

Rio, 9⁵/912

J. A. C. G. G. G.

530
COL
TRA

TRAITÉ
DE MÉCANIQUE

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE

PAR

ÉDOUARD COLLIGNON

Ingénieur en chef des ponts et chaussées, Répétiteur à l'École polytechnique
Inspecteur de l'École des ponts et chaussées

12090. — PARIS, IMPRIMERIE A. LAHURE
9, Rue de Fleurus, 9

QUATRIÈME PARTIE

DYNAMIQUE

LIVRES V, VI ET VII

DEUXIÈME ÉDITION

revue et augmentée

OR
531.01
C699
v.4

I.F. U.F.R.J.	
BIBLIOTECA	
REGISTR.	DATA
068	15/4/97

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET C^o
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

—
1885



AVERTISSEMENT

L'abondance des matières que nous avons eu à introduire dans la seconde édition de notre *Traité de Mécanique*, nous a forcé de diviser en deux tomes distincts le quatrième et dernier volume de l'édition primitive. Le tome IV, que nous publions aujourd'hui, correspond seulement à la première moitié de l'ancien quatrième volume.

La fin de l'ouvrage, comprenant les *Compléments* (attraction, mécanique analytique, mécanique vibratoire) avec les additions que les divers sujets nous paraissent comporter, formera un cinquième volume et paraîtra prochainement. Nous y ajouterons un recueil de questions sur toutes les parties de la mécanique, et une *table alphabétique générale* pour faciliter les recherches dans l'ensemble de l'ouvrage.

Paris, 30 mai 1885.

Ed. C.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE

TROISIÈME PARTIE DYNAMIQUE

LIVRE V DU MOUVEMENT DANS LES MACHINES

CHAPITRE PREMIER

DISCUSSION DE L'ÉQUATION DES FORCES VIVES.

1. Nous avons étudié à la fin de la Statique l'équilibre des machines simples; nous avons admis alors, et depuis nous avons démontré (III, § 178), que les lois de l'équilibre s'appliquent également au mouvement uniforme. Nous nous occuperons dans ce livre du problème général des machines en mouvement. Comme les machines sont en général destinées à prendre un mouvement déterminé, et que pour cette raison on en assujettit les parties à des liaisons qui rendent ce mouvement seul possible, comme, en d'autres termes, les machines sont presque toutes des *systèmes à liaisons complètes*, une seule équation est nécessaire pour définir le mouvement de tout le système mobile, la connaissance de la vitesse d'un point particulier suffisant pour qu'on puisse en déduire les vitesses de tous les autres. L'équation qu'il convient généralement de

prendre pour étudier le mouvement d'une machine est l'équation des forces vives.

Cette équation établit une relation entre l'accroissement de la force vive d'un système d'une position à une autre et la somme des quantités de travail développées par les forces, intérieures et extérieures, qui sollicitent le système de la première à la seconde position. Un tel énoncé montre l'usage qu'on peut faire de l'équation des forces vives pour déterminer le mouvement d'une machine, et aussi l'insuffisance de cette même équation pour épouser les divers problèmes de mécanique auxquels donne lieu l'établissement de cette machine. L'équation des forces vives ne fait entrer en ligne de compte que les forces qui produisent un travail positif ou négatif. Elle élimine toutes celles dont le travail est nul, et ne peut servir par conséquent à les déterminer si elles sont inconnues. Or il y a, dans les machines, des forces qui produisent certains travaux, et dont la détermination exacte dépend d'autres forces qui peuvent n'en pas produire. Le frottement, par exemple, de deux pièces qui glissent l'une sur l'autre, dépend des composantes normales des pressions mutuelles qui se développent au contact de ces deux pièces; et dans l'ensemble du système, ces composantes ne produisent aucun travail. L'équation des forces vives appliquée à l'ensemble de la machine, contenant alors une inconnue, ne pourra servir à déterminer entièrement le mouvement. Il est vrai que dans certains cas on peut, en partageant le système en deux parties, et en appliquant le théorème des forces vives à chacune d'elles, déterminer les réactions mutuelles qui disparaîtraient dans l'équation appliquée au système pris dans son ensemble.

La connaissance des réactions, lors même qu'elles ne produisent point de travaux, est d'ailleurs nécessaire pour déterminer les pressions auxquelles les organes de la machine sont soumis, et pour vérifier qu'ils ont la résistance convenable. Dans la plupart des problèmes, il y a donc lieu d'appliquer, outre le théorème des forces vives, les autres théorèmes de la mécanique, pour achever de déterminer les éléments qu'il

est essentiel de connaître. C'est ainsi que nous avons employé le théorème de d'Alembert pour chercher les pressions exercées sur son axe par un corps tournant, tandis que la question du mouvement autour de l'axe pouvait être traitée à l'aide du théorème des forces vives (III, §§ 256 et 261).

2. En résumé l'établissement d'une machine comprend trois problèmes particuliers :

1° Quelle disposition convient-il de donner à la machine pour qu'elle prenne le mouvement qu'on se propose de produire? Question de cinématique.

2° Parmi tous les mouvements également possibles que la machine peut prendre d'après les formes attribuées à ses divers organes, quel est celui qu'elle prendra quand on lui appliquera le moteur et les résistances? Question de dynamique.

3° A quels efforts les organes de la machine sont-ils soumis pendant le mouvement, et quelles dimensions doit-on donner à chacun, eu égard à la matière qui le compose, pour assurer sa résistance? Question de résistance des matériaux.

On se tromperait si l'on pensait que ces trois problèmes sont entièrement distincts et qu'il est toujours possible de résoudre l'un indépendamment des deux autres. Tel mouvement, possible au point de vue géométrique, cesse d'être admissible dès qu'on tient compte des propriétés des matériaux qui composent les pièces mobiles et des forces qui leur sont appliquées. D'un autre côté la solution du second problème dépend des dimensions et des masses, que les considérations tirées de la résistance des pièces et les résultats obtenus dans le troisième problème peuvent conduire à modifier.

IMPORTANCE PARTICULIÈRE DE LA NOTION DU TRAVAIL.

3. Une des raisons qui font préférer l'équation des forces vives à toutes les autres pour l'étude des machines en mouve-

ment, c'est l'importance toute spéciale de la notion du *travail*.

L'idée de travail est empruntée à la science économique, où l'on reconnaît trois sources de production de valeur : la *terre*, ou l'ensemble des forces naturelles ; le *capital*, ou la somme des valeurs antérieurement acquises, et le *travail*, ou la mise en œuvre des éléments fournis par la terre ou le capital, en vue d'une production nouvelle. Si l'on examine attentivement les différents travaux industriels exécutés par les hommes ou les animaux, on remarque que tous se résument dans un certain effort développé par le moteur animé, accompagné d'un déplacement du point d'application de l'effort dans le sens même où il s'exerce. Quand, par exemple, un manœuvre élève le fardeau qu'il porte sur ses épaules, il y a dans le service qu'il rend deux éléments distincts : le poids du fardeau qui pèse sur lui, et la quantité dont il élève verticalement ce poids. Le produit de ces deux quantités mesure le service rendu ; on double en effet ce service de deux manières, soit en doublant le poids élevé et en conservant la même hauteur, soit en doublant la hauteur et en conservant le fardeau. Le déplacement du poids est essentiel à l'idée de travail, car s'il s'agissait seulement pour l'ouvrier de soutenir le fardeau sans le faire changer de place, on pourrait substituer à l'ouvrier un support inerte, qui rendrait le même service sans fatigue, et par conséquent à moins de frais.

De même, quand une voiture est tirée par un cheval, l'effort du cheval déplace la voiture, malgré les résistances développées par le frottement des essieux et le roulement sur le sol, et malgré l'action de la pesanteur, si le chemin parcouru est en rampe. On trouve ces deux éléments, *force* et *déplacement*, dans tous les travaux industriels, tels que la préparation des métaux, du bois et des pierres, la torsion des fils, le peignage des laines, le labourage des champs, l'écrasement du grain entre les meules, etc. On a été conduit par là à étendre la définition du travail et à l'appliquer à toutes les forces, et on a appelé *travail d'une force* F la somme des produits $F \cos \mu ds$ de la force par la projection, sur sa propre

direction, des éléments que son point d'application a successivement parcourus ; c'est une quantité complexe, homogène au produit PH d'un poids P élevé à une hauteur H .

4. L'*unité de travail* est le travail correspondant à un poids égal à l'unité de force, élevé d'une hauteur égale à l'unité de longueur ; c'est le travail que représente l'élévation à 1 mètre du poids de 1 kilogramme. On l'appelle pour cette raison le *kilogrammètre*. L'idée de temps reste étrangère à cette définition. Un kilogrammètre représente le fait complexe de l'élévation d'un kilogramme à un mètre de hauteur, ou tout autre fait équivalent, sans rien affirmer du temps que l'opération a pu prendre. Comme le temps a une importance capitale dans l'industrie, on ne se contente pas en général d'évaluer les travaux des forces, on tient encore à les rapporter aux durées que ces travaux ont exigées ; de là une nouvelle idée, celle du *travail par seconde*, notion plus complexe encore que l'idée de travail simple. Le travail d'une force par seconde est, pour ainsi dire, la *vitesse du travail* que cette force produit ; c'est la mesure de la *puissance d'une source de travail*. On peut l'évaluer en donnant le nombre de kilogrammètres produit par la source dans l'unité de temps ; mais un usage emprunté aux mécaniciens anglais a fait adopter pour cette évaluation une unité particulière, à laquelle on donne le nom de *cheval-vapeur* (horse-power). On appelle cheval-vapeur un travail de 75 kilogrammètres accompli en 1 seconde. L'évaluation sur laquelle cette convention repose est entièrement arbitraire, mais elle est aujourd'hui consacrée.

FORME DE L'ÉQUATION DES FORCES VIVES APPLIQUÉE AUX MACHINES.

5. Le théorème des forces vives consiste dans l'égalité

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 = \sum \int F \cos \mu ds,$$

qu'on peut écrire aussi

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 = \sum \int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Quand on l'applique à la théorie générale des machines, il est préférable de l'écrire de la manière suivante :

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 = T_m - T - T_r + P(z_0 - z),$$

en distinguant en plusieurs classes les travaux des différentes forces. Le terme T_m représente le *travail moteur*, ou le travail de la puissance appliquée à la machine : c'est un terme toujours positif. Le terme $-T$ représente le *travail utile*, c'est-à-dire le travail de la résistance principale que la machine est destinée à vaincre. Ce terme n'englobe pas la totalité du travail négatif; car, en dehors de la résistance principale, le mouvement de la machine ne peut s'accomplir sans qu'il se développe des frottements, des déformations de pièces, peut-être des chocs, en tous cas des échauffements d'organes en contact, ce qui représente autant de résistances accessoires, improprement nommées *résistances passives*. C'est la somme des travaux de ces résistances que nous représentons par le terme négatif $-T_r$. Enfin, il est possible que le centre de gravité de la machine change de hauteur par suite du mouvement de ses diverses parties. Dans ce cas, la pesanteur agit comme puissance tant que le centre de gravité s'abaisse, et comme résistance tant qu'il s'élève. Pour faire rentrer le *travail de la pesanteur* dans les termes déjà écrits, il faudrait donc qu'on le comprît tantôt dans le terme T_m , tantôt dans le terme négatif $-T_r$; pour éviter cette discussion, il n'y a qu'à isoler le travail de la pesanteur dans un terme spécial, $+P(z_0 - z)$; P représente le poids total de la machine, z_0 la hauteur de son centre de gravité au-dessus d'un certain plan horizontal à l'époque ou dans la position où les vitesses sont représentées par v_0 , et z la hauteur du centre de gravité au-dessus du même plan, à l'époque ou dans la position où les vitesses sont désignées par v . De cette manière le terme relatif à la pesanteur porte son signe avec lui. Il importe de ne pas oublier qu'il s'agit ici du *travail de la pesanteur sur la machine elle-même*. Le travail moteur T_m peut en effet être fourni par la

pesanteur, agissant sur un corps étranger à la machine, de même que le travail utile peut consister dans l'élévation d'un poids. Par exemple, lorsqu'une chute d'eau met en mouvement une roue hydraulique, le travail moteur est bien dû à l'action de la pesanteur sur la masse d'eau que reçoit la roue; et si cette roue hydraulique met en mouvement un treuil au moyen duquel on soulève des fardeaux, c'est encore le travail de la pesanteur sur ces fardeaux que la machine sera destinée à vaincre: ce sera donc le travail utile qui formera dans l'équation le terme $-T$. Au contraire le terme $P(z_0 - z)$ s'applique spécialement aux pièces mêmes de la machine. Ce terme conduit à partager les machines en deux grandes classes: les machines *fixes*, et les machines *mobiles*.

Les parties d'une machine fixe s'écartent généralement peu d'une position moyenne; il en résulte que leur centre de gravité reste toujours compris entre deux plans horizontaux peu distants l'un de l'autre. Le terme $P(z_0 - z)$ n'a donc généralement qu'une valeur assez limitée, la plupart du temps négligeable. Les machines mobiles ne sont pas soumises à la même restriction; une locomotive, par exemple, peut passer successivement par des altitudes très différentes, de sorte que le terme $P(z_0 - z)$ acquiert dans ce cas des valeurs qu'on ne devra plus négliger.

DISCUSSION DE L'ÉQUATION DES FORCES VIVES APPLIQUÉE A UNE MACHINE.

6. Pour simplifier cette discussion, nous considérerons une machine fixe, destinée à produire un travail utile sensiblement constant. La machine part du repos lorsqu'on fait agir le moteur; on introduit successivement les diverses résistances à vaincre; il arrive bientôt un instant où *le régime est établi*, c'est-à-dire où le mouvement des divers points de la machine est sensiblement uniforme. Plus tard on veut arrêter la machine, et pour cela on supprime le moteur. Alors les vitesses décroissent avec plus ou moins de rapidité, et la machine rentre

dans le repos. Son mouvement, considéré dans son ensemble, peut donc se partager en trois phases distinctes : la *mise en train*, le *régime uniforme*, enfin l'*arrêt*.

7. *Première phase. Mise en train.* — A l'origine du mouvement, toutes les vitesses sont nulles. Nous ferons donc $v_0 = 0$. Supposons, ce qui est au moins vrai approximativement puisque la machine est supposée fixe, que le travail de la pesanteur soit nul ou négligeable. L'équation prendra la forme

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 = T_m - T - T_r.$$

Le premier membre est toujours positif; le second l'est donc aussi, et par conséquent pendant toute cette première phase le travail moteur T_m est plus grand que la somme des travaux résistants, $T + T_r$, pris en valeur absolue. Si l'on devait tenir compte du travail de la pesanteur, on poserait

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 = (T_m + Pz_0) - (T + T_r + Pz),$$

et on en conclurait de même

$$T_m + Pz_0 > T + T_r + Pz.$$

Cette inégalité est vraie quelque loin qu'on prolonge la première phase, pourvu que la machine soit encore en mouvement. La différence du travail positif dépensé au travail négatif produit est égale à la demi-force vive de la machine à l'instant où l'on arrête l'évaluation des travaux.

8. *Deuxième phase. Régime uniforme.* — Dans la seconde phase, les vitesses sont sensiblement constantes, ou du moins, si elles sont variables, elles oscillent pour chaque point entre deux valeurs extrêmes peu différentes, et repassent successivement par les mêmes valeurs. En général, on s'attache à produire dans les machines, une fois le régime établi, le *mouvement périodiquement uniforme*, en vertu duquel les vitesses de chaque point reprennent les mêmes valeurs au bout d'intervalles de temps égaux entre eux. Chaque intervalle constitue une *période*. Si de plus la différence des

vitesses extrêmes, pour chaque point, reste suffisamment petite, on aura réalisé un mouvement que l'on peut dans la pratique considérer comme sensiblement uniforme.

° S'il en est ainsi, choisissons les deux époques entre lesquelles nous appliquons l'équation des forces vives, de manière que leur intervalle contienne un nombre entier de périodes; nous aurons constamment pour chaque point $v = v_0$, et l'équation des forces vives deviendra

$$0 = T'_m - T' - T'_r + P(z'_0 - z').$$

En général, chaque période ramène aussi le centre de gravité à la même hauteur, de sorte qu'on a $z'_0 = z'$; l'équation se réduit donc à

$$T'_m = T' + T'_r,$$

ce qui montre que le travail moteur transmis à la machine pendant un nombre quelconque de périodes est égal au travail résistant. C'est la condition nécessaire du mouvement périodiquement uniforme.

9. *Troisième phase. Arrêt.* — La troisième phase est caractérisée par la suppression du travail moteur; elle se termine au moment où la machine revient au repos. On fera donc dans l'équation $v = 0$, et on donnera à v_0 la valeur v de la vitesse à la fin de la phase du mouvement régulier. L'équation devient

$$-\sum \frac{1}{2} mv^2 = -T'' - T''_r + P(z''_0 - z''),$$

ou bien

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 = T'' + T''_r - P(z''_0 - z'').$$

Supprimons encore le terme $P(z''_0 - z'')$ qui a peu d'importance dans une machine fixe, et il viendra

$$\sum \frac{1}{2} mv^2 = T'' + T''_r.$$

La demi-force vive, à l'époque de la suppression du moteur, est donc égale au travail résistant que la machine est suscep-

tible de produire jusqu'à extinction de ses vitesses. Admettons que les vitesses v qui terminent la seconde phase, sont les mêmes que celles qui ont terminé la première, ce qui serait rigoureusement vrai si dans la seconde phase l'uniformité du mouvement était absolue; l'excès de travail moteur communiqué à la machine pendant la mise en train réapparaîtra alors pendant la phase d'arrêt pour prolonger le travail de la machine.

10. Si l'on considère enfin le mouvement entier de la machine depuis le moment où elle entre en service jusqu'au moment où elle revient au repos, on a à l'origine $v_0 = 0$, à la fin $v = 0$, et par suite, en négligeant toujours le travail de la pesanteur, qui d'ailleurs se trouve identiquement nul quand la machine revient à sa position primitive,

$$T_m = T + T_r,$$

T_m désignant ici le travail moteur total reçu par la machine, T le travail utile, et T_r le travail des résistances accessoires. Le travail moteur est donc égal au travail résistant, soit que l'on considère une ou plusieurs périodes du mouvement quand le régime est établi, soit que l'on considère la totalité du mouvement, depuis la mise en train jusqu'à l'arrêt complet. On peut encore admettre l'équation $T_m = T + T_r$ à titre d'approximation pour un intervalle quelconque, en supprimant dans l'équation des forces vives tous les termes essentiellement limités, $\Sigma \frac{1}{2}mv^2$, $\Sigma \frac{1}{2}mv_0^2$, $P(z_0 - z)$, et en n'y conservant que ceux qui grandissent indéfiniment.

11. Cette égalité conduit à la définition du rendement de la machine. On appelle rendement le rapport $\frac{T}{T_m}$ du travail utile produit au travail moteur absorbé. Ce rapport est toujours moindre que l'unité; plus il approche de l'unité, plus la machine est parfaite au point de vue mécanique. La différence $1 - \frac{T}{T_m}$, égale à $\frac{T_r}{T_m}$, est le rapport du travail des résistances accessoires au travail moteur; c'est la fraction du

travail moteur consommé en pure perte par la machine. Cette fraction ne peut être nulle, et le rendement reste toujours inférieur à l'unité; il est même rare qu'il dépasse 0,60. En pratique, une machine dont le rendement atteint ou dépasse 0,75 est considérée comme excellente.

IMPOSSIBILITÉ DU MOUVEMENT PÉPÉTUEL.

12. Une machine n'est qu'une sorte d'intermédiaire entre la puissance motrice et la résistance à vaincre; l'esprit se refuse à concevoir un système qui permette d'accomplir un certain travail résistant sans intervention d'un travail moteur. Cependant certains inventeurs ont été ou sont encore à la recherche d'une machine qui serait affranchie de cette nécessité: ils cherchent une solution du problème du mouvement perpétuel. Tous les essais qui ont été faits jusqu'à présent pour installer une pareille machine sont restés sans résultat. Les inventeurs se sont ruinés dans leurs tentatives, sans avoir même approché d'une solution acceptable. Cet insuccès continu démontrerait à lui seul que le problème est insoluble; mais les principes de la mécanique conduisent plus vite et à moins de frais à la même conclusion.

L'idée du mouvement perpétuel est sans doute née de l'observation des mouvements du système solaire. Le soleil, les planètes, les satellites, constituent un ensemble dont le mouvement paraît assuré pour toujours; nous dirions même, est assuré à jamais, si la résistance des milieux ne pouvait pas modifier à la longue les conclusions tirées de l'hypothèse des mouvements accomplis dans le vide absolu. Quoi qu'il en soit, admettons que le mouvement du système solaire mérite la qualification de perpétuel. Ce système a-t-il la moindre analogie avec les machines qu'on propose d'appliquer à l'industrie? Le système solaire n'est pas une machine produisant du travail; c'est un ensemble de masses soumises à des forces déterminées, et sur lesquelles s'opèrent de continus échanges

entre le travail de ces forces et les forces vives dont les masses sont animées. Réduisons, par exemple, le système au soleil et à une planète. La planète, au bout d'une révolution entière, se retrouve dans la position qu'elle occupait d'abord, et possède la même vitesse; le travail des forces qui ont agi sur elle pendant le parcours entier de son orbite est donc rigoureusement nul, et il n'y a, par conséquent, aucun travail créé par le mouvement qui s'est accompli.

On arriverait au même résultat en considérant certains mouvements produits sur la terre. Tout mouvement qui se renouvelle périodiquement pendant une durée indéfinie, ne représente pas l'accumulation d'un travail dont on puisse disposer pour un usage industriel, car la quantité de travail correspondante à chaque période est rigoureusement nulle. De plus, la résistance de milieux beaucoup plus denses que ceux des espaces planétaires, les frottements au contact des pièces composant la machine, en un mot les *résistances passives*, qu'on peut diminuer, mais qu'on ne peut pas supprimer tout à fait dans la pratique, absorbent peu à peu le travail des forces qui tendent à entretenir le mouvement et ramènent graduellement le système mobile au repos. Ainsi, un pendule, que l'on peut considérer dans la mécanique rationnelle comme animé sous l'action de la pesanteur d'un mouvement indéfini, s'arrête en réalité au bout d'un nombre limité d'oscillations.

13. Jusqu'ici nous avons accepté la question telle qu'elle est posée par les inventeurs, ou plutôt telle qu'elle résulte de l'interprétation naturelle des mots *mouvement perpétuel*.

Le problème qu'ils prétendent résoudre est tout autre. Il s'agit pour eux de construire une machine propre à vaincre des résistances et, comme telle, applicable à l'industrie; or ils commencent tous par faire abstraction de ces résistances, et par chercher un appareil doué, sous l'action de certaines forces, d'un mouvement indéfiniment prolongé. Qu'ils aient découvert un tel appareil, ils ne seraient pas pour cela plus près du véritable but à atteindre; car une machine marchant indéfini-

ment à vide ne se retrouverait plus dans les conditions qui assurent la conservation de son mouvement, si on lui appliquait les résistances utiles qu'elle est destinée à surmonter.

Ces mots *mouvement perpétuel* sont donc doublement inexacts: d'abord ils indiquent la continuation indéfinie d'un mouvement, phénomène inadmissible dans la mécanique pratique; ensuite, ils supposent qu'un mouvement indéfiniment prolongé pourrait servir à produire indéfiniment du travail utile, nouvelle erreur plus grossière encore que la première.

14. L'équation des forces vives fixe les idées à cet égard, en faisant apprécier avec exactitude la limite de ce qui est possible.

La demi-force vive, $\Sigma \frac{1}{2} mv^2$, d'une machine à un instant donné, représente le travail résistant que cette machine peut produire sans travail moteur, jusqu'à extinction de sa vitesse. C'est une quantité finie; en aucun cas, la machine ne possède donc en soi une source indéfinie de puissance motrice.

Un travail moteur est nécessaire pour faire sortir la machine du repos, et l'amener à un degré quelconque de vitesse.

Il est impossible que le travail moteur soit inférieur au travail utile. Appliquons, en effet, l'équation des forces vives depuis l'origine du mouvement jusqu'à un instant quelconque. Nous aurons

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = (T_m + Pz_0) - (T + T_r + Pz).$$

Le premier membre étant positif, le second l'est aussi; donc

$$T_m + Pz_0 > T + T_r + Pz,$$

le signe $>$ n'excluant pas l'égalité, pour comprendre le cas où la machine serait revenue au repos.

Si la machine est fixe, ce que nous supposons ici, on peut

s'arranger pour que z soit égal ou supérieur à z_0 ; alors on aura simplement

$$T_m > T + T_r,$$

et par suite

$$T_m > T,$$

cette dernière inégalité ne pouvant plus se changer en égalité.

Il est donc impossible de concevoir une machine dans laquelle le travail utile soit supérieur au travail moteur; ou, en d'autres termes, une machine où il y ait production spontanée de travail utile.

15. L'emploi d'une machine entraîne toujours une certaine perte de travail moteur, puisqu'une partie est absorbée par le travail des résistances accessoires, tandis que le reste seulement se change en travail utile. Doit-on en conclure que les machines n'ont aucune utilité, et qu'elles dissipent les forces qu'on fait agir en elles? Loin de là. « L'avantage que procurent les machines, dit Carnot¹, n'est pas de produire de grands effets avec de petits moyens, mais de donner à choisir, entre différents moyens qu'on peut appeler égaux, celui qui convient le mieux à la circonstance présente. Pour forcer un poids à monter à une hauteur proposée, un ressort à se former d'une quantité donnée, un corps à prendre par degrés insensibles un mouvement donné, ou enfin tel autre agent que ce soit à absorber un moment quelconque donné d'activité (*c'est-à-dire une quantité de travail déterminée*), il faut que les forces mouvantes qui y sont destinées consomment elles-mêmes un moment d'activité (*un travail*) égal au premier; aucune machine ne peut en dispenser. Mais comme ce moment résulte de plusieurs termes ou facteurs, on peut les faire varier à volonté, en diminuant la force aux dépens du temps, ou la vitesse aux dépens de la force, ou bien en employant deux ou plusieurs forces au lieu d'une; ce qui donne une infinité de ressources pour produire le moment d'activité nécessaire.

¹ *Principes de l'équilibre et du mouvement*, p. 255, § 258.

Mais quoi qu'on fasse, il faut toujours que ces moyens soient égaux, c'est-à-dire que le moment d'activité consommé par les forces sollicitantes (*le travail moteur*) soit égal à l'effet ou moment absorbé en même temps par les forces résistantes. »

C'est cette égalité nécessaire entre le travail moteur et le travail résistant, quelle que soit la machine dont on fasse usage, que les anciens mécaniciens exprimaient en disant : *dans les machines en mouvement, on perd toujours en vitesse ce qu'on gagne en force*. Le travail d'une force est le produit de deux facteurs, dont l'un représente l'intensité de la force et l'autre le déplacement du point, lequel est proportionnel à sa vitesse; ce produit doit être constant pour représenter un effet donné; l'un des facteurs varie donc en raison inverse de l'autre.

Il y a une autre raison pour laquelle l'emploi des machines est avantageux, bien que le travail moteur qu'on leur applique ne soit jamais entièrement utilisé. La machine n'a pas pour objet de produire ou de créer du travail, chose tout aussi impossible à l'homme que de créer de la matière; elle a pour but de *créer de la valeur*, ce qui est tout différent. Ici les considérations économiques doivent entrer en ligne de compte. Une machine parfaite, dont le rendement est très voisin de l'unité, peut être employée à des opérations industrielles désastreuses, tandis qu'une machine très imparfaite au point de vue mécanique peut, si elle est commode et employée à des travaux rémunérateurs, enrichir celui qui l'emploie. Le point de vue mécanique est tout spécial, et ce qu'on nomme travail *utile* dans la théorie des machines, peut fort bien être inutile, ou même nuisible à d'autres égards. Le travail utile produit par une batterie d'artillerie se mesure par la demi-somme des forces vives de tous les boulets que cette batterie a lancés dans une bataille. Au point de vue économique, il est permis de contester une pareille utilité.

CHAPITRE II

RECHERCHE DES TENSIONS DES LIENS DANS LES MACHINES EN MOUVEMENT.

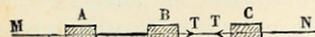


Fig. 1.

16. Supposons qu'un certain nombre de corps, A, B, C... liés entre eux par des fils inextensibles, ou par des verges inextensibles et incompressibles, parcourent une droite MN, et soient sollicités chacun par des forces données F, F', F'' ... dirigées suivant cette même droite. On demande de déterminer les tensions des liens qui réunissent le premier corps au second, le second au troisième, et ainsi de suite.

Nous conviendrons de prendre positivement les forces F, F', F'' ,... quand elles agissent dans le sens du mouvement, et négativement quand elles agissent en sens contraire.

Soit proposé de déterminer la tension T du lien qui réunit les corps B et C. Nous couperons ce lien, et nous pourrions le remplacer par une tension T , qui agira, par exemple, comme résistance sur C et comme puissance sur le groupe B et A. Soit donc M la masse totale du groupe A et B, M' la masse totale de C et des corps qui peuvent y faire suite; la vitesse v est commune à tous les points du système, puisque les liens sont de longueur constante.

Appliquons aux deux groupes le théorème du mouvement du centre de gravité; les forces F, F' et T agiront comme forces

extérieures sur le premier, les forces F'' et $-T$ sur le second, et nous aurons, par conséquent, pour le premier

$$M \frac{dv}{dt} = F + F' + T,$$

et pour le second

$$M' \frac{dv}{dt} = F'' - T.$$

Éliminant $\frac{dv}{dt}$, il vient l'équation

$$\frac{F + F' + T}{M} = \frac{F'' - T}{M'},$$

d'où l'on déduit

$$T = \frac{\frac{F''}{M'} - \frac{F + F'}{M}}{\frac{1}{M} + \frac{1}{M'}} = \frac{MF'' - M'(F + F')}{M + M'}$$

17. Cette formule est facile à généraliser. Concevons une série de n corps, dont les masses soient

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_n,$$

sollicités par les forces

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n,$$

auxquelles on attribue les signes $+$ ou $-$, suivant qu'elles agissent dans le sens du mouvement commun ou en sens contraire.

Appelons T_k la tension du lien qui réunit le corps $n^\circ k$ au corps $n^\circ (k+1)$; v étant la vitesse commune au système, nous aurons les deux équations

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_k) \frac{dv}{dt} = F_1 + F_2 + \dots + F_k + T_k$$

et

$$(m_{k+1} + m_{k+2} + \dots + m_n) \frac{dv}{dt} = F_{k+1} + F_{k+2} + \dots + F_n - T_k.$$

On en déduit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_k + F_{k+1} + \dots + F_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_1^n F_i}{\sum_1^n m_i},$$

équation que donnerait immédiatement le théorème du

mouvement du centre de gravité appliqué à l'ensemble du système, et

$$\frac{F_1 + F_2 + \dots + F_k + T_k}{m_1 + \dots + m_k} = \frac{F_{k+1} + \dots + F_n - T_k}{m_{k+1} + \dots + m_n},$$

équation qui donne pour la tension cherchée :

$$T_k = \frac{\frac{\sum_{k+1}^n F_i}{1} - \frac{\sum_1^k F_i}{1}}{\frac{\sum_1^k m_i}{1} + \frac{\sum_{k+1}^n m_i}{1}} = \frac{\sum_1^k m_i \sum_{k+1}^n F_i - \sum_{k+1}^n m_i \sum_1^k F_i}{\sum_1^k m_i + \sum_{k+1}^n m_i}.$$

Cette tension est constante si les forces F sont elles-mêmes constantes.

La condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement soit uniforme est

$$\sum_1^n F_i = 0.$$

Si cette condition est remplie, on aura

$$\sum_{k+1}^n F_i = - \sum_1^k F_i,$$

et par suite

$$T_k = \frac{- \left(\sum_1^k m_i + \sum_{k+1}^n m_i \right) \sum_1^k F_i}{\sum_1^n m_i} = - \sum_1^k F_i,$$

résultat évident, puisque la tension $-T_k$ fait équilibre sur le groupe des corps 1, 2, ... k, à la somme des forces $\sum_1^k F_i$ qui agissent sur ce groupe.

ACTION MUTUELLE DES CORPS TOURNANTS.

18. La formule que nous venons d'obtenir pour la tension des liens réunissant entre eux des corps animés d'un mouvement commun rectiligne, donne aussi la réaction mutuelle de corps tournants, moyennant certaines conventions préliminaires.

Soient d'abord deux arbres tournants O, O' , réunis soit par une courroie, soit par un engrenage, et sollicités l'un par une puissance P , l'autre par une résistance Q .

La force P est appliquée, dans le sens du mouvement, tangentiellement à la circonférence OC du premier treuil; la force Q , dans le sens opposé au mouvement, tangentiellement à la circonférence $O'D$ du second. Les deux treuils communiquent l'un à l'autre par une courroie, dont nous représentons en AB le brin moteur. Elle passe sur le tambour OA du premier treuil et sur le tambour $O'B$ du second; par conséquent, les circonférences de ces deux tambours sont animées de la même vitesse linéaire. Le brin moteur AB a une certaine tension supérieure à celle du brin résistant, et la différence de ces tensions est la force qui transmet le mouvement d'un arbre à l'autre. C'est cette différence de tension que nous représenterons par T . Si, au lieu d'une courroie, on employait pour la transmission un engrenage, T serait la réaction mutuelle des deux dents en contact, qu'on pourrait, par approximation, supposer appliquée tangentiellement à des circonférences concentriques aux roues d'engrenage, et animées des mêmes vitesses linéaires. La force T agit comme résistance sur le treuil moteur O , et comme puissance sur le treuil O' .

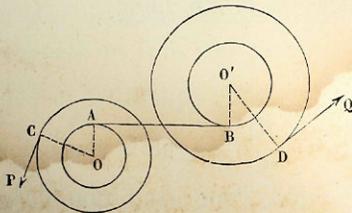


Fig. 2.

Soient $OA = a, O'B = a', OC = R, O'D = R'$. Appelons ω la vitesse angulaire du treuil O , et ω' la vitesse angulaire du treuil O' .

L'équation du mouvement du premier sera, en appelant M sa masse et K son rayon de giration par rapport à l'axe O ,

$$MK^2 \frac{d\omega}{dt} = PR - Ta.$$

De même appelons M' la masse et K' le rayon de giration du

second treuil autour de son axe O'; nous aurons

$$MK'^2 \frac{d\omega'}{dt} = Ta' - QR'$$

Les deux vitesses angulaires, ω et ω' , sont liées entre elles par la condition d'égalité des vitesses linéaires des circonférences OA et O'B. Donc

$$a\omega = a'\omega'.$$

De ces trois équations on peut tirer les accélérations angulaires $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega'}{dt}$, et la tension T. Cherchons cette dernière inconnue. Pour avoir une formule plus simple, observons que l'on peut, sans rien changer aux équations, substituer aux produits PR, QR', MK^2 , $M'K'^2$, des produits égaux formés d'autres facteurs. Calculons, par exemple, deux forces auxiliaires, P_1 et Q_1 , et deux masses auxiliaires, μ et μ' , qui satisfont aux équations

$$\begin{aligned} P_1 a &= PR, \\ Q_1 a' &= QR', \\ \mu a^2 &= MK^2, \\ \mu' a'^2 &= M'K'^2. \end{aligned}$$

En introduisant ces nouveaux facteurs dans les équations du mouvement, nous leur donnerons la forme

$$\begin{aligned} \mu a^2 \frac{d\omega}{dt} &= P_1 a - Ta, & \text{ou} & \quad \mu \times a \frac{d\omega}{dt} = P_1 - T, \\ \mu' a'^2 \frac{d\omega'}{dt} &= Ta' - Q_1 a', & \text{ou} & \quad \mu' \times a' \frac{d\omega'}{dt} = T - Q_1, \end{aligned}$$

et comme $a \frac{d\omega}{dt} = a' \frac{d\omega'}{dt}$ en vertu de la troisième équation, il viendra, en éliminant ces produits égaux,

$$\frac{P_1 - T}{\mu} = \frac{T - Q_1}{\mu'},$$

ou bien

$$T = \frac{P_1 \mu' + Q_1 \mu}{\mu + \mu'}$$

équation identique à celle qui donnerait la tension d'un lien réunissant une masse μ , sollicitée par une force mouvante P_1 , à une masse μ' , sollicitée par une force résistante Q_1 , les deux masses étant animées d'un mouvement commun rectiligne.

L'esprit de la transformation que nous avons opérée consiste à ramener les forces et les masses, sans modification des moments des forces et des moments d'inertie, à être appliquées aux circonférences OA et O'B, qui se trouvent, par suite de la liaison, animées d'une même vitesse linéaire.

Si $P_1 = Q_1$, ou si $PR = QR'$, le mouvement des deux treuils est uniforme, et l'on a

$$T = P_1 = Q_1.$$

19. Nous pouvons généraliser cette formule en l'étendant à un système d'autant de corps tournants qu'on voudra. La méthode de calcul consistera encore à ramener sur chaque treuil les forces et la masse à une circonférence animée d'une vitesse linéaire déterminée, la même pour les n treuils en mouvement.

Appelons $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ les forces qui sollicitent ces treuils; elles sont prises positivement si elles sont mouvantes, négativement si elles sont résistantes;

$R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ les rayons des circonférences tangentiellement auxquelles elles sont appliquées;

$I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$, les moments d'inertie des n treuils par rapport à leurs axes respectifs;

T_1, T_2, \dots, T_{n-1} les tensions des liens; T_1 est la tension du lien qui réunit le premier treuil au second, T_2 la tension du lien qui réunit le second au troisième, \dots, T_{n-1} la tension du lien qui rattache l'avant-dernier treuil au dernier.

Ces liens ne sont pas nécessairement appliqués à une même circonférence sur chaque treuil; nous supposons donc que le lien dont la tension est T_1 embrasse une circonférence de rayon a_1 sur le premier treuil, et une circonférence de rayon b_2 sur le second; que le lien dont la tension est T_2 réunit la circonférence de rayon a_2 sur le second treuil à la

circonférence de rayon b_3 sur le troisième, et ainsi de suite, les lettres a représentant les rayons des circonférences sur lesquelles s'enroulent les brins moteurs, tandis que les lettres b représentent les rayons des circonférences d'où les brins moteurs se déroulent.

Soient enfin $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, les vitesses angulaires des treuils. Les équations du mouvement seront

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = F_1 R_1 - T_1 a_1 \quad \text{pour le premier treuil,}$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = F_2 R_2 + T_1 b_2 - T_2 a_2 \quad \text{pour le second,}$$

.....

$$I_k \frac{d\omega_k}{dt} = F_k R_k + T_{k-1} b_k - T_k a_k \quad \text{pour le } k^{\text{me}},$$

.....

$$I_n \frac{d\omega_n}{dt} = F_n R_n + T_{n-1} b_n \quad \text{pour le dernier.}$$

Entre les vitesses ω , ou mieux entre les accélérations $\frac{d\omega}{dt}$, on a les relations :

$$a_1 \frac{d\omega_1}{dt} = b_2 \frac{d\omega_2}{dt},$$

$$a_2 \frac{d\omega_2}{dt} = b_3 \frac{d\omega_3}{dt},$$

$$a_k \frac{d\omega_k}{dt} = b_{k+1} \frac{d\omega_{k+1}}{dt},$$

$$a_{n-1} \frac{d\omega_{n-1}}{dt} = b_n \frac{d\omega_n}{dt},$$

ce qui fait en tout n équations du mouvement, et $n-1$ relations entre les accélérations angulaires, ou $2n-1$ équations, suffisantes pour déterminer les n accélérations angulaires et les $n-1$ tensions des liens.

