65536}$$

161. Suppondo $r=1$, no ultimo valor de s, muda-se elle em $\frac{0}{0}$. Este resultado, que algumas vezes é symbolo da indeterminação, outras vezes indica a existencia de um factor commum aos dous termos da fracção, o qual se anniquila na hypothese particular de que se trata. A 2.ª interpretação do symbolo é a que convém ao presente caso; porque sendo r^n-1 divisivel exactamente por $r-1$, e sendo o quociente $r^{n-1}+r^{n-2}+r^{n-3}+\ldots+r+1$, será

$$s=ar^{n-1}+ar^{n-2}+ar^{n-3}+\ldots\ldots+ar+a,$$

e no caso particular $r=1$, $s=a+a+\ldots\ldots=na$.

O factor $r-1$, commum aos dous termos da fracção, é o que a reduzia á forma $\frac{0}{0}$.

162. *Progressões infinitas*. Seja a progressão decrescente $\div\!\!\div a:b:c:$ &., de numero indefinido de termos: a formula (160) que dá a somma de n termos, póde ser transformada nesta

$$s=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

Ora, pois é decrescente a progressão, r é fracção propria, e r^n outra, que será tanto menor, quanto maior fôr n: logo, quantos mais termos se tomarem da progressão, menor se tornará a quantidade $\frac{ar^n}{1-r}$, e mais portanto a somma dos termos se approximará de ser igual a $\frac{a}{1-r}$. Assim, suppondo n superior a qualquer numero dado, ou suppondo $n=\infty$, $\frac{ar^n}{1-r}$ será menor do que qualquer numero conhecido, ou póde reputar-se igual a zero, e será neste caso

$$s=\frac{a}{1-r},$$

somma dos termos de uma progressão decrescente ao infinito.

Este valor de s é propriamente o *limite*, para o qual tendem todas as sommas parciaes que se obtem pela addição de um numero cada vez maior de termos da progressão. A differença entre estas sommas e a expressão $\frac{a}{1-r}$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, e sómente é nulla quando se tomão *infinitos* termos.

Exemplos. A progressão decrescente ao infinito

$$\div 1:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}:\&.$$

tem por expressão da somma de todos os termos

$$s=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

E na progressão $\div\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \&, s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

163. *Observação.* A ultima formula $s = \frac{a}{1-r}$ não póde ter applicação alguma ás series crescentes; porque na sua deducção se suppõe essencialmente r uma fracção propria. Sendo $r > 1$, quanto maior fôr n, maior se tornará a quantidade $\frac{ar^n}{1-r}$; e cada vez a somma dos termos $s = \frac{ar^n}{1-r} - \frac{a}{1-r}$ mais será differente de $\frac{a}{1-r}$.

164. As progressões por quocientes dão occasião aos mesmos dez problemas, que se podem propôr a respeito das progressões por differenças: porquanto as mesmas cinco quantidades se achão combinadas nas duas formulas $l = ar^{n-1}$, $s = \frac{lr-a}{r-1}$.

Ha comtudo esta distincção. Nas progressões por differenças, todos os dez problemas dependem de equações do 1.° ou do 2.° gráo: nas progressões por quocientes algumas das questões dependem de equações de gráos superiores, a saber: sempre que fôr r uma das incognitas, a equação $l = ar^{n-1}$ será do gráo $n-1$, se a fôr conhecido, e no caso contrario, do gráo n. E além disso, se n fôr incognita, teremos equação de uma natureza particular, em que a incognita é expoente, equação que não se resolve pelos principios até agora expostos. Excluindo estas combinações de incognitas, restão sómente quatro problemas, que as formulas resolvem immediatamente, a saber: sendo pedidos l e s, ou a e s, ou a e l, ou r e s. (Esta ultima depende de equação do gráo $n-1$, porém a dous termos.)