Pour simplifier la résolution de ces $n-1$ équations, réduisons les forces et les masses, sur chaque treuil, à une circonférence animée de la même vitesse linéaire que la circonfé-

rence de rayon a_1 du premier. Sur le second treuil, ce sera la circonférence de rayon b_2 ; sur le troisième, ce sera une circonférence dont on calculera le rayon β_3 par l'équation

$$\beta_3 \omega_3 = b_2 \omega_2 = a_1 \omega_1.$$

On en déduit

$$\beta_3 = b_2 \frac{\omega_2}{\omega_3};$$

mais

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{b_3}{a_2}.$$

Donc enfin

$$\beta_3 = \frac{b_2 b_3}{a_2}.$$

De même le rayon β_4 de la circonférence à laquelle il faut réduire les forces et les masses sur le quatrième treuil est donné par l'équation $\beta_4 \omega_4 = \beta_3 \omega_3$, ou par

$$\beta_4 = \beta_3 \times \frac{\omega_3}{\omega_4} = \beta_3 \times \frac{b_4}{a_3} = \frac{b_2 b_3 b_4}{a_2 a_3}.$$

On aurait de même

$$\beta_5 = \frac{b_2 b_3 b_4 b_5}{a_2 a_3 a_4},$$

et généralement

$$\beta_k = \frac{b_2 b_3 \dots b_k}{a_2 a_3 \dots a_{k-1}},$$

La réduction des forces et des masses se fera au moyen des équations suivantes : désignons par φ les forces que l'on obtient en réduisant les forces F , par τ les forces que l'on obtient en réduisant les forces T , et par μ les masses réduites. Nous aurons entre ces diverses quantités les relations :

$\varphi_1 a_1 = F_1 R_1$	$\mu_1 a_1^2 = I_1$	$\tau_1 = T_1$
$\varphi_2 b_2 = F_2 R_2$	$\mu_2 b_2^2 = I_2$	$\tau_2 b_2 = T_2 a_2$
$\varphi_3 \beta_3 = F_3 R_3$	$\mu_3 \beta_3^2 = I_3$	$\tau_3 \beta_3 = T_3 a_3$
.....
$\varphi_n \beta_n = F_n R_n$	$\mu_n \beta_n^2 = I_n$	$\tau_{n-1} \beta_{n-1} = T_{n-1} a_{n-1}$

Substituons les valeurs des F, des I et des T dans les équations du mouvement. Après la substitution, chacune de ces équations aura un facteur commun, a_1 pour la première, b_2 pour la seconde, β_3 pour la troisième, ... β_n pour la dernière. Supprimant ce facteur, il viendra

$$\begin{aligned} \mu_1 \times a_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= \varphi_1 - T_1, \\ \mu_2 \times b_2 \frac{d\omega_2}{dt} &= \varphi_2 + \tau_1 - \tau_2, \\ \mu_3 \times \beta_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= \varphi_3 + \tau_2 - \tau_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \mu_n \times \beta_n \frac{d\omega_n}{dt} &= \varphi_n + \tau_{n-1}. \end{aligned}$$

On peut observer, en effet, que l'équation générale

$$I_k \frac{d\omega_k}{dt} = F_k R_k + T_{k-1} b_k - T_k a_k$$

devient par la substitution

$$\mu_k \beta_k \frac{d\omega_k}{dt} = \varphi_k \beta_k + \frac{\tau_{k-1} \times b_k \beta_{k-1}}{a_{k-1}} - \tau_k \beta_k;$$

or

$$b_k \beta_{k-1} = a_{k-1} \beta_k,$$

puisqu'on a à la fois

$$\beta_{k-1} \omega_{k-1} = \beta_k \omega_k$$

et

$$a_{k-1} \omega_{k-1} = b_k \omega_k.$$

L'équation devient donc

$$\mu_k \beta_k \frac{d\omega_k}{dt} = \varphi_k \beta_k + \tau_{k-1} \beta_k - \tau_k \beta_k,$$

ou, en supprimant β_k ,

$$\mu_k \frac{d\omega_k}{dt} = \varphi_k + \tau_{k-1} - \tau_k.$$

Mais

$$a_1 \frac{d\omega_1}{dt} = b_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \beta_3 \frac{d\omega_3}{dt} \dots = \beta_n \frac{d\omega_n}{dt}.$$

Par suite, l'élimination des accélérations linéaires égales, $a_1 \frac{d\omega_1}{dt}, \dots$ donne les $n-1$ équations suivantes, sous forme d'une suite de rapports égaux :

$$\frac{\varphi_1 - \tau_1}{\mu_1} = \frac{\varphi_2 + \tau_1 - \tau_2}{\mu_2} = \dots = \frac{\varphi_k + \tau_{k-1} - \tau_k}{\mu_k} = \dots = \frac{\varphi_n + \tau_{n-1}}{\mu_n}.$$

Pour obtenir une inconnue quelconque, τ_k , composons les k premiers rapports égaux, puis composons les n rapports; il viendra la proportion

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k - \tau_k}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n};$$

on en déduit

$$\tau_k = \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k) - (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k)(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n},$$

ce qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \tau_k &= \frac{(\mu_1 + \dots + \mu_k)(\varphi_1 + \dots + \varphi_k) + (\mu_{k+1} + \dots + \mu_n)(\varphi_1 + \dots + \varphi_k) - (\mu_1 + \dots + \mu_k)(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) - (\mu_{k+1} + \dots + \mu_n)(\varphi_1 + \dots + \varphi_n)}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n} \\ &= \frac{(\varphi_1 + \dots + \varphi_k)(\mu_{k+1} + \dots + \mu_n) - (\varphi_{k+1} + \dots + \varphi_n)(\mu_1 + \dots + \mu_k)}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n} \\ &= \frac{\sum_1^k \varphi_i \sum_{k+1}^n \mu_i - \sum_{k+1}^n \varphi_i \sum_1^k \mu_i}{\sum_1^n \mu_i}, \end{aligned}$$

équation de même forme que celle que nous avons obtenue au § 178.

Connaissant les valeurs des tensions fictives, on peut en déduire les valeurs des tensions réelles, puisqu'on connaît les rapports des unes aux autres.

EMPLOI DE L'ÉQUATION DES FORCES VIVES POUR TROUVER
DIRECTEMENT LA TENSION T_k .

20. Considérons isolément les deux groupes formés, l'un par les treuils n° 1, n° 2, ... n° k , l'autre par les treuils n° $k+1$, n° $k+2$, ... n° n ; le premier groupe est sollicité par les forces extérieures F_1, F_2, \dots, F_k et par la force $-T_k$, tension du lien qui réunit les deux groupes; le second, par les forces $+T_k, F_{k+1}, F_{k+2}, \dots, F_n$. Appliquons le théorème des forces vives à chaque groupe pour un déplacement infiniment petit. La force vive du premier groupe est, à un instant quelconque, la somme

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + \dots + I_k\omega_k^2;$$

la force vive du second est

$$I_{k+1}\omega_{k+1}^2 + \dots + I_n\omega_n^2.$$

On connaît les rapports de ω_1 à ω_k , de ω_2 à ω_k , de ω_3 à ω_k , et ainsi de suite; désignons-les par $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. De même on peut déterminer d'avance les rapports de ω_{k+2} à ω_{k+1} , de ω_{k+3} à ω_{k+1} , ...; appelons $\lambda_{k+2}, \lambda_{k+3}, \dots, \lambda_n$ ces nouveaux rapports.

La force vive du premier groupe s'exprimera par la somme $\omega_k^2(I_1\lambda_1^2 + I_2\lambda_2^2 + \dots + I_k)$, ou, plus brièvement, par $\omega_k^2 \sum_1^k I_i \lambda_i^2$, en convenant de regarder λ_k comme égal à l'unité.

De même la force vive du second groupe sera égale à $\omega_{k+1}^2 \sum_{k+1}^n I_i \lambda_i^2$, avec la convention de $\lambda_{k+1} = 1$.

Donnons au treuil n° k un déplacement angulaire $\omega_k dt$; il en résultera pour le treuil n° 1 un déplacement angulaire $\omega_1 dt$ ou $\omega_k \lambda_1 dt$; pour le treuil n° 2, un déplacement $\omega_k \lambda_2 dt$, et ainsi de suite; de même pour le treuil n° $k+2$ un déplacement $\omega_{k+1} \lambda_{k+2} dt$; pour le suivant un déplacement $\omega_{k+1} \lambda_{k+2} dt$, etc.

La somme des travaux des forces F et de la force $-T_k$ sera donc pour le premier groupe

$$(F_1 R_1 \lambda_1 + F_2 R_2 \lambda_2 + \dots + F_k R_k) \omega_k dt - T_k a_k \omega_k dt \\ = \left(\sum_1^k F_i R_i \lambda_i \right) \times \omega_k dt - T_k a_k \omega_k dt$$

Pour le second, le travail des forces F et de la force $+T_k$ sera de même

$$\left(\sum_{k+1}^n F_i R_i \lambda_i \right) \times \omega_{k+1} dt + T_k b_{k+1} \omega_{k+1} dt.$$

Le demi-accroissement de la force vive est égal au travail élémentaire des forces; les forces extérieures seules donnent un travail, puisqu'on admet l'invariabilité des liens.

D'un autre côté, le demi-accroissement de la force vive se réduit à la moitié de sa différentielle, la variation considérée étant infiniment petite.

On aura donc, pour le premier groupe,

$$\omega_k d\omega_k \sum_1^k I_i \lambda_i^2 = \omega_k dt \left[\sum_1^k F_i R_i \lambda_i - T_k a_k \right],$$

et pour le second

$$\omega_{k+1} d\omega_{k+1} \sum_{k+1}^n I_i \lambda_i^2 = \omega_{k+1} dt \left[\sum_{k+1}^n F_i R_i \lambda_i + T_k b_{k+1} \right].$$

On peut supprimer le facteur ω_k dans la première équation, le facteur ω_{k+1} dans la seconde; on connaît de plus le rapport constant $\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}$, de sorte qu'on peut éliminer $\frac{d\omega_k}{dt}$ et $\frac{d\omega_{k+1}}{dt}$; l'équation finale fait connaître T_k . Il serait aisé de ramener l'équation définitive à la forme que nous avons trouvée précédemment.

Remarque. — Étant donné un système de corps tournants, liés ensemble par des courroies ou des engrenages, et sollicités respectivement par des forces données F_1, F_2, \dots, F_k , agissant à des distances R_1, R_2, \dots, R_k , des axes respectifs, si l'on désigne par ω la vitesse angulaire du premier corps, et par λ_2 ,

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$, les raisons des corps suivants par rapport au premier (I, § 219), la force vive de l'ensemble des corps s'exprime à chaque instant par la somme

$$\omega^2(I_1 + \lambda_1^2 I_2 + \dots + \lambda_k^2 I_k) = \omega^2 \sum I \lambda^2,$$

et la vitesse angulaire ω est déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum FR\lambda}{\sum I\lambda^2},$$

généralisation de l'équation de l'accélération angulaire (III, § 235).

TENSION DE LA BIELLE D'UNE MACHINE A ACTION DIRECTE.

21. Soit O un arbre tournant, mis en mouvement par une bielle AB et une manivelle BO. A cet arbre est attachée une roue de treuil, OC, à laquelle est suspendu par un fil un poids P.

Une force F, donnée à chaque instant, met en mouvement la bielle et entretient le mouvement de l'arbre. La force F tire de droite à gauche, tant que le bouton B de la manivelle parcourt la demi-circonférence GBH; elle pousse au contraire la bielle vers la droite pendant que le bouton de la manivelle parcourt l'autre moitié de la circonférence HIG.

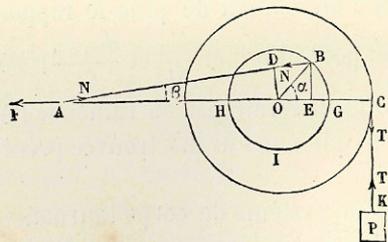


Fig. 5.

Le point A est assujéti par des glissières à suivre la droite AO qu'on suppose horizontale. On demande l'équation du mouvement du treuil, la tension du fil CK et celle de la bielle AB.

Soit T la tension du fil et N la tension de la bielle. Appelons a le rayon OC, R la longueur OB de la manivelle, L la longueur AB de la bielle; α et β , les angles GOB, OAB, le premier croissant indéfiniment dans le sens GBH, le second oscillant périodiquement entre deux limites, l'une positive, l'autre négative.

Nous ferons abstraction des frottements, ainsi que de la masse de la bielle.

Soit ω la vitesse angulaire du treuil; ωa sera la vitesse linéaire du poids P, et l'équation de son mouvement sera

$$\frac{Pa}{g} \frac{d\omega}{dt} = T - P.$$

Le treuil est sollicité par la tension du fil et par la tension de la bielle: soit OD = p la distance de la bielle à l'axe O de l'arbre tournant; soit encore I le moment d'inertie du treuil. L'équation de son mouvement est

$$I \frac{d\omega}{dt} = Np - Ta.$$

Comme nous faisons abstraction du poids et de la masse de la bielle, la tension N se retrouve la même à l'extrémité A, où elle fait équilibre à la force F et aux réactions des glissières. On a par conséquent

$$F = N \cos \beta, \text{ d'où l'on tire } N = \frac{F}{\cos \beta}.$$

Pour déterminer $p = OD$, observons que $OD \times AB$, ou pL , est égal à $AO \times BE$, car ces deux produits mesurent chacun le double de l'aire du triangle AOB. Soit $AO = x$. Nous aurons

$$x = AB \cos \beta - OB \cos \alpha = L \cos \beta - R \cos \alpha,$$

avec la relation

$$AB \sin \beta = BE = OB \sin \alpha,$$

ou bien

$$L \sin \beta = R \sin \alpha.$$

On déduit de celle-ci

$$\sin \beta = \frac{R}{L} \sin \alpha,$$

et par suite

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \alpha}$$

Donc

$$z = L \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \alpha} - R \cos \alpha$$

et

$$p = \frac{xR \sin \alpha}{L} = R \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \alpha} - \frac{R^2 \sin \alpha \cos \alpha}{L}$$

On a aussi

$$N = \frac{F}{\cos \beta} = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \alpha}}$$

L'équation du mouvement du treuil est donc

$$I \frac{d\omega}{dt} = FR \sin \alpha - \frac{FR^2 \sin \alpha \cos \alpha}{L \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \alpha}} - T \alpha$$

Cette équation, jointe à la première, détermine l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ et la tension T , en fonction de la force F et de l'angle α .

22. La méthode que nous avons suivie n'est qu'approximative, puisqu'elle néglige la masse d'une pièce AB dont le poids peut avoir une certaine importance.

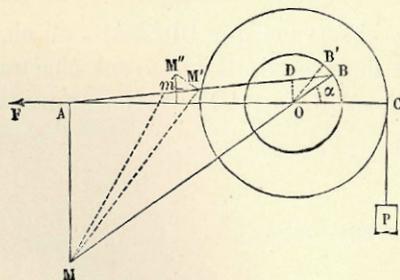


Fig. 4.

Nous supposons que le treuil soit centré, c'est-à-dire que le centre de gravité de la partie tournante soit sur l'axe O .

L'équation des forces vives permet de pousser plus loin le calcul. Elle va nous faire connaître une relation entre l'accélération angulaire du treuil, la force F et le poids P , en tenant compte de la masse de la tige AB .

Au point A , élevons une perpendiculaire AM sur la droite AO , et prolongeons le rayon OB jusqu'à la rencontre de cette ligne en M . Le point M sera le centre instantané de rotation de la bielle. Appelons ω la vitesse angulaire du treuil, et Ω la vitesse angulaire instantanée de la bielle AB autour du point M . Ces deux vitesses sont liées entre elles par la relation $MB \times \Omega = OB \times \omega$, qui exprime de deux manières différentes la vitesse linéaire du point B . La vitesse linéaire du point A est $MA \times \Omega$; celle du poids P est $OC \times \omega$.

Le centre de gravité de la bielle est un point M' , qu'on peut supposer au milieu de la longueur AB . Soit Q le poids de la bielle; $\frac{Q}{g}$ sera sa masse; appelons K son rayon de giration par rapport à l'axe projeté en M' . Le rayon de giration par rapport à l'axe projeté en M sera égal à $\sqrt{K^2 + \overline{MM'}^2}$. Le moment d'inertie de la bielle par rapport à l'axe M est donc

$$\frac{Q}{g} \times (K^2 + \overline{MM'}^2).$$

Mais dans le triangle AMB , M' étant le milieu du côté AB , on a

$$\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = 2(\overline{MM'}^2 + \overline{AM'}^2).$$

Donc

$$\overline{MM'}^2 = \frac{\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2}{2} - \overline{AM'}^2.$$

Exprimons les longueurs AM , MB , AM' en fonction de la distance $OA = x$. Nous aurons

$$AM = x \tan \alpha,$$

$$OM = \frac{x}{\cos \alpha},$$

$$MB = \frac{x}{\cos \alpha} + R.$$

On a d'ailleurs

$$AM' = \frac{1}{2} L.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \overline{MM'}^2 &= \frac{x^2 \tan^2 \alpha + \left(\frac{x}{\cos \alpha} + R \right)^2}{2} - \frac{1}{4} L^2 \\ &= \frac{x^2 \left(\tan^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) + \frac{2Rx}{\cos \alpha} + R^2 - \frac{1}{2} L^2}{2}. \end{aligned}$$

Le moment d'inertie de la bielle par rapport au point M est donc

$$\frac{Q}{g} \left(R^2 + \frac{x^2 \left(\tan^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) + \frac{2Rx}{\cos \alpha} + R^2 - \frac{1}{2} L^2}{2} \right),$$

et la force vive de la pièce est égale à

$$\frac{Q}{g} \left(R^2 + \frac{x^2 \left(\tan^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) + \frac{2Rx}{\cos \alpha} + R^2 - \frac{1}{2} L^2}{2} \right) \Omega^2,$$

fonction que nous exprimerons sous forme abrégée par $\frac{Q}{g} \Omega^2 \varphi(x)$, en observant que $\tan \alpha$ et $\cos \alpha$ sont des fonctions connues de x .

La force vive du treuil est $I\omega^2$; celle du poids P est $\frac{P}{g} \omega^2 a^2$.

Lorsque le treuil tourne d'un angle infiniment petit $dx = \omega dt$, la force vive s'accroît de sa différentielle, et la moitié de son accroissement est égale à

$$\left(\frac{P}{g} a^2 + I \right) \omega d\omega + \frac{1}{2} \frac{Q}{g} d \left(\Omega^2 \varphi(x) \right),$$

quantité qu'on doit égaler au travail élémentaire des forces. Or les forces sont au nombre de trois, savoir :

Le poids P, qui monte de la quantité adx , ce qui donne un travail négatif égal à $-Padx$;

La force F, qui produit un travail positif Fdx ;

Le poids de la bielle, qui produit un travail égal à $-Q \times M'm$, $M'm$ étant la projection verticale du déplacement $M'M'$ du centre de gravité, quand la bielle tourne autour du

point M d'un angle Ωdt . Ce terme serait assez difficile à calculer directement; au lieu d'évaluer $M'm$, remarquons que l'on peut, sans changer le travail de la pesanteur, substituer à la bielle un poids $\frac{Q}{2}$ placé au point A, et un poids $\frac{Q}{2}$ placé au point B, car la composition de ces deux poids donne un poids total égal à Q, appliqué au point M'.

Le poids $\frac{Q}{2}$ placé en A ne produit aucun travail, puisque ce point se meut horizontalement. L'autre poids $\frac{Q}{2}$, placé en B, se déplace le long du cercle d'une quantité $BB' = Rdx$, qui fait avec la verticale l'angle α , et dont la projection verticale est $R \cos \alpha dx$. Le travail de la pesanteur sur la bielle est donc

$$-\frac{1}{2} QR \cos \alpha dx.$$

L'équation des forces vives devient en définitive

$$\left(\frac{P}{g} a^2 + I \right) \omega d\omega + \frac{1}{2} \frac{Q}{g} d \left(\Omega^2 \varphi(x) \right) = Fdx - Padx - \frac{1}{2} QR \cos \alpha dx.$$

On peut d'ailleurs exprimer x en fonction de α , et Ω en fonction de ω et de l'angle α ; enfin $dx = \omega dt$. Les opérations sont assez laborieuses, mais elles n'ont rien de difficile, et elles conduisent, après l'élimination de Ω , de x et de dx , à

déterminer $\frac{d\omega}{dt}$ en fonction de la force F et de l'angle α . Pour intégrer cette équation, il faut connaître la valeur de la force F pour chaque position du système tournant.

Connaissant ω en fonction de t , on en déduira la loi du mouvement du treuil par l'intégration de l'équation $dx = \omega dt$; par conséquent la loi du mouvement du poids P. L'équation $\frac{P}{g} a \frac{d\omega}{dt} = T - P$ fera connaître alors la tension T du fil. Pour déterminer la force N exercée par la bielle sur le bouton B de la manivelle dans le sens de sa propre direction, on appli-

quera l'équation de l'accélération angulaire au mouvement du treuil considéré seul :

$$I \frac{d\omega}{dt} = N \times OD - T \times OC.$$

La force N sera la tension de la bielle au point B ; comme ici nous tenons compte de la masse de la bielle, cette tension ne sera pas la même en tous les points de la longueur AB . Pour la déterminer en chaque point, il faudrait considérer isolément des éléments infiniment petits de cette longueur; connaissant le mouvement de chaque élément, on pourra exprimer que ce mouvement est produit par les forces qui sollicitent l'élément considéré, savoir, la pesanteur et les réactions des éléments voisins. Le problème analytique qui en résulte est d'une difficulté plus élevée que ceux que nous avons résolus jusqu'ici. On voit qu'en général les réactions de deux éléments consécutifs ne sont pas dirigées suivant la tige AB : les forces d'inertie des divers éléments comprennent, par exemple, des forces centrifuges qui émanent des centres instantanés de rotation M , et qui tendent à courber la tige. De là le *fouettement des bielles* que l'on constate dans toutes les machines où le mouvement des pistons se fait avec une certaine rapidité.

CHAPITRE III

DES VOLANTS.

23. Un *volant* est une roue massive destinée à régulariser la vitesse d'une machine, une fois la marche normale établie. On sait qu'alors le mouvement de la machine est en général devenu périodiquement uniforme, d'où résulte que, pour chaque période, le travail dépensé par le moteur est égal à la somme des travaux de toutes les résistances. Cette égalité suffit pour assurer la périodicité du mouvement d'une machine, et pour ramener au bout de chaque période les vitesses de ses différents points matériels aux mêmes valeurs. Mais elle n'influe en rien sur les variations des vitesses pendant la durée de la période. C'est ici qu'on fait intervenir un volant pour restreindre l'écart entre la vitesse maximum et la vitesse minimum, et resserrer les vitesses extrêmes entre deux limites aussi rapprochées qu'on le voudra. Considérons un arbre tournant soumis à diverses forces, que nous pourrions réduire à une puissance et à une résistance. Nous supposons que le mouvement soit périodiquement uniforme et que la période comprenne un tour entier. La vitesse angulaire ω est variable pendant la période, mais elle se retrouve la même à chaque tour que l'arbre accomplit. Si l'on appelle T_m le travail moteur correspondant à un tour, et T_r le travail résistant, y compris le travail utile, on aura pour la périodicité du mouvement l'égalité

$$T_m = T_r.$$



La vitesse ω étant variable, mais revenant périodiquement à la même valeur ω_0 , a un maximum et un minimum dans l'étendue de la période; soit ω' le minimum, ω'' le maximum, I le moment d'inertie de l'arbre tournant et de toutes les masses qu'il entraîne. Les vitesses ω' et ω'' correspondront à des positions déterminées du système mobile. Appliquons le théorème des forces vives entre ces deux positions : il viendra

$$\frac{1}{2} I (\omega''^2 - \omega'^2) = T'_m - T'_r,$$

T'_m et T'_r étant les quantités de travail fournies par la puissance et la résistance quand le système passe de la position du minimum à celle du maximum. Le second membre étant une quantité déterminée, on voit que $\omega''^2 - \omega'^2$ sera d'autant moindre que I sera plus grand. Or

$$\omega''^2 - \omega'^2 = (\omega'' - \omega') \times (\omega'' + \omega').$$

La demi-somme $\frac{\omega'' + \omega'}{2}$, moyenne des vitesses angulaires extrêmes, diffère peu de la *vitesse moyenne* Ω de l'arbre tournant, quantité constante que l'on peut supposer connue. L'équation devient donc

$$I \times (\omega'' - \omega') \times \Omega = T'_m - T'_r.$$

Posons $\omega'' - \omega' = \frac{1}{n} \Omega$; la fraction $\frac{1}{n}$ sera ce qu'on appelle le *coefficient de régularisation* de la machine. Il viendra

$$I = \frac{T'_m - T'_r}{\frac{1}{n} \Omega^2}.$$

Telle est la valeur à attribuer au moment d'inertie de l'arbre tournant pour que l'écart, $\omega'' - \omega'$, entre les vitesses angulaires extrêmes soit une fraction donnée, $\frac{1}{n}$, de la vitesse angulaire moyenne. Si l'arbre n'a pas par lui-même un mo-

ment d'inertie suffisant, on devra compléter ce moment d'inertie au moyen d'une masse additionnelle, qui constituera le *volant*.

Le rôle du volant dans la marche d'une machine est indiqué par l'équation des forces vives. Au bout de la période, le volant reprend la vitesse qu'il possédait au commencement; sa force vive disparaît donc de l'équation appliquée à la période entière, et sa masse n'influe pas sur la vitesse moyenne de la machine. Mais dans l'étendue de la période, le volant tend à retarder la machine quand le travail moteur l'emporte sur le travail résistant, et tend au contraire à l'accélérer quand le travail moteur est inférieur au travail résistant. On peut le comparer à un réservoir qui se remplit quand la machine accélère sa marche, qui se vide quand il y a ralentissement, et qui tend toujours à maintenir un certain niveau moyen, correspondant à la vitesse moyenne. Le volant *emmagasine* sous forme de force vive l'excès du travail moteur, et restitue cet excès quand le travail résistant devient en excès lui-même. Nous allons passer en revue les principaux problèmes qui se présentent dans l'établissement d'un volant pour une machine à bielle et à manivelle; nous examinerons ensuite la méthode qu'il faudrait suivre dans le cas général où il s'agirait d'une machine quelconque. Enfin nous aurons à étudier l'influence des masses placées dans certaines conditions spéciales, et notamment l'influence des *volants d'outil*.

MANIVELLE SIMPLE A SIMPLE EFFET.

24. La bielle MP met en mouvement l'arbre O au moyen de la manivelle OM (fig. 5). Pour plus de simplicité, nous supposons que la bielle reste parallèle à la ligne AB. Une force constante P agit sur la bielle dans le sens MP pendant que le bouton de la manivelle décrit la demi-circonférence AMB. Au delà, aucune force ne sollicite plus la bielle, et le bouton par-

court la seconde demi-circonférence BNA en vertu de la vitesse acquise ; une résistance constante Q est appliquée tangentiellement à un cercle de rayon $OC = b$.

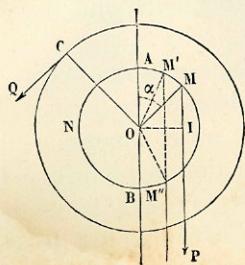


Fig. 5.

Soit a la longueur OA de la manivelle. Exprimons d'abord la périodicité du mouvement pour un tour entier de l'arbre Q . Le travail de la puissance est $P \times AB$, ou $P \times 2a$; le travail de la résistance pris positivement est $Q \times 2\pi b$. La périodicité exige qu'on ait l'équation $P \times 2a = Q \times 2\pi b$, ou bien $\frac{Qb}{Pa} = \frac{1}{\pi}$.

Cherchons l'équation du mouvement de l'arbre tournant ; ω étant la vitesse angulaire, on aura, quand le point M parcourt la demi-circonférence AMB ,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{P \times OI - Q \times OC}{I} = \frac{Pa \sin \alpha - Qb}{I},$$

et quand il parcourt la demi-circonférence BNA , $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Qb}{I}$;

α est l'angle AOM , décrit par la manivelle à partir de la position OA , et I le moment d'inertie de l'arbre tournant et des masses qui font corps avec lui. Pour déterminer le mouvement de l'arbre, il faudrait remplacer ω par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ par $\frac{d^2x}{dt^2}$, et intégrer cette équation. Mais on peut éviter cette opération. Ce que nous cherchons, ce sont les positions de la manivelle OA qui rendent ω maximum et minimum ; ces positions sont caractérisées par l'équation $\frac{d\omega}{dt} = 0$, ou bien

$$Pa \sin \alpha - Qb = 0;$$

on en déduit

$$\sin \alpha = \frac{Qb}{Pa} = \frac{1}{\pi}.$$

A cette valeur de $\sin \alpha$ correspondent deux valeurs supplémentaires de α , l'une égale à $18^\circ 33',6$, l'autre à $161^\circ 26',4$; elles définissent deux points M' et M'' , situés dans la demi-circonférence AMB , pendant le parcours de laquelle la force P agit. Ces deux points M' et M'' sont situés sur une parallèle à la direction constante de la bielle.

Il faut distinguer le maximum du minimum. Or, quand le bouton de la manivelle part du point A , le moment de la force P est nul, et va croissant avec l'angle α , tandis que le moment de la force Q reste constant; au point M' , il y a égalité entre les moments des forces P et Q ; donc le moment de P est inférieur au moment de Q pour toute valeur de α inférieure à $\alpha' = 18^\circ 33',6$. On reconnaît de même qu'entre α' et $\alpha'' = 161^\circ 26',4$, le moment de P surpasse le moment de Q . Par conséquent la vitesse angulaire croît quand α passe de la valeur α' à la valeur α'' , et décroît quand le bouton de la manivelle achève le reste de son tour, en décrivant l'arc $M''BNAM'$. Donc enfin α' correspond au minimum, et α'' au maximum de la vitesse angulaire.

Soient ω' et ω'' les valeurs des vitesses angulaires dans les positions OM' et OM'' de la manivelle.

Appliquons le théorème des forces vives entre les deux positions définies par les valeurs α' et α'' . Le travail de la force P sera égal à $P \times M'M''$, ou à $P \times 2a \cos \alpha'$. Le travail de la force Q est égal à son moment, Qb , multiplié par l'angle $M'OM''$, évalué en parties du rayon; cet angle est égal à $\pi - 2\alpha'$, α' étant cette fois estimé en parties du rayon et non en degrés. Nous avons donc l'équation

$$\frac{1}{2} I(\omega''^2 - \omega'^2) = P \times 2a \cos \alpha' - Qb(\pi - 2\alpha').$$

Remplaçons $\frac{\omega'' + \omega'}{2}$ par Ω , $\omega'' - \omega'$ par $\frac{1}{n}\Omega$, Qb par $\frac{Pa}{\pi}$, et il viendra

$$\frac{1}{n} \Omega^2 = 2Pa \times \left(\cos \alpha' - \frac{\pi - 2\alpha'}{2\pi} \right).$$

La quantité entre parenthèses représente un nombre qu'on peut calculer ; on trouve 0,5511, et il vient l'équation

$$I\Omega^2 = 2Pan \times 0,5511.$$

La vitesse Ω se calcule d'après le nombre N de tours que fait la manivelle par minute. On en déduit

$$\Omega = \frac{2\pi \times N}{60}.$$

$P \times 2a$ est le travail moteur pour un tour entier.

Appelons Π le nombre de chevaux-vapeur qui représente la puissance de la machine. Le travail moteur en kilogrammètres par seconde sera $\Pi \times 75$; par minute, $\Pi \times 75 \times 60$, et pour un tour

$$\frac{\Pi \times 75 \times 60}{N},$$

donc

$$2Pa = \frac{\Pi \times 75 \times 60}{N}.$$

Remplaçons Ω et $2Pa$ par ces valeurs ; il vient

$$I \times \frac{4\pi^2 \times N^2}{60^2} = \frac{\Pi \times 75 \times 60}{N} \times n \times 0,5511,$$

et enfin

$$I = \frac{\Pi \times 75 \times 60^2 \times n \times 0,5511}{4\pi^2 N^2} = \frac{\Pi n}{N^2} \times 226144.$$

Le moment d'inertie I se compose de la somme des moments d'inertie de toutes les pièces faisant corps avec l'arbre. Parmi ces pièces, la plus importante est le volant ; négligeons la masse de toutes les autres. Nous aurons $I = MR^2$, M désignant la masse de la couronne métallique, et R son rayon moyen ; si Π est le poids du volant, nous aurons $I = \frac{\Pi R^2}{g}$ et par suite

$$\Pi R^2 = \frac{\Pi n g}{N^2} \times 226144 = \frac{\Pi n}{N^2} \times 2\,218\,472.$$

On peut satisfaire à cette équation en prenant arbitrairement Π et en en déduisant R , ou réciproquement. Plus on aug-

mentera R , plus on réduira Π , plus on rendra la machine légère, et plus on diminuera les frottements sur les tourillons de l'arbre. Mais nous verrons plus loin qu'il y a une limite pour R , et qu'un trop grand rayon aurait de graves inconvénients au point de vue de la résistance de la couronne.

MANIVELLE SIMPLE A DOUBLE EFFET.

25. La force constante P , qui sollicite la bielle parallèle, agit de haut en bas quand le bouton décrit la demi-circconférence AMB , et de bas en haut quand il décrit la demi-circconférence BNA . Le travail moteur pour un tour est

$$P \times 2AB = P \times 4a,$$

et le travail résistant, pris positivement,

$$Q \times 2\pi b.$$

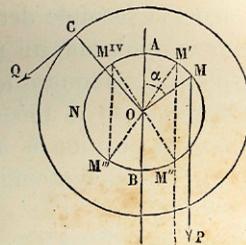


Fig. 6.

La condition du mouvement périodique et uniforme est

$$4Pa = 2\pi Qb,$$

ou bien

$$\frac{Qb}{Pa} = \frac{2}{\pi}.$$

De cette équation on tire $2Pa = \pi Qb$, et cette relation indique que le mouvement est périodique pour chaque demi-circconférence ; il suffit de considérer une période ; nous prendrons celle qui commence au passage du bouton de la manivelle au point A , et qui finit à son passage au point B . Le maximum et le minimum de la vitesse angulaire dans cet intervalle répondent à la condition $\frac{d\omega}{dt} = 0$, ou à l'égalité des

moments de la puissance P et de la résistance Q. Les positions cherchées sont donc définies par l'équation

$$Pa \sin \alpha = Qb,$$

c'est-à-dire par l'équation $\sin \alpha = \frac{Qb}{Pa} = \frac{2}{\pi}$.

On en déduit pour α deux valeurs, l'une α' , égale à $39^{\circ} 32', 4$, l'autre α'' , égale au supplément de la première. Une discussion semblable à celle qui a été faite pour le cas précédent montre que α' répond au minimum de ω , et α'' au maximum. Les deux points M' et M'' qui correspondent à ces valeurs de l'angle α sont situés sur une parallèle à la droite AB.

Dans la seconde demi-circonférence on trouverait de même pour le minimum un point M''', opposé diamétralement à M', et pour le maximum un point M''', opposé à M''.

Appliquons le théorème des forces vives au système passant de la position M' à la position M''; il viendra, en appelant ω' et ω'' les vitesses angulaires,

$$\frac{1}{2} I (\omega'^2 - \omega''^2) = \frac{1}{n} \Omega^2 = P \times 2a \cos \alpha' - Qb \times (\pi - 2\alpha').$$

ou bien

$$\frac{I \Omega^2}{n} = 2Pa \times \left(\cos \alpha' - \frac{\pi - 2\alpha'}{\pi} \right).$$

Dans ces équations α' est évalué en parties du rayon. Le nombre entre parenthèses est égal à 0,2105.

Soit encore H le nombre de chevaux-vapeur de la machine; N le nombre de tours que fait la manivelle dans une minute. Nous aurons

$$\Omega = \frac{2\pi N}{60}$$

et

$$2Pa = \frac{H \times 75 \times 60}{2N}.$$

L'équation devient donc

$$I \times \frac{4\pi^2 N^2}{60^2 n} = \frac{H \times 75 \times 60}{2N} \times 0,2105,$$

ou bien

$$I = \frac{Hn \times 75 \times 60^2 \times 0,2105}{8\pi^2 N^5} = \frac{Hn}{N^5} \times 45189.$$

Appelant H le poids du volant et R son rayon moyen, on aura donc

$$\pi R^2 = \frac{Hng}{N^5} \times 45189 = \frac{Hn}{N^5} \times 425684.$$

Comparée à la manivelle à simple effet, la manivelle à double effet réduit le moment d'inertie nécessaire, toutes choses égales d'ailleurs, dans le rapport de 2105 à 5511, ou dans le rapport de 3 à 8 environ.

MANIVELLE DOUBLE A DOUBLE EFFET.

26. Supposons que sur le même arbre tournant O on monte deux manivelles à angle droit, OM, OM', sollicitées chacune par une bielle MP, M'P', qui reste constamment parallèle au diamètre AB. Chaque bielle est à double effet, c'est-à-dire qu'elle tire du haut vers le bas quand le bouton de la manivelle parcourt la demi-circonférence AMM'B, et qu'elle pousse du bas vers le haut quand le bouton est passé dans l'autre demi-circonférence Amm'A. Les deux forces P, P' qui agissent suivant ces bielles sont de plus égales et constantes.

Le travail moteur pour un tour sera 8Pa, et le travail résistant, pris en valeur absolue, 2πQb. La condition du mouvement périodique et uniforme est

$$8Pa = 2\pi Qb,$$

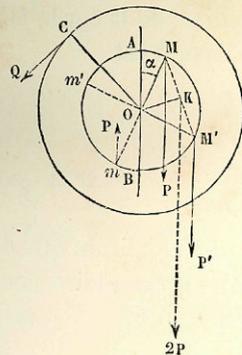


Fig. 7.

ou bien, en divisant par 4,

$$2Pa = \frac{\pi}{2} \times Qb;$$

elle montre que la périodicité du mouvement a lieu pour un quart de tour. Il est facile de vérifier que la somme des moments des forces mouvantes est la même dans les positions de la figure qui correspondent à une valeur de l'angle $\alpha = \text{AOM}$, et à cette même valeur augmentée de $\frac{\pi}{2}$. En effet, considérons les deux positions des manivelles MOM' et $\text{M}'\text{Om}$. Dans la première, les deux forces égales P et P' agissent dans le même sens et du même côté du centre O de l'arbre tournant. Dans la seconde, elles agissent de côtés différents du centre, mais dans des sens opposés; le moment de la force mP est d'ailleurs égal au moment de la force MP , de sorte que dans ces deux positions la somme des moments est la même.

Il suffit donc de considérer ce qui se passe quand le bouton M décrit un angle droit à partir du point A . Les deux forces P, P' , se composent en une seule force $2P$, appliquée au point K , milieu de la corde MM' ; le moment de cette force par rapport à l'axe O est

$$2P \times OK \sin KOA,$$

ou

$$2P \times \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = Pa \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

La condition qui définit le maximum ou le minimum de la vitesse angulaire pendant le parcours du premier quadrant est

$$Qb = Pa \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right);$$

on en déduit

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{Qb}{Pa \sqrt{2}} = \frac{4}{\pi \sqrt{2}}.$$

A ce sinus correspondent deux arcs positifs et $< \pi$; si on

appelle $\frac{\pi}{4} + \alpha'$ le plus petit et $\frac{\pi}{4} + \alpha''$ le plus grand, celui-ci est le supplément du premier, et l'on a par conséquent

$$\frac{3\pi}{4} - \alpha' = \frac{\pi}{4} + \alpha'',$$

d'où résulte la relation

$$\alpha' + \alpha'' = \frac{\pi}{2}.$$

Les deux valeurs de α' et α'' , qui correspondent la première au minimum, la seconde au maximum de la vitesse angulaire, sont donc complémentaires. On trouvera pour l'une, en degrés,

$$\alpha' = 19^{\circ}12',$$

et pour l'autre

$$\alpha'' = 70^{\circ}48'.$$

Appliquons le théorème des forces vives quand la manivelle OM passe de la position α' à la position α'' . Le travail des forces P et P' sera égal au travail de la force $2P$ appliquée au point K , c'est-à-dire à

$$2P \times \frac{a}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha' \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha'' \right) \right],$$

ou bien à

$$2Pa \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha' \right),$$

puisque $\frac{\pi}{4} + \alpha''$ est le supplément de $\frac{\pi}{4} + \alpha'$.

Le travail de la résistance est égal en valeur absolue à

$$Qb \times (\alpha'' - \alpha'),$$

α'' et α' étant évalués en parties du rayon.

L'équation des forces vives sera donc

$$\frac{1}{2} I (\omega''^2 - \omega'^2) = \frac{I}{n} \Omega^2 = 2Pa \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha' \right) - Qb (\alpha'' - \alpha')$$

$$= 8Pa \left[\frac{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha' \right)}{4} - \frac{\alpha'' - \alpha'}{2\pi} \right].$$

Réduisant la parenthèse en nombre, il vient

$$\frac{1}{n} \Omega^2 = 8Pa \times 0,0106.$$

On en déduit successivement

$$I = \frac{Hn}{N^3} \times 4347$$

et

$$H R^2 = \frac{Hn}{N^3} \times 42644.$$

27. Les trois cas que nous avons examinés se résument dans le tableau suivant :

		Produit $H R^2$.
Manivelle	{ simple	à simple effet. $\frac{Hn}{N^3} \times 2\ 218\ 472$
		à double effet $\times 423\ 684$
		double à double effet. $\times 42\ 644$

Le produit $H R^2$ serait encore moindre si l'on employait trois manivelles à double effet, montées à 120° les unes des autres.

Mais nos calculs supposent que les bielles restent constamment parallèles à la ligne AB des points morts. Il n'en est pas ainsi dans la pratique : de là une première cause d'irrégularité, qui conduit à augmenter le moment d'inertie du volant¹. Une autre cause résulte de ce que la force motrice P n'est généralement pas constante.

Observons aussi que notre formule

$$H R^2 = \frac{Hng}{N^3} \times K,$$

où K désigne un nombre abstrait dépendant de la disposition de la machine, suppose expressément le volant calé sur l'ar-

¹ Dans le cas de la manivelle double à double effet, la bielle ayant 5 à 6 fois la longueur de la manivelle, on trouve que le coefficient 0,0106 de l'équation $\frac{1}{n} \Omega^2 = T \times 0,0106$, T étant le travail moteur, doit être remplacé par 0,0555 pour tenir compte de l'obliquité.

bre qui porte les manivelles. Elle devrait être modifiée, si l'on plaçait le volant sur un autre arbre, engrenant avec le premier.

HOMOGENÉITÉ DES FORMULES.

28. Proposons-nous de reconnaître l'homogénéité de la formule

$$H R^2 = \frac{Hng}{N^3} \times K.$$

H est le travail moteur en chevaux ; c'est le rapport d'un certain travail, Ph, au temps t employé pour le produire. P représente une force ou un poids, et h une longueur. Posons donc

$$H = \frac{Ph}{t}.$$

n est un nombre absolu, ainsi que K.

g est une accélération, homogène à la quantité $\frac{h'}{t'^2}$, h' désignant une longueur, et t' un temps.

N est le nombre de tours accomplis dans un temps donné ; c'est une quantité homogène à $\frac{1}{t''}$, t'' désignant un temps.

Donc le produit $\frac{Hng}{N^3} \times K$ est homogène à

$$\frac{Ph}{t} \times \frac{h'}{t'^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{t''}\right)^3} = P \times h h' \times \frac{t''^3}{t t'^2}.$$

Le rapport de t''^3 à $t t'^2$ est un nombre ; h h' est homogène au carré d'une longueur, et la formule exprime par conséquent l'égalité de deux produits de même nature.

La formule $H R^2 = K' \frac{Hn}{N^3}$ n'est pas homogène, parce qu'on

a remplacé g par sa valeur numérique, ce qui implique le choix de l'unité d'accélération.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR L'ÉTABLISSEMENT D'UN VOLANT

29. Nous supposons qu'une machine comprenne un arbre principal sur lequel le volant doit être placé, et divers arbres liés à l'arbre principal par des engrenages ou des courroies, de manière que la vitesse angulaire de chacun soit dans un rapport connu avec la vitesse angulaire du premier arbre. Ces divers corps tournants sont sollicités par des forces qui peuvent être mouvantes ou résistantes. Appelons $I_1, I_2, I_3, \dots, I_p$, les moments d'inertie des treuils, chacun par rapport à son axe particulier; $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_p$, leurs vitesses angulaires simultanées autour des mêmes axes; appelons encore $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p$, les rapports $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \dots, \frac{\omega_p}{\omega_1}$, des vitesses angulaires des treuils, à partir du second, à la vitesse angulaire du premier. Soit, pour l'arbre dont le numéro est k , P_k la puissance appliquée tangentiellement à une circonférence de rayon a_k , et Q_k la résistance, appliquée tangentiellement à une circonférence de rayon b_k .

Soit enfin $\frac{II R^2}{g}$ le moment d'inertie du volant qu'on se propose d'établir sur l'arbre n° 1.

L'équation des forces vives, appliquée à ce système, sera, en accentuant les vitesses angulaires pour la seconde époque, ou pour la seconde position prise par le système :

$$\frac{1}{2} \frac{II R^2}{g} (\omega_1'^2 - \omega_1^2) + \frac{1}{2} \sum_1^p I_k (\omega_k'^2 - \omega_k^2) = \sum_1^p \int (P_k a_k - Q_k b_k) \omega_k dt.$$

L'intégrale du second membre doit être prise entre les deux positions.

Réduisons à une valeur infiniment petite l'intervalle com-

pris entre la première et la seconde position. L'équation se changera en celle-ci

$$\frac{II R^2}{g} \omega_1 d\omega_1 + \sum I_k \omega_k d\omega_k = \sum (P_k a_k - Q_k b_k) \omega_k dt.$$

Remplaçons ω_k par $\lambda_k \omega_1$, $d\omega_k$ par $\lambda_k d\omega_1$, et supprimons le facteur ω_1 ; nous aurons, en divisant par dt , l'équation de l'accélération angulaire du treuil principal :

$$\frac{d\omega_1}{dt} \left(\frac{II R^2}{g} + \sum_1^p I_k \lambda_k^2 \right) = \sum_1^p (P_k a_k - Q_k b_k) \lambda_k.$$

Au point de vue du mouvement, tout se passe donc comme si l'on séparait le treuil principal de tous les autres, en lui faisant porter, outre sa masse propre et la masse de son volant, des masses additionnelles ayant par rapport à son axe un moment d'inertie total égal à

$$\sum_2^p I_k \lambda_k^2,$$

et en le soumettant à de nouvelles forces ayant par rapport au même axe une somme de moments égale à

$$\sum_2^p (P_k a_k - Q_k b_k) \lambda_k,$$

en outre des forces P_1 et Q_1 qui le sollicitent directement. Le problème est donc ramené à régulariser le mouvement d'un arbre unique, soumis à des forces données, constantes ou variables, et animé d'un mouvement périodiquement uniforme dont la période est d'un tour.

30. L'équation du mouvement, après ces préparations, prend la forme

$$\frac{d\omega_1}{dt} \left(\frac{II R^2}{g} + I \right) = P a - Q b,$$

I étant le moment d'inertie réduit, P , Q les forces mouvantes et résistantes réduites, a et b leurs bras de levier. Une méthode graphique très simple conduit à la détermination du volant.

Traçons dans un plan deux axes rectangulaires OX, OY. Le premier, OX, sera l'axe des arcs ou des angles au centre décrits par l'arbre tournant;

le second, OY, sera l'axe des moments des forces P et Q.

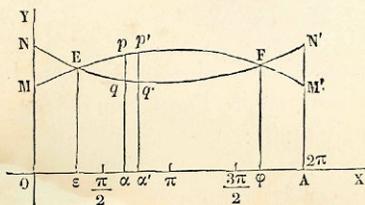


Fig. 8.

Sur le premier axe, prenons arbitrairement une longueur OA pour représenter la circonférence entière, 2π . Chaque point de l'intervalle OA correspondra à un certain angle α . On connaît pour cet angle les valeurs des moments Pa et Qb. Portons en ordonnées au point α les longueurs $ap = Pa$, $aq = Qb$.

En répétant cette construction un certain nombre de fois, on tracera par points deux lignes, dont l'une, M p M', représentera les moments successifs de la force mouvante P, et l'autre N q N', les valeurs absolues des moments successifs de la force résistante Q. Le travail élémentaire de la force P; pour un déplacement angulaire de l'arbre égal à dx , est $Pa \times dx$; il est représenté sur la figure par l'aire $pax'p'$ d'un rectangle infinitésimal, ayant $ap = Pa$ pour hauteur et $\alpha x' = dx$ pour base. De même le travail élémentaire de Q, pris positivement, est représenté par l'aire $aq'q'a'$; de sorte que l'aire $qpp'q'$, comprise entre les deux courbes, représente la différence des deux travaux, c'est-à-dire le produit $(Pa - Qb) dx$. Cette différence est positive quand le point p est au-dessus du point q ; alors le travail élémentaire des forces P et Q est moteur; il en est ainsi entre les points E et F où les courbes se rencontrent. La différence est au contraire négative à gauche du point E et à droite du point F, et en même temps le travail élémentaire des forces est négatif. La périodicité du mouvement tour par tour exige que la somme algébrique des travaux élémentaires des forces P et Q soit nulle pour un tour entier. On doit donc avoir

$$\text{aire } EpFqE = \text{aire } ENM + \text{aire } FN'M'.$$

En général, les forces P et Q repassent par les mêmes positions et les mêmes grandeurs à chaque tour, de sorte que les ordonnées extrêmes des deux courbes doivent se retrouver les mêmes. On a donc $AM' = OM$ et $AN' = ON$, égalités qui entraînent comme conséquence un double croisement au moins des courbes MM' et NN' entre les abscisses 0 et 2π , sans quoi la somme algébrique des aires comprises entre les deux courbes ne serait pas nulle. Les courbes peuvent se couper deux fois, comme le représente la figure, ou 4 fois, 6 fois, ... toujours en nombre pair. Les points E et F, où les courbes se rencontrent, définissent les angles O_ε , O_φ , pour lesquels les moments des forces P et Q sont égaux et se détruisent. Ce sont donc les positions d'équilibre de ces forces, et par suite les positions qui rendent la vitesse angulaire ω , maximum ou minimum.

Pour distinguer les maxima des minima, on observera qu'aux environs d'un minimum, la vitesse angulaire décroissant pour croître ensuite, le travail des forces passe du négatif au positif. Le point E correspond donc à un minimum, car, un peu avant, la courbe des valeurs de Qb est au-dessus de la courbe des valeurs de Pa; le contraire a lieu un peu après. On reconnaîtrait de même que F correspond à un maximum. Généralement, les minima et les maxima alternent ainsi dans l'étendue de la circonférence.

Admettons, pour fixer les idées, qu'il n'y ait, dans le tour entier, qu'un minimum, correspondant au point E, et un maximum, correspondant au point F. Nous appliquerons le théorème des forces vives entre la position définie par l'angle O_ε et la position définie par l'angle O_φ . Appelant ω' et ω'' les vitesses angulaires correspondantes, Ω la vitesse moyenne, supposée égale à la moyenne des vitesses extrêmes, et n le coefficient de régularisation, il viendra

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi R^2}{g} + 1 \right) (\omega''^2 - \omega'^2) = \left(\frac{\pi R^2}{g} + 1 \right) \frac{\Omega^2}{n} = T,$$

T étant le travail des forces P et Q depuis l'abscisse O_ε jusqu'à

l'abscisse $O\varphi$. Ce travail est mesuré sur l'épure par l'aire $EpFqE$. Pour l'évaluer en kilogrammètres, on pourra chercher son rapport à l'aire $OMEpFM'AO$, qui représente le travail moteur total pour un tour entier de l'arbre principal. Connaissant le travail moteur et le rapport de ces deux aires, on en

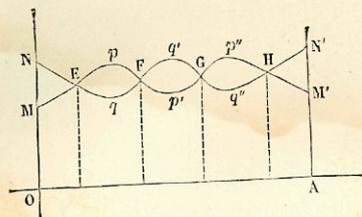


Fig. 9.

déduira le travail T . L'équation précédente détermine ensuite le poids H .

31. La méthode à suivre serait analogue s'il y avait 4 ou un plus grand nombre de positions d'équilibre. Supposons qu'il y en ait 4, et qu'elles correspondent au

point E, F, G et H. Les points E et G seront des minima, les points F et H des maxima. On pourra alors essayer diverses combinaisons d'un maximum avec un minimum, savoir :

E et F,	auquel cas l'aire à évaluer est l'aire $EpFq$,	
E et H,	"	$EpFq - Fp'Gq' + Gp''Hq''$,
F et G,	"	$- Fq'Gp'$,
Enfin G et H,	"	$Gp''Hq''$,

On devra prendre parmi ces 4 combinaisons celle qui donne pour le travail T la plus grande valeur absolue.

VOLANT POUR UNE MACHINE A BALANCIER.

32. La machine dont nous allons nous occuper est une machine à vapeur à balancier; la puissance P agit suivant une droite PF , sensiblement fixe, et éloignée du centre C du balancier de la quantité $CF=r$, sensiblement constante. Le balancier DCE oscille autour du point C ; son extrémité E est articulée à la bielle EM , qui est articulée elle-même au bouton M de la manivelle. Les positions extrêmes du balancier sont $D'E'$ et $D''E''$, qui correspondent, l'une au cas où la bielle et la manivelle sont en prolongement l'une de l'autre, en

$E'N'$, $M'O$, l'autre au cas où les deux pièces ont la même direction, $E''M''$, $M''O$, la seconde étant en retour de la première.

La rotation s'effectue autour du point C dans le sens MMM'' , tandis que le balancier a un mouvement alternatif; la force P change de sens à chaque oscillation simple, et agit dans le sens du mouvement du balancier.

La résistance Q est appliquée à une distance OH constante du point O .

Soit $OM=a$, $OH=b$, $EM=L$, $CE=c$. Nous avons déjà posé $CF=r$. Nous comptons les angles décrits par le rayon OM dans le sens de son mouvement, à partir du point mort supérieur M' . Soit donc $M'OM=\alpha$.

Nous représenterons par I le moment d'inertie de l'arbre tournant par rapport à l'axe O , y compris le volant qu'on y suppose monté, et par I' le moment d'inertie du balancier par rapport à l'axe C . Appelons ω , la vitesse angulaire de l'arbre tournant quand le bouton de la manivelle passe au point mort M' , ω' la vitesse angulaire du même arbre quand le bouton de la manivelle passe en un point M quelconque. La vitesse angulaire du balancier est nulle quand la machine est à l'un des points morts; appelons ω'' la vitesse angulaire de la même pièce dans la position DCE qui correspond au passage du bouton de la manivelle en M . Soit T_m le travail de la puissance P entre ces deux positions, et T_r le travail de la résistance Q . Nous aurons, en négligeant la force vive de la bielle EM , l'équation

$$(1) \quad \frac{1}{2} I (\omega^2 - \omega'^2) + \frac{1}{2} I' \omega''^2 = T_m - T_r.$$

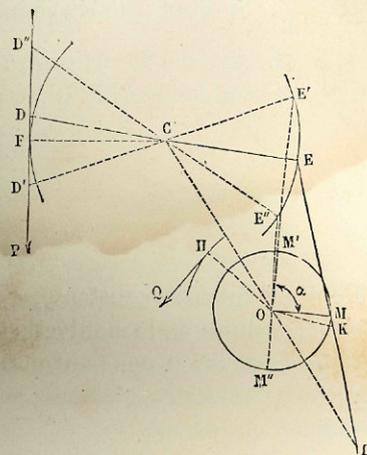


Fig. 10.

Joignons OC, et prolongeons cette droite et la droite EM jusqu'à leur rencontre en L. Nous savons (I, § 159) que $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OL}{CL}$. Si donc par le point O nous menons OK, parallèle à CE, jusqu'à la rencontre de la bielle prolongée, les triangles semblables CLE, OLK, nous donneront la proportion

$$\frac{OL}{CL} = \frac{OK}{CE},$$

et par suite

$$\omega' = \frac{OK}{CE} \times \omega;$$

CE est une quantité constante, c ; OK est une grandeur variable avec la position de la manivelle et du balancier. Nous la représenterons par l , et nous aurons la relation

$$\omega' = \frac{l\omega}{c}.$$

Le travail de la force P peut s'évaluer de la manière suivante. Le travail élémentaire, pour un déplacement angulaire du balancier égal à $\omega' dt$, est

$$Pr \times \omega' dt,$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$\frac{Pr l}{c} \times \omega dt,$$

ou enfin

$$\frac{Pr l}{c} d\alpha.$$

Le travail moteur T_m sera donc égal à

$$\int_0^\alpha \frac{Pr l d\alpha}{c},$$

ou à

$$\frac{r}{c} \int_0^\alpha Pl d\alpha.$$

Le travail élémentaire de Q sera de même représenté en

valeur absolue par $Qb \times \omega dt$, ou $Qbdz$, et le travail total, quand α varie de 0 à sa valeur $\alpha = M'OM$, sera

$$\int_0^\alpha Qbdz = b \int_0^\alpha Qd\alpha.$$

L'équation (1) devient donc

$$(2) \quad \frac{1}{2} I(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{2} r \frac{l^2 \omega^2}{c^2} = \frac{r}{c} \int_0^\alpha Pl d\alpha - b \int_0^\alpha Qd\alpha.$$

Les intégrales indiquées peuvent se calculer par des quadratures. Il suffit de partager la circonférence en un certain nombre m de parties égales; on suppose données les valeurs de P et de Q pour chacune des positions correspondantes du bouton de la manivelle; la variable l est donnée sur la figure par une construction géométrique. On peut donc calculer les valeurs des deux intégrales, et déterminer avec une suffisante approximation les valeurs successives du second membre. Une condition doit être remplie par les forces P et Q, c'est de satisfaire à l'équation

$$\frac{r}{c} \int_0^{2\pi} Pl d\alpha - b \int_0^{2\pi} Qd\alpha = 0;$$

elle est nécessaire pour assurer tour par tour le mouvement périodiquement uniforme de la machine. On simplifiera le premier membre de l'équation (2) en observant que dans le terme $\frac{1}{2} r \frac{l^2 \omega^2}{c^2}$ la vitesse angulaire ω diffère peu de sa valeur moyenne Ω , puisque la présence du volant assure la presque uniformité du mouvement. L'équation prend alors la forme

$$(3) \quad \frac{1}{2} I(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{r}{c} \int_0^\alpha Pl d\alpha - b \int_0^\alpha Qd\alpha - \frac{r l^2 \Omega^2}{2c^2},$$

et dans le dernier terme, l^2 est la seule quantité variable. On pourra donc former un tableau des valeurs du second membre pour les m valeurs de α ; appelant H l'une quelconque de ces valeurs, H sera une fonction continue de α , qui, s'annulant pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = 2\pi$, a dans l'intervalle

un maximum et un minimum, ou deux maxima et deux minima, ou trois maxima et trois minima, et ainsi de suite. On déterminera ces maxima et ces minima d'après l'inspection du tableau ou la construction d'une courbe. Appelons H_1 le plus grand des maxima, et H_2 le plus petit des minima (eu égard aux signes). A la différence $H_1 - H_2$ correspondra le plus grand écart entre les vitesses angulaires de l'arbre tournant; appelons ω_1 et ω_2 la vitesse maximum et la vitesse minimum, et soit n le coefficient de régularisation, nous aurons, en posant encore $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \Omega$,

$$\frac{1}{2} I(\omega_1^2 - \omega_2^2) = \frac{Ic^2}{n} = H_1 - H_2.$$

Cette équation fait connaître I et détermine le moment d'inertie qu'il est nécessaire de donner au volant.

CALCUL DE LA PLUS GRANDE TENSION DE LA BIELLE.

33. Le balancier est soumis d'une part à la force P , d'autre part à la tension N de la bielle. L'équation de son mouvement est donc

$$I \frac{d\omega'}{dt} = Pr + Nc \sin \beta,$$

β étant l'angle de la bielle avec le balancier. Si l'on suppose P sensiblement constant, le maximum de N correspond à peu près au maximum de $\frac{d\omega'}{dt}$; or $\omega' = \frac{l\omega}{c}$,

et

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{l}{c} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{c} \frac{dl}{dt};$$

$\frac{d\omega}{dt}$ étant toujours très petit, par suite de la régularité du mouvement, $\frac{d\omega'}{dt}$ est sensiblement proportionnel à $\frac{dl}{dt}$, ou à

$\frac{dl}{dx} \times \frac{dx}{dt}$, ou enfin $\omega \frac{dl}{dx}$; nous poserons donc approximativement

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{\omega^2}{c} \frac{dl}{dx}.$$

Cette équation est rigoureuse aux points morts, pour lesquels $l=0$ et $\frac{d\omega'}{dt} = \frac{\omega}{c} \frac{dl}{dt}$. Alors ω prend la valeur particulière ω_0 .

La question est ramenée à trouver le maximum du rapport $\frac{dl}{dx}$; il a lieu pour $\alpha=0$.

Prenons un point M infiniment voisin du point mort M' sur la circonférence décrite par le bouton de la manivelle. Joignons $E'M$, et menons OK parallèle à CE' .

L'élément MM' étant normal à OE' , la droite $E'M$ est égale, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, à la droite $E'M'$. La bielle passe donc de la position $E'M'$ à la position $E'M$, en même temps que la manivelle décrit l'angle $M'OM = dx$. La quantité dl est représentée sur la figure par OK , puisque l est nul pour $\alpha=0$. Or on a dans le triangle OMK

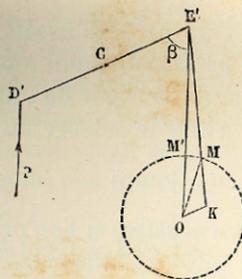


Fig. 11.

$$\frac{OK}{OM} = \frac{\sin \angle OKM}{\sin \angle OMK}$$

L'angle OKM est le supplément de l'angle β , en négligeant l'angle infiniment petit MOM' ; donc $\sin \angle OKM = \sin \beta$. Quant au sinus de l'angle infiniment petit OMK , il est égal à l'arc qui mesure cet angle dans le cercle de rayon égal à l'unité. Or OMK est la somme des angles infiniment petits $M'E'M$ et MOM' ; le premier a pour mesure $\frac{MM'}{E'M} = \frac{dx}{L}$, le second

$$\frac{MM'}{OM} = dx.$$

Donc

$$\sin \text{ONK} = dz \times \left(1 + \frac{a}{L}\right),$$

et par suite

$$\text{OK} = dl = \frac{adz}{\sin \beta} \left(1 + \frac{a}{L}\right).$$

Donc enfin

$$\frac{dl}{dz} = \frac{a}{\sin \beta} \left(1 + \frac{a}{L}\right) = a \times \frac{L+a}{L \sin \beta}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation, et nous aurons pour déterminer N l'équation

$$Y \frac{\omega_0^2 a}{c} \frac{L+a}{L \sin \beta} = Pr + Nc \sin \beta.$$

Pour en faire usage, il faut distinguer l'instant qui précède le passage au point mort de l'instant qui le suit, car la force P change de signe de l'un à l'autre.

Avant le passage au point mort, le rayon CE' monte et en même temps son mouvement se ralentit : l'accélération $\frac{d\omega'}{dt}$ sera négative si l'on prend pour positif le sens du mouvement, et positive dans le cas contraire. Adoptons cette dernière hypothèse, c'est-à-dire regardons comme sens positif celui dans lequel le point E' s'abaisse. Avant le passage au point mort, le sens de la force P tend à faire descendre le point D et à faire monter le point E. Le moment Pr doit donc être pris négativement, et on a par conséquent l'équation

$$Nc \sin \beta = Y \frac{\omega_0^2 a}{c} \frac{L+a}{L \sin \beta} + Pr.$$

Après le passage du point mort, l'accélération $\frac{d\omega'}{dt}$ reste positive, mais la force P change de sens, et la formule devient

$$Nc \sin \beta = Y \frac{\omega_0^2 a}{c} \frac{L+a}{L \sin \beta} - Pr.$$

Une valeur positive de N indique une traction exercée par la bielle sur le point E' dans le sens descendant ; la réaction du balancier sur la bielle est donc dirigée en sens contraire,

c'est-à-dire dans le sens qui tend à allonger la bielle. En d'autres termes, N positif indique une tension ; N négatif indiquerait une compression.

Pour l'application des formules, on remplacera ω_0 , qui n'est pas déterminé, par la vitesse angulaire moyenne Ω , qui en diffère très peu.

EFFORTS INTÉRIEURS AUXQUELS UN VOLANT EST SOUMIS.

34. Le volant n'est utile que si sa vitesse angulaire ω varie entre deux limites déterminées, et qu'elle se trouve alternativement inférieure et supérieure à la vitesse moyenne Ω . Lorsque la vitesse de la machine tend à décroître, une partie de la force vive du volant se transforme en travail moteur et tend à ramener la vitesse moyenne ; quand au contraire le mouvement de la machine s'accélère, le volant intervient pour restreindre cette accélération, en emmagasinant à l'état de force vive une partie de l'excès du travail moteur.

Le volant est formé d'une jante massive réunie à l'arbre tournant par des bras métalliques. Chaque point de ce système tournant décrit un certain cercle avec une vitesse angulaire ω et une accélération $\frac{d\omega}{dt}$.

La force d'inertie du point se réduit donc à deux composantes, l'une centrifuge et égale à $m\omega^2 r$, m étant la masse de ce point et r sa distance à l'axe, l'autre tangentielle, égale à $-mr \frac{d\omega}{dt}$, dans le sens du mouvement ou en sens contraire

suivant le signe de l'accélération $\frac{d\omega}{dt}$. Le volant doit être capable de résister aux forces réelles qui le sollicitent et aux forces d'inertie. Pour vérifier sa résistance, il convient donc de tenir compte non-seulement du poids de l'appareil, des réactions de l'axe et des efforts exercés par les corps voisins, si le volant mène d'autres roues, mais encore

des forces centrifuges et des forces d'inertie tangentielles de ses propres molécules.

La force centrifuge agit pour étendre les bras dans le sens de leur longueur, et pour distendre la couronne. Elle est proportionnelle pour chaque point à $m\omega^2 r$. On voit qu'elle croît proportionnellement à r ; la force centrifuge serait donc très grande dans un volant de très grand diamètre. Soit O le centre du volant, MN un fragment de la couronne, R son rayon moyen, et p le poids de l'unité de longueur de la couronne, mesurée sur sa circonférence moyenne. Cherchons la condition d'équilibre d'un élément compris entre deux plans ABO , $A'B'O$, faisant entre eux un angle infiniment petit θ . Négligeant le poids de cet élément et la force d'inertie tan-

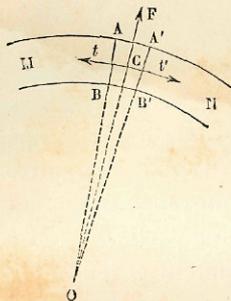


Fig. 12.

gentielle, nous exprimerons qu'il est en équilibre sous l'action des deux tensions égales t et t' , normales aux faces AB , $A'B'$, et de la force centrifuge dirigée suivant la bissectrice CF . La force F coupant en deux parties égales l'angle tct' , on aura

$$2t \cos tCO = F.$$

L'angle tCO est le complément de la moitié de θ ; donc $\cos tCO = \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$, en remplaçant le sinus par l'arc lui-même. Donc

$$t\theta = F.$$

Mais le poids de l'élément est $p \times R\theta$; sa masse est $\frac{p}{g} R\theta$, et la force F est par conséquent égale à

$$\frac{p}{g} R\theta \times \omega^2 R = \frac{p}{g} R^2 \omega^2 \theta.$$

Donc

$$t = \frac{p}{g} R^2 \omega^2 = \frac{p}{g} v^2,$$

v étant la vitesse linéaire moyenne du volant,

La tension t développée dans la couronne par la force centrifuge est donc égale à la force vive de la couronne par unité de longueur.

Le poids p est le produit du poids spécifique σ du métal qui compose le volant, par la section transversale S de la couronne; ce qui donne

$$t = \frac{\sigma}{g} SR^2 \omega^2$$

et

$$\frac{t}{S} = \frac{\sigma}{g} R^2 \omega^2.$$

Le rapport $\frac{t}{S}$ est la tension moyenne de la couronne par unité de surface; on voit qu'elle est indépendante de S , et qu'elle croît proportionnellement au carré de R . Il importe donc que R ne soit pas trop grand, sans quoi la tension $\frac{t}{S}$ excéderait la limite de résistance du métal, et le volant, quelque section qu'on lui ait donnée, serait brisé par la seule force centrifuge.

La force d'inertie tangentielle, $-mr \frac{d\omega}{dt}$, agit sur les bras pour les infléchir, tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé. Elle fait aussi varier d'un point à l'autre les tensions t de la couronne. On calculera la section à donner aux bras du volant d'après la plus grande valeur que puisse avoir le produit $mr \frac{d\omega}{dt}$; pour cela, on supposera que les divers fragments du volant compris entre deux bras consécutifs soient concentrés au bout de chaque bras. La masse m est alors égale au poids Π du volant divisé par le nombre de bras et par le nombre g ; r est égal à R , rayon moyen de la couronne. Enfin on doit attribuer à l'accélération $\frac{d\omega}{dt}$ la plus grande valeur qu'elle puisse avoir. Le reste du problème dépend de la théorie de la résistance des matériaux.

VOLANTS D'OUTILS.

35. Reprenons la question traitée dans le § 18. Deux treuils O et O', sollicités le premier par une puissance P, le second par une résistance Q, sont réunis par une courroie dont le brin moteur est AB. Si l'on appelle T la tension de cette courroie, P₁ et Q₁ les valeurs des forces P et Q quand on les réduit aux circonférences OA et O'B, μ et μ' les masses des treuils réduites à ces mêmes circonférences, on aura

$$T = \frac{P_1 \mu' + Q_1 \mu}{\mu + \mu'}$$

Les accélérations $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\omega'}{dt}$ des treuils O et O' sont données par les équations

$$\mu r \frac{d\omega}{dt} = P_1 - T \quad \text{et} \quad \mu' r' \frac{d\omega'}{dt} = T - Q_1$$

Ces équations montrent que les accélérations sont nulles si l'on a $P_1 = Q_1$, hypothèse qui rend la tension T égale à la valeur commune des forces réduites. Le mouvement des treuils est alors uniforme.

Supposons que la force Q₁ reçoive un accroissement p, positif ou négatif, en sorte qu'on ait $Q_1 = P_1 + p$.

Il en résultera

$$T = P_1 + p \times \frac{\mu}{\mu + \mu'} = P_1 + p \times \frac{1}{1 + \frac{\mu'}{\mu}}$$

On voit que la variation T - P₁ aura le signe de p, et par suite P₁ - T aura un signe contraire. Donc $\frac{d\omega}{dt}$ sera positif si

p est négatif, et négatif s'il est positif. Il en sera de même de $\frac{d\omega'}{dt}$, à cause de la relation $r \frac{d\omega}{dt} = r' \frac{d\omega'}{dt}$. Mais il importe que la tension T soit toujours positive, et que ses variations soient les plus petites possible. Pour satisfaire à ces conditions, il suffit de rendre très petite la fraction $\frac{1}{1 + \frac{\mu'}{\mu}}$, ce qui revient

à donner à la masse μ' une grande valeur par rapport à la masse μ . Moyennant cette précaution, la variation de T devient négligeable, et le signe de la tension reste toujours le même. L'artifice consiste en résumé à *augmenter la masse, ou plutôt le moment d'inertie du treuil auquel est appliquée la force variable* : on y parvient en montant un volant sur l'axe de ce treuil. Un tel volant s'appelle un *volant d'outil*, pour le distinguer des volants qu'on applique à l'arbre principal de la machine pour en régulariser la marche.

36. La même solution s'applique à un nombre quelconque de treuils liés les uns aux autres par des courroies ou des engrenages. Reprenons la formule du § 19

$$\tau_k = \frac{\sum_1^k \varphi_i \sum_{k+1}^n \mu_i - \sum_{k+1}^n \varphi_i \sum_1^k \mu_i}{\sum_1^n \mu_i}$$

Si l'on introduit la condition du mouvement uniforme

$$\sum_1^n \varphi_i = 0,$$

il vient

$$\tau_k = \sum_1^k \varphi_i = - \sum_{k+1}^n \varphi_i$$

Supposons maintenant que l'une des forces φ_j reçoive un accroissement $\Delta \varphi_j$; la nouvelle valeur de τ_k sera $\tau_k + \Delta \tau_k$, et nous calculerons l'accroissement $\Delta \tau_k$ par l'équation

$$\Delta \tau_k = \frac{\Delta \varphi_j \sum_{k+1}^n \mu_i}{\sum_1^k \mu_i}$$

si j est au plus égal à k , et l'équation

$$\Delta\tau_k = - \frac{\Delta\varphi_j \sum_1^k \nu_i}{\sum_1^n \nu_i},$$

si j surpasse k .

Le coefficient de $\Delta\varphi_j$ comprend une somme de masses parmi lesquelles ne se trouve pas la masse du treuil j . Au contraire les masses de tous les treuils entrent en dénominateur. Il y a donc intérêt, pour rendre $\Delta\tau_k$ le plus petit possible en valeur absolue, à augmenter la masse ν_j , c'est-à-dire le moment d'inertie du treuil soumis aux actions de la force variable.

INFLUENCE DES MASSES EN GÉNÉRAL.

57. Les équations

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma P p}{I},$$

dont l'une définit le mouvement d'un point matériel sur sa trajectoire, et l'autre le mouvement d'un solide autour d'un axe de rotation sous l'action de forces données, montrent que plus les facteurs m ou I sont grands, plus la variation des vitesses v et ω est lente. Mais cette conclusion suppose que les forces F et P sont constantes; que la force F , par exemple, ne varie pas proportionnellement à la masse de son point d'application comme cela arrive pour la pesanteur; dans ce cas le facteur m disparaîtrait de l'équation et la masse perdrait toute influence.

Le mouvement d'un système de grande masse, soumis à des forces motrices variables entre des limites fixes, tend en général à être uniforme. Par exemple, un train de chemin de fer a en palier horizontal une vitesse sensiblement constante, malgré les variations périodiques de la traction exercée par la

locomotive. Le travail de la machine est très variable dans l'étendue de chaque tour de roue; mais la masse du train fait l'office d'un volant, et donne à la roue motrice un mouvement sensiblement uniforme.

Le balancier dont se sert un danseur de corde montre une application du même principe. La stabilité du danseur sur la corde raide suppose l'intervention continuelle des pressions développées par les différentes parties de ses pieds. S'il s'abandonnait à la pesanteur, le danseur tomberait en pivotant autour de la corde pendant les premiers instants de sa chute. Ce mouvement de renversement doit être rendu le plus lent possible; le balancier, formé d'une longue tige terminée par deux boules massives, a, sous un faible poids, un grand moment d'inertie par rapport à la corde, et ce moment d'inertie s'ajoute à celui du danseur pour réduire l'accélération angulaire que la pesanteur tendrait à lui communiquer. Grâce à cet artifice, le danseur trouve le temps de faire des mouvements qui ramènent son centre de gravité dans la verticale de la corde, et c'est ainsi qu'il retrouve son équilibre.

CHAPITRE IV

DES CONTRE-POIDS.

38. On introduit souvent des contre-poids dans les machines; ils peuvent y remplir trois fonctions principales :

1° Ils servent à réduire à zéro le travail de la pesanteur sur les pièces de la machine;

2° Ils régularisent le mouvement de la machine à la façon d'un volant, non-seulement par leur poids, mais encore par leur masse;

3° Ils augmentent la stabilité de la machine, en détruisant dans une certaine mesure les oscillations qu'elle tend à prendre par suite des mouvements de ses divers organes.

DES CONTRE-POIDS QUI RÉDUISENT A ZÉRO LE TRAVAIL DE LA PESANTEUR.

39. Pour donner un exemple de cet emploi d'un contre-poids, considérons la transmission du balancier à l'arbre tournant de la machine à vapeur, à l'aide d'une bielle et d'une manivelle. Soit BA le balancier, OD la manivelle, C le centre du balancier, et O l'arbre tournant. La droite AD représente la bielle. La pièce BA peut être centrée;

son centre de gravité reste alors immobile au point C. Il en est de même de l'arbre tournant

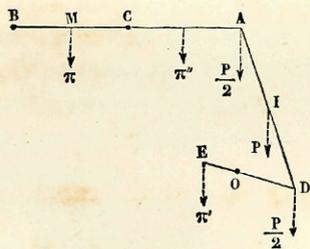


Fig. 14.

O et de toutes les pièces qui font corps avec lui, y compris la manivelle OD. On peut disposer les masses de telle sorte que le centre de gravité de cette partie de la machine soit au point O. Ces deux conditions détruisent le travail de la pesanteur sur le balancier et sur l'arbre tournant. Pour détruire le travail de la pesanteur sur la bielle, nous observerons, comme au § 22, que le poids total P de cette pièce peut être supposé partagé par moitié entre les deux points A et D : la composition de ces deux poids donne pour résultante le poids total appliqué au milieu I de la droite AD, c'est-à-dire au centre de gravité de la bielle. On pourra détruire le travail du poids $\frac{P}{2}$ appliqué en A, en fixant sur le balancier, en un point M situé de l'autre côté du point C, un contre-poids Π satisfaisant à l'égalité

$$\Pi \times CM = \frac{P}{2} \times CA.$$

Car cette relation fixe au point C le centre de gravité des poids Π et $\frac{P}{2}$. De même, on détruira le travail de la pesanteur sur le poids $\frac{P}{2}$ placé en D, en fixant en E, sur le prolongement de la manivelle, un contre-poids Π' satisfaisant à l'égalité

$$\Pi' \times OE = \frac{P}{2} \times OD,$$

en vertu de laquelle le centre de gravité des poids Π' et $\frac{P}{2}$ est au point O.

On reconnaît de la même manière qu'on peut, à l'aide d'un contre-poids Π'' appliqué en un point de la branche CA du balancier, réduire approximativement à zéro le travail de la pesanteur sur les pièces reliées à la branche CB, c'est-à-dire sur le piston moteur de la machine et sur les pistons des pompes, y compris leurs tiges et leurs accessoires. Les deux

contre-poids II et II'' peuvent d'ailleurs se composer en un seul, situé en leur centre de gravité commun.

Il y a intérêt à réduire le poids des pièces, puisqu'il en résulte une diminution des pressions et des frottements. Cette considération conduit à éloigner les contre-poids le plus possible des arbres tournants C et O.

Les machines à *action directe* dans lesquelles le cylindre moteur est horizontal ont cet avantage sur les machines à balancier que la pesanteur ne produit aucun travail sur le piston, ni sur la moitié du poids de la bielle que l'on peut supposer appliquée à l'articulation avec la tige. Il suffit donc d'un contre-poids placé sur le prolongement de la manivelle pour détruire le travail de la pesanteur. Ce n'est pas le seul avantage de ces sortes de machines.

DES CONTRE-POIDS DESTINÉS A RÉGULARISER LE MOUVEMENT.

40. Tout contre-poids entraîné dans le mouvement d'un arbre tournant agit par sa masse pour accroître le moment d'inertie de cet arbre; de là un premier effet de régularisation, puisque la régularité d'un mouvement de rotation est d'autant mieux assurée que le moment d'inertie du corps tournant est plus considérable. Cette conclusion est indépendante de la position donnée au contre-poids autour de l'arbre, et elle subsisterait encore si on en répartissait la masse tout autour en couronne circulaire. Mais on peut déterminer la position du contre-poids de manière à faire servir le travail de la pesanteur à la régularisation de la machine. Pour cela, il est nécessaire que le contre-poids soit excentrique.

CONTRE-POIDS POUR UNE MANIVELLE SIMPLE A SIMPLE EFFET.

41. Considérons d'abord une manivelle simple à simple effet, et supposons que la bielle reste verticale, et soit solli-

citée par une force P, constante pendant sa course dans un seul sens. L'emploi d'un contre-poids placé sur le prolongement de la manivelle donnera à la bielle le double effet.

Soit OM la manivelle, MP la bielle, sollicitée par la force P, de haut en bas, quand le bouton M parcourt la demi-circonférence ACB, et revenant libre dans l'autre sens quand le bouton parcourt la seconde demi-circonférence BDA.

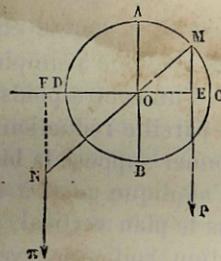


Fig. 15.

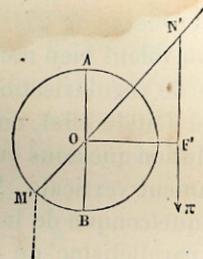


Fig. 16.