Eis-aqui as formulas transformadas, como convém a cada um destes problemas. Tratando-se de calcular

$$l \text{ e } s \ldots\ldots l=ar^{n-1}, \quad s=\frac{lr-a}{r-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$a \text{ e } s \ldots\ldots a=\frac{l}{r^{n-1}}, \quad s=\frac{l(r^n-1)}{r^{n-1}(r-1)}$$

$$a \text{ e } l \ldots\ldots a=\frac{s(r-1)}{r^n-1}, \quad l=\frac{sr^{n-1}(r-1)}{r^n-1}$$

$$r \text{ e } s \ldots\ldots r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}, \quad s=\frac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}$$

165. O ultimo valor de r resolve esta questão: *inserir meios proporcionaes entre dous numeros* a *e* l, isto é, *formar uma progressão de numero dado de termos, em que* a *e* l *sejão os extremos.*

Exemplo. Querendo inserir 6 meios proporcionaes entre 3 e 384, será

$$a=3,\ l=384,\ n=8;\ \therefore\ r=\sqrt[7]{\frac{384}{3}}=\sqrt[7]{128}=2,$$

donde a progressão $\div 3:6:12:24:48:96:192:384$.

Algumas das questões que acabamos de tratar, já forão resolvidas na Arithmetica. Aqui porém ter-se-ha occasião de notar quanto os principios d'Algebra simplificão a sua resolução, e ao mesmo tempo generalisão os resultados e consequencias.

§ 3.° THEORIA DOS EXPONENCIAES E DOS LOGARITHMOS.

Alguns dos problemas a que dão lugar as progressões por quocientes conduzem, como já vimos, a equações em que a incognita é o expoente de algum numero conhecido. Estas equações se chamão *exponenciaes*, e no caso mais simples se reduzem á fórma $a^x=b$: procuremos meio de achar um valor para x, exacto ou approximado.

Resolução da equação $a^x=b$.

166. Reduz-se a questão a *achar o expoente da potencia a que se deve elevar o numero dado* a *para formar outro numero tambem dado* b.

Seja, por exemplo $2^x=64$. Elevando 2 a 2.ª, 3.ª, 4.ª.... potencias, reconhece-se que $2^6=64$: logo $x=6$.

Seja $3^x=343$. Formando as potencias de 3, reconhece-se que $3^5=343$, donde $x=5$.

Será x numero inteiro, emquanto b fôr *potencia perfeita* de a. Seja porém a equação $2^x=6$. Por ser $2^2=4$, $2^3=8$, e achar-se 5 entre 4 e 8, será x igual a 2, mais uma fracção. Seja pois $x=2+\frac{1}{x'}$, teremos

$$2^{2+\frac{1}{x'}},= \text{ ou } 2^2\times 2^{\frac{1}{x'}}=6, \text{ ou } 2^{\frac{1}{x'}}=\frac{3}{2}$$

ou elevando ambos os membros á potencia x', $\left(\frac{3}{2}\right)^{x'}=2$.

Para achar x' procedemos por modo semelhante, elevando $\frac{3}{2}$ a diversas potencias: e porque $\left(\frac{3}{2}\right)^{1}$ $=\frac{3}{2}<2$, e $\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}>2$, segue-se $x'=1+\frac{1}{x''}$. Logo

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{x''}}=2, \text{ ou } \frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x''}}=2, \text{ ou } \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x''}}=\frac{4}{3}\ ; \text{ ou}$$

$\left(\frac{4}{3}\right)^{x''}=\frac{3}{2}$. Continuando do mesmo modo, e attendendo a que $\frac{3}{2}$ se acha entre $\left(\frac{4}{3}\right)^{1}$ e $\left(\frac{4}{3}\right)^{2}$, temos

$$x''=1+\frac{1}{x'''}\ ;\ \left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{x'''}}=\frac{3}{2}; \text{ ou } \frac{4}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x'''}}=\frac{3}{2}\ ;$$

$$\text{ou } \left(\frac{9}{8}\right)^{x'''}=\frac{4}{3}:$$

Porém $\left(\frac{9}{8}\right)^{2}=\frac{81}{64}<\frac{4}{3}$, e $\left(\frac{9}{8}\right)^{3}=\frac{729}{512}>\frac{4}{3}$; logo

$$x'''=2+\frac{1}{x^{IV}}; \text{ e assim } \left(\frac{9}{8}\right)^{2}\times\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{x^{IV}}}=\frac{4}{3},$$

$$\text{ou } \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{x^{IV}}}=\frac{256}{243}, \text{ ou } \left(\frac{256}{243}\right)^{x^{IV}}=\frac{9}{8}.$$