Plaçons en un point quelconque N, pris sur MO prolongée, un poids II déterminé par la relation

$$\Pi \times ON = \frac{1}{2} P \times OM.$$

La somme des moments des forces P et N par rapport au point O, à un instant quelconque du mouvement descendant du point M, sera

$$P \times OE - \Pi \times OF;$$

mais

$$\Pi \times OF = \frac{1}{2} P \times OE.$$

en vertu de la condition posée ci-dessus et de la similitude des triangles ONF, OME. La somme des moments à cet instant est donc

$$\frac{1}{2} P \times OE.$$

Prenons maintenant la figure dans la position qu'elle occupe quand la manivelle a avancé d'une demi-circonférence. Le contre-poids est alors en N', et la force qui sollicite la bielle

est nulle. Donc la somme des moments des forces se réduit à $\Pi \times OF'$, qui est égal à $\Pi \times OF$, ou enfin à $\frac{1}{2}P \times OE$. Tout se passe donc comme si la force P , réduite à la moitié de sa valeur, agissait de haut en bas pendant la marche descendante du bouton de la manivelle, et de bas en haut pendant la marche ascendante, en d'autres termes, comme si la bielle possédait le double effet.

Nous avons vu (§ 27) que la machine à double effet demande un volant bien moindre que la machine à simple effet, à égalité de régularisation. L'emploi d'un contre-poids, équivalant au double effet, entraîne une pareille réduction.

La solution que nous venons de donner suppose la bielle MP constamment verticale. Mais elle s'applique aussi à une direction quelconque de la bielle dans le plan vertical, pourvu que le parallélisme de cette direction soit conservé. Pour s'en assurer, il suffit d'observer que nos calculs reposent uniquement sur la considération des moments des forces, et que rien n'y serait changé si l'on faisait tourner d'un certain angle la bielle et la manivelle autour du point O , le

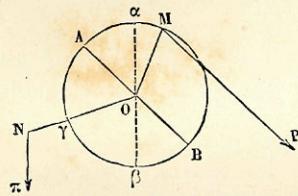


Fig. 17.

pois Π , qui doit toujours agir verticalement, n'étant pas entraîné dans cette rotation. Soit, par exemple, AB la ligne des points morts, OM la manivelle, MP la bielle parallèle à AB , et sollicitée seulement dans le sens MP . Pour placer le contre-poids, menons par le centre O la verticale $\alpha\beta$, ligne des points morts du contre-poids; puis prenons sur la circonférence décrite par le bouton M un arc $\beta\gamma = AM$. Nous placerons le contre-poids Π en un point N de la droite $O\gamma$, et nous déterminerons sa valeur par l'équation

$$\Pi \times ON = \frac{1}{2} P \times OM.$$

Le contre-poids montera tant que la force P sera appliquée

à la bielle, pendant que le bouton M parcourt l'arc AMB . Il descendra et agira comme moteur tant que l'action de la bielle sera supprimée, ou tant que le bouton parcourra l'arc $B\beta\gamma A$, et le double effet sera assuré.

CONTRE-POIDS POUR UNE MANIVELLE SIMPLE A DOUBLE EFFET.

42. Pour régulariser au moyen d'un contre-poids une machine à manivelle simple à double effet, il convient de placer le contre-poids Π sur un arbre particulier, O' , engrenant avec l'arbre principal, O , et animé d'une vitesse angulaire double. On place le contre-poids de manière qu'à l'instant où le bouton de la manivelle passe au point mort A , le contre-poids Π soit en D sur le diamètre horizontal de la circonférence qu'il décrit, et à l'extrémité descendante de ce diamètre. Alors le moment du poids Π par rapport au centre O' est maximum à l'instant où la force P cesse d'agir par

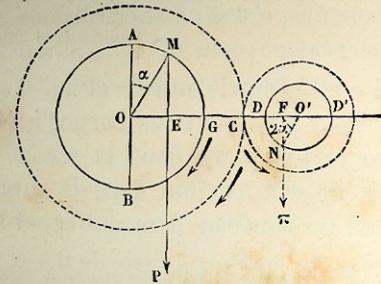


Fig. 18.

suite de son passage au point mort. Le contre-poids se retrouve d'ailleurs en D dans des conditions identiques, lorsque le bouton de la manivelle passe au second point mort B , puisque l'arbre du contre-poids fait un tour entier quand l'arbre principal fait la moitié d'un tour.

La transmission entre les deux arbres s'opère par l'engrenage de deux roues OC, CO' dont la première a un rayon double du rayon de la seconde.

A un instant quelconque, le moment de la force P par rapport au point O est $P \times OE$, ou $P \times a \sin \alpha$, en désignant par α l'angle AOM , décrit par la manivelle à partir du point mort, et par a la longueur OM de la manivelle. Cette formule s'ap-

plique à toute valeur de α comprise entre 0 et π . Au delà, de π à 2π , il faut la changer de signe, puisque P agit en sens contraire.

Le moment du poids Π par rapport au point O' est $\Pi \times O'F$, ou $\Pi b \cos 2\alpha$, en appelant b le rayon $O'N$ de la circonférence décrite par le contre-poids, et en observant que l'angle $DO'N$, décrit par ce rayon à partir de l'horizontale $O'D$, est égal à 2α . Cette formule est vraie sans restriction.

Si on donne un déplacement dx à la manivelle OM, il en résulte un déplacement $2d\alpha$ du rayon $O'N$, et par suite le travail élémentaire des forces P et Π est

$$Pa \sin \alpha dx + 2\Pi b \cos 2\alpha dx,$$

si α est compris entre 0 et π , et

$$- Pa \sin \alpha dx + 2\Pi b \cos 2\alpha dx,$$

si α est compris entre π et 2π .

Nous pouvons nous borner à étudier la première formule, car tout se passe dans la seconde moitié du tour de la manivelle OM comme dans la première, le contre-poids faisant un nouveau tour entier, et la force P ayant changé de sens. Or, lorsque α varie de 0 à π , le produit $Pa \sin \alpha$ varie de 0 pour $\alpha = 0$ à Pa pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et revient à 0 pour $\alpha = \pi$. Le produit $2\Pi b \cos 2\alpha$ varie en même temps de $2\Pi b$ pour $\alpha = 0$, à $-2\Pi b$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et à $2\Pi b$ pour $\alpha = \pi$. Le coefficient de dx a donc les valeurs suivantes

$$2\Pi b, \quad Pa - 2\Pi b, \quad 2\Pi b,$$

pour

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \pi.$$

La régularité de la transmission serait parfaite si le coefficient de dx restait constant. Si l'on ne peut satisfaire à cette condition, on peut du moins s'arranger pour que les trois

valeurs calculées soient les mêmes; il suffit pour cela de faire

$$Pa - 2\Pi b = 2\Pi b,$$

ce qui donne la condition $\Pi b = \frac{1}{4} Pa$.

43. Nous allons chercher quel volant il conviendrait de donner à une machine à manivelle simple et à double effet, déjà régularisée par un contre-poids animé d'une vitesse angulaire double, et satisfaisant soit à la condition qu'on vient de trouver, soit plus généralement à la condition $\Pi b = \theta Pa$, θ étant un nombre constant que nous déterminerons plus tard de manière à obtenir le plus de régularité possible. Nous supposerons que la résistance soit une force constante Q, tangente à un cercle de rayon q , concentrique à l'arbre principal.

L'équation qui établit la périodicité du mouvement pour chaque tour de cet arbre, ou pour chaque demi-tour, est

$$2Pa = \pi Qq,$$

d'où on tire

$$\frac{Qq}{Pa} = \frac{2}{\pi}.$$

Le contre-poids n'influe pas sur cette condition, puisque le travail de la pesanteur est nul quand l'arbre principal fait la moitié d'un tour. Nous avons donc seulement à considérer ce qui se passe quand le bouton de la manivelle décrit la demi-circonférence AGB.

Les maxima et les minima de la vitesse angulaire correspondront à des angles α satisfaisant à l'équation d'équilibre, ou à l'équation du travail virtuel

$$(Pa \sin \alpha + 2\Pi b \cos 2\alpha - Qq) d\alpha = 0.$$

Remplaçons Πb par θPa , Qq par $\frac{2}{\pi} Pa$; il vient pour déterminer α l'équation

$$\sin \alpha + 2\theta \cos 2\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

ou bien, en remplaçant $\cos 2\alpha$ par $1 - 2\sin^2\alpha$, et en divisant par -4θ ,

$$\sin^2\alpha - \frac{1}{4\theta}\sin\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi\theta} - 1\right) = 0,$$

équation du second degré en $\sin\alpha$, qui donne pour α deux valeurs comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et par suite deux valeurs supplémentaires des premières, comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

Soient α' et α'' , par ordre de grandeur, les deux premières valeurs de α comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; les autres seront $\pi - \alpha'$ et $\pi - \alpha''$, et on reconnaîtra, par une discussion facile, que les angles α' et $\pi - \alpha''$ correspondent au minimum de la vitesse angulaire, tandis que α'' et $\pi - \alpha'$ correspondent au maximum.

Appliquons l'équation des forces vives. I étant le moment d'inertie du treuil principal, y compris le volant cherché, I' le moment d'inertie du treuil du contre-poids (abstraction faite de ce contre-poids dont le moment d'inertie est $\frac{\Pi}{g}b^2$), ω_0 la vitesse angulaire du treuil principal quand la manivelle passe dans la position OA , ω la vitesse angulaire du même treuil dans la position définie par l'angle α ; nous aurons

$$\frac{1}{2}I(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{2}\left(I' + \frac{\Pi}{g}b^2\right)(4\omega^2 - 4\omega_0^2) = Pa \int_0^\alpha \left(\sin\alpha + 2\theta \cos 2\alpha - \frac{2}{\pi}\right) d\alpha = \left(1 - \cos\alpha - \frac{2\alpha}{\pi} + \theta \sin 2\alpha\right) Pa.$$

Le coefficient de Pa atteint ses maxima et ses minima pour les valeurs de α déterminées tout à l'heure, et le problème est ramené aux termes suivants : Déterminer le coefficient θ de manière que la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la fonction

$$(1) \quad X = 1 - \cos\alpha - \frac{2\alpha}{\pi} + \theta \sin 2\alpha,$$

quand α varie de 0 à π , soit la moindre possible.

Les valeurs de α qui correspondent au maximum et au minimum de X sont données par l'équation

$$(2) \quad 0 = \sin\alpha - \frac{2}{\pi} + 2\theta \sin 2\alpha,$$

que l'on obtient en prenant la dérivée de l'équation (1) par rapport à α . Les deux équations (1) et (2), prises ensemble, représentent donc l'enveloppe des droites définies par l'équation (1), dans laquelle X serait l'ordonnée, θ l'abscisse, et α un paramètre variable. Nous pouvons construire cette enveloppe en traçant ses tangentes.

On obtient par là une courbe formée de deux branches MOM' , NCN' , symétriques par rapport à l'axe OC , et symétriques par rapport à un certain axe AA' , perpendiculaire à OC ; les points O et C sont pour les deux branches des points de rebroussement. Pour une valeur OH de θ , on a quatre valeurs de X , savoir HP , HP' , $-HP''$, $-HP'''$, correspondantes à quatre valeurs de α définies par les tangentes PK , $P'K'$, $P''K''$, $P'''K'''$. La plus grande différence de ces valeurs est

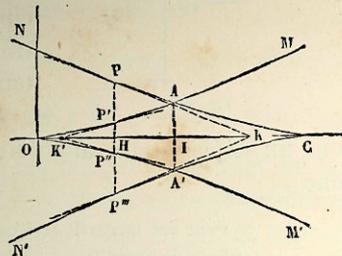


Fig. 19.

PP''' ; le minimum de cette différence est AA' , distance des points où se coupent les deux branches de la courbe¹. La valeur cherchée de θ est donc $\theta = OI$. On trouve, en faisant l'épure, que cette valeur est comprise entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$.

CONTRE-POIDS POUR UNE MANIVELLE DOUBLE A DOUBLE EFFET.

44. La période de la machine à manivelle double et à double effet est du quart de tour. Les forces P , P' étant paral-

¹ Cette méthode a été donnée par M. Drouets, ingénieur des ponts et chaussées.

lèles et égales, le travail moteur pour un quart de tour des manivelles est $2Pa$; le travail de la résistance Q , appliquée tangentiellement au cercle de rayon $OD = q$, est $Qq \times \frac{\pi}{2}$; la condition de périodicité est donc $2Pa = Qq \times \frac{\pi}{2}$, ou bien $Qq = \frac{4}{\pi} Pa$. Le contre-poids Π ne devant pas altérer cette

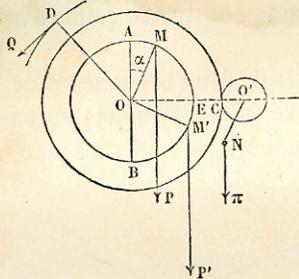


Fig. 20.

condition, nous le supposons monté sur un arbre tournant O' dont la vitesse angulaire soit quadruple de celle de l'arbre O . Le contre-poids revient alors au même point N quand l'arbre principal fait un quart de tour, et le travail correspondant de la pesanteur est nul.

Le travail élémentaire des forces pour un déplacement angulaire $d\alpha$ de l'arbre principal sera donc

$$\begin{aligned} \text{Pour les forces } P \text{ et } P', & \quad (Pa \sin \alpha + Pa \cos \alpha) d\alpha, \\ \text{Pour la force } Q, & \quad - Qq d\alpha, \\ \text{Et pour le contre-poids } \Pi, & \quad \Pi b \cos(4\alpha + \beta) \times 4d\alpha, \end{aligned}$$

en appelant b la longueur du rayon $O'N$, et β l'angle que fait ce rayon avec l'horizontale $O'C$ quand $\alpha = 0$. La somme de ces travaux élémentaires est

$$[Pa(\sin \alpha + \cos \alpha) - Qq + 4\Pi b \cos(4\alpha + \beta)] d\alpha.$$

Remplaçons Qq par $\frac{4}{\pi} Pa$, puis Πb par $Pa \times \theta$, θ étant un nombre qui reste à déterminer. Le travail élémentaire devient

$$Pa \left[\sin \alpha + \cos \alpha - \frac{4}{\pi} + 4\theta \cos(4\alpha + \beta) \right] d\alpha.$$

Le mouvement serait uniforme si la quantité entre parenthèses était constamment nulle pour toute valeur de α com-

prise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On ne peut satisfaire à cette condition; mais on peut déterminer les constantes inconnues θ et β de manière que la fonction entre parenthèses ait en valeur absolue les plus petites valeurs possibles.

Sans entrer dans tous les détails de ce problème, observons que pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la fonction prend pour valeur $1 - \frac{4}{\pi} + 4\theta \cos \beta$; et que pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, elle est égale à $\sqrt{2} - \frac{4}{\pi} - 4\theta \cos \beta$. Si l'on voulait annuler l'une ou l'autre de ces deux expressions, on ferait $\theta \cos \beta = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}$, ou bien $\theta \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{\pi}$.

Ces deux déterminations étant inégales, on peut prendre pour $\theta \cos \beta$ une valeur moyenne, savoir : $\frac{\sqrt{2}-1}{8} = 0,051\dots$, et comme il y a intérêt à faire θ le plus petit possible, on fera en même temps $\beta = 0$. Le produit 4θ est alors sensiblement égal à 0,20, et le travail élémentaire des forces est exprimé par la fonction

$$Pa \left(\sin \alpha + \cos \alpha - \frac{4}{\pi} + 0,20 \cos 4\alpha \right) d\alpha,$$

applicable seulement entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

GÉNÉRALITÉS SUR LES CONTRE-POIDS.

45. Théoriquement on peut, en multipliant les contre-poids, régulariser complètement un mouvement de rotation. Supposons que la période soit d'un tour entier. Prenons un des rayons OM de l'arbre tournant pour repère entraîné dans le mouvement de la machine, et soit $MOA = \alpha$ l'angle que fait ce rayon mobile avec un rayon

fixe OA, pris pour axe polaire. Dans la situation de la machine qui correspond à la position OM du rayon mobile, les forces mouvantes et les forces résistantes ont des grandeurs et des positions données; on pourra calculer par conséquent le travail élémentaire dT qui correspond à une rotation infiniment petite $d\alpha$; le quotient $\frac{dT}{d\alpha}$ sera une certaine

fonction de α que nous représenterons par $F(\alpha)$, et qui dépendra de la situation et de la grandeur des forces. Cette fonction est, par exemple, la somme des moments des forces par rapport à l'axe O, si toutes les forces sont appliquées à l'arbre principal. Dans tous les cas, c'est la dérivée du travail des forces par rapport à l'angle α qui fixe la position de la machine. Cette fonction peut être regardée comme connue pour toutes les valeurs de α comprises de 0 à 2π ; au delà, elle reprend par hypothèse les mêmes valeurs. Elle reste finie, mais elle n'est pas assujettie à la loi de continuité. Enfin, on doit ajouter la condition de la périodicité $\int_0^{2\pi} F(\alpha) d\alpha = 0$.

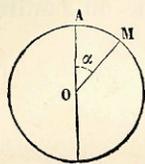


Fig. 21.

Pour régulariser le mouvement de la machine, imaginons qu'on fasse engrener avec l'arbre principal un nombre indéfini d'arbres tournants, dont les vitesses angulaires soient respectivement égales, pour le premier, au double de celle de l'arbre principal, au triple pour le second, au quadruple pour le troisième, et ainsi de suite. Nous attacherons à l'arbre principal un contre-poids Π_1 à la distance b_1 de son axe, un contre-poids Π_2 au premier arbre additionnel à la distance b_2 de son axe, un contre-poids Π_3 à la distance b_3 de l'axe du second, etc.; et nous supposerons que quand α est nul, chacun de ces contre-poids soit situé dans le plan horizontal mené par le centre du cercle qu'il décrit. Chaque produit Πb sera d'ailleurs pris positivement ou négativement, suivant que le poids Π tend dans cette position à accélérer ou à retarder le mouvement de la machine.

Le travail élémentaire de la pesanteur sur le premier contre-poids sera, dans la position définie par l'angle α ,

$$\Pi_1 b_1 \cos \alpha d\alpha.$$

Le travail élémentaire du second sera de même

$$2\Pi_2 b_2 \cos 2\alpha d\alpha,$$

le travail du troisième,

$$3\Pi_3 b_3 \cos 3\alpha d\alpha,$$

et ainsi des autres; de sorte que la somme des travaux élémentaires des forces données et des contre-poids sera représentée par la fonction

$$[F(\alpha) + \Pi_1 b_1 \cos \alpha + 2\Pi_2 b_2 \cos 2\alpha + 3\Pi_3 b_3 \cos 3\alpha + \dots] d\alpha.$$

Le mouvement du système sera uniforme si la parenthèse est constamment nulle. Pour satisfaire à cette condition, développons la fonction $F(\alpha)$ suivant les cosinus de l'angle α et de ses multiples. Si l'on a identiquement

$$(1) \quad F(\alpha) = A_1 \cos \alpha + A_2 \cos 2\alpha + A_3 \cos 3\alpha + \dots,$$

on devra poser

$$\Pi_1 b_1 = -A_1,$$

$$\Pi_2 b_2 = -\frac{1}{2} A_2,$$

$$\Pi_3 b_3 = -\frac{1}{3} A_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

Or il est toujours possible de développer une fonction $F(\alpha)$ sous cette forme. Les coefficients se déterminent par la méthode suivante. Soit proposé de trouver le coefficient A_m de $\cos m\alpha$; nous multiplierons l'équation (1) par $\cos m\alpha d\alpha$, et nous intégrerons entre les limites 0 et 2π .

Il viendra

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos m\alpha d\alpha = A_1 \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cos m\alpha d\alpha + A_2 \int_0^{2\pi} \cos 2\alpha \cos m\alpha d\alpha + \dots$$

$$\dots + A_m \int_0^{2\pi} \cos^2 m\alpha d\alpha + \dots$$

Toutes les intégrales sont de la forme

$$\int \cos nx \cos mx dx,$$

et sont prises entre les limites 0 et 2π .

$$\text{Or } \cos nx \cos mx = \frac{1}{2} \cos(m+n)x + \frac{1}{2} \cos(m-n)x.$$

Multiplications par dx et intégrons; il viendra

$$\begin{aligned} \int \cos nx \cos mx &= \frac{1}{2} \int \cos(m+n)x dx + \frac{1}{2} \int \cos(m-n)x dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{2} \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x, \end{aligned}$$

quantité identiquement nulle aux limites 0 et 2π , toutes les fois que n est différent de m .

Donc tous les coefficients de A_1, A_2, \dots sont nuls, à l'exception de celui de A_m . Pour celui-là, l'intégrale générale où l'on ferait $m=n$ prendrait la forme $\frac{0}{0}$, ce qui n'apprend rien.

Mais le coefficient de A_m est l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx,$$

dont la valeur est connue.

On a en effet

$$\int \cos^2 mx dx + \int \sin^2 mx dx = \int dx = x,$$

et

$$\begin{aligned} \int \cos^2 mx dx - \int \sin^2 mx dx &= \int \cos 2mx dx \\ &= \frac{1}{2m} \int \cos 2mx d(2mx) \\ &= \frac{1}{2m} \sin 2m\alpha. \end{aligned}$$

Ajoutant, il vient

$$\int \cos^2 mx dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4m} \sin 2m\alpha,$$

fonction qui, prise entre les limites 0 et 2π , donne en définitive π . Donc

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx = \pi;$$

par conséquent

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos m\alpha dx.$$

On devra calculer directement cette dernière intégrale au moyen d'une quadrature.

La méthode que nous venons de suivre n'est au fond qu'une application de la *Méthode de Bezout*, ou méthode des multiplicateurs indéterminés. Si l'on conçoit l'équation (1) écrite un nombre infini de fois pour une infinité de valeurs de l'angle α , on aura à résoudre ce système d'équations par rapport aux coefficients inconnus A_1, A_2, A_3, \dots . Pour trouver la valeur de l'un quelconque d'entre eux, A_m , on devra multiplier chaque équation par un coefficient particulier, choisi de telle sorte qu'en faisant la somme des équations ainsi multipliées, tous les termes disparaissent, sauf celui qui contient A_m . Le multiplicateur cherché est pour chaque équation $\cos m\alpha dx$, et l'addition des équations, qui se trouvent en nombre infini, se change en une intégration.

Les valeurs des coefficients A_1, A_2, \dots font connaître les produits $\Pi_1 b_1, \Pi_2 b_2, \dots$, et l'on a les relations définitives :

$$\begin{aligned} \Pi_1 b_1 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos \alpha dx, \\ \Pi_2 b_2 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos 2\alpha dx, \\ \Pi_3 b_3 &= -\frac{1}{3\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos 3\alpha dx, \\ &\dots \dots \dots \\ \Pi_m b_m &= -\frac{1}{m\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos m\alpha dx. \end{aligned}$$

APPLICATION A LA MANIVELLE SIMPLE A SIMPLE EFFET.

46. La périodicité du mouvement tour par tour exige la relation

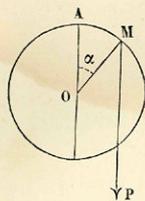


Fig. 22.

$$2Pa = 2\pi Qq,$$

qui donne

$$Qq = \frac{1}{\pi} Pa.$$

Le travail total T à partir du point mort A est

$$Pa(1 - \cos \alpha) - Qq \times \alpha,$$

formule admissible tant que α est compris entre 0 et π , et

$$2Pa - Qq \times \alpha,$$

quand α varie de π à 2π .

On a donc entre 0 et π

$$F(\alpha) = \frac{dT}{d\alpha} = Pa \sin \alpha - Qq = Pa \left(\sin \alpha - \frac{1}{\pi} \right),$$

et entre π et 2π

$$F(\alpha) = -Qq = -Pa \times \frac{1}{\pi}.$$

Calculons le coefficient A_m . La formule générale nous donne

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos m\alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Pa \left(\sin \alpha - \frac{1}{\pi} \right) \cos m\alpha d\alpha - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} Pa \times \frac{1}{\pi} \cos m\alpha d\alpha, \end{aligned}$$

ou bien

$$A_m = \frac{Pa}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \alpha \cos m\alpha d\alpha - \frac{Pa}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos m\alpha d\alpha,$$

Mais

$$\sin \alpha \cos m\alpha = \frac{1}{2} [\sin(m+1)\alpha - \sin(m-1)\alpha],$$

et par suite

$$\int \sin \alpha \cos m\alpha d\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\cos(m+1)\alpha}{m+1} + \frac{1}{2} \frac{\cos(m-1)\alpha}{m-1},$$

formule applicable seulement dans le cas où m est différent de l'unité.

L'intégrale prise entre les limites 0 et π nous donne

$$-\frac{1}{2} \frac{\cos(m+1)\pi}{m+1} + \frac{1}{2} \frac{\cos(m-1)\pi}{m-1} + \frac{1}{2(m+1)} - \frac{1}{2(m-1)}.$$

D'un autre côté

$$\int \cos m\alpha d\alpha = \frac{1}{m} \int \cos m\alpha d(m\alpha) = \frac{1}{m} \sin m\alpha,$$

quantité nulle aux limites, 0 et 2π , du second terme de l'intégrale. Il vient donc seulement

$$A_m = -\frac{Pa}{2\pi} \left(\frac{\cos(m+1)\pi - 1}{m+1} - \frac{\cos(m-1)\pi - 1}{m-1} \right).$$

Le nombre entier m est pair ou impair.

S'il est impair, $m+1$ et $m-1$ sont pairs, et $\cos(m+1)\pi$ et $\cos(m-1)\pi$ sont égaux tous deux à $+1$. La parenthèse se réduit alors à zéro.

Si m est pair, $m+1$ et $m-1$ sont impairs, et $\cos(m+1)\pi$ et $\cos(m-1)\pi$ sont tous deux égaux à -1 .

On pourrait poser dans tous les cas

$$\cos(m+1)\pi = \cos(m-1)\pi = (-1)^{m+1}.$$

Si m est impair, $A_m = 0$; ce résultat s'applique aussi à $m=1$, bien que nous ayons exclu ce cas, qu'il est aisé de traiter à part; et

$$A_m = \frac{Pa}{\pi} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-1} \right) = -\frac{2Pa}{\pi(m^2-1)},$$

pour toutes les valeurs paires de m .

On aura ainsi

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{2}{5} \frac{Pa}{\pi}, & \text{et par suite } \Pi_2 b_2 &= \frac{1}{5} \frac{Pa}{\pi}, \\ A_4 &= -\frac{2}{15} \frac{Pa}{\pi}, & \Pi_4 b_4 &= \frac{1}{50} \frac{Pa}{\pi}, \\ A_6 &= -\frac{2}{55} \frac{Pa}{\pi}, & \Pi_6 b_6 &= \frac{1}{105} \frac{Pa}{\pi}, \\ A_8 &= -\frac{2}{65} \frac{Pa}{\pi}, & \Pi_8 b_8 &= \frac{1}{252} \frac{Pa}{\pi}, \\ & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{aligned}$$

Les contre-poids Π_1, Π_3, \dots de rang impair sont tous nuls.

La fonction qui, au facteur dz près, représente le travail élémentaire, y compris le travail des contre-poids, est

$$F(z) + \frac{2Pa}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2z + \frac{1}{15} \cos 4z + \frac{1}{55} \cos 6z + \frac{1}{65} \cos 8z + \dots \right)$$

fonction qui doit être identiquement nulle pour toute valeur de z .

Il est clair que ce procédé de régularisation est inadmissible en pratique, car il exigerait pour être un peu exact un nombre considérable de contre-poids, d'arbres tournants et de roues dentées, dont les frottements suffiraient pour rendre les transmissions impossibles.

DÉTERMINATION PRATIQUE D'UN CONTRE-POIDS POUR UNE MACHINE QUELCONQUE.

47. Le contre-poids que nous nous proposons de déterminer est lié à un arbre tournant dont la vitesse angulaire est double de la vitesse de l'arbre principal. Soit α l'angle décrit par la manivelle de l'arbre principal à partir du point mort. Appelons β l'angle que fait avec l'horizontale le rayon sur lequel est fixé le contre-poids, quand $\alpha=0$, c'est-à-dire quand la manivelle passe au point mort. Appelons Π le contre-poids, b la distance à l'axe autour duquel il tourne; enfin, appelons T le travail des forces, tant mouvantes que résistantes, depuis le passage du point mort jusqu'à la valeur α de l'an-

glè décrit par la manivelle. Appliquons le théorème des forces vives entre le point mort et la position de la manivelle définie par cet angle α . Il viendra, en appelant I et I' les moments d'inertie de l'arbre principal et de l'arbre additionnel, celui-ci ne comprenant pas le contre-poids Π , l'équation

$$(1) \quad \frac{1}{2} \left(I + 4I' + 4 \frac{\Pi b^2}{g} \right) (\omega^2 - \omega_0^2) = T + \Pi b [\sin(2\alpha + \beta) - \sin \beta].$$

La régularité du mouvement sera d'autant plus complète que les valeurs numériques absolues du second membre seront moindres.

La quantité T est une fonction de l'angle α qui s'annule pour $\alpha=0$, et qui reprend les mêmes valeurs quand α augmente de 2π : condition nécessaire pour que le mouvement soit périodiquement uniforme par chaque tour de roue.

Il suffit donc de faire varier α de 0 à 2π . Dans cet intervalle, le terme qui exprime le travail du contre-poids s'annule pour trois valeurs de α , savoir: pour $\alpha=0$, pour $\alpha=\pi$, et pour $2\alpha + \beta = \pi - \beta$, c'est-à-dire pour $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Il reprend d'ailleurs la même valeur quand α augmente de π .

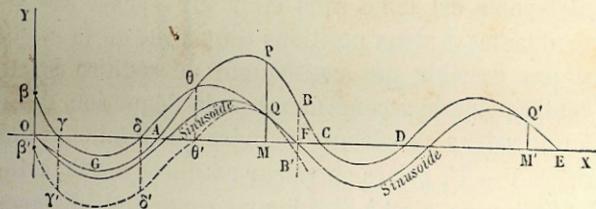


Fig. 25.

Traçons une courbe dont α soit l'abscisse et T l'ordonnée. Sur l'axe horizontal OX portons des longueurs proportionnelles à α , entre les limites 0 et 2π . Nous aurons par exemple $OF = \pi$ et $OE = 2\pi$. Puis portons en ordonnées les valeurs correspondantes de T . Nous obtiendrons ainsi une courbe continue, $OABCDE$, qui coupe l'axe OX aux points extrêmes O et E , et en

outre en un certain nombre de points intermédiaires, A, C, D.

L'ordonnée FB qui correspond à $\alpha = \pi$ partage l'épure en deux moitiés, et l'on peut reporter la seconde moitié sur la première, en faisant coïncider les axes des abscisses. On obtient ainsi la courbe $\beta\gamma\delta F$, qui n'est autre que la courbe BCDE qu'on aurait déplacée vers la gauche d'une longueur égale à π . A chaque abscisse prise sur OF correspondent donc en général deux ordonnées : l'une MP, appartenant à la courbe primitive, représente la valeur de T pour $\alpha = OM$; l'autre MQ, égale à M'Q', représente la valeur de T pour $\alpha = OM'$ ou pour $\alpha = OM + \pi$. Soit T' cette seconde valeur MQ. Le terme $\Pi b (\sin(2x + \beta) - \sin\beta)$ ayant la même valeur pour deux déterminations de α qui diffèrent entre elles de la demi-circumference, si y représente la valeur de ce terme pour $\alpha = OM$, y sera aussi sa valeur pour $\alpha = OM'$; de sorte qu'en appliquant le théorème des forces vives entre les positions $\alpha = OM$ et $\alpha = OM'$, le travail du contre-poids disparaîtra et on aura simplement l'équation

$$(2) \quad \frac{1}{2} \left(1 + 4Y + 4\frac{\Pi}{g} b^2 \right) (\omega^2 - \omega'^2) = T' - T.$$

Le contre-poids est donc sans effet sur l'écart des vitesses correspondantes à deux positions contraires de la manivelle. Il n'est pas possible par conséquent de réduire au moyen d'un contre-poids le second membre de l'équation des forces vives à une valeur numérique moindre que la plus grande des différences $T - T'$, prises en valeur absolue. Soit PQ cette plus grande différence, c'est-à-dire le maximum de la distance verticale entre les deux courbes.

Construisons maintenant la courbe dont les ordonnées sont $-y$. Ce sera une *sinusoïde* qui passera par le point O et par le point F; on peut choisir à volonté l'angle β et l'*amplitude verticale*, $2\Pi b$, de la courbe. La différence des ordonnées de cette sinusoïde et des courbes OAB, $\beta\delta F$, fera connaître pour chaque point la valeur numérique du second membre de l'équation (1). Abaissons verticalement de la quantité PQ le *trait supérieur*

$\beta\gamma\delta PB$, de manière à lui faire occuper la position $\beta'\gamma'\delta'QB'$. Dans cette nouvelle position, il est tout entier au-dessous du *trait inférieur* OGA θ QF, sauf au point Q où ces deux traits sont tangents, puisque PQ est le maximum de leur distance verticale. Cela posé, s'il est possible de tracer dans l'intervalle compris entre le *trait inférieur* OGA θ QF et le *trait abaissé* $\beta'\gamma'\delta'QB'$ une sinusoïde passant par les points O et F, et passant de plus par le point Q, cette sinusoïde sera la courbe du travail du contre-poids qu'il convient de choisir.

En effet, la différence entre l'ordonnée de la sinusoïde et l'ordonnée du *trait inférieur* a partout le même signe, et son maximum, en valeur absolue, est moindre que PQ. La différence avec l'ordonnée du *trait supérieur* a ce même signe, et elle est partout moindre en valeur absolue que PQ. Donc, dans l'équation des forces vives appliquées à deux positions quelconques α' et α'' , les deux différences se retrancheront, et comme elles sont de même signe, la valeur absolue du résultat sera moindre que PQ, limite au-dessous de laquelle l'écart des valeurs absolues du second membre ne peut descendre.

Cette méthode a été donnée par M. Gouin, ingénieur des Ponts et Chaussées.

On déterminera Πb et β par tâtonnements, de manière à faire passer la sinusoïde au point Q. S'il n'est pas possible de satisfaire à ces conditions, la régularisation de la machine n'est plus aussi complète tant qu'on se borne à un contre-poids unique. On devra prendre alors la sinusoïde qui imite le mieux la courbe OGAPBCDQ'E, et déterminer le poids du volant d'après le maximum des écarts entre les valeurs numériques du second membre de l'équation (1).

DES CONTRE-POIDS DESTINÉS A AUGMENTER LA STABILITÉ DES MACHINES.

48. Dans une machine en mouvement, il y a à chaque instant, en vertu du théorème de d'Alembert, équilibre entre toutes les forces qui sollicitent la machine et les

forces d'inertie. Parmi les premières forces figurent les réactions des corps voisins, sur lesquels la machine repose. L'état de mouvement les fait varier, et si la machine n'est pas solidement fixée sur ses appuis, il peut en résulter non-seulement des variations de charges, mais encore de petits mouvements oscillatoires qui viennent troubler le mouvement principal. C'est ce qui arrive notamment dans les locomotives, parce que la grande vitesse dont elles sont animées donne une grande importance aux forces d'inertie. Les locomotives sont d'ailleurs posées sur les rails, et peuvent prendre un certain jeu sans sortir de la voie. Si l'on suppose la machine parfaitement ajustée, parfaitement entretenue, et circulant sur une voie parfaite, le mouvement rapide des pièces mobiles de la machine détermine des mouvements de *lacet*, de *galop*, de *roulis*, de *tangage*, qui consistent, les trois premiers en rotations autour de trois axes rectangulaires, le quatrième en une oscillation linéaire parallèle à la voie.

M. Nollau, ingénieur allemand, fit dès 1847 des expériences pour déterminer ces différents mouvements; il opérait sur une locomotive suspendue par des chaînes aux fermes d'un atelier, et il constata ainsi l'existence des deux principaux mouvements, celui de galop et celui de tangage. Il essaya ensuite de détruire ces mouvements en attachant un contre-poids à chaque roue motrice, sur le prolongement des rayons des manivelles. On peut en effet, à l'aide de contre-poids ainsi placés et convenablement déterminés, annuler soit l'un, soit l'autre des deux mouvements constatés; mais il est impossible de les annuler tous les deux.

49. Sans entrer dans le détail des calculs de l'établissement des contre-poids, pour lesquels nous renverrons aux mémoires de MM. Le Chatelier, Ivon Villarceau, Resal, Couche, etc., remarquons que les principales parties mobiles de la locomotive sont, pour un côté de la machine, la roue motrice O, la manivelle OA, la bielle AB, le piston D et sa tige C. Le mouvement de la roue motrice est uniforme une fois le

régime régulier établi. Les forces d'inertie se réduisent donc aux forces centrifuges, qui se font équilibre deux à deux. La manivelle OA possède le même mouvement uniforme de rotation; mais les forces centrifuges n'y sont pas équilibrées comme pour la roue. La bielle AB a un mouvement très compliqué; on peut, comme approximation grossière, partager sa masse en deux parties égales, AI, IB; l'une AI sera supposée concentrée au point A;

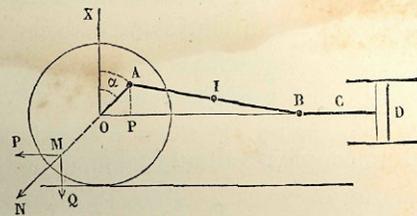


Fig. 24.

l'autre IB sera supposée ramenée au point B. La première vient grossir la masse de la manivelle, et accroître les forces centrifuges du rayon mobile OA. Dans tous les cas, on pourra placer quelque part en M, sur le rayon AO prolongé, une masse assez grande pour équilibrer la force centrifuge de la manivelle ainsi grossie. Le système de la roue se trouve alors équilibré, pourvu que le mouvement soit uniforme, car autrement il y aurait à tenir compte des forces d'inertie tangentielles, qui ne s'équilibreraient plus. Mais bornons-nous au mouvement uniforme de la roue. Le mouvement du piston, grossi de la demi-bielle, n'est pas uniforme; si l'on désigne par x l'espace qu'il a décrit à partir du passage du bouton de la manivelle sur la verticale OX, on aura sensiblement $x = a \sin \alpha$, α étant l'angle XOA et a la longueur OA. Soit P le poids du piston, la demi-bielle y étant comprise; la force d'inertie de l'ensemble de ce système animé d'un mouvement rectiligne sera

$$-\frac{P}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = + \frac{P}{g} a \omega^2 \sin \alpha,$$

ω étant la vitesse angulaire de la roue O.

De l'autre côté de la machine, on trouve une roue et un piston respectivement égaux à la roue et au piston que nous venons de considérer. Seulement l'angle α relatif à ce côté

surpasse de $\frac{\pi}{2}$ l'angle α relatif au côté opposé. La somme des forces d'inertie du second piston est donc

$$\frac{P}{g} a \omega^2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{P}{g} a \omega^2 \cos \alpha.$$

Ces deux forces sont généralement horizontales; transportées au centre de gravité de la machine, elles y donnent une résultante égale à leur somme algébrique

$$\frac{P}{g} a \omega^2 (\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{P}{g} a \omega^2 \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right),$$

et un couple résultant égal à

$$\frac{P}{g} a \omega^2 \sin \alpha \times \frac{H}{2} - \frac{P}{g} a \omega^2 \cos \alpha \times \frac{H}{2},$$

ou à

$$\frac{PH}{2g} a \omega^2 (\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{PH}{2g} a \omega^2 \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right),$$

en appelant H la distance des plans verticaux des deux cylindres.

La résultante atteint son maximum en valeur absolue quand $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; elle est nulle quand $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ et $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

Le couple est nul pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$, et maximum en valeur

absolue pour $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$. Rien ne s'oppose à l'action

de la résultante, qui cause le mouvement de tangage de la machine. Les rebords des roues contribuent à réduire l'effet du couple, qui tend à produire le mouvement de lacet.

Si l'on ajoute un poids Π au contre-poids déjà placé en M , à la distance r du centre O , ce poids sera le siège d'une force d'inertie $\frac{\Pi}{g} \omega^2 r$, dirigée dans le sens MN ; elle se décompose en deux: une horizontale dirigée dans le sens MP , et égale

à $\frac{\Pi}{g} \omega^2 r \sin \alpha$; l'autre verticale, dans le sens MQ , et égale à $\frac{\Pi}{g} \omega^2 r \cos \alpha$. La première peut servir à annuler la force d'i-

nertie, $\frac{P}{g} a \omega^2 \sin \alpha$, du piston D et de son attirail, et par suite à réduire à zéro la résultante et le mouvement de tangage qui en est la suite. Mais, outre que ce procédé n'annule pas le couple qui produit le mouvement de lacet, il introduit des composantes verticales MQ , qui, prises dans les deux roues et transportées au centre de gravité, donnent naissance à une résultante verticale, peu dangereuse il est vrai, puisqu'elle est loin de détruire le poids de la machine, et à un couple qui produit à la fois le mouvement de roulis et un léger mouvement de galop. On voit donc naître les oscillations verticales en même temps qu'on réduit celles qui s'opèrent dans le plan horizontal.

50. Un moyen sûr, mais peu pratique, de supprimer les oscillations, serait d'accoupler deux cylindres de chaque côté de la locomotive, en faisant agir les pistons de ces cylindres sur des manivelles en prolongement l'une de l'autre. La résultante des forces d'inertie transportées au centre de gravité est alors

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} a \omega^2 \left([\sin \alpha + \sin(\alpha + \pi)] + \left[\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) \right] \right) \\ = \frac{P}{g} a \omega^2 (\sin \alpha + \cos \alpha - \sin \alpha - \cos \alpha) = 0, \end{aligned}$$

et le couple résultant est de même

$$\begin{aligned} \frac{PH}{2g} a \omega^2 \left([\sin \alpha - \cos \alpha] + [\sin(\alpha + \pi) - \cos(\alpha + \pi)] \right) \\ = \frac{PH}{2g} a \omega^2 (\sin \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Les forces d'inertie sont donc alors équilibrées par la seule présence des contre-poids placés sur les roues motrices en prolongement des manivelles.

Il ne faut pas oublier que tous ces résultats sont purement approximatifs, et qu'ils supposent établie l'uniformité du mouvement moyen de la machine.

USAGE DES CONTRE-POIDS DANS LES MACHINES MARINES.

51. La stabilité d'un bâtiment dépend de la position de son centre de gravité, et par suite, le bâtiment tend à s'incliner d'un côté ou d'un autre, quand on modifie l'arrimage de sa cargaison. Les pièces mobiles des machines à vapeur destinées à mettre en mouvement les appareils de propulsion peuvent occasionner par leur mouvement des déplacements du centre de gravité général, à moins qu'on ne les ait disposées de telle sorte que leur centre de gravité reste immobile malgré le jeu alternatif de leurs organes. Cette compensation, peu nécessaire pour les machines des bâtiments à aubes, voisines du centre de gravité, devient indispensable pour les machines des bateaux à hélice, dirigées transversalement, et placées d'ailleurs plus près de l'arrière.

CHAPITRE V

DES FREINS ET DES RÉGULATEURS.

52. Les *freins* servent à modérer la vitesse des machines, ou à arrêter tout à fait le mouvement, en faisant naître une résistance dont le travail négatif s'ajoute aux travaux des autres résistances et réduit la force vive du système à zéro. Les *régulateurs* sont des appareils destinés à agir à la façon des freins quand la vitesse de la machine tend à s'accroître, et à supprimer au contraire certaines résistances quand le mouvement tend à se ralentir. Une différence essentielle entre ces deux genres d'appareils, c'est que les freins doivent être à la disposition de ceux qui conduisent la machine, tandis que les régulateurs doivent agir par eux-mêmes, dès que la vitesse de la machine s'écarte d'une moyenne fixée d'avance.

53. Le *frein à bande*, employé dans les grues, sert à arrêter la rotation d'un arbre tournant. Nous en avons donné la description dans le § 348 de la Statique. Nous avons trouvé quelle force on doit appliquer à l'extrémité du levier pour produire une différence donnée, $T - T'$, entre les tensions de la bande à ses deux extrémités. Cette différence mesure le frottement total développé au contact de la bande avec la surface du cylindre. Pour un déplacement angulaire dx de ce cylindre, le travail négatif du frottement sera donc $(T - T')rdx$,

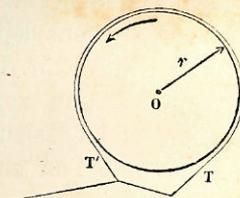


Fig. 25.

en appelant r le rayon. Si ω est la vitesse angulaire du cylindre à l'instant où l'on met le frein, et I le moment d'inertie *réduit* de tous les treuils qui engrènent avec l'arbre du cylindre, on déterminera l'angle total décrit par le cylindre jusqu'à l'arrêt complet au moyen de l'équation des forces vives

$$(T - T')r\alpha = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Cette équation suppose que le frottement de la bande soit la seule force qui agisse sur l'appareil pendant toute la période de l'arrêt.

En divisant α par 2π , on aura le nombre de tours que fera le cylindre pendant cette période. Ce nombre est d'autant plus petit que $T - T'$ est plus grand. Or (II, § 344)

$$T = T' \times e^{f\theta},$$

f étant le coefficient du frottement, et θ l'arc embrassé par la bande. La tension T' est proportionnelle à la force appliquée à l'autre bout du levier; donc $T - T'$ est proportionnel au produit de cette force par le facteur $e^{f\theta} - 1$, qui croît très rapidement avec l'exposant $f\theta$.

54. Les freins ont une importance capitale sur les chemins de fer.

Les anciens procédés, toujours conservés comme mesures de sécurité, consistaient à enrayer les roues et à substituer un glissement sur le rail au roulement qui se fait presque sans effort. Nous avons déjà exposé la théorie sommaire de ce phénomène (III, § 125). Pour donner ici un peu plus de détails sur cette question, appelons P le poids total d'un train moins les roues et les essieux, p la partie de ce poids qui pèse sur les roues que l'on enraye, q le poids d'une paire de roues, v la vitesse du train au moment où l'on met les freins, r le rayon des roues, et I le moment d'inertie d'une paire de roues autour de son axe; soit enfin i l'inclinaison de la rampe que le train gravit pendant l'arrêt, ou la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'horizon; cette inclinaison sera prise

avec le signe — si le chemin est en pente. Elle est supposée très petite en valeur absolue.

Au moment où les freins commencent à agir, la force vive totale du train se compose de plusieurs parties :

$\frac{P}{g} v^2$, pour la translation du train moins les roues;

$\frac{q}{g} v^2$ pour la translation de chaque paire de roues;

Enfin $I \frac{v^2}{r^2}$ pour la rotation de chaque paire de roues autour de son axe.

Comme les roues du train peuvent être inégales, nous ne multiplierons pas ces deux dernières quantités par le nombre des essieux; nous nous bornerons à en indiquer la somme au moyen du signe Σ .

La force vive totale du train sera donc représentée par l'expression

$$\frac{P}{g} v^2 + \Sigma \frac{q}{g} v^2 + \Sigma I \frac{v^2}{r^2},$$

ou, en mettant v^2 en facteur commun,

$$v^2 \left[\frac{P}{g} + \Sigma \left(\frac{q}{g} + \frac{I}{r^2} \right) \right].$$

Nous devons évaluer la moitié de cette quantité à la somme des travaux accomplis par les forces jusqu'à l'arrêt complet.

Parmi ces forces, les principales sont la pesanteur et le frottement de glissement des roues enrayées sur les rails.

Soit L la longueur décrite par le train pendant la période d'arrêt, et f le coefficient du frottement de *fer sur fer*. La pression sur les roues enrayées est $p + p'$, en désignant par p' la somme des poids des paires de roues qui se trouvent enrayées; le frottement est donc $f(p + p')$, et le travail du frottement est jusqu'à l'arrêt $f(p + p') \times L$.

Le travail de la pesanteur, pris de même positivement, est

$$(P + \Sigma q) \times Li.$$

Donc enfin on a pour déterminer L l'équation

$$\frac{1}{2} v^2 \left[\frac{P}{g} + \Sigma \left(\frac{g}{g} + \frac{1}{r^2} \right) \right] = [f(p+p') + (P + \Sigma q) i] L.$$

On voit que le parcours L dépend du coefficient du frottement f , du poids enrayé, de la pente, enfin de la vitesse de la marche normale, qui entre au carré dans la formule. Il faut bien remarquer aussi que, dans la mise des freins à sabot, il y a des *temps perdus* inévitables : d'abord pour amener le sabot au contact de la jante de la roue, ensuite pour faire croître la pression du sabot contre la jante jusqu'à la limite qui empêche la rotation de la roue et qui produit son glissement sur le rail. Il est vrai que, pendant cette période du serrage, il se produit un travail du frottement de la roue contre le sabot, travail qui intervient pour une part dans la réduction graduelle de la force vive du train. Malgré cette petite compensation, malgré la résistance de l'air, qui, dans les premiers moments surtout, a encore une grande influence, la valeur observée du parcours L est en général supérieure à la valeur calculée, circonstance dont il est prudent de tenir compte dans la pratique des chemins de fer, notamment quand il s'agit de fixer la distance à laquelle doivent être portés les signaux d'arrêt.

55. On voit en même temps l'inutilité, au point de vue de la durée de l'arrêt, de tout excès de pression du sabot contre la roue. Mais ici il faut distinguer deux périodes :

1° La roue qu'on enraye étant animée à l'origine d'une vitesse angulaire ω_0 , l'effet du sabot qu'on y applique est de détruire cette rotation ; or cette suppression de la rotation n'est pas instantanée. Pour savoir ce qui se passe, appliquons au mouvement de la roue autour de son axe le théorème de l'accélération angulaire. Soit, à un instant donné, ω la vitesse de la rotation dans le sens de la flèche (fig. 26) ; r le rayon de la roue, F la pression du sabot sur la roue, f' le frottement de bois sur fer. Le train ayant encore sensiblement la vitesse v , et ω étant $< \omega_0$, vitesse angulaire primitive de la roue

égale à $\frac{v}{r}$, la roue glisse sur le rail, et subit un frottement qui

tend à la faire tourner autour de son centre. Les forces qui agissent sur la roue sont donc le frottement du sabot Ff' , dans le sens contraire à la rotation, et le frottement du rail $(p+p')f$ dans le sens favorable à la rotation. Ces deux forces sont appliquées à la distance r de l'axe. I étant le moment d'inertie du système tournant, on aura l'équation

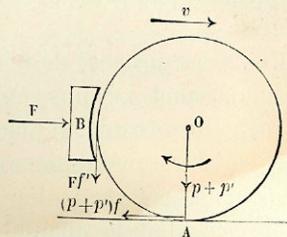


Fig. 23.

$$I \frac{d\omega}{dt} = [(p+p')f - Ff']r.$$

Cette équation montre que ω diminue si Ff' est supérieur à $(p+p')f$. La vitesse de rotation à l'instant t sera donnée par l'équation

$$\omega = \omega_0 - \frac{[Ff' - (p+p')f]rt}{I}.$$

Pendant cette première période, il y a intérêt à augmenter F , car on détruit ainsi la force vive de rotation $I\omega^2$ de chaque paire de roues enrayée ; de plus, le frottement $(p+p')f$ de la roue sur le rail dans le glissement mixte qui s'opère, produit dans chaque élément de temps dt un travail négatif égal à

$$-(p+p')f \times (v - \omega r) dt,$$

qui se retranche de la demi-force vive du train.

Du reste, s'il y a avantage à augmenter F pour arrêter la rotation des roues, il ne faut pas que cet arrêt soit trop brusque, sans quoi il produirait sur l'essieu des efforts qui pourraient le fausser et entraîner de graves accidents.

2° Dans la seconde période, la vitesse ω est nulle, et il y a glissement simple des roues enrayées sur le rail. Il suffit alors que la limite Ff' soit un peu supérieure à $(p+p')f$, pour que la rotation ne puisse s'y mêler, et toute augmenta-

tion de la force F pendant cette seconde période est sans utilité.

Comme conclusion générale, on peut dire qu'il est bon que la force F appliquée aux freins ne reçoive que des valeurs modérées.

56. On a proposé de nombreux perfectionnements pour ces freins à sabot. Les uns consistent à les mettre à la disposition directe du mécanicien placé sur la machine. On emploie pour cela soit des transmissions électriques (système Achard), soit un déclenchement particulier, qui s'opère de lui-même à l'aide de la force centrifuge quand la vitesse du train a atteint une certaine limite, et qui permet au mécanicien de serrer les sabots par un simple refoulement, sans cependant rendre le refoulement impossible dans les manœuvres à petite vitesse (frein Guérin; frein Lefèvre et Dorré). D'autres perfectionnements ont pour objet unique de réduire la limite du parcours L . On y parvient avec les systèmes que nous venons d'indiquer, car la facilité de la manœuvre, exécutée par le mécanicien seul, permet d'enrayer toutes les roues d'un train, chose impossible avec les appareils ordinaires, qui exigent chacun un agent spécial. Mais on peut aussi réduire le parcours limite en augmentant le coefficient f du frottement de glissement, ou en augmentant la pression $(p + p')$ exercée par le rail. Dans le frein Didier, ce n'est pas la roue qui glisse, c'est un patin en bois qui porte sur le rail; cela revient à remplacer le coefficient f (fer sur fer) par le coefficient f' (bois sur fer). Dans le frein Molinos, le rail est pincé par une sorte d'étau dont on accroît à volonté la pression. La seule limite de cet effort additionnel est la résistance de la voie.

Les *freins à contre-vapeur* ont récemment réalisé un progrès considérable. Nous ne pouvons ici en donner qu'une indication très sommaire. Ils font de la locomotive une machine également propre à développer des efforts pour ralentir et pour accélérer la marche d'un train. L'emploi de la contre-vapeur, connu dès les premiers essais de locomotive, avait de graves inconvénients : c'était un procédé dangereux pour le mécanicien et très nuisible aux machines ; on ne s'en servait qu'en cas

de détresse. La création du *tube d'inversion*, et la substitution d'un appareil à vis à l'ancien levier de changement de marche, ont supprimé ces inconvénients et ces dangers, et ont fait de la contre-vapeur une manœuvre courante, au moyen de laquelle le mécanicien peut parfaitement régler le travail de sa machine et la marche du train qu'il conduit.

Citons encore le frein américain de M. Westinghouse, où la manœuvre des sabots se fait dans tout le train au moyen d'une transmission à air comprimé, et le frein à vide, ou *Vacuum brake*, où l'on emploie pour le même objet le vide produit par un éjecteur placé sur la machine.

RÉGULATEUR DE WATT.

57. Le *régulateur de Watt*, ou *régulateur à boules*, a été imaginé par Watt pour maintenir à sa valeur normale la vitesse moyenne d'une machine à vapeur, malgré les variations du travail résistant. Les volants et les contre-poids peuvent servir, comme nous l'avons vu, à régulariser le mouvement d'une machine lorsqu'il est déjà périodiquement uniforme, ce qui suppose une relation entre le travail résistant et le travail moteur pendant la durée d'une période. Ces appareils sont sans effet pour le maintien d'une vitesse moyenne constante d'une période à une autre, lorsque le travail résistant vient à croître ou à décroître tandis que le travail moteur reste le même. Pour résoudre ce nouveau problème, il faut faire varier le travail moteur dans le même sens que le travail résistant. Si la machine est mise en mouvement par une chute d'eau, il faudra qu'au moment où le travail résistant diminue, la quantité d'eau donnée au récepteur diminue dans la même proportion, et que si le travail résistant augmente, la quantité d'eau utilisée par la machine augmente dans le même rapport. Dans les machines à vapeur, on fait varier le travail moteur en ouvrant plus ou moins une valve placée à l'entrée du tuyau qui amène la vapeur aux

cylindres ; plus on ouvre cette valve, plus la vapeur afflue en abondance dans les appareils de distribution ; plus on la ferme, plus la vapeur perd de pression au passage de cet obstacle, et plus le travail moteur utilisé se trouve réduit.

58. Le régulateur est un correctif qui fait disparaître certains inconvénients en en créant d'autres. Pour le faire voir, supposons qu'une roue hydraulique puisse disposer d'une chute d'eau déterminée, c'est-à-dire d'un poids P d'eau tombant chaque seconde d'une hauteur H . Le travail total moteur aura pour limite supérieure PH , et le récepteur employé permettra d'en utiliser une certaine fraction. L'intérêt de l'usinier est d'utiliser toute cette puissance disponible ; s'il ne trouve pas un travail résistant égal à lui faire accomplir, il doit diminuer proportionnellement la quantité P d'eau qu'il admet dans sa roue, ce qui laisse une partie de cette eau tomber en pure perte de la hauteur H sans produire de travail utile. Le régulateur, qui étrangle l'orifice d'amenée de l'eau motrice au moment où le travail résistant diminue, agit de la même manière. L'effet est inverse quand le travail résistant augmente, mais l'emploi du régulateur n'en suppose pas moins que dans le régime normal de la machine on a introduit d'avance un obstacle à l'affluence de l'eau, sauf à faire disparaître partiellement cet obstacle quand on veut augmenter le travail à produire.

Dans la machine à vapeur, la variation du travail moteur pourrait s'obtenir *théoriquement* en faisant varier la quantité de charbon brûlée sur la grille du foyer. C'est là un moyen difficile à mettre en pratique, surtout quand il s'agit de suivre de près les variations incessantes du travail résistant. Le régulateur résout approximativement le problème, mais toujours en introduisant dans la machine un obstacle à l'écoulement de la vapeur, c'est-à-dire une cause de perte de travail.

59. Le régulateur de Watt comprend un arbre vertical, GH , auquel un engrenage E, F donne un mouvement de rotation proportionnel au mouvement angulaire de l'arbre principal

de la machine. A l'arbre GH sont attachées deux tiges égales AB, AB' , qui portent à leur extrémité inférieure des boules B, B' , de même diamètre et de même poids. Les deux tiges sont situées dans un même plan vertical, et sont articulées sur les côtés de l'arbre GH , de manière à recevoir dans ce plan telle inclinaison qu'on voudra.

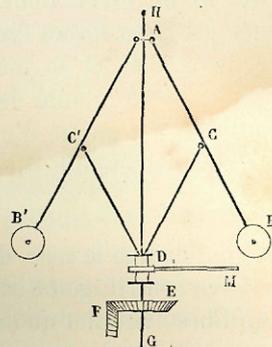


Fig. 27.

Deux autres tiges égales $CD, C'D$, s'articulent en C, C' aux premières, à une même distance des articulations A , et viennent se réunir par des articulations à un manchon D , qui peut glisser librement le long de l'axe GH . Un levier à fourchette M , entraîné par le manchon, pivote autour de son point d'appui dans un sens ou dans l'autre, suivant que le manchon monte ou descend, c'est-à-dire suivant que les boules s'écartent ou se rapprochent. Il communique le mouvement à la vanne des roues hydrauliques, ou à la valve des machines à vapeur. Si le travail résistant diminue, la vitesse angulaire de l'arbre principal tend à augmenter ; la vitesse angulaire de l'arbre du régulateur augmente aussi, les boules s'écartent, et le levier est soulevé par le manchon ; ce mouvement se transmet à l'appareil d'admission, qui se ferme en partie. Si le travail résistant augmente, c'est l'effet contraire qui se produit. *Le problème semble donc résolu*, pourvu que les boules s'écartent si la vitesse augmente, et qu'elles se rapprochent si elle diminue. Or il est facile de voir qu'elles subissent cette tendance, et de calculer l'angle d'écart qui correspond à une vitesse donnée.

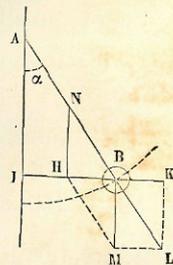


Fig. 28.

Faisons abstraction des résistances subies par le manchon ainsi que du poids des tiges, quantités peu

importantes en comparaison du poids des boules. Soit ω la vitesse du régulateur autour de son axe vertical. Dans ce mouvement, une boule B décrit uniformément autour de l'axe AI un cercle dont le rayon est égal à BI. Elle est sollicitée par deux forces réelles : son poids, mg , dirigé suivant la verticale BM, et la tension N de la tige AB, dirigée de B vers A. La résultante de ces deux forces est, puisque le point considéré est animé d'un mouvement circulaire uniforme, la force centripète BH, dirigée suivant BI, et égale à

$$m \times \omega^2 \times BI.$$

Si l'on change le sens de la résultante BH, et qu'on en fasse la force centrifuge BK, les trois forces BM, BN, BK se feront équilibre : résultat qu'on aurait obtenu sur-le-champ en remarquant que le point B est en équilibre relatif sous l'action de ces trois forces.

Donc BL, force égale et contraire à BN, est la résultante des forces BK $= m\omega^2 \times BI$ et BM $= mg$; la condition d'équilibre est

$$\tan \alpha = \frac{ML}{BM} = \frac{m\omega^2 \times BI}{mg} = \frac{\omega^2}{g} \times BI.$$

Soit l la longueur AB de la tige qui porte la boule B. Nous aurons $BL = l \sin \alpha$; ce qui change l'équation précédente en celle-ci :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\omega^2 l}{g} \times \sin \alpha.$$

Cette nouvelle équation se partage en deux autres :

$$\sin \alpha = 0, \text{ ou } \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

La première nous indique les positions d'équilibre de la tige AB placée verticalement le long de l'axe.

La seconde définit un angle α positif et aigu, pourvu toutefois que g soit $< \omega^2 l$, ou que ω soit $> \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Lorsque $\omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$, le régulateur reste plié le long de son

axe vertical et c'est la solution $\alpha = 0$ qui donne seule l'équilibre stable (III, § 91, 2°).

Si ω atteint ou dépasse $\sqrt{\frac{g}{l}}$, la solution fournie par l'équation $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$ correspond à l'équilibre stable, et les positions $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, qui répondent à $\sin \alpha = 0$, définissent des équilibres instables.

C'est sur cette propriété du régulateur de rester fermé tant que la vitesse angulaire ne dépasse pas une certaine limite, qu'est fondé le déclenchement produit dans les freins dont il a été question plus haut (§ 56).

Remarquons que cette théorie ne tient aucun compte de la masse des boules, qui disparaît comme facteur commun. Cette masse joue cependant un rôle important : c'est elle qui donne de la sensibilité à l'appareil.

THÉORIE PLUS COMPLÈTE DU RÉGULATEUR A FORCE CENTRIFUGE.

60. Dans la théorie précédente, nous n'avons tenu aucun compte des résistances que le régulateur avait à vaincre pour déplacer le manchon ; nous n'avons pas tenu compte non plus des masses des tiges qui forment l'appareil. Nous supposerons ici, d'après une analyse empruntée à Poncelet, que le manchon D soit retenu dans la position que représente la figure, par une force F, qui peut croître jusqu'à une certaine limite, dans un sens ou dans l'autre ; et nous ferons entrer dans le calcul les masses de toutes les parties matérielles du système.

Soit $AB = l$, $AC = kl$, k étant un nombre donné, plus petit que l'unité, et $CD = l'$.

Nous appellerons

P le poids de chacune des boules B, B' ;

p le poids par unité de longueur de la tige AB, que nous supposerons prolongée jusqu'au centre de la boule B, pour tenir compte du petit renflement qui précède l'insertion de cette

tige dans la sphère B, et dont on fait abstraction en attribuant à la tige une section uniforme;

p' le poids par unité de longueur de la tige CD, mesurée de la ligne d'axe de la tige AB jusqu'à la ligne d'axe du manchon, de manière à com-

penser de même par un petit excès de longueur l'excès de masse dû aux renflements de la tige à l'endroit des articulations.

Nous exprimerons qu'il y a équilibre, dans la position de la figure, entre la force F, les poids des pièces, et les

forces d'inertie d'entraînement, qui se réduisent aux forces centrifuges. Occupons-nous d'abord des poids.

1° Le poids de la boule B est une force P, verticale et appliquée au centre de gravité de cette boule. Il en est de même pour la boule B'.

Le poids de la tige AB est une force verticale pl , appliquée au milieu I de la longueur AB. Mais nous pouvons y substituer deux forces parallèles, égales à $\frac{1}{2}pl$ chacune, et appliquées l'une en A, l'autre en B. La première, appliquée à un point fixe, ne produira aucun travail dans le déplacement du système; la seconde travaillera seule. La force pl , appliquée en I' au milieu de la tige AB', est susceptible d'une décomposition analogue.

Le poids $p'l'$ de la tige DC est une force verticale appliquée au milieu i de cette longueur; on peut y substituer une force $\frac{1}{2}p'l'$ appliquée en D au manchon, et une force $\frac{1}{2}p'l'$ appliquée à l'articulation C de la tige AB. Celle-ci est décomposable en deux forces parallèles appliquées l'une en A, l'autre

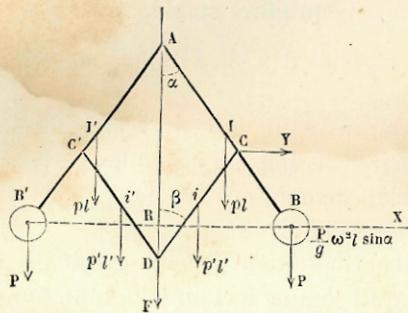


Fig. 20.

en B; la dernière de ces deux composantes travaillera seule, et elle est égale à $\frac{1}{2}p'l' \times \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}p'l' \times k$.

La même décomposition s'applique au poids de la tige C'D.

La marche à suivre consiste à ramener toutes les forces à être appliquées aux points A, B, B' et D; nous venons de l'achever pour les poids, il faut en faire autant pour les forces centrifuges.

2° Quand un corps tourne uniformément autour d'un axe principal, les forces d'inertie se réduisent à une résultante unique, que l'on peut obtenir en supposant toute la masse du corps concentrée en son centre de gravité (III, § 260). Ici l'axe de rotation du système est un axe principal au point R pour chacune des boules B, B'. Car si l'on mène un plan par l'axe AR et par le point B, centre de la boule, ce plan partage la boule en deux moitiés symétriques; il en est de même du plan mené par le point R perpendiculairement à l'axe de rotation. Rapportons les points matériels de la boule à ces deux plans et à un troisième mené par AR perpendiculairement aux deux premiers; la droite RB deviendra par exemple l'axe des x , la droite RA l'axe des z , et la perpendiculaire commune élevée au point B à ces deux droites l'axe des y . On aura alors, à cause de la symétrie de la sphère homogène B par rapport aux plans des zx et des xy , $\Sigma mxz = 0$ et $\Sigma mxy = 0$, équations qui montrent que l'axe AR est principal au point R pour le corps solide formée par la boule B.

La résultante des forces centrifuges des points de cette boule est donc une force égale à $\frac{P}{g}\omega^2 l \sin \alpha$, dirigée dans le prolongement du rayon RB.

Cherchons la résultante des forces centrifuges des différents éléments matériels de la tige AB. Considérons (fig. 50) un élément de longueur MM' de cette tige, situé à la distance $AM = x$ du point A. Soit dx la longueur de cet élément. La force centrifuge f est dirigée

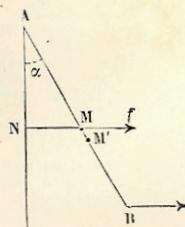


Fig. 50.

suivant le prolongement du rayon NM, et elle est égale à

$$\frac{p dx}{g} \omega^2 \times MN = \frac{p \omega^2 dx}{g} x \sin \alpha.$$

Toutes ces forces centrifuges sont parallèles; elles ont pour résultante une force Φ , qui serait donnée par le théorème des moments, et dont le point d'application est aux $\frac{2}{5}$ de AB à partir du point A. Cette force Φ peut être décomposée en deux forces parallèles, l'une appliquée en A, qui ne produira aucun travail, et l'autre appliquée en B; pour obtenir celle-ci, nous nous servirons de l'équation des moments, en prenant pour centre des moments le point A. Soit X la composante cherchée. Nous aurons

$$X \times AB \cos \alpha = \int_0^l \frac{p \omega^2 dx}{g} x \sin \alpha \times x \cos \alpha,$$

ou bien, en supprimant le facteur $\cos \alpha$,

$$Xl = \frac{p \omega^2}{g} \sin \alpha \times \int_0^l x^2 dx = \frac{p \omega^2}{g} \sin \alpha \times \frac{l^3}{3}.$$

Donc

$$X = \frac{1}{5} \frac{p}{g} \omega^2 l^2 \sin \alpha.$$

La même méthode s'applique à la tige DC. La résultante Φ' des forces centrifuges se décompose en deux forces; l'une, appliquée en D, est détruite par la composante égale et contraire qui provient de la tige symétrique C'D; elle ne produit d'ailleurs pas de travail, puisqu'elle est normale au déplacement du manchon le long de la tige AD; mais on voit de plus qu'elle est équilibrée par une force symétrique, de sorte que l'axe AD ne subit de ce fait aucune pression de la part du manchon. L'autre composante, Y, est appliquée à l'articulation C, et est donnée par la même formule que la composante X:

$$Y = \frac{1}{5} \frac{p'}{g} \omega^2 l'^2 \sin \beta.$$

La force Y, appliquée en C, se décompose encore en deux

forces, l'une appliquée en A, qu'il est inutile de considérer puisque ce point est fixe, l'autre appliquée en B et égale à

$$Y \times \frac{AC}{AB} = Y \times k,$$

c'est-à-dire égale à

$$\frac{k}{5} \frac{p'}{g} \omega^2 l'^2 \sin \beta.$$

61. Résumons les résultats obtenus, en laissant de côté les forces appliquées au point fixe A.

1° En B, nous avons, suivant la verticale, les forces

$$P + \frac{pl}{2} + \frac{kp'l'}{2} = Q,$$

et suivant l'horizontale, les forces

$$\frac{p}{g} \omega^2 l \sin \alpha + \frac{1}{5} \frac{p}{g} \omega^2 l^2 \sin \alpha + \frac{k}{5} \frac{p'}{g} \omega^2 l'^2 \sin \beta = Z;$$

2° En B', des forces Q' et Z' respectivement égales à Q et à Z; les forces verticales Q' agissent dans le même sens que Q, les forces horizontales Z' agissent en sens contraire de Z;

3° Au point D, suivant la verticale, et agissant de haut en bas, les forces

$$F + 2 \frac{p'l'}{2} = F + p'l' = \Pi.$$

Les forces horizontales se font équilibre.

Il reste à exprimer l'équilibre de ces trois groupes de forces; on y parviendra en donnant au système un déplacement virtuel, c'est-à-dire en faisant varier infiniment peu l'angle α . Soit $\delta \alpha$ la variation de cet angle, et δu la variation correspondante de la distance AD; le travail des forces Q et Z, dont le point d'application tourne de l'angle $\delta \alpha$ autour de A, s'obtiendra en multipliant par $\delta \alpha$ la somme de leurs moments par rapport au point A. Ce sera donc

$$(Zl \cos \alpha - Ql \sin \alpha) \delta \alpha.$$

Les forces Q' et Z', appliquées en B', donnent la même somme, ce qui double le résultat.

Le travail de la force H est $H\delta u$. L'équation d'équilibre est donc

$$2(Z\cos\alpha - Q\sin\alpha)l\delta\alpha + H\delta u = 0.$$

Or

$$u = AD = AC\cos\alpha + CD\cos\beta = kl\cos\alpha + l'\cos\beta.$$

L'angle β est lié à l'angle α par la relation

$$AC\sin\alpha = CD\sin\beta,$$

ou bien

$$\sin\beta = \frac{kl}{l'}\sin\alpha.$$

On en déduit

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{k^2 l^2}{l'^2} \sin^2\alpha},$$

et par suite

$$u = kl\cos\alpha + \sqrt{l'^2 - k^2 l^2 \sin^2\alpha}.$$

La différentiation donne donc

$$\delta u = -kl\sin\alpha\delta\alpha - \frac{k^2 l^2 \sin\alpha \cos\alpha \delta\alpha}{\sqrt{l'^2 - k^2 l^2 \sin^2\alpha}}.$$

Le radical doit être pris positivement dans ces formules.

62. L'équation finale, débarrassée du facteur auxiliaire $\delta\alpha$, lie entre elles les quantités variables F , ω et α . Elle montre notamment quelle variation la vitesse angulaire ω doit subir, pour que le régulateur se déplace malgré la résistance F exercée sur le manchon : plus cette variation sera petite, plus l'appareil sera sensible, et il est facile de voir à ce sujet l'influence de la masse des boules.

Pour simplifier, ne tenons compte que des poids des boules en négligeant ceux des tiges articulées; la force Q se réduira à P , la force Z à $\frac{P}{g}\omega^2 l \sin\alpha$, et la force H à F ; l'équation d'équilibre, divisée par $\sin\alpha$, sera

$$2\left(\frac{P}{g}\omega^2 l \cos\alpha - P\right)l - F \times \left(kl + \frac{k^2 l^2 \cos\alpha}{\sqrt{l'^2 - k^2 l^2 \sin^2\alpha}}\right) = 0.$$

Cela posé, imprimons à l'appareil une autre vitesse angulaire ω' , en faisant varier la force F de telle sorte que le régulateur n'éprouve aucun déplacement; l'angle α restant le même, mais la force ayant pris une autre valeur F' , il viendra

$$2\left(\frac{P}{g}\omega'^2 l \cos\alpha - P\right)l - F' \left(kl + \frac{k^2 l^2 \cos\alpha}{\sqrt{l'^2 - k^2 l^2 \sin^2\alpha}}\right) = 0.$$

Retranchons les deux équations l'une de l'autre :

$$\frac{2P}{g}(\omega'^2 - \omega^2)l^2 \cos\alpha - (F' - F) \left(kl + \frac{k^2 l^2 \cos\alpha}{\sqrt{l'^2 - k^2 l^2 \sin^2\alpha}}\right) = 0.$$

Plus le poids P des boules sera grand, plus la différence, $\omega'^2 - \omega^2$, des carrés des vitesses angulaires sera faible pour une même variation, $F' - F$, des résistances subies par l'appareil, de sorte que la sensibilité du régulateur est d'autant plus grande que la masse des boules est plus considérable.

IMPERFECTION DU RÉGULATEUR DE WATT.

63. Nous avons dit plus haut (§ 59) que le régulateur de Watt semblait résoudre le problème; il faut faire voir que la solution n'est qu'apparente. Pour cela, nous supposons que les boules soient assez pesantes pour que l'appareil ait une sensibilité pour ainsi dire infinie, de telle sorte qu'il se déforme dès que la vitesse angulaire vient à varier. Cela revient à négliger la résistance F développée par l'inertie et les frottements des organes en communication avec le régulateur. Nous supposons en même temps que l'arbre principal porte un volant, de telle sorte que le mouvement de rotation soit uniforme et non périodiquement uniforme. S'il en était autrement, l'extrême sensibilité du régulateur lui ferait faire des oscillations continuelles à chaque tour de l'arbre principal, par suite des variations de la vitesse angulaire; ces oscillations seraient plutôt nuisibles qu'utiles à la marche de la machine, l'objet du régulateur étant de rendre constante une certaine vitesse

moyenne, et non d'agir sur les variations de la vitesse dans l'étendue d'une période.

Supposons donc que le régulateur ait pendant la marche normale une vitesse angulaire ω ; il se placera de manière à former avec la verticale un angle d'écart α donné par la formule

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$$

Le travail résistant venant tout à coup à diminuer, la vitesse de la machine augmente, et la vitesse angulaire du régulateur augmente dans le même rapport. Soit ω' sa nouvelle valeur. A cette valeur ω' correspondra un nouvel angle α' , plus grand que α , et donné par l'équation

$$\cos \alpha' = \frac{g}{\omega'^2 l}$$

La déformation subie par le régulateur produit un déplacement du manchon, et une fermeture partielle de la vanne qui alimente la machine. Le travail moteur diminue aussitôt et prend la valeur qui assure à la machine sa vitesse normale, eu égard à la diminution du travail résistant. Il résulte de là que la vitesse de rotation des boules reprend sa valeur ω . Mais aussitôt le régulateur se ferme pour revenir à l'angle α de l'écart primitif. Le manchon rétrograde donc jusqu'à sa première position, la vanne se rouvre, et le travail moteur reprend son excès de valeur. Par suite la vitesse de la machine augmente, ce qui entraîne pour le régulateur le retour de la vitesse angulaire ω' . On reconnaît ainsi que, au lieu d'assurer le maintien de la vitesse normale ω , le régulateur de Watt subira une série d'oscillations limitées aux angles α et α' , et la vitesse de la machine une série de variations entre les limites ω et ω' .

On peut corriger cet inconvénient au moyen d'un embrayage alternatif, dont le manchon est mis en mouvement par le levier du régulateur. Quand la vitesse augmente, le levier, déplacé par l'écartement des boules, pousse le man-

chon d'embrayage vers la droite par exemple; ce mouvement a pour effet d'embrayer une roue dentée commandant la vanne régulatrice; le système régulateur n'entre en action que si l'augmentation de la vitesse angulaire est assez grande pour que le manchon d'embrayage arrive au bout de sa course. Alors commence la fermeture partielle de la vanne; à mesure qu'elle se ferme, le travail moteur décroît et la vitesse diminue. Les boules du régulateur se resserrant, l'embrayage ne tarde pas à être interrompu, de sorte que la vanne régulatrice reste dans la position qu'elle occupe, bien que le régulateur soit revenu à la position qui correspond à la vitesse normale. Si la vitesse diminue plus tard par suite d'une augmentation du travail résistant, le manchon d'embrayage, déplacé à fond vers la gauche, vient agir sur une autre roue qui relève la vanne, de manière à augmenter le travail moteur: augmentation qui persistera, l'embrayage cessant, quand le régulateur reviendra vers sa position primitive.

RÉGULATEUR PARABOLIQUE.

64. On a cherché à utiliser le régulateur à force centrifuge, en en faisant un appareil à équilibre indifférent. Supposons que la boule M soit assujettie à décrire dans le plan du système une courbe AB. Elle sera en équilibre au point M si la résultante MN de la force centrifuge, $MK = m\omega^2 r$, et de la pesanteur, $ML = mg$, est normale à la courbe. Prolongeons la droite MN jusqu'à la rencontre de l'axe AC. Les triangles semblables CPM, MLN donnent la proportion

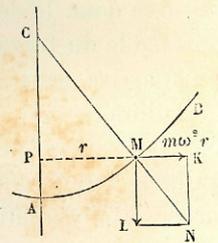


Fig. 51.

$$\frac{CP}{PM} = \frac{ML}{LN}$$

ou bien

$$\frac{CP}{r} = \frac{mg}{m\omega^2 r}$$

d'où l'on déduit $CP = \frac{g}{\omega^2}$.

La longueur CP, sous-normale de la courbe cherchée AB, est égale à $\frac{g}{\omega^2}$, quantité constante si la vitesse angulaire ω est donnée.

La boule M est donc en équilibre en tous points de la courbe AMB, pour une vitesse ω déterminée, si la courbe AMB a une sous-normale constante et égale à $\frac{g}{\omega^2}$: la courbe cherchée est une parabole dont AC est l'axe.

Si l'on fait en sorte que le centre de la boule suive cette courbe, la boule pourra rester en équilibre en toutes ses positions, la vitesse ω conservant sa valeur normale. Un petit excès de vitesse angulaire l'écartera davantage, mais cet écart entraînant la fermeture partielle de la vanne régulatrice, le travail moteur diminuera au même instant, et la vitesse angulaire sera ramenée par là à sa valeur ω , sans que le régulateur retourne à sa position primitive, puisqu'il se trouve aussi bien en équilibre, sous cette vitesse ω , dans sa seconde position que dans la première. La vanne régulatrice conserve donc le degré de fermeture qui assure la réduction convenable du travail moteur. Mais cet effet suppose que la boule arrive sans vitesse sensible à sa nouvelle position d'équilibre, ce qui n'a presque jamais lieu; en réalité elle la dépasse en vertu de la vitesse acquise, et les régulateurs à équilibre indifférent sont soumis, comme celui de Watt, à une série d'oscillations qui influent sur le régime de la machine.

RÉGULATEUR A BRAS CROISÉS DE M. FARCOT.

65. Il est assez difficile en pratique de disposer le régulateur de telle sorte que la boule suive exactement la parabole AMB. Les normales successives, MC, enveloppent la développée Q'RQ de la courbe, ou le lieu de ses centres de courbure. Le centre de courbure au point M est le point de contact, I, de la normale avec l'arc de courbe RQ. Si, au lieu d'attacher au point C la tige qui soutient la boule, on l'attache en ce point I, le centre de la boule sera assujéti à décrire un cercle osculateur à la parabole, et qui en différera très peu dans l'étendue d'un certain arc à droite et à gauche du point M. On peut, sans erreur bien grande, remplacer la parabole par cet arc de cercle dans toute la région que les boules peuvent être appelées à parcourir. Tel est le principe du régulateur à bras croisés de M. Farcot. Les deux tiges IM, I'M' qui soutiennent les boules, sont fixées en deux points symétriques I et I', voisins de la développée de la parabole. La transmission de ces tiges au manchon se fait par d'autres tiges ED, E'D. Les premières se croisent au point C sur l'axe de rotation. Des contre-poids permettent de corriger la petite erreur résultant de la substitution d'un arc de cercle à l'arc de parabole.