Transformando pela mesma maneira a ultima equação, e continuando assim até chegar a uma cujo expoente seja inteiro, será facil determinar o valor de x; porquanto da combinação das equações

$$x=2+\frac{1}{x'};\ x'=1+\frac{1}{x''};\ x''=1+\frac{1}{x'''};\ x'''=2+\frac{1}{x^{IV}};\&c.,$$

resulta . . . . . $x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x^{IV}}}}}$

Vê-se pois que o valor da incognita toma a fórma de uma fracção continua. Logo, se esta tiver um numero limitado de integrantes, o valor de x será commensuravel, e exactamente igual á ultima reduzida: para acha-lo, falta sómente effectuar as operações. Se o numero de integrantes fôr illimitado, o valor de x, que neste caso é incommensuravel (*), se achará com a approximação que se quizer; porque, desenvolvida a fracção continua, quanto mais integrantes della se tomão, mais se approxima o valor da fracção.

(*) Estas asserções se podem demonstrar, assim como distinguir, sómente pelo exame dos numeros a e b na equação $a^x=b$, quaes os casos em que x é commensuravel, ou incommensuravel. Omittimos essas demonstrações por brevidade, e porque ha meio mais commodo de resolver as equações exponenciaes. Sómente era preciso, como se verá no seguinte §, para bem fundamentar a theoria dos logarithmos, mostrar que sem dependencia delles ha possibilidade de resolver aquellas equações: e para isto bastão as noções expendidas no texto.

Theoria dos Logarithmos.

167. *Introducção*. Pelo que fica dito, sendo a constante e positivo na equação $a^x=y$, será sempre possivel, dando um valor a y, calcular o valor correspondente de x, ou exactamente, ou com a approximação que se quizer. Reciprocamente, dando valor a x, é facil determinar y. Seja primeiramente $a>1$.

Fazendo successivamente $x=0, 1, 2, 3, 4, 5......$ resulta $y=a^0$, ou $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5......$

Logo, *todos os valores de* y, *maiores que a unidade, podem ser potencias de* a, *de expoentes positivos, inteiros ou fraccionarios*. Os valores de x são tanto maiores, quanto os de y.

Seja agora $x=0, -1, -2, -3, -4, -5.......$

Será $y=a^0$, ou $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}. \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}. \frac{1}{a^5}.......$

Pelo que, *todos os valores de* y, *menores que a unidade, podem ser potencias de* a, *de expoentes negativos*. O valor de x é tanto maior (o valor absoluto) quanto menor é o de y.

Seja, pelo contrario, $a<1$, e igual a fracção $\frac{1}{m}$: então,

$$\text{sendo } x=0, 1, 2, 3, 4, 5,.......,$$

$$y=\left(\frac{1}{m}\right)^0 \text{ ou } 1, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3}, \frac{1}{m^4}, \frac{1}{m^5}........$$

e sendo $x=0,-1,-2,-3,-4,-5,\ldots\ldots$

$$y=\left(\frac{1}{m}\right)^0 \text{ ou } 1,\ m,\ m^2,\ m^3,\ m^4,\ m^5,\ldots\ldots:$$

O exame destes resultados prova, que ainda sendo $a<1$, todos os valores de y, maiores ou menores que a unidade, podem ser potencias de a, porém em ordem contraria ao caso em que $a>1$.

Resulta esta consequencia geral, que *todos os numeros absolutos podem ser produzidospor umsó numero, elevado a expoentes convenientemente determinados.*

N. B. Cumpre todavia que seja a differente da unidade; porque todas as potencias de 1 são iguaes a 1.

168. Isto posto, chama-se logarithmo de um numero, *o expoente a que é necessario elevar um numero invariavel, para formar o numero proposto.*

Collocados em uma taboa todos os numeros inteiros, e á direita de cada um o seu logarithmo, isto é, o expoente, a que é preciso elevar o numero constante a, para formar os mesmos numeros inteiros, ter-se-ha uma *taboa de logarithmos*. O numero invariavel toma o nome de base do systema de logarithmos.

Em qualquer systema, *o logarithmo da base é* 1, *e o de* 1 *é zero*. Porque, para qualquer valor de a, temos $a^1=a$, e $a^0=1$, e portanto lg. $a=1$, lg. $1=0$. (É costume designar o logarithmo de qualquer numero collocando á esquerda delle as letras lg. ou log. ou simplesmente l.)

169. Ter-se-ha notado que a noção dos logarithmos aqui dada differe da definição da Arithmetica: porém a differença não é fundamental, porquanto os dous systemas de valores deduzidos da equação $a^x=y$ (n.° 164.)

$$x=0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots$$
$$y=1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 \ldots\ldots$$

constituem as duas progressões fundamentaes a que se refere a definição arithmetica.

A noção ultima é muito mais analytica, e caracteristica: della com mais facilidade que da outra, se deduzem as propriedades dos logarithmos. Mas a utilidade destes para simplificar os calculos, fez nascer o desejo de os incluir na Arithmetica, e em falta de conhecimento das equações, especialmente das exponenciaes, não havia outro meio de estabelecer a doutrina senão o das progressões.

Demonstremos as propriedades dos logarithmos, servindo-nos da ultima definição e da equação $a^x=y$.

170. *Multiplicação*. Representem y, y', y''..... diversos numeros, x, x', x''..... os seus logarithmos, sendo a a base do systema. Conforme a definição, teremos

$$y=a^x,\ y'=a^{x'},\ y''=a^{x''},\ \ldots\ldots$$

Donde $y\times y'\times y''\times \ldots\ldots=a^x\times a^{x'}\times a^{x''}\times\ldots\ldots$ $=a^{x+x'+x''+\ldots}$ e conseguintemente

$$lg(y\times y'\times y''\times\ldots\ldots)=x+x'+x''+\ldots\ldots=lg.y+lg.y'+lg.y''+\ldots\ldots$$

Logo, *o logarithmo de um producto é igual á somma dos logarithmos dos factores.*

171. *Divisão*. Das mesmas equações acima se collige

$$\frac{y}{y'}=\frac{a^x}{a^{x'}}=a^{x-x'}, \text{ donde } lg\left(\frac{y}{y'}\right)=x-x'=lg.\ y-lg.\ y'.$$

isto é, *o log. de um quociente é igual ao log. do dividendo menos o log. do divisor.*

172. *Potencias e raizes*. Proponha-se elevar o numero y á potencia $\frac{m}{n}$. Da equação $y=a^x$ se forma

$$y^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}x}; \text{ e portanto } lg.\left(y^{\frac{m}{n}}\right)=\frac{m}{n}x=\frac{m}{n}lg.y.$$

O lg. de qualquer potencia de um numero é igual ao lg. desse numero multiplicado pelo expoente da potencia.

Suppondo $m=1$, temos

$$lg.\ y^{\frac{1}{n}}=lg\sqrt[n]{y}=\frac{1}{n}lg.\ y=\frac{lg.\ y}{n}.$$

Logo, *o lg. da raiz de um numero é igual ao lg. do numero dividido pelo indice da raiz.*

Já mostrámos na Arithmetica o uso que, para abreviar os calculos, se póde fazer destas propriedades, que pertencem a todos os systemas de logarithmos : novos exemplos destas applicações terminarão o presente capitulo. Cumpre porém, antes disso, e á vista da definição de logarithmos, expôr o modo porque póde ser calculada uma Taboa em um systema determinado.

173. Os logarithmos vulgares, que a Taboa de Callet contém até o numero 108000, pertencem ao systema em que a base $a=10$: dependem elles por tanto da equação $10^x=y$. Fazendo successivamente $y=1$, 2, 3, 4, 5....., será preciso resolver estas equações

$$10^x=1\ ;\ 10^x=2\ ;\ 10^x=3\ ;\ \&c.,$$

a cada uma das quaes se applicará o methodo, n.° 163. É porém de notar que basta calcular os log. dos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11,..... porque segundo o que fica provado

$$\begin{aligned} lg\ 4 &= 2\times lg\ 2 \\ lg\ 6 &= lg2+lg\ 3 \\ lg\ 8 &= 3\times lg\ 2 \\ lg\ 12 &= lg4+lg\ 3 \end{aligned}$$

e assim por diante.

174. Calculada a taboa de logarithmos de um systema, é facil construir a de outro qualquer. Com effeito, seja b a base do systema que se pretende calcular; e X o logarithmo de um numero N, no mesmo systema, designando-se o do systema conhecido por $lg.\ N$. Teremos $b^X=N$, e tomando os log. de ambos os membros, no systema já calculado:

$$Xlg.\ b=lg.\ N,\ \text{donde}\ X=\frac{lg.\ N}{lg.\ b}.$$

Logo, o lg. de um numero em qualquer systema a determinar, é igual ao lg. do mesmo numero em outro systema já conhecido, dividido pelo lg. da nova base tomado no mesmo systema conhecido.