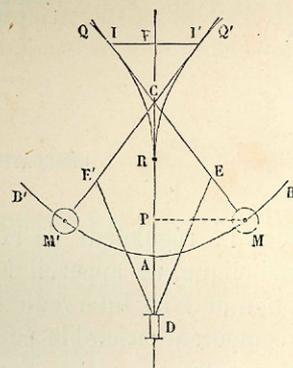


Fig. 52.

M. Marcel Deprez a indiqué une méthode pour déterminer l'angle MCP qui correspond au meilleur emploi de l'appareil.

Soit $IF = I'F = a$ et $IM = L$. La solution serait rigoureuse si la sous-normale CP était constante; le meilleur angle

$\alpha = MCP$ est donc celui pour lequel CP varie le moins possible, c'est-à-dire celui qui rend la longueur CP maximum ou minimum. Or

$$IC = \frac{IF}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha},$$

$$CM = L - \frac{a}{\sin \alpha},$$

et

$$CP = CM \cos \alpha = L \cos \alpha - \frac{a}{\tan \alpha}.$$

Prenons la dérivée de cette fonction par rapport à α et égalons à zéro : il vient pour la condition du maximum

$$\frac{a}{\sin^2 \alpha} - L \sin \alpha = 0,$$

ou

$$\sin \alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{L}}.$$

RÉGULATEUR DE FOUCAULT.

66. Le régulateur de Foucault est, comme le régulateur parabolique, un appareil à équilibre indifférent. Seulement au lieu de faire intervenir la pesanteur et la force centrifuge, se composant ensemble pour donner une résultante normale à une certaine courbe, Foucault assujettit les boules de son régulateur à rester dans le plan horizontal, et il équilibre la force centrifuge par la tension d'un ressort élastique. Voici la disposition de l'appareil, réduit à ses parties essentielles.

Le manchon A glisse le long de l'axe vertical OA, autour duquel l'appareil tourne avec la vitesse ω . Il porte deux tiges articulées égales, AB, AB', au bout desquelles sont placées les boules B, B'. Pour leur faire décrire les droites OB, OB', il suffit de joindre par des tiges OI, OI', le point fixe O aux milieux I et I' des tiges AB, AB', et de donner à ces nouvelles tiges des longueurs égales à la moitié des premières. Car si

OI = AI = IB, le triangle AOB est rectangle en O dans toutes les positions de la figure, et OB est une droite perpendiculaire à OA.

Le ressort qui retient la boule B est attaché en un point C très voisin de la droite OB', de telle sorte qu'il agisse sensiblement dans la direction BO,

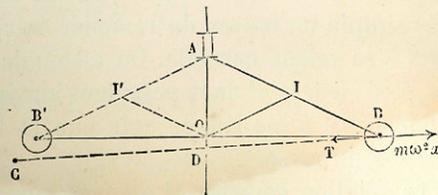


Fig. 55.

BO, sans gêner le mouvement de la boule opposée B'.

Soient x la distance OB, sensiblement égale à DB, et a la distance CD, longueur naturelle du ressort. Lorsque la boule B est arrivée à la position qu'elle a sur la figure, le ressort a passé de la longueur a à la longueur $a+x$; il s'est donc allongé de la quantité x , ce qui suppose en lui une tension T donnée par l'équation

$$T = \frac{Ex}{a},$$

en appelant E la tension correspondante à $x = a$, c'est-à-dire à l'allongement qui double la longueur naturelle du ressort. Le coefficient E, qui dépend de la fabrication du ressort, doit être déterminé par expérience.

La boule B est dans son équilibre relatif soumise à deux forces horizontales : l'une, $m\omega^2 x$, qui tend à l'écarter de l'axe, l'autre $\frac{E}{a} x$ qui tend à l'en rapprocher. L'équilibre exige qu'on ait l'égalité

$$\frac{Ex}{a} = m\omega^2 x,$$

d'où x disparaît comme facteur commun. La condition unique de l'équilibre est donc $E = m\omega^2 a$: si elle est remplie pour une certaine vitesse ω , la boule B sera en équilibre dans toutes ses positions le long de la droite OB, tant que la vitesse de

rotation conservera la même valeur. Le manchon A se déplaçant en conséquence et entraînant des mouvements correspondants de la vanne régulatrice, on aura dans cet appareil très simple un moyen de ramener la vitesse de l'arbre tournant à sa valeur normale. On a soin de détruire par des contre-poids le travail de la pesanteur sur le manchon et les tiges, de manière à ne laisser agir que la force centrifuge et la tension du ressort.

La solution suppose, il est vrai, que les tensions d'un ressort sont proportionnelles aux allongements; mais cette loi, qui est vraie des petits allongements pour tous les prismes élastiques, est aussi très voisine de la réalité pour les ressorts hélicoïdaux, tant que les allongements ne dépassent pas une certaine limite.

Les régulateurs *astatiques*, tels que ceux de Farcot et de Foucault, donnent prise à l'objection que nous avons faite aux régulateurs paraboliques. En somme, le régulateur Watt, malgré ses imperfections, reste encore l'appareil le plus convenable pour la plupart des machines soumises à des variations du travail moteur et du travail résistant.

LIVRE VI

MÉCANIQUE DES FLUIDES

INTRODUCTION

67. Les principes de la mécanique s'appliquent à tous les systèmes matériels, de quelque nature qu'ils soient; il suffit, pour les étendre aux liquides et aux gaz, de poser quelques nouvelles définitions.

Les *liquides* et les *gaz* sont compris sous la dénomination commune de *fluides*. La différence entre un corps solide et un corps fluide est que, dans un corps solide, chaque point matériel a une place à peu près fixe par rapport à tous les autres, de sorte que la *déformation* du corps exige des efforts plus ou moins considérables; tandis que, dans un fluide, chaque point matériel est comme libre au milieu des autres points, et que le système n'a par lui-même aucune forme définie. Un liquide pesant, versé dans un vase, prend exactement la forme de ce vase, excepté sur la surface libre, qui dans l'état de repos est un plan horizontal. Un gaz renfermé dans une enceinte tend à en occuper tout le volume, et se dilate jusqu'à ce qu'il en ait atteint de tous côtés la surface-limite. Ces trois états, l'état solide, l'état liquide, l'état gazeux, appartiennent à presque tous les corps, et dépendent principalement de la *température*. Ainsi l'eau est un liquide à la température moyenne de nos climats; elle se gèle et passe à l'état solide vers 0°; elle se change en vapeur, c'est-à-dire

en gaz, quand on élève suffisamment la température sans changer la pression extérieure. Presque tous les corps gazeux peuvent être ramenés à l'état liquide, mais il en est qui ne peuvent être liquéfiés qu'à une température extrêmement basse. On les appelle *gaz permanents*, non pas pour indiquer que la réduction à l'état liquide soit impossible, mais pour les distinguer des *vapeurs*, qui sont en général à une température voisine du point où s'opère le changement d'état.

68. La distinction entre les liquides et les gaz s'établit en considérant les changements de volume.

Un liquide enfermé dans une enceinte qu'il remplit entièrement ne peut être amené qu'au prix des plus grands efforts à occuper un volume moindre; en d'autres termes, les liquides sont très peu *compressibles*. On peut ajouter qu'ils sont très peu *dilatables*. Longtemps on a cru qu'ils étaient *incompressibles* d'une manière absolue; c'était une erreur que la physique moderne a redressée. Les liquides, pouvant transmettre les vibrations sonores, se comportent à cet égard comme des corps élastiques, et sont par conséquent susceptibles de subir de petites compressions et de petites dilatations. L'expérience directe a d'ailleurs fait connaître les *coefficients de compressibilité* des divers liquides; ce sont, il est vrai, des nombres extrêmement petits.

Un gaz permanent, au contraire, est pour ainsi dire indéfiniment compressible, indéfiniment dilatable. Si sous une pression égale à l'unité une masse gazeuse occupe un volume représenté aussi par l'unité, la même masse occupera des volumes égaux à 2, 3, . . . n , lorsque la pression sera réduite à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, . . . $\frac{1}{n}$; elle occupera des volumes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, . . . $\frac{1}{n}$, lorsque la pression sera portée à 2, 3, . . . n . C'est dans cet énoncé très simple que consiste la *loi de Mariotte*, loi qui n'est pas vraie sans restriction, et qui suppose notamment cette condition nécessaire, que la *masse gazeuse soumise à l'expérience conserve toujours la même température*. Quand la température

de la masse gazeuse change, la loi de Mariotte doit être complétée par celle de *Gay-Lussac*, et l'ensemble des deux lois s'exprime par la formule suivante :

$$(1) \quad pV = R(1 + \alpha\tau),$$

dans laquelle p représente la pression à laquelle est soumise la masse gazeuse,

V le volume qu'elle occupe,

τ la température,

α le coefficient de dilatation des gaz,

et R un nombre constant.

69. Les mêmes lois s'appliquent aux vapeurs, mais avec certaines restrictions; lorsqu'il s'agit de vapeurs, il ne faut pas oublier que dans des conditions particulières de température et de pression la masse gazeuse se change en liquide. Le changement d'état a lieu lorsque la pression p est une fonction déterminée de la température τ . Soit donc

$$(2) \quad p = f(\tau)$$

l'équation qui définit les conditions du changement d'état. L'équation (1) ne sera pas applicable aux vapeurs pour toutes valeurs des variables p et τ , mais seulement pour celles qui correspondent à l'état gazeux, c'est-à-dire celles qui satisfont à l'inégalité $p < f(\tau)$.

Pour traduire géométriquement cette condition, traçons dans un plan deux axes rectangulaires OX , OY (fig. 54). Nous prendrons OX pour l'axe des températures τ , et OY pour l'axe des pressions p . Convenons d'appliquer l'équation (1) à une masse de gaz dont le poids soit égal à l'unité. Le poids spécifique Π du gaz sera alors égal à l'inverse de son volume V ; car le produit ΠV est égal au poids total du gaz, qui reste constant dans toute la série des expériences. On peut donc remplacer pV par $\frac{p}{\Pi}$, et écrire

$$(5) \quad \frac{p}{\Pi} = R(1 + \alpha\tau).$$

Cela posé, si l'on donne à Π une valeur arbitraire, l'équation (5) représente une droite AM, qui coupe l'axe OX au point A pour lequel $1 + \alpha\tau = 0$, et l'axe OY au point B pour lequel $p = \Pi R$. Faisant varier Π , on aura autant de droites que l'on voudra, AM, AM', AM'', ... passant toutes par le point A, et dont les ordonnées à l'origine, OB, OB', OB'', ... sont proportionnelles aux valeurs successives de Π .

Traçons sur cette épure la courbe représentée par l'équation du changement d'état

$$p = f(\tau);$$

nous obtiendrons une certaine courbe PQ, qui définit l'état de saturation de la vapeur, c'est-à-dire le passage de l'état liquide à l'état gazeux. Pour tout point C, pris à gauche ou au-dessus de la courbe, on a $p > f(\tau)$, et le fluide est à l'état liquide. Pour tout point D, pris à droite et au-dessous, $p < f(\tau)$ et le fluide

est à l'état gazeux; c'est seulement alors que la vapeur obéit à la loi exprimée par la formule (5); cette formule n'est donc applicable qu'aux valeurs simultanées de p et de τ qui satisfont à la condition $p < f(\tau)$; en d'autres termes, l'épure n'est appli-

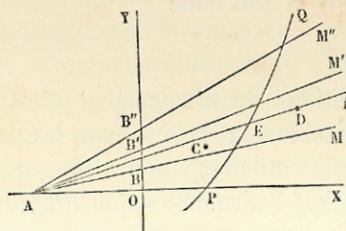


Fig. 54.

cable que dans la région située à droite de la courbe PQ. Si, par exemple, on fait varier la pression et la température de manière à conserver constant le poids spécifique d'une vapeur dont l'état de température et de pression est représenté par le point D, les valeurs simultanées des deux variables seront représentées par la droite EDF, qui se termine vers la gauche au point E, sur la courbe du changement d'état. Le prolongement AE de cette droite n'est qu'une ligne parasite de l'épure.

Les gaz dits *permanents* sont sans doute des vapeurs loin de leur état de saturation. Les courbes PQ qui limitent

pour eux vers la gauche la partie utile de l'épure, sont peu éloignées du point A; ce point correspond à une température de -273° centigrades, tandis qu'on ne peut guère dans les expériences abaisser la température au-dessous d'une cinquantaine de degrés négatifs. Il n'y a donc aucun inconvénient pratique à traiter ces gaz comme s'ils étaient permanents d'une manière absolue.

70. Toutes ces lois générales ne constituent qu'une première approximation, et dès qu'on introduit plus d'exactitude dans les observations, on voit paraître des termes correctifs. La mécanique rationnelle peut se dispenser d'entrer dans ces détails, moyennant qu'elle se borne à étudier l'équilibre et le mouvement des fluides *parfaits*, par opposition aux fluides *naturels*: Un *liquide parfait* est un liquide hypothétique, dépourvu de toute espèce de *viscosité*, et devenu rigoureusement incompressible. Par *viscosité*, on entend la propriété qu'ont les parties des fluides de développer des frottements quand elles glissent les unes contre les autres. La viscosité, ainsi définie, existe dans tous les fluides naturels, dans les gaz comme dans les liquides. On appelle *gaz parfait* un gaz permanent dénué de viscosité, et suivant indéfiniment les lois de Mariotte et de Gay-Lussac. Dans le même ordre d'idées, on pourrait définir *solide parfait* les solides invariables que l'on considère en statique et en dynamique.

DÉFINITION DE LA PRESSION A L'INTÉRIEUR D'UN FLUIDE.

71. Nous avons déjà eu égard, dans les paragraphes précédents, aux pressions extérieures subies par une masse gazeuse. On s'en fait une idée exacte en imaginant la masse renfermée dans un vase, dont une paroi seule reste mobile; cette paroi mobile serait chassée en dehors par l'action du fluide, et il faudra pour l'équilibrer lui appliquer une certaine force, qui mesurera la pression subie par la masse gazeuse. On concevrait de même la pression extérieure exercée sur un liquide. Une surface infiniment petite étant tracée sur l'enveloppe d'une

masse fluide quelconque, la pression exercée par cet élément de surface sur le fluide contigu est égale et contraire à la pression exercée par le fluide sur cet élément; c'est la force qu'il faudrait appliquer à l'élément supposé mobile pour équilibrer l'action que le fluide exerce sur lui.

Pour étendre cette définition à la pression sur tout élément de surface pris à l'intérieur d'une masse fluide, il suffit de concevoir une surface qui contienne cet élément et qui partage la masse en deux parties, égales ou inégales. On imaginera ensuite que l'une de ces deux parties se solidifie sans rien changer à la disposition des parties matérielles dont elle est formée. L'élément de surface intérieure devient alors un élément de paroi, et supporte de la part du fluide qui le touche une certaine pression, laquelle n'a pas changé par suite de la solidification fictivement opérée dans la région voisine. La pression s'exerce donc sur les deux faces de l'élément, lorsqu'elles sont toutes les deux en contact avec le fluide. Cette définition fait dépendre la pression à la fois de l'étendue de l'élément pressé et de l'orientation de cet élément.

72. La théorie moléculaire éclaircit les notions précédentes.

Un fluide est, comme un corps solide, formé de molécules extrêmement petites, séparées les unes des autres par des intervalles comparables à leurs propres dimensions, et subissant chacune, de la part des autres molécules, des actions attractives ou répulsives dont l'intensité varie avec les distances mutuelles. Considérons au sein d'un fluide un élément très petit de surface plane A;

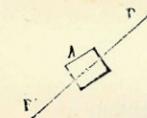


Fig. 55.

chaque molécule de fluide comprise dans cet élément subit certaines actions de la part des molécules voisines situées d'un côté de la surface, et certaines actions de la part des molécules situées du côté opposé. Considérons en particulier les actions provenant des molécules situées d'un certain côté de la surface. Leurs résultantes, prises séparément pour chacune des molécules de la surface A, seront toutes sensiblement parallèles, et se composeront en une force unique P, qui sera la

pression exercée par le liquide sur l'élément A. Composant de même les actions exercées sur les molécules du plan A par la masse fluide du côté opposé, nous obtiendrons une résultante P', qui sera égale et opposée à la résultante P: car, que le fluide soit en repos ou en mouvement, il y aura toujours équilibre entre les forces P, P', et les forces directement appliquées aux molécules du plan A, y compris les forces d'inertie; or ces dernières classes de forces, étant de l'ordre de grandeur des masses des molécules qui les subissent, sont négligeables vis-à-vis des pressions P et P'.

73. La pression P se trouve ainsi définie pour un élément de surface ω , aussi petit qu'on voudra, ayant une orientation particulière; elle est du même ordre de grandeur que la surface ω , et si l'on divise P par ω , le quotient $\frac{P}{\omega}$ est la *pression moyenne du fluide par unité de surface dans l'étendue de l'aire plane A*. On appelle *pression du fluide en un point donné M, suivant un plan A*, la limite ou vraie valeur p du rapport $\frac{P}{\omega}$,

quand on réduit graduellement la surface ω , de manière à y comprendre toujours le point M. Ces définitions posées, la première proposition à établir est la suivante: *Dans un fluide parfait la pression p en un point donné M, suivant un plan d'orientation donnée A, est normale à ce plan.*

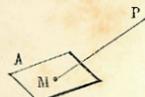


Fig. 56.

Cela résulte de l'absence de viscosité. La pression totale $p d\omega$ est la résultante des actions des parties voisines du fluide sur les molécules situées dans l'élément $d\omega$; si elle était oblique au plan de l'élément, elle aurait dans ce plan une composante tangentielle qui constituerait un frottement, ou un effet de la viscosité, conclusion contraire à l'hypothèse. On peut aussi s'expliquer la direction normale de la pression en admettant que les molécules des fluides se disposent toujours, en vertu de leur mobilité même, de manière à créer une sorte de symétrie par rapport à une direction quelconque. S'il en est ainsi, les actions obliques au plan A, exercées sur une molé-

cule contenue dans ce plan, se composent deux à deux pour donner des résultantes normales.

L'expérience démontre que dans les fluides, contrairement à ce qu'on observe pour les solides, le frottement est nul à l'état de repos relatif, et dépend des vitesses avec lesquelles les molécules glissent les unes sur les autres. Il en résulte qu'un fluide naturel à l'état de repos est sensiblement dans les mêmes conditions qu'un fluide parfait. Le seul point par lequel il en diffère, c'est que les fluides naturels ont des *propriétés capillaires*, dont on fait ordinairement abstraction quand on traite l'équilibre des fluides parfaits. Mais ces propriétés ne font pas exception aux lois de l'hydrostatique, et il suffit, pour en tenir compte, d'introduire dans les calculs les forces capillaires au même titre que les autres forces extérieures.

74. Venons enfin au théorème fondamental de la mécanique des fluides.

Dans un fluide parfait en équilibre, la pression par unité de surface en un point donné O est la même dans toutes les directions autour de ce point.

Pour démontrer ce théorème, on s'appuie sur ce que les pressions subies par les faces d'un polyèdre plongé dans le fluide sont du même ordre de grandeur que ces faces, tandis que la force extérieure qui le sollicite est du même ordre de grandeur que sa masse ou que son volume.

Au point O, menons dans le fluide trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, et prenons sur ces trois axes des longueurs OA = a, OB = b, OC = c, infiniment petites.

Nous pouvons regarder le tétraèdre matériel compris sous les faces OAB, OBC, OCA, ABC, comme en équilibre sous l'action d'une force extérieure, telle que la pesanteur, qui lui serait appliquée, et des pressions développées sur ses quatre faces, pressions normales, en vertu du lemme précédemment établi.

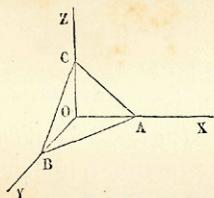


Fig. 57.

Soient p, p', p'', p''' les pressions moyennes par unité de surface sur chacune des faces ABC, OBC, OCA, OAB;

α, β, γ les angles que fait la normale au plan ABC avec les trois axes OX, OY, OZ;

λ, μ, ν , les angles que fait avec les mêmes axes la force extérieure qui sollicite le tétraèdre. Nous exprimerons cette force par le produit $\varphi \times \rho \times \text{volume}$ (OABC), ρ désignant la densité ou *masse spécifique* du fluide, et φ la *force rapportée à l'unité de masse*, ou, en d'autres termes, l'accélération que cette force imprimerait à la masse du tétraèdre s'il était libre dans l'espace. De même, les pressions totales subies par les forces seront représentées respectivement par les produits

$$p \times \text{surf. ABC}, \quad p' \times \text{surf. OBC}, \quad p'' \times \text{surf. OCA}, \quad p''' \times \text{surf. OAB};$$

la première fait les angles α, β, γ avec les trois axes; les autres sont respectivement parallèles à OX, OY et OZ. Projetons ces cinq forces sur les axes et écrivons les équations d'équilibre; nous aurons:

$$\begin{aligned} p \times \text{surf. ABC} \times \cos \alpha &= p' \times \text{surf. OBC} + \varphi \rho \text{vol. (OABC)} \cos \lambda, \\ p \times \text{surf. ABC} \times \cos \beta &= p'' \times \text{surf. OCA} + \varphi \rho \text{vol. (OABC)} \cos \mu, \\ p \times \text{surf. ABC} \times \cos \gamma &= p''' \times \text{surf. OAB} + \varphi \rho \text{vol. (OABC)} \cos \nu. \end{aligned}$$

Or le plan ABC fait avec les plans coordonnés les mêmes angles α, β, γ , que la normale à ce plan fait avec les axes. On a donc

$$\begin{aligned} \text{surf. ABC} \times \cos \alpha &= \text{surf. OBC}, \\ \text{surf. ABC} \times \cos \beta &= \text{surf. OCA}, \\ \text{surf. ABC} \times \cos \gamma &= \text{surf. OAB}. \end{aligned}$$

Divisant la première équation par surf. OBC, la seconde par surf. OCA, la troisième par surf. OAB, il viendra

$$\begin{aligned} p &= p' + \varphi \rho \cos \lambda \times \frac{\text{vol. OABC}}{\text{surf. OBC}} = p' + \frac{1}{3} \varphi \rho \cos \lambda \times a, \\ p &= p'' + \varphi \rho \cos \mu \times \frac{\text{vol. OABC}}{\text{surf. OCA}} = p'' + \frac{1}{3} \varphi \rho \cos \mu \times b, \\ p &= p''' + \varphi \rho \cos \nu \times \frac{\text{vol. OABC}}{\text{surf. OAB}} = p''' + \frac{1}{3} \varphi \rho \cos \nu \times c. \end{aligned}$$

Ces équations sont vraies, quelque petites que soient les dimensions a , b , c ; elles sont donc encore vraies à la limite quand on réduit a , b , c , à zéro; elles donnent alors

$$p = p' = p'' = p''';$$

donc la pression par unité de surface du fluide au point O est la même sur tous les plans conduits par ce point. Car on peut disposer des rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, de telle sorte que le plan ABC ait une direction quelconque.

75. La pression par unité de surface est ainsi la même en tous sens autour d'un point pris au sein d'un fluide parfait en équilibre, et ne dépend pas de l'orientation de l'élément plan sur lequel on la considère. Il en est de même pour un fluide naturel en repos, car les pressions y sont encore normales, ce qui suffit pour la démonstration du théorème. Il en est aussi de même pour un fluide parfait en mouvement, : en vertu du théorème de d'Alembert, le tétraèdre infiniment petit se trouve en équilibre à chaque instant sous l'action des pressions, de la force extérieure qui lui est réellement appliquée, et de la force d'inertie; or la force d'inertie, $-mj$, du même ordre de grandeur que la masse, disparaît comme toute autre force extérieure quand on réduit indéfiniment les arêtes du tétraèdre.

Ce n'est qu'aux fluides naturels en mouvement que le théorème sur l'égalité de pression en tous sens ne s'applique pas en toute rigueur. On l'admet néanmoins comme approximation, sauf à corriger s'il y a lieu les résultats que l'on peut en déduire. Le problème du mouvement des fluides est déjà très difficile quand on les suppose parfaits; il acquiert, quand on veut tenir compte de la viscosité, un nouveau degré de complication.

CHAPITRE PREMIER

HYDROSTATIQUE.

76. *L'hydrostatique, ou statique des fluides, a pour but de résoudre la question suivante : Dans une masse fluide en équilibre sous l'action de forces extérieures données, quelle est la répartition des pressions ?* Deux méthodes conduisent à la solution : l'une, fondée sur le théorème du travail virtuel; l'autre, plus analytique et plus directe, fondée sur l'application des équations générales de l'équilibre. Nous exposerons d'abord la première.

1° Soit AB un tuyau de section constante, mais infiniment petite, contenant une masse en équilibre, liquide ou gazeuse, qui n'est soumise à aucune force autre que les pressions de son enveloppe. Le tuyau est fermé en A et en B par deux pistons mobiles, auxquels on applique deux forces normales P et P'; l'équilibre exige que la force P soit égale à la pression totale exercée par le fluide sur la surface du piston A, et que la force P' soit de même égale à la pression totale du fluide sur la surface du piston B. Cela posé, je dis que $P = P'$.

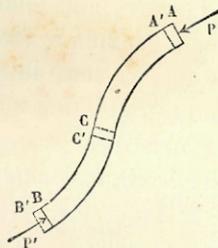


Fig. 58.

En effet, le système matériel formé par le fluide compris entre les plans A et B étant supposé en équilibre, la somme des travaux virtuels de toutes les forces appliquées à ses dif-

férents points est nulle pour tout déplacement infiniment petit qui lui serait imprimé. Les forces sont ici les forces intérieures du fluide et les pressions des parois qui l'entourent. Pour éliminer les travaux des forces intérieures, choisissons un déplacement virtuel qui n'altère pas les positions relatives des molécules. Il suffit pour cela d'imaginer que toutes les molécules glissent d'une même quantité infiniment petite, ε , le long du tuyau; le piston A avancera de cette quantité $AA' = \varepsilon$; le piston B, de la même quantité $BB' = AA'$. Ce déplacement particulier annule non-seulement les travaux des forces intérieures, mais aussi les travaux des pressions de toute la paroi courbe du tuyau, car ces pressions, normales à sa surface, sont perpendiculaires aux chemins décrits par leurs points d'application. Les seules forces qui produisent du travail sont donc les forces P et P'; la première a un travail égal à $P \times \varepsilon$; la seconde, un travail égal à $-P' \times \varepsilon$, et l'équation du travail virtuel donne

$$P \times \varepsilon - P' \times \varepsilon = 0,$$

c'est-à-dire

$$P = P'.$$

Les pressions totales du fluide sont donc égales dans la section A et dans la section B, et par suite les pressions par unité de surface sont aussi égales aux deux bouts du tuyau. On démontrerait d'une manière identique que la pression par unité de surface est la même en une section quelconque C, de sorte qu'elle est constante dans toute l'étendue du tuyau.

2° Dans une masse fluide en équilibre qui n'est soumise à aucune autre force que les pressions de son enveloppe, la pression par unité de surface est la même en tous points.

En effet, nous pouvons imaginer au sein de la masse fluide un tuyau de section constante AB, comprenant dans une de ses sections C un point M quelconque. En vertu du lemme précédent, les pressions se trouvent les mêmes en tous les points intérieurs à ce tuyau, et par suite la pression en M est

égale à la pression en A ou en B, points pris arbitrairement dans la masse.

Ce théorème est connu en hydrostatique sous le nom de *principe de la transmission des pressions*.

3° Proposons-nous de résoudre le problème de la répartition des pressions à l'intérieur d'un liquide pesant, dont le poids spécifique Π est donné.

Nous imaginerons un tuyau de section ω constante, infiniment petite, joignant dans l'intérieur du liquide un point A à un autre point B, et nous exprimerons que le liquide contenu dans ce tuyau entre les sections A et B est en équilibre sous l'action de la pression P, de la pression P', qui s'exercent sur les pistons mobiles A et B, et de la pesanteur appliquée à toutes les molécules liquides comprises entre ces deux pistons.

Imprimons pour cela un déplacement commun ε , le long du tuyau, aux deux pistons et à tout le liquide qui les sépare. Les réactions de la partie convexe du tuyau ne produisent aucun travail. Nous retrouvons d'abord les termes $P\varepsilon - P'\varepsilon$ pour somme des travaux des forces P et P'. Mais il faut y joindre le travail de la pesanteur.

En général, le travail de la pesanteur s'évalue en multipliant le poids total du système pesant par la quantité, positive ou négative, dont s'est abaissé verticalement le centre de gravité. Au lieu de suivre cette règle, observons qu'on ne change rien à la position du centre de gravité du système dans la position A'B', en supposant que le liquide placé à l'origine entre les sections A et A' vienne occuper dans la seconde position l'intervalle des sections B et B', le liquide compris

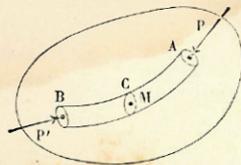


Fig. 39.

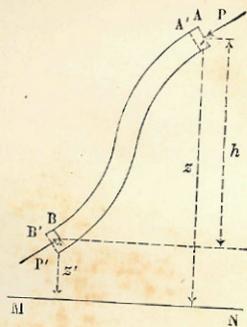


Fig. 40.

entre les sections A' et B restant fixe dans cet échange. Il en résulte qu'au lieu de multiplier le poids entier du liquide AB par la perte de hauteur de son centre de gravité général, il suffit de multiplier le poids commun des masses AA' et BB' par la différence des hauteurs de leurs centres de gravité respectifs. Ce poids est égal à $\Pi\omega\varepsilon$, et les centres de gravité des deux masses sont infiniment peu différents des centres des sections A et B; soient z et z' les hauteurs de ces derniers points au-dessus d'un même plan horizontal MN; le travail de la pesanteur dû au déplacement virtuel ε est donc égal à $+\Pi\omega\varepsilon \times (z - z')$.

L'équation d'équilibre est par suite

$$P\varepsilon - P'\varepsilon + \Pi\omega\varepsilon(z - z') = 0;$$

supprimant le facteur ε , et divisant par ω , il vient

$$\frac{P'}{\omega} = \frac{P}{\omega} + \Pi(z - z'),$$

ou bien

$$p' = p + \Pi h,$$

en appelant p et p' les pressions par unité de surface en A et en B, et h la différence de niveau des points A et B.

Dans un liquide pesant en équilibre, tous les points d'une même surface horizontale sont également pressés: car la différence de pression entre deux points ne dépend que de la différence d'altitude de ces deux points. La pression se trouve donc la même pour deux points situés au même niveau.

4° Cette dernière proposition s'applique aussi aux gaz pesants en équilibre; mais elle ne peut se démontrer de même, car le poids spécifique Π d'un gaz n'est pas constant comme celui d'un liquide, et il varie avec la pression. Pour établir le théorème, on sera donc forcé de raisonner sur des différences de niveau infiniment petites.

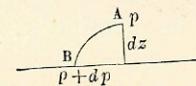


Fig. 41.

La pression à l'intérieur d'un gaz en équilibre variant d'une manière continue, deux points infiniment rapprochés, A et B, ont des pressions infiniment peu différentes, et par suite

le poids spécifique du gaz est sensiblement constant dans toute l'étendue de la région AB. Le gaz se comportant dans cette étendue comme un liquide, on peut lui appliquer l'équation

$$p' = p + \Pi h,$$

qui devient ici

$$p + dp = p + \Pi dz,$$

en appelant p la pression en A, $p + dp$ la pression en B et dz la différence de hauteur des points A et B. On en déduit

$$dp = \Pi dz.$$

Or le poids spécifique Π est une fonction de la pression p ; donc p est une fonction de z , et la proposition est démontrée pour les gaz pesants comme pour les liquides.

Nous arrivons par là à reconnaître au sein des fluides pesants en équilibre des surfaces d'égal pression ou surfaces isopiétiques, qui ne sont autre chose que des plans horizontaux. La pression a une même valeur pour chacun d'eux; elle varie de l'un à l'autre. Ce sont ces surfaces qu'on appelle surfaces de niveau en hydrostatique. Nous n'avons qu'à généraliser ce résultat pour résoudre dans toute son étendue le problème de l'équilibre des fluides. La considération des surfaces de niveau simplifie la question, car au premier abord la pression d'un fluide, variant d'un point à l'autre de sa masse, ne paraît exprimable que par une fonction des trois coordonnées de chaque point. Les surfaces de niveau permettent de réduire ces trois coordonnées à une, à savoir, le paramètre qui définit la surface de niveau particulière passant par le point donné.

DES SURFACES DE NIVEAU DANS LE CAS GÉNÉRAL.

77. Nous supposons ici qu'un fluide soit en équilibre sous l'action de forces quelconques, appliquées à chacun des points matériels qui le composent, et données pour chacun en direction et en grandeur. La pression varie d'une manière

continue au sein de cette masse fluide ; les surfaces de niveau sont les lieux géométriques des points où elle a une même valeur. Cela posé, nous commencerons par démontrer ce théorème : *en chaque point d'une surface de niveau, la force extérieure appliquée en ce point est normale à la surface.*

Soit en effet SS' une surface de niveau, tout le long de laquelle la pression par unité de surface est égale à p . Prenons sur cette surface un point A, et soit AF la direction de la force qui sollicite ce point. Les points voisins du point A seront sollicités par des forces sensiblement parallèles à la direction AF. Considérons un prisme droit AB, de longueur infiniment petite ds et de section ω , dont l'axe soit situé dans la surface SS' .

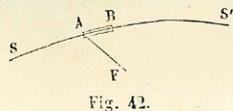


Fig. 42.

Ce prisme est en équilibre sous l'action des pressions développées sur ses faces par le fluide ambiant, et des forces appliquées à ses molécules parallèlement à la direction AF. Projétons toutes ces forces sur l'axe du prisme ; les pressions exercées sur la surface convexe sont normales à l'axe et ne donnent rien en projection. Les pressions sur les deux bases ω sont égales et contraires, leur somme algébrique se détruit ; il reste donc la projection de la résultante des forces extérieures, qui est nécessairement nulle aussi ; et comme la force elle-même n'est pas supposée nulle, la direction de la force est normale à l'axe du prisme. Mais la direction de l'axe est arbitraire sur la surface S . Donc la force extérieure appliquée au point A est normale à la surface de niveau qui passe par ce point.

Les surfaces de niveau coupent à angle droit les directions des forces appliquées à leurs divers points : nouvelle définition qui rattache la théorie hydrostatique des surfaces de niveau à la théorie dynamique exposée à propos des forces vives (III, § 49).

78. Examinons ensuite comment varie la pression d'une surface de niveau à une autre infiniment voisine.

Soit SS' une surface de niveau sur laquelle la pression est p ;

$S'S'$ une surface de niveau infiniment voisine, le long de laquelle la pression est $p + dp$. En un point A de la première, menons la normale AF ; ce sera la direction de la force qui sollicite le point A. Les directions des forces appliquées aux molécules voisines de ce point sont parallèles à la droite AF ; de plus, comme les surfaces $SS, S'S'$ sont infiniment voisines, la droite AF est sensiblement normale à $S'S'$ au point B.

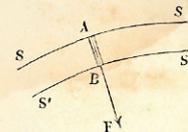


Fig. 45.

Considérons un prisme droit infiniment petit AB, dont la section soit ω , et la longueur $AB = ds$; exprimons qu'il est en équilibre sous l'action des pressions qui s'exercent sur sa surface et de la résultante des forces appliquées à ses diverses molécules. Projétons toutes ces forces sur la direction AF ; elles devront avoir une somme algébrique égale à zéro.

Les pressions sur les faces latérales du prisme sont normales à l'axe de projection, et disparaissent dans la somme. Il reste les pressions sur la face A, sur la face B, et la résultante des forces.

La pression totale en A est $p\omega$; la pression en B est $(p + dp)\omega$ et agit en sens contraire. Pour évaluer la force, remarquons que le prisme a pour volume ωds , pour masse $\rho\omega ds$, en appelant ρ la *masse spécifique* ou *densité* du fluide au point A ; la résultante des forces appliquées au prisme peut s'exprimer par le produit $\rho\omega ds \times \varphi$, où φ représente la force rapportée à l'unité de masse, ou l'accélération qu'imprimerait au prisme matériel AB auquel elle est appliquée la force totale si elle le sollicitait dans le vide.

Toutes ces forces agissant parallèlement à l'axe de projection, on a l'équation

$$p\omega - (p + dp)\omega + \rho\omega ds \times \varphi = 0.$$

Réduisant et supprimant le facteur commun ω , il vient l'équation très simple

$$dp = \rho\varphi ds,$$

qui résout la question en donnant la loi suivant laquelle la pression varie d'une surface de niveau à une surface de niveau voisine.

L'équation $dp = \Pi dz$, obtenue dans le cas d'un fluide pesant, est un cas particulier de cette équation différentielle, car les surfaces de niveau étant alors des plans horizontaux, dz est la distance de deux surfaces, et le poids spécifique Π n'est autre chose que le produit $\rho\varphi$ ou ρg de la masse spécifique par l'accélération g due à la pesanteur.

79. Cette équation se transforme aisément, quand on y introduit les coordonnées des différents points du fluide rapportées à trois axes rectangulaires. Appelons x, y, z les coordonnées d'un point M; X, Y, Z, les composantes parallèles aux axes de la force φ appliquée à ce point et rapportée à l'unité de masse; soient $x + dx, y + dy, z + dz$ les coordonnées d'un

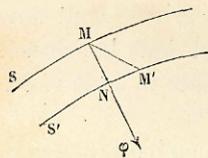


Fig. 44.

point M', infiniment voisin du point M. De ce point abaissons une perpendiculaire M'N sur la direction de la force $M\varphi$. Le point N fera partie de la même surface de niveau S' que le point M'; posons $ds = MN$, nous aurons $dp = \varphi ds$, équation qui nous fera connaître l'excès

de la pression en M' sur la pression en M. Mais φds est le travail de la force φ quand son point d'application reçoit un déplacement MM'; appliquant la formule connue (II, § 113), on aura

$$\varphi ds = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Donc enfin

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

équation générale de l'hydrostatique.

L'équation différentielle des surfaces de niveau est $dp = 0$, ou bien

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Sous cette forme, on peut vérifier que la direction de la force φ , résultante des forces X, Y et Z, est normale à l'élément

dont les projections sur les axes sont dx, dy, dz , c'est-à-dire à tout élément tracé sur la surface par le point (x, y, z) . La force φ est donc normale à la surface de niveau.

MÉTHODE DIRECTE.

80. Rapportons les positions des divers points de la masse fluide à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ; soit A le point dont les coordonnées sont x, y, z ; appelons p la pression par unité de surface en ce point, et ρ la masse spécifique.

Considérons un parallélépipède rectangle ayant pour sommet le point A, et dont les arêtes AB, AD, AF, parallèles aux axes, soient respectivement égales à dx, dy, dz . Nous exprimerons que la masse fluide comprise sous ce volume est en équilibre sous l'action de la force extérieure qui y est directement appliquée, et des pressions exercées par le fluide ambiant sur ses différentes faces.

La force extérieure s'exprimera en multipliant par l'accélération donnée φ la masse du parallélépipède fluide, qui est $\rho dx dy dz$; projetant cette force sur les trois axes, nous aurons pour composantes :

$$\rho X dx dy dz, \quad \rho Y dx dy dz \quad \text{et} \quad \rho Z dx dy dz.$$

La pression sur la face ADEF agit parallèlement à OX et dans le sens positif; la pression sur la face opposée agit parallèlement à la même direction, mais dans le sens négatif. D'ailleurs si p est la pression par unité de surface sur la face AE, $p + \frac{dp}{dx} dx$ est la pression par unité de surface sur la face BH; les pressions totales sont donc respectivement, avec leurs signes,

$$\rho X dx dy dz \quad \text{et} \quad -\left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dy dz$$

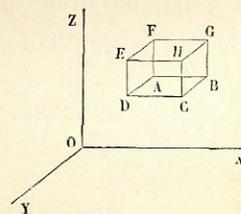


Fig. 45.

Faisant la somme algébrique des trois forces, qui sont parallèles à l'axe OX, on aura pour l'équilibre

$$pdydz - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) dydz + \rho X dx dy dz = 0,$$

ou bien, en réduisant et en divisant par $dx dy dz$,

$$(1) \quad \frac{dp}{dx} = \rho X.$$

Nous avons appelé p , dans ce calcul, la pression moyenne par unité de surface sur la face AE; mais l'équation que nous obtenons est vraie quelque petites que soient les dimensions de cette face par rapport à la dimension $dx = AB$ du parallélépipède, de sorte qu'il n'y a aucune erreur à regarder p comme la pression du fluide par unité de surface au point A.