O que fica dito do numero N se applica a todos os outros, os quaes é necessario dividir por $lg.\,b$, ou multiplicar por $\frac{1}{lg.\,b}$. Este multiplicador invariavel se chama o MODULO da nova Taboa, em relação á outra.

175. *Uso das Taboas.* Em tudo o que se segue suppõe-se o conhecimento da Taboa de logarithmos de Callet, á qual na Arithmetica já nos referimos, e que contém até 108000 os logarithmos do systema cuja base é 10. Possue este systema propriedades que o tornão preferivel a outro qualquer, para commodidade dos calculos numericos: propriedades, já expostas na Arithmetica, e que são corollarios da equação $10^x = y$, peculiar ao systema que nos occupa. Suppondo nella

$$x=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots\ n-1;\ n;$$

resulta $y=1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ 10000; \ldots 10^{(n-1)}; 10^n;$

E sendo

$$x=0;\ -1;\ -2;\ -3;\ -4; \ldots -(n-1);\ -n$$

$$y=1;\ 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001; \ldots (0,1)^{n-1};\ (0,1)^n$$

Destas series facilmente se collige, como vimos na Arithmetica, que:

1.° *Os logarithmos dos numeros maiores que* 1 *são positivos, e negativos os das fracções proprias.*

2.° *A caracteristica de qualquer logarithmo tem tantas unidades, quantas letras menos uma tem o numero na parte inteira.*

3.° *Quando dous ou mais numeros só differem na posição da virgula, isto é, são decuplos uns dos outros; os seus logarithmos tem a mesma parte decimal* (só differem na caracteristica).

Funda-se nestes principios o uso das Taboas de Callet.

176. *Logarithmos das fracções.* O calculo destes logarithmos não foi desenvolvido completamente na Arithmetica, porque para dar-lhe a necessaria extensão, cumpria primeiramente estabelecer as regras do calculo das quantidades negativas. Actualmente as applicações nenhuma difficuldade offerecem, tendo toda a generalidade as propriedades demonstradas (n.° 167 a 169) porque podem os valores de x na equação $a^x=y$ ser positivos ou negativos.

Quando pois se houverem de sommar ou diminuir logarithmos positivos, ou negativos, ou uns e outros, applicando as regras da addição e da subtracção algebrica, será facil chegar ao resultado e determinar o seu signal.

177. O emprego dos *complementos* (Arith.) dá occasião a considerar-se debaixo de outra fórma os logarithmos das fracções, a saber: com a caracteristica positiva e sómente a dizima negativa; fórma que algumas vezes póde ser commoda. Procuremos por exemplo o logarithmo da fracção $\frac{7}{15}$, que é igual a $lg7-lg15=lg7+CL.lg.15-10.$

$$\begin{array}{r} lg\ 7=0{,}84509804 \\ CL.lg.15=8{,}82390874 \\ \hline \text{Somma....}\ 9{,}66900678 \\ \text{Subtrahindo 10......}-0{,}33099322 \end{array}$$

Se porém esta subtracção se fizer sómente na caracteristica, será esta $9-10=-1$, e a parte decimal 66900678 se conservará positiva. Será pois o logarithmo da fracção $-1+0{,}66900678$, que se costuma escrever deste modo $\bar{1}{,}66900678$.

Os logarithmos das fracções decimaes se achão mais expeditamente dando-lhes esta ultima fórma. Por exemplo $lg\ 0{,}00534=lg\ 534-5=2{,}72754126-5=\bar{3}{,}72754126$.

Para achar o log. todo negativo, seria necessario effectuar a subtracção de toda a parte decimal.

Do que fica dito se torna patente que o manejo das Taboas se torna mais commodo, sómente quanto ás fracções decimaes, conservando aos seus logarithmos a dizima positiva: pelo que toca ás fracções ordinarias, não é mais ou menos facil achar os seus logarithmos, de uma ou de outra fórma.