On obtiendrait de même, en projetant les forces sur OY et sur OZ, les équations

$$(2) \quad \frac{dp}{dx} = \rho Y,$$

$$(3) \quad \frac{dp}{dy} = \rho Z.$$

Multiplions la première équation par dx , la seconde par dy , la troisième par dz , et ajoutons. La somme $\frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz$ est la différentielle totale de p quand les variables x, y, z reçoivent les accroissements arbitraires dx, dy, dz ; on la représentera par dp , et il viendra l'équation déjà obtenue

$$(4) \quad dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Nous ne nous sommes pas servis des équations des moments : il est facile de voir qu'elles seraient satisfaites d'elles-mêmes; les pressions sont normales aux faces, et leur résultante sur chacune passe sensiblement par le centre de gravité de cette face; elles passent donc toutes par le centre de gravité du parallélépipède. Les forces extérieures, parallèles et proportionnelles aux masses de chaque molécule, se composent en une force unique passant par le même point. Toutes les forces

ont donc un même point d'application, et il suffit pour l'équilibre que la résultante de translation soit nulle. C'est ce qu'expriment les trois équations (1), (2) et (3), ou plus simplement l'équation (4), où les facteurs dx, dy, dz , restent arbitraires.

DISCUSSION DE L'ÉQUATION DE L'HYDROSTATIQUE.

81. Lorsque l'équilibre existe, la pression p est déterminée en chaque point du fluide, et par suite p est une fonction bien déterminée des coordonnées x, y, z . Les composantes X, Y, Z et la densité ρ sont des fonctions données des mêmes variables. Le premier membre de l'équation (4) étant une différentielle exacte, il en est de même du second. Une des premières conditions de l'équilibre est donc que la fonction

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

soit la différentielle d'une fonction des variables x, y et z .

82. En général, si une fonction $Mdx + Ndy + Pdz$ est la différentielle d'une fonction $F(x, y, z)$, on a les identités

$$M = \frac{dF}{dx}, \quad N = \frac{dF}{dy}, \quad P = \frac{dF}{dz},$$

et par suite

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d^2F}{dx dy} = \frac{dN}{dx}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{d^2F}{dx dz} = \frac{dP}{dx}$$

et

$$\frac{dN}{dz} = \frac{d^2F}{dy dz} = \frac{dP}{dy}.$$

Les conditions

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy},$$

sont donc nécessaires pour que la fonction donnée soit une différentielle exacte; elles sont de plus suffisantes, et si elles sont satisfaites, on pourra déterminer la fonction F . Posons, en effet,

$$F = U + V + W,$$

U représentant une fonction des trois variables x, y, z ,
V une fonction de y et de z seuls,
et W une fonction de z .

Prenons les dérivées partielles de cette somme par rapport à x , à y et à z , et identifions avec les fonctions données. Il viendra

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \frac{dU}{dx} = M, \\ \frac{dF}{dy} &= \frac{dU}{dy} + \frac{dV}{dy} = N, \\ \frac{dF}{dz} &= \frac{dU}{dz} + \frac{dV}{dz} + \frac{dW}{dz} = P.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dx} &= M, \\ \frac{dV}{dy} &= N - \frac{dU}{dy}, \\ \frac{dW}{dz} &= P - \frac{dU}{dz} - \frac{dV}{dz}.\end{aligned}$$

La fonction U s'obtiendra donc par l'intégration de Mdx en y considérant x comme la seule variable; la fonction V est de même l'intégrale de $\left(N - \frac{dU}{dy}\right) dy$ par rapport à la seule variable y , et la fonction W l'intégrale de $\left(P - \frac{dU}{dz} - \frac{dV}{dz}\right) dz$ par rapport à z . Mais il faut, pour que notre hypothèse soit vérifiée, que V ne contienne pas x , et que W ne contienne ni x ni y ; or cela résulte des équations de condition; car on en déduit par la différentiation sous le signe f ,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx} \int \left(N - \frac{dU}{dy}\right) dy = \int \left(\frac{dN}{dx} - \frac{d^2U}{dx dy}\right) dy;$$

or

$$\frac{d^2U}{dx dy} = \frac{dM}{dy};$$

donc $\frac{dV}{dx} = 0$, et la fonction V est indépendante de x . De même

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dx} &= \frac{d}{dx} \int \left(P - \frac{dU}{dz} - \frac{dV}{dz}\right) dz = \int \left(\frac{dP}{dx} - \frac{d^2U}{dx dz} - \frac{d^2V}{dx dz}\right) dz \\ &= \int \left(\frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz}\right) dz = 0,\end{aligned}$$

puisque $\frac{d^2V}{dx dz} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dz}\right) = 0$, V ne contenant pas x . Enfin

$$\frac{dW}{dy} = \frac{d}{dy} \int \left(P - \frac{dU}{dz} - \frac{dV}{dz}\right) dz = \int \left(\frac{dP}{dy} - \frac{d^2U}{dy dz} - \frac{d^2V}{dy dz}\right) dz.$$

Or on a successivement

$$\begin{aligned}U &= \int M dx, \\ \frac{dU}{dy} &= \int \frac{dM}{dy} dx = \int \frac{dN}{dx} dx = N, \\ \frac{d^2U}{dy dz} &= \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dy dz} &= \frac{d}{dz} \left(N - \frac{dU}{dy}\right) = \frac{dN}{dz} - \frac{d^2U}{dy dz} = \frac{dN}{dz} - \frac{d^2}{dy dz} \int M dx \\ &= \frac{dN}{dz} - \frac{d}{dy} \int \frac{dM}{dz} dx = \frac{dN}{dz} - \frac{d}{dy} \int \frac{dP}{dx} dx = \frac{dN}{dz} - \frac{dP}{dy} = 0.\end{aligned}$$

La fonction $\frac{dP}{dy} - \frac{d^2U}{dy dz} - \frac{d^2V}{dy dz}$ étant identiquement nulle, on a $\frac{dW}{dy} = 0$. La fonction W est donc indépendante de x et de y , et la fonction F se détermine à l'aide de trois quadratures, sous la forme que nous lui avons assignée.

Cauchy a mis la solution cherchée sous la forme d'une somme de trois intégrales définies. Appelant x_0, y_0, z_0 trois constantes arbitraires, on a

$$F = \int_{x_0}^x M(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z P(x_0, y_0, z) dz,$$

comme il est aisé de le vérifier.

83. Connaissant les fonctions ρ, X, Y, Z , on pourra donc trouver la fonction p , pourvu qu'on ait les relations identiques

$$(5) \quad \frac{d(\rho X)}{dy} = \frac{d(\rho Y)}{dx}, \quad \frac{d(\rho X)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dx}, \quad \frac{d(\rho Y)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dy}.$$

Il y a lieu ici de distinguer deux cas : 1° celui où la fonction

$Xdx + Ydy + Zdz$ est d'elle-même la différentielle exacte d'une certaine fonction ; on aura alors

$$(6) \quad \frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy},$$

2° le cas où le facteur ρ rend la fonction une différentielle exacte ; dans ce cas, ce sont les équations (5) qui doivent être vérifiées. Développant ces équations, il vient, en les écrivant dans un ordre où elles se déduisent l'une de l'autre par permutation tournante :

$$(7) \quad \begin{cases} \rho \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) + X \frac{d\rho}{dy} - Y \frac{d\rho}{dx} = 0, \\ \rho \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) + Y \frac{d\rho}{dz} - Z \frac{d\rho}{dy} = 0, \\ \rho \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right) + Z \frac{d\rho}{dx} - X \frac{d\rho}{dz} = 0. \end{cases}$$

Multiplicons la première par Z , la seconde par X , la troisième par Y et ajoutons ; les termes contenant les dérivées $\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{d\rho}{dz}$ disparaîtront dans les sommes, et ρ pourra être supprimé comme facteur commun. La condition nécessaire pour qu'on puisse trouver un facteur ρ qui rende intégrable la fonction $Xdx + Ydy + Zdz$, quand les conditions (6) ne sont pas remplies, est donc exprimée par l'équation unique

$$(8) \quad Z \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) + X \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) + Y \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right) = 0.$$

PREMIER CAS : $Xdx + Ydy + Zdz$ DIFFÉRENTIELLE EXACTE.

84. Supposons les conditions (6) satisfaites.

Alors on pourra trouver une fonction $f(x, y, z)$ ayant $Xdx + Ydy + Zdz$ pour différentielle. L'équation générale des surfaces de niveau sera $f(x, y, z) = C$, et l'équation

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

deviendra

$$dp = \rho df.$$

Sous cette forme, on voit que ρ est constant, ou bien fonction de p . En effet, tout le long d'une même surface de niveau, p est le même, et f aussi ; dp et df sont les mêmes dans toute l'étendue de la couche infiniment mince comprise entre les surfaces de niveau $f=C$ et $f+df=C+dC$; donc ρ est constant dans toute l'étendue de cette couche ; si la densité n'est pas constante en tous les points de la masse fluide, elle varie seulement d'une couche à l'autre, ce qui suppose ρ fonction de f , ou, ce qui revient au même, de p .

En tous les points d'une surface de niveau la densité est donc constante. Il est facile d'en déduire qu'en chaque point la distance de deux surfaces de niveau infiniment voisines est inversement proportionnelle à l'intensité de la force. Il suffit pour cela de mettre l'équation d'équilibre sous la forme $dp = \rho g ds$ (§ 79).

Lorsque le fluide est un liquide parfait homogène, ρ est constant d'une manière absolue. Lorsque le fluide est un gaz parfait à température τ constante, ρ est lié à p par l'équation de Mariotte et de Gay-Lussac, car de l'équation

$$\frac{p}{\rho} = R(1 + \alpha\tau)$$

on déduit

$$\frac{p}{\rho} = Rg(1 + \alpha\tau) = k,$$

et k est une constante si τ est constant. L'équation $dp = \rho df$ devient alors $\frac{dp}{p} = \frac{df}{k}$. Enfin si la température du gaz n'était pas partout la même, on tirerait de l'équation de Mariotte et de Gay-Lussac

$$\rho = \frac{p}{Rg(1 + \alpha\tau)},$$

et par suite

$$dp = \frac{p}{Rg(1 + \alpha\tau)} df, \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} = \frac{1}{Rg(1 + \alpha\tau)} df,$$

équation qui montre que τ est fonction de f , ce qui revient à dire que la température est la même en tous les points

d'une surface de niveau, et varie seulement de l'une à l'autre. Les surfaces de niveau sont donc à la fois des surfaces isopiésiques (§ 76) et des surfaces *isothermes*.

APPLICATION AUX LIQUIDES PESANTS.

85. Prenons l'axe OZ vertical et montant. Nous aurons pour les composantes de la pesanteur rapportée à l'unité de masse

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g;$$

donc

$$Xdx + Ydy + Zdz = -gdz,$$

fonction intégrable qui donne $f = C - gz$.

Les surfaces de niveau sont alors des plans horizontaux, ce que nous savions déjà (§ 76).

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un liquide.

La surface libre étant une surface d'égale pression, sera une surface de niveau, c'est-à-dire un plan horizontal.

Si plusieurs liquides, non solubles les uns dans les autres, sont superposés dans la même enceinte, les surfaces de séparation sont des plans horizontaux; autrement la densité ne serait pas constante dans toute l'étendue d'une même surface de niveau.

86. La pression en un point donné s'obtiendra en intégrant

l'équation

$$dp = \rho df = -\rho g dz = -\Pi dz,$$

qui donne $p = p_0 - \Pi z$, lorsque Π est constant dans tous les points du liquide. Si la masse fluide se compose de plusieurs liquides superposés, il faudra donner à Π les valeurs successives qui conviennent à ces différents liquides. Soit AA' la surface libre, et soient BB',

CC', DD', les surfaces de séparation des liquides de différentes densités. Appelons p_0 la pression qui s'exerce sur la surface

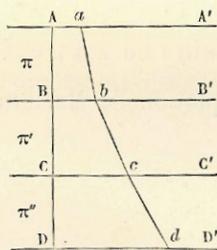


Fig. 4C.

libre. Ce sera, par exemple, la pression atmosphérique. La pression en B sera égale à

$$p_0 + \Pi \times AB.$$

A partir de ce point jusqu'en C, il faudra appliquer la formule

$$dp = -\Pi' dz,$$

qui donnera pour le point C une pression égale à

$$(p_0 + \Pi \times AB) + \Pi' \times BC.$$

On trouverait de même, en appliquant l'équation $dp = -\Pi'' dz$, que la pression en D est égale à

$$p_0 + \Pi \times AB + \Pi' \times BC + \Pi'' \times CD.$$

Pour représenter les pressions aux différents points de la verticale AD, on peut construire une ligne dont les ordonnées horizontales soient proportionnelles à ces pressions. On prendra sur les horizontales, à une échelle arbitraire,

$$Aa = p_0,$$

$$Bb = p_0 + \Pi \times AB,$$

$$Cc = p_0 + \Pi \times AB + \Pi' \times BC,$$

$$Dd = p_0 + \Pi \times AB + \Pi' \times BC + \Pi'' \times CD,$$

et on n'aura plus qu'à joindre par des lignes droites les points a, b, c, \dots . Le contour polygonal $abcd, \dots$ sera la ligne demandée.

La figure montre un contour convexe par rapport à AD. Cette condition est nécessaire pour la stabilité de l'équilibre. Il faut en d'autres termes que $\Pi < \Pi' < \Pi'', \dots$ ou que, de haut en bas, les densités des liquides superposés soient croissantes. Nous en donnerons plus loin la raison.

REPRÉSENTATION DES PRESSIONS PAR UNE HAUTEUR DE LIQUIDE.

87. Au lieu de définir la pression par unité de surface en donnant le poids qui s'exerce sur une aire déterminée,

évalué en kilogrammes par centimètre carré, on trouve plus commode en hydrostatique de définir cette pression par une hauteur d'un liquide dont la densité soit connue. La pression p par unité de surface est homogène au produit Πh du poids spécifique par une hauteur; si on divise ce produit par le poids spécifique Π' d'un certain liquide pris pour type, on pourra définir entièrement la pression p en donnant la hauteur $\frac{p}{\Pi'} = \frac{\Pi}{\Pi'} \times h$, qui lui est équivalente. Par exemple, la

pression normale de l'atmosphère est égale, au niveau de la mer, à 10530 kilogrammes par mètre carré. Si on divise par le poids, 13596 kilogrammes, du mètre cube de mercure, on trouvera qu'elle est représentée par une colonne de mercure de 0^m,760; si on la divise par 1000, poids du mètre cube d'eau, on trouvera 10^m,53 pour hauteur représentative en eau de la pression atmosphérique. Cette représentation est surtout utile lorsqu'on n'a à considérer qu'un seul liquide; en le prenant pour liquide-type, les pressions, abstraction faite de la pression atmosphérique, seront représentées par la hauteur même de la surface libre du liquide au-dessus des divers points où l'on veut les évaluer.

Soit AA' la surface libre d'un liquide pesant; la pression en B, abstraction faite de la pression extérieure qui s'exerce en A, sera représentée par la colonne AB, et la ligne dont les ordonnées horizontales représentent les pressions aux diverses hauteurs, sera la bissectrice AC de l'angle droit BAA'. Pour revenir de là à la pression évaluée en poids, il suffit de multiplier la hauteur AB par le poids de l'unité de volume du liquide.

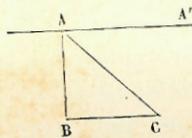


Fig. 47.

GAZ PESANTS.

88. Nous supposons que la température τ du gaz soit partout la même; nous pourrions alors nous servir de l'équation

$p = k\rho$, où k remplace la quantité constante $Rg(1 + \alpha\tau)$.
L'équation

$$dp = \rho df$$

se transforme en celle-ci :

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{k} df = -\frac{g}{k} dz = -\frac{dz}{R(1 + \alpha\tau)}$$

Intégrons, et appelons p_0 la pression à la hauteur z_0 : il viendra

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{z - z_0}{R(1 + \alpha\tau)},$$

ou bien

$$p = p_0 \times e^{-\frac{z - z_0}{R(1 + \alpha\tau)}}.$$

La pression décroît donc suivant une loi exponentielle à mesure que $z - z_0$ augmente. Elle est à peu près la même en tous les points d'une masse gazeuse homogène de peu d'étendue; car alors $z - z_0$ étant très petit, même quand il reçoit sa plus grande valeur, p est très peu différent de p_0 .

NIVELLEMENT BAROMÉTRIQUE.

89. Le calcul précédent suppose que la pesanteur ne varie pas avec la hauteur à laquelle on s'élève. Il n'est donc pas rigoureusement applicable à la détermination des pressions dans l'atmosphère, dès que les différences de niveau sont grandes. L'accélération g n'est pas, en effet, la même à toute hauteur. Appelons r la distance du centre de la terre au point le plus bas, que nous appellerons *station inférieure*, z la hauteur de la *station supérieure*, qui est supposée située sur la même verticale, g l'accélération due à la pesanteur au premier point, g' l'accélération due à la pesanteur au second; on aura

$$\frac{g'}{g} = \frac{r^2}{(r + z)^2}$$

en vertu de la loi de Newton. Or, à la hauteur z , l'équation d'équilibre de l'air est

$$dp = -\rho g' dz.$$

On a d'ailleurs toujours pour la densité ρ , sous la pression p et à la température τ , la relation

$$\rho = \frac{p}{Rg(1 + \alpha\tau)},$$

où g est l'accélération due à la pesanteur mesurée à la station inférieure, pourvu que le coefficient R ait été déterminé à la même station.

Donc

$$\rho g' = \frac{p}{R(1 + \alpha\tau)} \times \frac{g'}{g} = \frac{p}{R(1 + \alpha\tau)} \times \frac{r^2}{(r+z)^2}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation d'équilibre; il viendra, en séparant les variables,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{R(1 + \alpha\tau)} \frac{r^2}{(r+z)^2} dz.$$

Une nouvelle difficulté se présente ici : la température τ n'est pas la même à toutes les hauteurs, et on ignore la loi qui lie les variables τ et z ; tant que cette loi sera inconnue, on ne pourra pas intégrer rigoureusement l'équation précédente. On tourne la difficulté en remplaçant τ par la moyenne entre les températures observées à la station inférieure et à la station supérieure. Appelons t la température de l'air à la station inférieure, et t' la température à la station supérieure : nous ferons $\tau = \frac{t+t'}{2}$. Le coefficient de dilatation des gaz,

$\alpha = 0,00375$, est assez petit pour justifier ce procédé d'approximation. Mais on a reconnu qu'il convient d'en forcer un peu la valeur, pour tenir compte de la présence de la vapeur d'eau contenue dans l'air atmosphérique; on lui donne dans les calculs barométriques la valeur 0,004. Le facteur $1 + \alpha\tau$ devient égal à $1 + \frac{2(t+t')}{1000}$.

L'équation différentielle peut alors s'intégrer et donne

$$\log p = \frac{r^2}{R \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right)} \frac{1}{r+z} + \text{const.},$$

ou bien, en désignant par p_0 la pression observée à la station inférieure, pour $z=0$,

$$\log \frac{p_0}{p} = \frac{r}{R \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right)} \frac{z}{r+z}.$$

Les pressions de l'air p_0 et p s'observent au moyen du baromètre et s'évaluent en hauteurs de mercure; il est nécessaire de tenir compte dans cette évaluation de la diminution de la pesanteur à mesure qu'on s'élève, et des différences des températures, circonstances qui altèrent la densité du mercure et la hauteur des colonnes représentatives des pressions. Appelons β le coefficient de dilatation absolue du mercure. Soit h la hauteur barométrique lue à la station inférieure, à la température T ; appelons ρ_0 la masse spécifique du mercure à 0° ; $\frac{\rho_0 g}{1 + \beta T}$ sera le poids de l'unité de volume de mercure à T degrés; la hauteur h correspond par conséquent

$$\text{à une pression } p_0 = \frac{\rho_0 g}{1 + \beta T} \times h.$$

De même la hauteur h' , observée à la station supérieure sous la température T' , représente une pression p égale à $\frac{\rho_0 g'}{1 + \beta T'} h'$. Donc

$$\frac{p_0}{p} = \frac{g}{g'} \times \frac{1 + \beta T'}{1 + \beta T} \times \frac{h}{h'} = \frac{(r+z)^2}{r^2} \times \frac{1 + \beta T'}{1 + \beta T} \times \frac{h}{h'}.$$

Le coefficient β est un très petit nombre, $\frac{1}{5412}$. Si l'on multiplie haut et bas la fraction $\frac{1 + \beta T'}{1 + \beta T}$ par $1 - \beta T'$, et qu'on néglige le terme $\beta^2 T'^2$ au numérateur et le terme $-\beta^2 T T'$ au dénominateur, elle prend approximativement la valeur

$$\frac{1}{1 + \beta(T - T')};$$

sous cette forme, on voit que la correction des températures du mercure revient à substituer à la hauteur h' lue à la station supérieure, le produit $h' \times (1 + \beta(T - T'))$, sans rien changer à la hauteur h observée à la station inférieure. Appelons H ce produit ou la hauteur barométrique de la station supérieure corrigée, et nous aurons l'équation simplifiée

$$\frac{p_0}{p} = \frac{(r+z)^2}{r^2} \times \frac{h}{H}.$$

Donc

$$\log \frac{p_0}{p} = \log \frac{h}{H} + 2 \log \left(\frac{r+z}{r} \right) = \log \frac{h}{H} + 2 \log \left(1 + \frac{z}{r} \right),$$

et l'équation dont on doit tirer z est la suivante :

$$\log \left(\frac{h}{H} \right) + 2 \log \left(1 + \frac{z}{r} \right) = \frac{r}{R \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right)} \frac{z}{r+z}.$$

Les logarithmes sont pris dans le système dont la base est e . Pour les transformer en logarithmes dans le système vulgaire, dont la base est 10, il faut les multiplier par le module de ce système, c'est-à-dire par le nombre $\mu = 0,434295\dots$

L'équation devient, L désignant les logarithmes vulgaires,

$$L \frac{h}{H} + 2L \left(1 + \frac{z}{r} \right) = \frac{\mu r}{R \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right)} \frac{z}{r+z}.$$

Résolvons par rapport au z qui est en numérateur dans le second membre, en traitant comme des quantités connues les autres z contenus dans l'équation. Il vient

$$z = \frac{h}{\mu} \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right) \left[L \left(\frac{h}{H} \right) + 2L \left(1 + \frac{z}{r} \right) \right] \left(1 + \frac{z}{r} \right).$$

Cette équation se prête au calcul par approximations successives. On remarquera d'abord que z est très petit par rapport à la distance r , laquelle est à peu près égale au rayon de la terre, ou à 6,366,200 mètres environ. On pourra donc faire $z=0$ dans le second membre, ce qui donnera pour z une première

valeur approchée. On substituera ensuite cette valeur approchée dans le second membre, et on en déduira pour z une seconde valeur plus approchée que la première. En général, on peut se contenter de la première approximation. La formule devient alors

$$z = A \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right) \log \frac{h}{H}.$$

Le coefficient A a été déterminé par des expériences très multipliées de Ramond dans les Pyrénées et dans l'Auvergne. Il varie avec la latitude, comme l'accélération g . Soit ψ la latitude du lieu de l'observation; Ramond a donné la formule

$$z = 18595^m \times (1 + 0,002837 \cos 2\psi) \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right) L \left(\frac{h}{H} \right).$$

Si l'on veut plus d'exactitude, on aura recours à la formule complète, où le coefficient numérique doit recevoir une valeur un peu différente :

$$z = 18556^m (1 + 0,002837 \cos 2\psi) \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right) \left[L \left(\frac{h}{H} \right) + 2L \left(1 + \frac{z}{r} \right) \right] \times \left(1 + \frac{z}{r} \right).$$

On peut développer en série le logarithme de $1 + \frac{z}{r}$, et, se bornant au premier terme, on aura l'équation suivante, que Laplace a donnée dans la *Mécanique céleste* :

$$z = L \left(\frac{h}{H} \right) \times 18556 \times (1 + 0,0028371 \cos 2\psi) \left(1 + \frac{2(t+t')}{1000} \right) \times \left\{ 1 + \frac{\log \left(\frac{h}{H} \right) + 0,868589 \frac{z}{r}}{\log \left(\frac{h}{H} \right)} \right\}.$$

Il ne faut pas oublier que dans ces formules H remplace le produit $h' \times \left(1 + \frac{T-T'}{5412} \right)$.

Pour l'évaluation des températures T et T' du mercure, on place un thermomètre dans le baromètre même; c'est ce thermomètre qui fournit les valeurs de T et T' . Un thermomètre

extérieur fournit les températures t et t' . Ajoutons enfin que ces formules ont été réduites en tables d'un emploi commode et rapide.

FORME DE LA SURFACE DE LA MER.

90. La surface libre d'un liquide en repos est une surface de niveau, qui coupe à angle droit les directions des forces appliquées en tous ses points. Les principales forces qui agissent sur un point matériel placé à la surface du globe terrestre se réduisent à la pesanteur, c'est-à-dire à la résultante de la force centrifuge et de l'attraction terrestre; la direction de la pesanteur est la verticale, et, par suite, la surface libre de la mer, quand elle est calme, doit couper à angle droit toutes les verticales menées en ses différents points. Le globe lui-même, d'après la théorie généralement adoptée, a passé par l'état fluide avant que la croûte extérieure suivant les uns, la masse entière suivant les autres, ait été solidifiée par le refroidissement. La surface générale du globe doit donc être une surface de niveau, prolongement de la surface libre des mers. Les dislocations, les basculements, les érosions et autres phénomènes géologiques ont d'ailleurs modifié, suivant les localités, la forme apparente sans altérer profondément la forme générale du globe.

Si l'attraction agissait seule, la figure sphérique satisferait aux conditions; car l'attraction d'une sphère homogène sur un point placé à sa surface est dirigée vers le centre, et est normale à la surface extérieure. Mais l'attraction doit se composer avec la force centrifuge, qui fait dévier chaque verticale dans le plan méridien. La forme sphérique ne convient plus à l'équilibre dans ces nouvelles conditions, et la recherche de la figure de la terre devient un problème beaucoup plus compliqué. L'observation a fait reconnaître que la terre est à très-peu près un ellipsoïde de révolution, et que son grand axe, ou diamètre équatorial, est à son petit axe, ou distance des

deux pôles, dans le rapport de 500 à 299. L'analyse montre, en effet, que la forme d'ellipsoïde de révolution satisfait aux conditions d'équilibre. On a reconnu aussi que la forme ellipsoïdale à axes inégaux peut y satisfaire en certains cas. Enfin les formes que l'on observe dans les anneaux de Saturne rentrent également dans les solutions possibles du problème.

91. Les couches de niveau dans l'atmosphère sont des surfaces parallèles à la surface des mers. Ceci suppose, il est vrai, que l'atmosphère soit en équilibre; or l'équilibre assurerait à tous les points d'une même couche de niveau une égalité de température qui est impossible, puisque à chaque instant le soleil chauffe une région de cette couche, tandis que le refroidissement de la nuit se produit sur la région opposée. Le repos de l'atmosphère est donc impossible; de là les vents, qui sont produits par l'inégal échauffement des couches gazeuses. S'il en est ainsi, les formules de nivellement barométrique ne sont pas rigoureusement exactes, car elles sont établies sur l'hypothèse du repos de l'atmosphère et de la constance de la pression en chaque point. Et, en effet, ces formules ne sont pas complètement vraies; les pressions observées ne sont pas rigoureusement constantes. Tout ce qu'on peut dire pour en justifier l'emploi, c'est que les causes qui font varier les pressions de l'atmosphère agissent vraisemblablement dans le même sens lorsque les deux stations où l'on observe le baromètre sont peu éloignées l'une de l'autre, et qu'il s'écoule peu de temps entre la première observation et la seconde. Si la compensation résultante était exacte, le rapport $\frac{h}{H}$ qui entre dans les formules resterait constant malgré les variations de ses deux termes. Quand on veut parvenir à une complète rigueur, il faut répéter les observations aux deux stations, en les faisant autant que possible simultanément dans chacune; de cette manière, on déterminera pour chaque station la *pression moyenne de l'air*, c'est-à-dire la pression qui aurait lieu en ce point si les causes

perturbatrices étaient écartées. Alors l'application de la formule de l'équilibre atmosphérique ne soulève plus les mêmes objections.

MARÉES.

92. Le phénomène des marées, qu'on observe sur les rivages de l'Océan et de certaines mers, est dû au déplacement périodique des verticales de chaque point du globe sous l'action attractive de la lune et du soleil. La surface libre des eaux tendant toujours à faire un angle droit en chaque point avec la verticale qui y passe, si les verticales sont déviées, l'équilibre sera rompu et la surface libre tendra à prendre une nouvelle forme. Or l'attraction de la lune et celle du soleil, jointes aux forces apparentes dues à la translation de la terre, font à chaque instant dévier d'un très petit angle la verticale de chaque point (III, § 226). Admettons que la surface des mers soit à chaque instant normale aux verticales ainsi modifiées; il en résultera une légère déformation de l'ellipsoïde moyen. On peut d'ailleurs chercher séparément l'action du soleil et l'action de la lune; à chacune correspondrait une nouvelle forme de l'ellipsoïde, et la forme définitive s'obtiendrait *en composant ensemble ces deux formes*, c'est-à-dire en additionnant algébriquement les hauteurs correspondantes. L'influence de la lune sur les marées est beaucoup plus grande que celle du soleil, parce que sa proximité de la terre fait plus que compenser l'infériorité de sa masse. Du reste, la mer ne peut se mettre à chaque instant en équilibre sous les actions variables qu'elle subit, et l'observation montre qu'il y a un retard de 56 heures environ de chaque marée par rapport aux positions des corps célestes qui la produisent. La haute mer a lieu à la fois pour deux points situés aux antipodes l'un de l'autre; la mer basse, pour tous les points du grand cercle dont ces deux points sont les pôles. Les marées sont dites *de vive eau* quand l'action du soleil et de la mer s'ajoutent, c'est-à-dire quand les deux astres sont

en *opposition* (pleine lune), ou en *conjonction* (nouvelle lune); elles sont dites *de morte eau*, quand ils sont en *quadrature* (premier et dernier quartier). Enfin, la montée et la descente des eaux est extrêmement faible en pleine mer, et elle ne s'accuse avec un peu d'intensité que sur les côtes, surtout aux points où elles opposent un obstacle à la propagation du flot. L'heure de la pleine mer et la hauteur moyenne de la marée sont des éléments qui varient très rapidement d'un point à l'autre d'une même côte, et les lois de l'oscillation du plan d'eau sont aussi extrêmement variables suivant les localités. Nous reviendrons plus tard sur ce problème.

EXEMPLE D'UN ÉQUILIBRE RELATIF.

93. Comme exemple d'un liquide en équilibre sous l'action de la pesanteur et de la force centrifuge, cherchons la forme des surfaces de niveau pour un liquide pesant, tournant uniformément avec une vitesse ω autour d'un axe vertical OZ.

Soit M un point du liquide. Les forces à faire intervenir sont la pesanteur mg , agissant parallèlement à OZ, mais dans le sens négatif, et la force centrifuge, dirigée suivant le prolongement de la perpendiculaire PM à l'axe OZ, et égale à $m\omega^2 r$, en appelant r la distance PM.

Projetons cette force $m\omega^2 r$ sur les trois axes; soient x, y, z les coordonnées du point M; la composante suivant l'axe OX sera $m\omega^2 r \frac{x}{r}$ ou $m\omega^2 x$, la composante suivant OY, $m\omega^2 y$, et la composante suivant OZ sera nulle. On aura donc, en rapportant les forces à l'unité de masse, ce qui revient à supprimer le facteur m ,

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g.$$

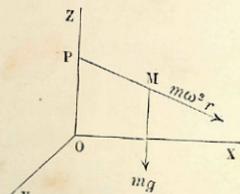


Fig. 48.

L'équation des surfaces de niveau est

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0.$$

Intégrant, il vient

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - gz = \text{constante.}$$

Cette équation montre que les surfaces de niveau sont des paraboloides de révolution autour de l'axe OZ.

On remarquera l'analogie de ce problème avec celui du régulateur parabolique (§ 64). Dans l'un et l'autre, il s'agit de trouver une courbe telle, que la résultante des forces mg et $m\omega^2 r$ lui soit normale en tous ses points; cette courbe est la parabole.

94. Soit proposé de déterminer la surface libre d'une masse liquide pesante, en repos relatif, animée autour de l'axe vertical OZ d'une vitesse angulaire ω , ayant un volume donné V, et renfermée dans un vase cylindrique à arêtes verticales, dont le fond DED'E' est un cercle décrit du point O comme centre.

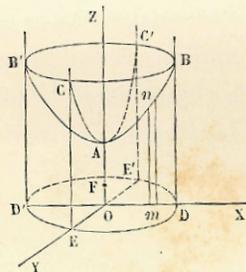


Fig. 49.

Soit $OD = R$ le rayon du cercle de base. La surface libre est un paraboloides, dont BAB' , CAC' sont les sections par les plans coordonnés, et dont l'équation est

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - gz = C.$$

La constante C doit être déterminée de manière que le volume compris dans le cylindre sous le paraboloides soit égal à V.

L'équation de la parabole BAB' s'obtient en faisant $y = 0$: ce qui donne

$$\frac{1}{2} \omega^2 x^2 - gz = C.$$

Pour évaluer le volume du liquide, nous partagerons l'aire OABD en bandes verticales mn , dont la surface sera $z dx$; en

tournant autour de l'axe OZ, chaque bande engendre un volume égal à $z dx \times 2\pi x$, et le volume total est égal à l'intégrale

$$\int_0^R 2\pi x z dx = V.$$

Or

$$z = \frac{\frac{1}{2} \omega^2 x^2 - C}{g};$$

$$z dx = \frac{\omega^2}{2g} x^2 dx - \frac{C}{g} dx.$$

L'intégrale de cette expression, entre les limites 0 et R, est

$$\frac{\omega^2}{2g} \frac{R^4}{4} - \frac{C}{g} \frac{R^2}{2}.$$

Multipliant par 2π , nous avons l'équation

$$\frac{\pi \omega^2}{4g} R^4 - \frac{\pi R^2}{g} C = V.$$

Donc

$$C = \frac{\frac{\pi \omega^2 R^4}{4g} - V}{\frac{\pi R^2}{g}} = \frac{R^2 \omega^2}{4} - \frac{gV}{\pi R^2}.$$

Si l'on fait x et y égaux à zéro dans l'équation de la surface, on obtient la hauteur OA du liquide au centre du vase. Or il vient dans cette hypothèse $z = -\frac{C}{g}$, et par suite

$$OA = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{R^2 \omega^2}{4g};$$

πR^2 étant la surface du cercle de base, $\frac{V}{\pi R^2}$ est la hauteur du liquide lorsque $\omega = 0$. Donc $\frac{R^2 \omega^2}{4g}$ est la quantité dont la rotation ω fait creuser le liquide au centre du vase. Observons que $R\omega$ est la vitesse linéaire de la surface convexe du vase. Si on l'exprime par v , le creux formé au centre par la rotation sera égal à $\frac{v^2}{4g}$, ou à $\frac{1}{2} \frac{v^2}{2g}$, ou enfin à la moitié de la hauteur due à

la vitesse v . Les formules ne sont applicables qu'à des vitesses ω assez faibles pour qu'il reste une certaine quantité de liquide sur l'axe OA. Si, par exemple, on avait

$$\frac{R^2 \omega^2}{4} > \frac{gV}{\pi R^2}$$

ou

$$\omega > \frac{2\sqrt{gV}}{R^2\sqrt{\pi}}$$

C serait positif, et le creux formé découvrirait le centre du fond. Alors les formules établies dans la supposition qu'il reste du liquide au centre devraient être modifiées.

95. La pression p dans la masse liquide se déterminera par l'intégration de l'équation

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{\Pi}{g}(Xdx + Ydy + Zdz),$$

en appelant Π le poids de l'unité de volume du liquide, ce qui donne ici

$$p = \frac{\Pi}{g} \left[\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz + C \right].$$

Sur la surface libre règne la pression atmosphérique p_0 ; on aura donc au point A

$$p_0 = \frac{\Pi}{g}(C + C').$$

Donc

$$p = p_0 + \frac{\Pi}{g} \left[\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz - C' \right],$$

équation où C doit être remplacé par sa valeur $\frac{R^2 \omega^2}{4} - \frac{gV}{\pi R^2}$.

La pression en un point F de l'axe OA est représentée, abstraction faite de la pression atmosphérique, par la colonne AF. Elle est égale à $p_0 + \Pi \times AF$. Car en tous les points de l'axe OA, la force centrifuge étant nulle, la répartition des pressions est la même que si le liquide était en repos absolu.

L'abaissement du liquide au centre du vase étant proportionné au carré de la vitesse angulaire ω , on pourra mesurer

la vitesse angulaire en évaluant à l'aide d'une échelle graduée la quantité dont le liquide s'abaisse au-dessous de son niveau moyen. C'est une manière d'évaluer la vitesse des arbres tournants sans mesurer aucune durée.

96. Supposons en second lieu que la valeur fournie pour C par l'équation $C = \frac{R^2 \omega^2}{4} - \frac{gV}{\pi R^2}$ soit positive, ce qui indique que le fond du vase se découvre en partie par suite de la rotation. La seule différence à introduire dans le calcul consiste à remplacer la limite inférieure $x=0$ de l'intégrale par la limite $x=OG$, qui correspond à l'intersection de la parabole avec l'axe OX. Nous aurons donc, en posant $OG = x_0$,

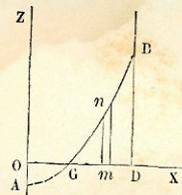


Fig. 50.

$$\int_{x_0}^R 2\pi x dx = V,$$

avec l'équation

$$\frac{1}{2} \omega^2 x^2 - gz = C,$$

sachant que x_0 est la valeur de x pour $z=0$.

On a par conséquent

$$x_0 = \frac{\sqrt{2C}}{\omega},$$

et l'inconnue C entrera dans l'une des limites de l'intégration. Nous aurons encore

$$zx dx = \frac{\omega^2}{2g} x^2 dx - \frac{C}{g} x dx,$$

dont l'intégrale générale est

$$\frac{\omega^2}{2g} \frac{x^4}{4} - \frac{C}{g} \frac{x^2}{2}.$$

L'intégrale prise entre les limites x_0 et R devient

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{2g} \frac{R^4}{4} - \frac{C}{g} \frac{R^2}{2} - \left(\frac{\omega^2}{2g} \frac{x_0^4}{4} - \frac{C}{g} \frac{x_0^2}{2} \right) &= \frac{\omega^2}{2g} \frac{R^4}{4} - \frac{C}{g} \frac{R^2}{2} - \frac{C^2}{2g\omega^2} + \frac{C^2}{g\omega^2} \\ &= \frac{C^2}{2g\omega^2} - \frac{R^2}{2g} C + \frac{R^4 \omega^2}{8g}. \end{aligned}$$

On obtiendra C en résolvant l'équation du second degré

$$C^2 - R^2 \omega^2 C + \frac{R^4 \omega^4}{4} - \frac{gV\omega^2}{\pi} = 0,$$

qui a ses racines réelles, car les trois premiers termes forment le carré de $C - \frac{R^2 \omega^2}{2}$, et l'équation donne par conséquent

$$C = \frac{R^2 \omega^2}{2} \pm \omega \sqrt{\frac{gV}{\pi}}$$

Elles sont toutes deux de même signe, car $\frac{R^2 \omega^2}{4}$ étant supposé $> \frac{gV}{\pi R^2}$, le dernier terme $\frac{R^4 \omega^4}{4} - \frac{gV\omega^2}{\pi}$ est positif; le signe des racines est enfin le signe +, puisque la somme des racines, $R^2 \omega^2$, est positive.

La parabole-limite a pour équation, en conservant le double signe du radical,

$$\frac{1}{2} \omega^2 x^2 - gz = \frac{R^2 \omega^2}{2} \pm \omega \sqrt{\frac{gV}{\pi}},$$

ou encore

$$\frac{\omega^2}{2} (x^2 - R^2) = gz \pm \omega \sqrt{\frac{gV}{\pi}}$$

Nous ne savons pas encore avec quel signe il faut prendre le radical; mais si nous faisons $x=R$, nous devons avoir pour z une valeur positive; c'est donc le signe inférieur qu'il faut adopter. On obtient ainsi la hauteur $z = DB = \frac{\omega}{g} \sqrt{\frac{gV}{\pi}}$.