178. Em geral, são preferiveis na pratica os totalmente negativos, porque os outros complicão os calculos, tornando-os pois mais sujeitos a erros. Por exemplo

1.° A somma ou subtracção destes logarithmos deve fazer-se por partes, as dizimas e as caracteristicas, e combinar os resultados por addição ou subtracção, conforme os signaes. Tendo de subtrahir o logarithmo $\bar{5},6843907$ de $\bar{7},9750631$, primeiramente $0,9750631-0,6843907=0,2906724$; depois -5 tirado de -7 dá -2, e assim o resultado da operação é $\bar{2},2906724$.

2.° Tratando de elevar á 7.ª potencia o n.° 0,00534, para o que é preciso multiplicar por 7 o seu logarithmo, ou $\bar{3},72754126$, será necessario effectuar separadamente estas operações

$$-3\times 7=-21$$
$$0,72754126\times 7=5,09278882:$$

o resultado será $-21+5,09278882=\overline{16},09278882$.

3.° Havendo de dividir por 5 o logarithmo $\bar{1},6690068$ (extrahir a raiz 5.ª á fracção correspondente) é preciso transformar a caracteristica negativa de modo que se torne divisivel por 5. Por ser $-1=4-5$, será o log. proposto igual a $-5+4,6690069$, cuja 5.ª parte é $-1+0,9338014=\bar{1},9338014$.

Esta diversidade de operações e de signaes é na pratica cheia de inconvenientes, e exigem maior copia de attenções e cautelas do que o calculo dos logarithmos totalmente negativos. Estes ultimos portanto nos parecem preferiveis.

179. O ultimo exemplo tratado na Arithmetica talvez offereceria alguma difficuldade aos principiantes, ainda não familiarisados com o calculo dos numeros subtractivos, isto é, affectos do signal —. Actualmente, que essas noções se tem esclarecido e desenvolvido, convém repetir o mesmo exemplo, assim como praticar outros para formar o habito de calcular por logarithmos, com segurança e presteza. Este habito é indispensavel ás applicações da Trigonometria, e a todas as praticas da Pilotagem e Astronomia Nautica. Em quasi todos os problemas, resolvidos na Arithmetica e Algebra o resultado numerico se calcula mais commodamente, mediante o emprego dos logarithmos. Por meio delles tambem se resolvem as equações exponenciaes mais commodamente do que pelo processo laborioso exposto em o n.° 163.

180. *Equações exponenciaes*. Da equação $a^x=b$ se deduz $xlg.\ a=lg.\ b$, donde $x=\frac{lg.\ b}{lg.\ a}$.

Seja, por exemplo, a equação tratada no n.° 163, $2^x=6$: applicando a formula temos

$$x=\frac{lg6}{lg2}=\frac{0,7781512}{0,3010300}=2,585.$$

Calculando a fracção continua (n.° 163) até á 3.ª integrante, acha-se $x=2,6$, quasi igual ao precedente.

181. As equações exponenciaes da forma $a^x=b$ se chamão *da primeira ordem*. Podem apparecer outras da 2.ª 3.ª ordem, &c., e serão respectivamente da fórma

$$a^{b^x}=c\,,\ a^{b^{c^x}}=d\,,\ \text{e assim por diante.}$$

Qualquer dellas se póde resolver tomando logarithmos de logarithmos: daremos sómente a resolução das do 2.° gráo.

Da equação $a^{b^x}=c$ se deduz, tomando os logarithmos do 1.° e 2.° membros, $b^x lg.a=lg.c$, donde $b^x=\frac{lg.c}{lg.a}$ e tornando a tomar os logarithmos $x lg.b=lg\frac{lg.a}{lg.c}=lg.lg.c-lg.lg.a$; logo $x=\frac{lg.\,lg.\,c-lg.\,lg.\,a}{lg.\,b}$.

Seja a equação $15^{7^x}=359$, na qual $a=15, b=7, c=359$. Será

$$x=\frac{lg.\,lg.359-lg.\,lg\,15}{lg7}=\frac{lg2.5550944-lg1.1760912}{lg7}$$
$$=\frac{0,4074070-0,0704410}{0,8450980}=\frac{0.3369660}{0,8450980}=0,390$$

É facil de conhecer que nestas applicações é fraca a approximação, e mesmo difficilmente se póde ajuizar do gráo de exactidão dos resultados. Para que estes inspirassem mais alguma confiança, seria necessario recorrer a taboas de logarithmos de maior numero de algarismos: aliás raras vezes occorrem exemplos de equações exponenciaes de gráos superiores ao 1.°

182. A resolução destas equações facilita a resolução de alguns dos problemas apontados em o numero 161, e então impossiveis de resolver-se por falta de conhecimento das equações exponenciaes. Estão neste caso todos os problemas em que seja incognita n, ou o numero dos termos da progressão por quocientes; porque então a equação $l=ar^{n-1}$ se torna *exponencial*. Desta equação se deduz $r^{n-1}=\frac{l}{a}$; logo

$$(n-1)lg.\, r=lg.\, l-lg.\, a;\ \text{e}\ n=1+\frac{lg.\, l-lg.\, a}{lg.\, r}.$$

Proponha-se, por exemplo, *achar o numero dos termos da progressão que principia por* 3 *e acaba em* 6144, *sendo a razão* 2.

Neste caso $a=3$, $l=6144$, $r=2$; e substituindo na formula supra

$$n=1+\frac{lg6144-lg3}{lg2}=1+\frac{3,3113300}{0,3010300}=12.$$

183. As questões de *juros compostos* tambem muito se simplificão com o emprego dos logarithmos; e principalmente quando a incognita é o tempo em que certo capital venceu juros. A formula dos juros compostos, deduzida na Arithmetica, é

$$C=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^t$$

representando c o capital empregado, i a taxa, t o numero de annos ou de mezes, C a quantia produzida a final, a saber: a somma do capital com os juros e juros de juros. Para evitar fracções supponha-se

$$\frac{i}{100}=r,\ \text{e será}\ C=c(1+r)^t.$$

equação que resolve quatro problemas differentes, a saber:

1.° *Posta uma quantia* c *a juros compostos da taxa* r, *qual a quantia accumulada no fim do tempo* t?

A fórmula tal como se acha, resolve esta questão.

2.° *Tendo a quantia* c *empregada a juro composto pelo tempo* t *produzido a quantia* C, *qual a taxa do juro?*

$$(1+r)^t=\frac{C}{c};\ \text{logo } 1+r=\sqrt[t]{\frac{C}{c}},\ \text{e } r=\sqrt[t]{\frac{C}{c}}-1.$$

O termo $\sqrt[t]{\frac{C}{c}}$ calcula-se facilmente por logarithmos.

3.° *Qual o capital que empregado a juro composto da taxa* r *pelo tempo* t *produz a quantia dada* C?

Resolve-se dando á equação esta fórma

$$c=\frac{C}{(1+r)^t}$$

É esta uma questão de *desconto composto.*

4.° *Qual o tempo em que uma quantia dada* c, *empregada a juro composto da taxa* r *produzirá a quantia tambem dada* C?

Sendo agora t a incognita, a equação é exponencial e se resolve pelos logarithmos, deste modo

$$lgC=lgc+tlg(1+r),\ t=\frac{lgC-lgc}{lg(1+r)}$$

Exemplo. *Em quantos annos se duplicará uma quantia* c, *a juro composto de* 10 *por cento?*

Neste caso $r=0,1$; $C=2c$; e substituindo

$$t=\frac{lg2c-lgc}{lg1,1}=\frac{lg2+lgc-lgc}{lg1,1}=\frac{lg2}{lg1,1}=7a.^s\ 3\ m.^s\ 8d.^s$$

Se o capital se pretendesse triplicar, quadruplicar, &c., as formulas serião, respectivamente

$$t=\frac{lg3}{lg(1+r)},\ t=\frac{lg4}{lg(1+r)},\ \&c.$$

O tempo t é *independente da quantia empregada* c.

184. As applicações numericas das formulas algebricas algumas vezes tornão preciso achar o logarithmo de um numero negativo.

Neste caso póde-se operar como se o numero fosse positivo, e determinar segundo as regras d'Algebra o signal do resultado: este porém deverá ser verificado, porque em alguns casos particulares falha a regra precedente. Exemplos:

1.° Seja $x=-2\times 5\times -3$. Prescindindo dos signaes, $lg2\times 5\times 3=lg30$, logo $x=30$.

2.° Da equação $9^x=-3$ resulta $x=\frac{lg(-3)}{lg9}$. E porque $\frac{lg3}{lg9}=\frac{1}{2}$, será $x=\frac{1}{2}$. Sendo $9^{\frac{1}{2}}=\pm 3$, o resultado -3 verifica o valor $x=\frac{1}{2}$.

3.° Seja $x=(-8)^{\frac{5}{3}}$; $lgx=\frac{5}{3}lg(-8)$. Prescindindo do signal, e calculando, acha-se $lgx=lg32$: mas como $(-8)^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{(-8)^5}$ é resultado negativo, $x=-32$.

4.° $x=(-4)^{\frac{3}{2}}$ conduz do mesmo modo a $x=8$: mas este resultado é falso; porque $(-4)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(-4)^3}$ $\parallel \sqrt{-64}$, valor imaginario.

185. Terminamos, enunciando alguns problemas, cuja resolução será proveitoso exercicio.

1.° Problema. *Pede-se a quantia que deve ser empregada a juro simples de 9 por cento ao anno, de modo que recebendo-se 700$ réis annualmente, no fim de 15 annos fique embolsado o capital e juros?*

Solução: 5:642$520.

2.° Problema. *Sabendo-se que a população de um paiz augmenta em cada anno um centesimo do que era no fim do precedente, pergunta-se em quantos annos se tornará dez vezes maior?*

Solução: 231 annos.

3.° Problema. *De uma pipa, contendo 180 medidas de vinho, tira-se cada dia uma medida, logo substituida por outra de agua.* Pergunta-se, 1.° *quanto vinho resta no fim de 180 dias? 2.° em quanto tempo ficará o vinho reduzido á 5.ª parte?*

Solução { 1.ª parte 66,06 medidas.
2.ª » 289 dias.

FIM.

INDICE

DOS ELEMENTOS DE ALGEBRA.

FIM DO INDICE.

ERRATA.

Paginas.	Linhas.	Erros.	Emendas.
7	26	$6a^3ba^2$	$6a^3b^2c$
9	11	$2a^2a^3$	$2a^2b^3$
10	23	$4ab$	$4a^3b$
14	15	$\overset{3}{2b}$	$2b^3$
27	7	$\left(2b^24-bc\right)$	$\left(2b^2-4bc\right)$
28	22	litterarias	litteraes
32	17	$+b^2$	$-b^2$
»	»	$+ab^4$	$-ab^4$
42	23	$=x\frac{c+bn}{a+b}$	$x=\frac{c+bn}{a+b}$
45	26	*de x*	*de y*
64	15	76^3	$7b^3$
67	2	$=\frac{b}{a}$	$x=\frac{b}{a}$
83	12	$\frac{b}{h}=y$	$\frac{b}{h}y=$
88	4	$3=y$	$=3y$
»	20	$a2,=$	$a=2,$
»	21	$y4=7$	$y=47$
91	12	infintios	infinitos
93	1	$b=$	$=b$
94	1	$x3=$	$x=3$
»	24	$x-71=5v$	$x-7=15v$
99	14	$8a^3b$	$8a^3b^2$
104	3	$24ab$	$24ab^3$

ERRATA.

Paginas.	Linhas.	Erros.	Emendas.
109	8	$\frac{p \pm \sqrt{q}}{a}$	$\frac{a}{p \pm \sqrt{q}}$
112	13	$\frac{2}{p}$	$\frac{p}{2}$
114	14	conforme	forme
118	18	$\frac{q^2}{4}$	$\frac{p^2}{4}$
122	12	$\frac{2ab}{b-c}$	$\frac{2ab}{b-c}x$
»	13	n.° 75	n.° 99
128	17	n.° 90	n.° 101
130	21	n.° 107	n.° 101
133	4	n.° 104	n.° 116
142	16	§ 29	§ 2.°
145	13	20904551	2090455
151	17	n.° 84	n.° 86
154	14	$\sqrt{\ }$	$\sqrt[3]{\ }$
159	4	$+$	$\times$
»	9	$\sqrt[np]{\frac{1}{a^{mq}}} \times \sqrt[nq]{a^{nq}}$	$\sqrt[nq]{\frac{1}{a^{mq}}} \times \sqrt[nq]{a^{pn}}$
161	18	$\frac{16}{729}\times$	$\frac{16}{729}+$
168	6	18	81
171	22	$\frac{m-1}{2}$	$m.\frac{m-1}{2}$
179	23	5	6
192	6	$lg\frac{lga}{lgc}$	$lg\frac{lgc}{lga}$

Rio de Janeiro. Typographia Universal de LAEMMERT, rua dos Invalidos, 61 B.