ÉQUILIBRE D'UN MÉLANGE DE GAZ PESANTS.

97. Les gaz ne se superposent pas comme les liquides, mais chacun remplit comme s'il était seul tout l'espace qui lui est ouvert, et les pressions s'ajoutent.

Soit $p = k\rho$ la relation entre la pression et la masse spéci-

fique d'un gaz pesant. L'équation de l'équilibre sera

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{k} dz,$$

d'où l'on déduit

$$p = p_0 e^{-\frac{g(z-z_0)}{k}}.$$

Faisant $z - z_0 = h$, nous pourrions poser

$$p = p_0 e^{-\frac{gh}{k}}.$$

La masse spécifique ρ du gaz à la hauteur h sera $\frac{p}{k}$, ou

$$\frac{p_0 e^{-\frac{gh}{k}}}{k}.$$

Si nous admettons que n gaz soient mélangés, et que k, k', k'', \dots soient les coefficients de ces différents gaz, p_0, p'_0, p''_0, \dots leurs pressions individuelles au point z_0 , la pression totale sera

$$p_0 + p'_0 + p''_0 + \dots \text{ à la base de la colonne gazeuse}$$

et

$$p_0 e^{-\frac{gh}{k}} + p'_0 e^{-\frac{gh}{k'}} + p''_0 e^{-\frac{gh}{k''}} + \dots \text{ à la hauteur } h.$$

La masse spécifique du premier gaz, considéré seul, sera

$$\frac{p_0 e^{-\frac{gh}{k}}}{k} \text{ à la hauteur } h; \text{ celle du second, } \frac{p'_0 e^{-\frac{gh}{k'}}}{k'}; \text{ celle du}$$

troisième, $\frac{p''_0 e^{-\frac{gh}{k''}}}{k''}$, etc. La proportion du mélange varie avec la hauteur : car les densités qui, à la base, sont égales aux quotients

$$\frac{p_0}{k}, \frac{p'_0}{k'}, \frac{p''_0}{k''}, \dots$$

se trouvent respectivement multipliées, à la hauteur h , par les nombres inégaux

$$e^{-\frac{gh}{k}}, \quad e^{-\frac{gh}{k'}}, \quad e^{-\frac{gh}{k''}}, \quad \dots$$

Plus le nombre k est petit, plus le nombre $e^{-\frac{gh}{k}}$ est petit lui-même. Or le nombre k est d'autant plus petit que le gaz considéré est plus dense; en effet $k = \frac{p}{\rho}$. La diminution du gaz est donc d'autant plus sensible qu'elle porte sur un gaz plus lourd.

On explique ainsi que certains gaz très lourds, l'acide carbonique par exemple, se concentrent dans les points bas des enceintes où ils sont mêlés à l'air atmosphérique.

SECOND CAS : $Xdx + Ydy + Zdz$ NON INTÉGRABLE.

98. Lorsque la fonction $Xdx + Ydy + Zdz$ n'est pas une différentielle exacte (§ 85), l'équilibre du fluide est encore possible si le facteur ρ rend intégrable l'équation

$$(4) \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Nous avons reconnu que, pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir identiquement

$$(8) \quad z \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right) + X \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) + Y \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right) = 0.$$

Par exemple, soit $X=y$, $Y=-x$, $Z=0$.

L'équation de condition est satisfaite par ces données, et par suite l'équation $ydx - xdy = 0$ est intégrable. Le facteur d'intégrabilité est $\frac{1}{x^2 + y^2}$, ou $\frac{1}{x^2}$, ou $\frac{1}{xy}$, etc. Plus généralement, l'équation différentielle (4) est toujours intégrable si l'on a $Z=0$, et que X et Y ne contiennent pas z ; car

elle se réduit alors à une équation différentielle à deux variables.

99. La méthode générale qu'on peut suivre pour intégrer l'équation (4) consiste à traiter d'abord l'une des trois variables, z , comme une constante, ce qui revient à faire $dz = 0$, et à intégrer l'équation à deux variables

$$Xdx + Ydy = 0.$$

Cette équation est toujours intégrable; soit $U=C$ son intégrale générale, U étant une fonction connue des variables x et y , de la constante z , et C une constante arbitraire. Nous aurons, en différentiant dans la même hypothèse,

$$\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy = 0,$$

équation qui ne doit différer de l'équation donnée que par un certain facteur λ .

On aura par conséquent

$$\frac{dU}{dx} = \lambda X,$$

$$\frac{dU}{dy} = \lambda Y,$$

et le facteur λ sera une fonction connue des variables x et y et du paramètre constant z .

On passe de là à l'intégrale de l'équation donnée par la *variation des constantes*. Différentions l'équation $U=C$, en regardant x , y et z comme variables, et C comme une fonction de z ; il viendra

$$\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy + \frac{dU}{dz} dz = \frac{dC}{dz} dz,$$

ou bien

$$\lambda X dx + \lambda Y dy + \frac{dU}{dz} dz = \frac{dC}{dz} dz,$$

équation que l'on doit identifier à l'équation donnée. Multiplions celle-ci par λ et retranchons; il viendra pour déterminer la fonction C l'équation

$$\frac{dU}{dz} - \lambda Z = \frac{dC}{dz}.$$

Il semble que cette fonction s'obtiendrait par une quadrature, et qu'on aurait

$$c = \int \left(\frac{dU}{dz} - \lambda Z \right) dz.$$

Mais ceci suppose que la fonction sous le signe \int ne contient pas d'autres variables que z . Il faudrait donc qu'on eût à la fois

$$\frac{d^2U}{dzdx} - \frac{d(\lambda Z)}{dx} = \frac{d(\lambda X)}{dz} - \frac{d(\lambda Z)}{dx} = 0$$

et

$$\frac{d^2U}{dzdy} - \frac{d(\lambda Z)}{dy} = \frac{d(\lambda Y)}{dz} - \frac{d(\lambda Z)}{dy} = 0.$$

Or, comme on a $\frac{d(\lambda X)}{dy} = \frac{d(\lambda Y)}{dx}$, puisque $\lambda(Xdx + Ydy)$ est la différentielle de la fonction U , il s'ensuivrait que le facteur λ rend intégrable non-seulement la fonction $Xdx + Ydy$, mais encore la fonction donnée $Ydx + Ydy + Zdz$. La difficulté de déterminer ce facteur λ est donc aussi grande que celle de trouver le facteur ρ .

La méthode ne réussit donc pas toujours. Pour savoir si elle réussit, on tirera de l'équation $U=C$ la valeur de x en fonction de y, z et C . On substituera cette valeur dans l'équation différentielle

$$\frac{dU}{dz} - \lambda Z = \frac{dC}{dz},$$

et la méthode aboutira si la variable y sort d'elle-même de l'équation finale. Alors on déterminera C en intégrant l'équation différentielle, qui ne contiendra plus que les variables C et z .

Le résultat cherché peut être intéressant au point de vue analytique, mais, au point de vue physique, il est sans application. La densité ρ d'un fluide est, en général, ou constante ou fonction de la pression; dans les deux cas, $\frac{dp}{\rho}$ est une différentielle exacte, et, par suite, $Xdx + Ydy + Zdz$ est aussi une différentielle, sans intervention d'aucun facteur fonction des coordonnées.

CONDITIONS RELATIVES AUX LIMITES.

100. Les surfaces de niveau, dont l'équation différentielle est

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

n'existent réellement que là où il y a continuité du fluide; elles deviennent fictives au delà des parois solides qui limitent l'espace occupé. La pression p conserve la même valeur dans toute l'étendue réelle de la surface de niveau, et la paroi doit, pour l'équilibre, exercer cette pression p par l'unité de surface au point où elle est en contact avec le fluide. L'équilibre n'aurait donc pas lieu, si chaque point de la paroi n'avait pas une résistance suffisante pour développer la pression p .

101. Dans les *vases communicants*, un même plan horizontal peut correspondre à des pressions différentes, quand il traverse des liquides différents.

Soit, par exemple, un tube recourbé PQR, dans lequel on a versé deux liquides pesants; l'un occupe l'espace compris entre le plan horizontal AB, dans la branche de gauche, et le plan horizontal CD, dans la branche de droite. L'autre est compris dans la branche de gauche entre les plans AB et EF. Appelons Π le poids spécifique du premier liquide,

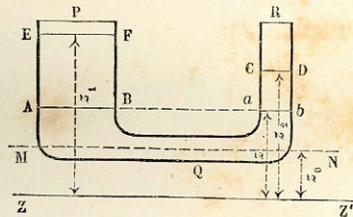


Fig. 51.

Π' le poids spécifique du second. Toute surface de niveau MN, qui traverse un même liquide, est partout soumise à la même pression par l'unité de surface. Appelons z_0, z_1, z_2, z_3 , les cotes de hauteur des plans MN, AB, EF, CD, au-dessus d'un plan horizontal de comparaison ZZ'. Si nous prenons la pression en un point de la surface MN, considérée comme appartenant à la branche R, nous aurons pour cette pression

$\Pi(z_2 - z_0)$, abstraction faite de la pression atmosphérique; considéré comme appartenant à la branche P, le même point est soumis à la pression $\Pi'(z_1 - z) + \Pi(z - z_0)$, abstraction faite encore de la pression atmosphérique qui s'exerce en EF. Ces deux pressions sont égales, puisque le plan MN est une surface de niveau. Donc

$$\Pi(z_2 - z_0) = \Pi(z - z_0) + \Pi'(z_1 - z),$$

d'où l'on déduit

$$\Pi(z_2 - z) = \Pi'(z_1 - z),$$

c'est-à-dire que les hauteurs des surfaces libres, dans les deux tubes, au-dessus de la surface de séparation AB, sont réciproquement proportionnelles aux poids spécifiques des liquides.

Un plan horizontal, qui traverse à la fois le liquide ABEF et le liquide CDba, est, dans chacun de ces tubes, une surface de niveau; mais les pressions ne sont pas les mêmes dans les tubes. En général, pour passer d'un point pris dans un liquide à un point pris dans un autre, il faut joindre ces deux points par un trait continu, qui reste plongé dans le liquide sur toute sa longueur, puis faire l'intégration de l'équation

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

le long de ce fil conducteur, en ayant soin de changer la valeur de la densité ρ toutes les fois qu'on quitte un liquide pour entrer dans un autre.

102. On peut par cette considération retrouver les conditions d'intégrabilité de la fonction $\rho(Xdx + Ydy + Zdz)$. Cette fonction devient toujours intégrable quand on la prend le long d'une ligne continue quelconque ACB, tracée entre deux points A et B; car alors y et z sont des fonctions de x , et la fonction donnée ne dépend plus que d'une variable unique. On obtiendra, en suivant cette courbe ACB, une certaine valeur,

$p - p'$, pour la différence des pressions en A et en B. Mais on doit trouver la même valeur en suivant

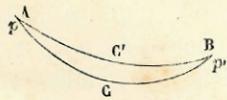


Fig. 52.

toute autre ligne AC'B, aboutissant aux mêmes extrémités; s'il en est ainsi, les pressions p et p' aux points A et B ne dépendent que des coordonnées de ces points, et non du chemin suivi pour aller d'un point à l'autre. Les conditions d'intégrabilité se réduisent donc à exprimer que l'intégrale

$$\int \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

prise entre deux points fixes le long d'une ligne continue joignant ces deux points, ne varie pas quand on altère infiniment peu le tracé de cette ligne; en employant la notation du calcul des variations, on devra poser

$$\delta \int \rho(Xdx + Ydy + Zdz) = 0;$$

x est la variable indépendante, y et z sont des fonctions de x . On pourrait ne pas faire varier la différentielle dx ; mais il est préférable d'admettre une variation pour dx comme pour dy et dz : on conserve ainsi plus de symétrie au calcul.

On aura, en faisant les opérations,

$$\begin{aligned} \int (\rho X dx + \rho Y dy + \rho Z dz) &= \int \delta(\rho X) dx + \int \delta(\rho Y) dy + \int \delta(\rho Z) dz \\ &+ \int \rho X \delta dx + \int \rho Y \delta dy + \int \rho Z \delta dz. \end{aligned}$$

L'intégration par parties permet de séparer les caractéristiques δ et d : on a, en effet,

$$\int \rho X \delta dx = \int \rho X d\delta x = \rho X \delta x - \int \delta x d(\rho X),$$

et ainsi des deux autres sommes.

Il vient donc

$$\begin{aligned} \delta(p - p') &= \rho X \delta x + \rho X \delta y + \rho Z \delta z + \int [\delta(\rho X) dx - \delta x d(\rho X)] \\ &+ \int [\delta(\rho Y) dy - \delta y d(\rho Y)] + \int [\delta(\rho Z) dz - \delta z d(\rho Z)]. \end{aligned}$$

Les termes en dehors des signes \int sont nuls aux limites, puisque les points A et B, entre lesquels on fait l'intégration, sont fixes.

On a

$$d(\rho X) = \frac{d(\rho X)}{dx} dx + \frac{d(\rho X)}{dy} dy + \frac{d(\rho X)}{dz} dz,$$

et par conséquent

$$\delta(\rho X) = \frac{d(\rho X)}{dx} \delta x + \frac{d(\rho X)}{dy} \delta y + \frac{d(\rho X)}{dz} \delta z,$$

avec des équations semblables pour $\delta(\rho Y)$ et $d(\rho Y)$, $\delta(\rho Z)$ et $d(\rho Z)$.

Donc enfin

$$\begin{aligned} \delta(p - p') = & \int \left[\frac{d(\rho X)}{dx} \delta x dx + \frac{d(\rho X)}{dy} \delta y dy + \frac{d(\rho X)}{dz} \delta z dz \right. \\ & - \frac{d(\rho X)}{dx} dx \delta x - \frac{d(\rho X)}{dy} dy \delta y - \frac{d(\rho X)}{dz} dz \delta z \\ & + \frac{d(\rho Y)}{dx} \delta x dy + \frac{d(\rho Y)}{dy} \delta y dy + \frac{d(\rho Y)}{dz} \delta z dy \\ & - \frac{d(\rho Y)}{dx} dx \delta y - \frac{d(\rho Y)}{dy} dy \delta y - \frac{d(\rho Y)}{dz} dz \delta y \\ & + \frac{d(\rho Z)}{dx} \delta x dz + \frac{d(\rho Z)}{dy} \delta y dz + \frac{d(\rho Z)}{dz} \delta z dz \\ & \left. - \frac{d(\rho Z)}{dx} dx \delta z - \frac{d(\rho Z)}{dy} dy \delta z - \frac{d(\rho Z)}{dz} dz \delta z \right]. \end{aligned}$$

Il vient en réduisant

$$\begin{aligned} \delta(p - p') = & \int \left(\frac{d(\rho X)}{dy} - \frac{d(\rho Y)}{dx} \right) (\delta y dx - dy \delta x) \\ & + \int \left(\frac{d(\rho Y)}{dz} - \frac{d(\rho Z)}{dy} \right) (\delta z dy - dz \delta y) \\ & + \int \left(\frac{d(\rho Z)}{dx} - \frac{d(\rho X)}{dz} \right) (\delta x dz - dx \delta z). \end{aligned}$$

Égalant à zéro les fonctions qui multiplient les indéterminées δx , δy , δz , on retrouve les conditions connues

$$\frac{d(\rho X)}{dy} = \frac{d(\rho Y)}{dx}, \quad \frac{d(\rho Y)}{dz} = \frac{d(\rho Z)}{dy}, \quad \frac{d(\rho Z)}{dx} = \frac{d(\rho X)}{dz}.$$

PRESSION D'UN FLUIDE SUR UNE PAROI.

103. Pour trouver la pression exercée par un fluide en équilibre sur une portion de paroi terminée à un contour fermé,

on partage l'aire de ce contour en éléments de surface infiniment petits. On connaît pour chacun de ces éléments la pression par unité de surface p qui s'exerce normalement à son plan; le problème est donc ramené à composer et à réduire à leur moindre nombre les forces infiniment petites $p d\omega$, appliquées à chacun de ces éléments, et connues de grandeur et de position. Si, par exemple, la surface pressée est une surface sphérique, toutes les pressions élémentaires passent par le centre de la sphère, et se composent en une force unique.

Lorsque la paroi donnée est plane, toutes les forces $p d\omega$ sont parallèles et ont une résultante unique. Le point de passage de cette résultante s'appelle le *centre de pression* du contour donné. En général, on restreint le sens de cette expression au cas où le fluide considéré est un liquide pesant, homogène, et où l'on fait abstraction de la pression atmosphérique. Alors le centre de pression est un point bien déterminé, qui dépend seulement de la forme et de la position de l'aire pressée.

La recherche du centre de pression ainsi défini se ramène à la recherche du centre de gravité d'un volume homogène. Soit AB la surface libre du liquide, qu'on sait être un plan horizontal, CD une portion de paroi plane. Prenons dans cette portion de paroi un élément de surface infiniment petit m ; la pression subie par cet élément, rapportée à l'unité de surface, est représentée, abstraction faite de la pression atmosphérique, par la hauteur mp de la surface libre au-dessus du point m . Elle est dirigée suivant la normale mp' à l'élément. Elle est donc égale au poids d'une colonne liquide mp' , qui aurait pour base l'élément $d\omega$, et pour hauteur une hauteur mp' égale à mp et reportée sur la normale à la paroi; imaginons qu'on opère de même pour tous les éléments de l'aire

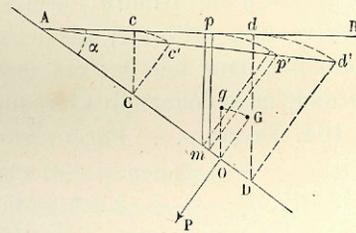


Fig. 55

donnée : on obtiendra un cylindre tronqué, $Cc'd'D$, qui aura pour base le contour donné et pour hauteur en chaque point la distance de ce point à la surface libre. Les extrémités de toutes les colonnes ainsi obtenues seront situées dans un même plan $c'd'$, passant par la droite A , suivant laquelle le plan de la paroi coupe la surface libre.

La pression totale P est égale au poids de ce cylindre liquide, et elle passe par son centre de gravité G ; on obtiendra donc le centre de pression O de l'aire donnée en projetant le point G sur le plan de la paroi.

On remarquera que, dans la déformation des colonnes verticales mp , qui deviennent les colonnes normales à la paroi mp' , les volumes de ces colonnes sont multipliés tous par un même nombre, $\frac{1}{\cos \alpha}$, α étant l'angle dont on fait tourner les droites verticales pour les rendre normales, c'est-à-dire l'angle du plan de la paroi avec l'horizon. Le centre de gravité du cylindre déformé s'obtiendra de même en faisant tourner de l'angle α la droite verticale Og , passant par le centre de gravité du cylindre primitif $CcdD$. Le centre de pression est donc aussi le pied de la verticale abaissée sur la paroi du centre de gravité g du cylindre à arêtes verticales $CcdD$. La première construction est préférable à la seconde, parce qu'elle fait connaître dans tous les cas le point cherché, tandis que la seconde ne le définit plus lorsque la paroi est verticale.

104. EXEMPLES. — *Paroi rectangulaire*, dont un côté est dirigé suivant la ligne horizontale A ; le côté opposé occupe la position D ; les deux côtés latéraux sont dirigés suivant des lignes de plus grande pente de la paroi.

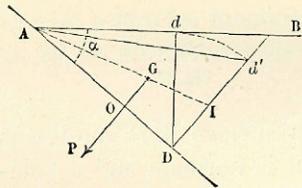


Fig. 54.

Le cylindre tronqué s'obtiendra en prenant sur Dd' , normale

à la paroi au point D , une longueur $Dd' = Dd$, et en menant le plan Ad' . On obtient ainsi un prisme droit, ayant pour

base le triangle ADd' et pour hauteur la largeur du rectangle.

Soit $AD = a$; l'autre dimension du rectangle sera représentée par b . Nous aurons $Dd = a \sin \alpha$; l'aire du triangle ADd' est égale à $\frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$, et le volume du prisme est $\frac{1}{2} a^2 b \sin \alpha$. Soit Π le poids spécifique du liquide : on aura pour la pression totale

$$P = \frac{\Pi}{2} a^2 b \sin \alpha.$$

Le point G , centre de gravité du prisme, est dans son plan vertical moyen aux deux tiers, à partir de l'arête A , de la droite AL qui joint le milieu de cette arête au centre de gravité de la base projetée en Dd' . Donc le centre de pression O est sur la ligne médiane du rectangle, aux deux tiers de la dimension AD à partir du point A .

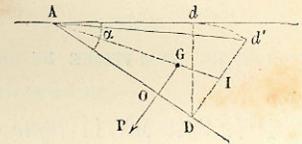


Fig. 55.

105. *Triangle* (fig. 55) ayant sa base horizontale b projetée en D , et son sommet au point A , sur la surface libre.

Le cylindre tronqué devient une pyramide quadrangulaire, ayant son sommet en A et sa base projetée en Dd' .

Le poids de cette pyramide sera

$$\Pi \times \frac{1}{3} AD \times (Dd' \times b),$$

ou bien

$$\frac{\Pi}{3} a^2 b \sin \alpha = P.$$

Le centre de gravité G est aux trois quarts de la droite menée du sommet A au centre de gravité I de la base opposée. Le point O est donc sur la médiane aboutissant au point D , et aux trois quarts de cette médiane à partir du point A .

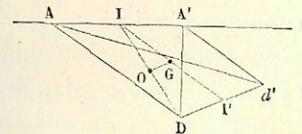


Fig. 56.

106. *Triangle* (fig. 56) ayant sa base AA' dans la surface libre et son sommet en D .

Du point D élevons sur le plan DAA' la perpendiculaire

Dd' , égale à la distance du point D à la surface libre. Le cylindre tronqué sera la pyramide triangulaire $AA'd'D$.

Si B est la surface du triangle ADA' et h la distance du sommet D au plan d'eau, le volume de la pyramide est $\frac{1}{3} Bh$, et par suite

$$P = \frac{\Pi}{5} Bh.$$

Le centre de gravité G de la pyramide est au milieu de la droite II' , qui joint les milieux des arêtes opposées AA' , Dd' . Projetant sur le plan de la paroi la droite II' , on obtient la médiane ID du triangle, et le centre de pression O en occupe le milieu.

RECHERCHE ANALYTIQUE DU CENTRE DE PRESSION D'UNE AIRE PLANE.

107. Soit MN la ligne d'eau, intersection du plan de la paroi avec la surface libre du liquide;

Soit AB le contour donné dans le plan de la paroi; G son centre de gravité. Nous mènerons par ce point, dans le plan de la paroi, la ligne horizontale GX et la ligne de plus grande pente GY, qui coupe la première à angle droit, et nous rapporterons les divers points R de la section à ces deux droites prises pour axes coordonnés; nous aurons $GP = x$, $PR = y$.

La distance GY de la ligne d'eau au centre de gravité est connue et égale à a .

On connaît aussi le poids Π de l'unité de volume du liquide, et l'angle α que le plan de la paroi fait avec l'horizon.

Nous décomposerons l'aire donnée en rectangles infiniment petits par des parallèles aux axes; l'aire d'un rectangle R sera $dxdy$; elle supporte par unité de surface une pression égale à Πh , h étant la distance du point R à la surface libre; or

$h = RS \times \sin \alpha$ et RS est égal à $a - y$. Donc enfin la pression élémentaire subie par le rectangle infiniment petit R a pour expression

$$\Pi(a - y) \sin \alpha dxdy.$$

Pour trouver la pression totale P, on fera la somme de tous ces éléments, étendue à toute l'aire donnée; ce que nous exprimerons par l'équation

$$P = \iint \Pi \sin \alpha (a - y) dxdy.$$

Pour avoir le point d'application O de cette résultante P, prenons les moments par rapport aux axes GX, GY; appelons x_1 et y_1 les coordonnées du point O. Nous aurons

$$Px_1 = \iint \Pi \sin \alpha (a - y) x dxdy,$$

$$Py_1 = \iint \Pi \sin \alpha (a - y) y dxdy.$$

Les facteurs Π et $\sin \alpha$, communs à tous les éléments, sortent du signe \iint , et l'on a

$$P = \Pi \sin \alpha \iint (a - y) dxdy = \Pi \sin \alpha \left(a \iint dxdy - \iint y dxdy \right),$$

$$Px_1 = \Pi \sin \alpha \iint (a - y) x dxdy = \Pi \sin \alpha \left(a \iint x dxdy - \iint xy dxdy \right),$$

$$Py_1 = \Pi \sin \alpha \iint (a - y) y dxdy = \Pi \sin \alpha \left(a \iint y dxdy - \iint y^2 dxdy \right).$$

La double somme $\iint dxdy$ représente l'aire totale AB. Nous la représenterons par Ω .

Les deux sommes $\iint y dxdy$, $\iint x dxdy$ sont les sommes algébriques des moments des éléments infiniment petits de l'aire totale par rapport aux axes GX et GY, qui passent par le centre de gravité G de cette aire; ces sommes sont donc nulles toutes deux. Il reste la double somme $\iint xy dxdy$ et la double somme $\iint y^2 dxdy$; celle-ci peut être définie, par analogie avec les définitions de la dynamique des corps solides, le moment

d'inertie I de l'aire AB par rapport à l'horizontale CX , menée par son centre de gravité (II, § 205). Les équations simplifiées prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} P &= \Pi \sin \alpha \times a \Omega, \\ Px_1 &= \Pi \sin \alpha \int \int xy dx dy, \\ Py_1 &= - \Pi \sin \alpha \times I. \end{aligned}$$

La première équation montre que la pression moyenne, $\frac{P}{\Omega}$, est égale à la pression par unité de surface au centre de gravité, $\Pi \times a \sin \alpha$.

La double somme $\int \int xy dx dy$ est nulle quand la section est symétrique par rapport à une ligne de plus grande pente de son plan. En effet, les éléments de l'aire se groupent alors symétriquement deux à deux, et les éléments correspondants, $xy dx dy$, de la somme se détruisent, parce que les produits $y dx dy$ sont les mêmes, les x étant égaux en valeur absolue et de signes contraires. On peut remarquer que la même somme serait encore nulle, si la symétrie de la section existait par rapport à l'horizontale GX .

108. Les coordonnées y_1 et x_1 définissent un point O dont la position est indépendante des facteurs Π et $\sin \alpha$. Remarquons que le moment d'inertie I , produit de quatre dimensions linéaires, peut s'exprimer par le produit ΩK^2 , de la section Ω par le carré d'une longueur K . Cette longueur K est le rayon de giration de la section par rapport à l'axe GX , et, en divisant la troisième équation par la première, il vient

$$y_1 = - \frac{I}{a \Omega} = - \frac{K^2}{a}.$$

Par le point O , menons l'horizontale OO' ; la distance GO' sera égale à $-y_1$, et, par suite, le produit $GO' \times GY$ sera constant et égal à K^2 . On retrouve la relation qui lie, dans le pendule composé, les distances de l'axe d'oscillation et de l'axe de suspension au centre de gravité (III, § 266). Si l'on suppose que la section AB soit pesante, et que son poids soit

uniformément réparti par unité de surface, YO' sera la longueur du pendule simple synchrone au pendule composé, qu'on obtiendrait en faisant osciller cette section autour de la droite horizontale MN .

109. On peut ajouter que le centre de pression O est, pour la section massive AB , le centre de percussion conjugué de la ligne d'eau MN .

Soit ρ la masse de la section AB par unité de surface. Cherchons directement en quel point O une percussion normale Q doit être appliquée à la section massive, supposée en repos, pour que le mouvement initial soit une rotation autour de MN . Appelons x_1 et y_1 les coordonnées de ce point.

La vitesse de translation imprimée au centre de gravité sera égale à $\frac{Q}{\rho \Omega}$. La rotation autour du centre de gravité doit s'opérer autour d'une droite GX , parallèle à MN ; la vitesse angulaire aura une valeur ω telle, que la droite MN reste immobile en vertu de la coexistence des deux mouvements; pour cela, il faut et il suffit que l'on ait

$$\omega \times GY = \frac{Q}{\rho \Omega}.$$

Or le théorème des moments des quantités de mouvement, appliqué à la force instantanée Q , donne

$$\omega = \frac{Q \times (-y_1)}{I} = - \frac{Q y_1}{\Omega K^2}.$$

On en déduit $ay_1 = -K^2$, l'une des relations qu'il s'agissait de vérifier.

Il reste à retrouver la valeur de x . Appliquons le théorème de D'Alembert étendu aux forces instantanées, et exprimons que le moment de la pression Qy_1 par rapport à la droite GY est égal à la somme des moments des quantités de mouvements finales par rapport à la même droite. La quantité de mouvement de l'élément de surface R est $\rho dx dy \times (\omega \times RS)$ ou $\rho dx dy \times \omega (a - y)$; son moment par rapport à l'axe GY est $\rho \omega x (a - y) dx dy$.

La somme de tous ces moments est donc

$$\int \int \rho \omega x(a-y) dx dy = \rho \omega \left(\int \int a x dx dy - \int \int x y dx dy \right) \\ = -\rho \omega \int \int x y dx dy,$$

somme qui doit être égale à Qx .

On en déduit

$$x_1 = \frac{-\rho \omega \int \int x y dx dy}{Q} = -\frac{\int \int x y dx dy}{\Omega a},$$

équation qui s'accorde avec les équations

$$P x_1 = -H \sin \alpha \int \int x y dx dy$$

et

$$P = H \sin \alpha \times \Omega.$$

TRAVAIL DES PRESSIONS EXERCÉES PAR UNE MASSE GAZEUSE SUR
UNE ENVELOPPE QUI SE DÉFORME.

110. Soit AB une enveloppe mobile et déformable, entourée de tous côtés par un fluide non pesant, et supportant en tous points la pression p par unité de surface.

L'enveloppe reçoit un déplacement infiniment petit, accompagné d'une déformation qui la fait passer de la position AB à la position infiniment voisine $A'B'$. On demande le travail des pressions normales qui s'exercent sur tous ses éléments de surface.

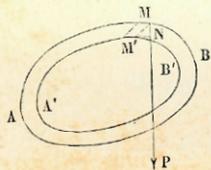


Fig. 58.

Soit M un élément ayant une surface $d\omega$; la pression sur cet élément sera $p d\omega$, et elle aura la direction normale MP . Dans la déformation de l'enveloppe, l'élément M passe en M' ; le point d'application de la pression décrit un chemin MM' , qui se projette en MN sur la direction de la force : le travail élémentaire est $p d\omega \times MN$ ou $p \times (MN \times d\omega)$; or $MN \times d\omega$ est le volume décrit par l'aire $d\omega$

dans son déplacement MM' . Ce produit doit être pris avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le travail correspondant est positif ou négatif.

Faisons la somme algébrique de toutes ces quantités; il viendra pour le travail total le produit de la pression p par le volume compris entre les deux positions successives de l'enveloppe; soit donc V le volume primitif AB ; $V + dV$ le volume $A'B'$; le travail sera $-pdV$, si la pression p s'exerce extérieurement à l'enveloppe, et $+pdV$, si elle s'exerce intérieurement.

Le déplacement de l'enveloppe sans déformation n'entraîne aucun travail des pressions. La déformation elle-même n'en produit aucun quand il n'y a pas changement de volume.

111. Si, au lieu d'un changement de volume infiniment petit, l'enveloppe subit un changement de volume fini, le travail des pressions s'obtiendra par l'intégration de $\pm pdV$, en prenant le signe $+$ quand la pression est intérieure, et le signe $-$ dans le cas contraire.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une masse gazeuse à température constante, et à laquelle la loi de Mariotte soit applicable : elle se dilate d'un volume V à un volume V' . Le travail des pressions exercées par cette masse sur les parois mobiles qui l'entourent sera exprimé par l'intégrale $\int_V^{V'} pdV$. Mais la loi de Mariotte donne

$$pV = p_0 V_0.$$

Donc

$$pdV = \frac{p_0 V_0}{V} dV$$

et

$$\int_V^{V'} pdV = p_0 V_0 \int_V^{V'} \frac{dV}{V} = p_0 V_0 \log n \text{é} p \frac{V'}{V} = p_0 V_0 \log n \text{é} p \frac{p'}{p}.$$

Il est essentiel de noter que ce résultat suppose la constance de la température; et, comme l'expansion d'un gaz ne peut se faire sans une perte de sa chaleur propre, il est nécessaire,

pour que la formule soit exacte, que l'on fournisse au gaz de la chaleur à mesure qu'il se détend.

SURFACE FERMÉE UNIFORMÉMENT PRESSÉE SUR TOUS SES ÉLÉMENTS.

112. Les pressions exercées sur la surface extérieure d'un corps solide de dimensions finies par un fluide non pesant qui enveloppe ce corps de tous côtés, se font équilibre. On peut démontrer ce théorème de plusieurs manières :

1° Supposons d'abord que le corps ait la forme d'un tétraèdre; chaque face supporte une pression égale à $p\omega$, ω étant l'aire de la face considérée, et comme les pressions sont uniformément réparties, le point d'application de la résultante $p\omega$ est le centre de gravité de cette face. Les pressions se réduisent donc à quatre forces, normales aux faces, proportionnelles à leurs aires respectives, et appliquées à leurs centres de gravité. Nous avons démontré (II, § 231) que ces quatre forces se font équilibre. Le théorème démontré pour un tétraèdre s'étend sans difficulté à un polyèdre quelconque, et ensuite à un corps de forme quelconque, qu'on peut toujours considérer comme un polyèdre ayant un nombre infini de faces infiniment petites.

2° On peut aussi le démontrer directement. Considérons sur la surface du corps un élément de surface infiniment petit $d\omega$, et soient λ , μ et ν les angles que fait la normale à cet élément avec trois axes rectangulaires OX, OY, OZ. La pression $pd\omega$ qui s'exerce sur l'élément peut se décomposer en trois forces parallèles aux axes, et égales à $pd\omega \cos \lambda$, $pd\omega \cos \mu$, $pd\omega \cos \nu$. Projetons l'élément $d\omega$ sur les plans coordonnés. Le cylindre projetant parallèle à l'axe OX rencontrera une seconde fois la surface extérieure du corps suivant un contour $d\omega'$, dont la normale fera avec l'axe OX un angle λ' , et l'on aura $d\omega' \cos \lambda' = d\omega \cos \lambda$. La composante $pd\omega \cos \lambda$, parallèle à l'axe OX, est donc égale à la composante $pd\omega' \cos \lambda'$; elles sont de plus dirigées en sens contraires, car l'une et l'autre tendent vers l'in-

térieur du corps. Si, au lieu de rencontrer deux fois seulement la surface du corps, le cylindre projetant la rencontrait un plus grand nombre de fois, ce serait toujours en nombre pair, et les faces d'entrée pourraient toujours se grouper avec les faces de sortie. En définitive, chaque composante $pd\omega \cos \lambda$ est détruite par une composante égale et opposée, et par suite l'équilibre a lieu.

5° Enfin, on peut appliquer le théorème du travail virtuel. Imprimons un déplacement quelconque infiniment petit au corps solide; le travail de la pression est représenté en général par $-p\delta V$, puisque la pression est extérieure (§ 111). Or ici $\delta V = 0$, car le corps est un solide invariable. La somme des travaux virtuels est nulle, et l'équilibre est par conséquent vérifié.

THÉORÈME D'ARCHIMÈDE.

113. Imaginons, au sein d'un fluide en équilibre sous l'action de forces données, une enveloppe fermée qui entoure de toutes parts une certaine masse fluide. Cette masse étant en équilibre, il y a équilibre entre les forces extérieures qui y sont directement appliquées et les pressions développées sur toute la surface de l'enveloppe. Si donc on remplace la masse contenue dans l'enveloppe fluide par un corps solide de même forme, et sollicité par les mêmes forces, l'équilibre aura encore lieu. Le *théorème d'Archimède* est une application de cette remarque aux corps solides plongés dans un liquide ou dans un gaz pesant.

Dans ce cas particulier, les forces extérieures qui sollicitent le fluide contenu dans l'enveloppe se réduisent à la pesanteur. Elles ont une résultante verticale, égale au poids du fluide, et appliquée en son centre de gravité. Les pressions développées sur la surface de l'enveloppe ont donc aussi une résultante verticale, égale au poids du fluide, appliquée en son centre de gravité, mais dirigée de bas en haut. Le corps solide plongé dans le fluide, où il occupe la place é-

l'enveloppe, est ainsi soumis à deux forces verticales : son poids, dirigé de haut en bas et appliqué en son centre de gravité, et la résultante des pressions, dirigée de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé par le corps, et appliquée au centre de gravité de ce fluide. Le corps sera en équilibre si ces deux forces sont égales et directement opposées, et l'on parvient au théorème suivant :

Un corps solide, plongé dans un fluide pesant en équilibre, est en équilibre lorsque son poids est égal au poids du fluide déplacé, et lorsque le centre de gravité du corps solide et celui de la masse fluide qu'il déplace sont sur une même verticale.

Cet énoncé suppose le corps entièrement plongé dans le fluide. Lorsqu'une partie reste en dehors, comme cela a lieu, par exemple, pour un corps flottant à la surface libre d'un liquide en repos, il faut, en outre, que le liquide baigne sur tout leur périmètre les sections horizontales de la partie plongée. S'il en est ainsi, les composantes horizontales des pressions se détruisent deux à deux, tandis que les composantes verticales seules donnent lieu à une différence toujours dirigée de bas en haut, et égale au poids du liquide occupé par chaque élément de volume immergé.

On peut donc exprimer le théorème de la manière suivante :
Tout corps solide, plongé en tout ou en partie dans un liquide pesant en équilibre, reçoit de ce liquide une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du liquide déplacé, et appliquée au centre de gravité de ce liquide; c'est cette poussée de bas en haut à laquelle on donne quelquefois le nom impropre de perte de poids.

Lorsque les sections horizontales d'un corps solide, en partie plongé dans un liquide, ne sont pas baignées sur tout leur pourtour, la surface mouillée du solide devient une *paroi* latérale pour le liquide, et l'énoncé du théorème d'Archimède ne s'y applique plus.

ÉQUILIBRE D'UN PRISME DROIT FLOTTANT.

114. Soit ABC la section droite d'un prisme droit homogène qui flotte à la surface d'un liquide en repos; ce prisme pourra avoir différentes positions d'équilibre; dans toutes, le centre de gravité du corps et le centre de gravité du liquide déplacé doivent être placés sur la même verticale, et le poids du corps doit être égal au poids du liquide déplacé.

On peut satisfaire de plusieurs manières à la première condition : 1° En posant horizontalement les arêtes latérales du prisme, et en le faisant tourner jusqu'à ce que les deux centres de gravité soient sur la même verticale; on y arrivera toujours, car la position horizontale des arêtes amène le centre de gravité de la partie plongée dans le plan moyen du prisme qui contient le centre de gravité de ce corps;

2° En posant le prisme verticalement. Les deux centres de gravité sont alors sur la verticale qui joint les centres de gravité des bases.

Nous nous occuperons seulement de la première solution, la seconde ne présentant point d'intérêt. Cette première solution se décompose d'ailleurs en deux autres, suivant que le prisme a un seul sommet ou deux sommets immergés. Les deux cas peuvent se traiter par la même équation. Nous commencerons par le premier.

I. Soit ACB une position d'équilibre; le prisme plonge jusqu'à la ligne DE. Le centre de gravité du prisme est au point G, aux deux tiers de la ligne AI qui joint le sommet A au milieu du côté opposé BC. Le centre de gravité de la partie plongée est au point H, aux deux tiers de la ligne AK qui joint le même sommet au milieu de la droite DE. L'équilibre exige

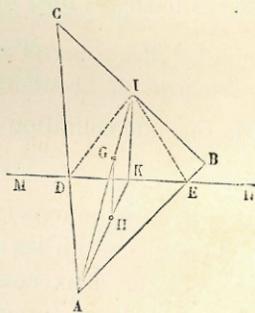


Fig. 59.

1° Que la droite DH soit verticale;

2° Que le rapport des sections $\frac{ABC}{ADE}$ soit égal au rapport inverse des poids spécifiques du prisme et du liquide. Appelons Π le poids spécifique du prisme, et Π' celui du liquide; on devra avoir la relation

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{\Pi'}{\Pi}.$$

Le triangle ABC est donné; soit $AB=c$, $AC=b$ les deux côtés qui comprennent l'angle A ; pour définir le triangle ADE , nous ferons $AD=x$, $AE=y$. Les deux triangles, ayant un angle égal A , sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle. Donc

$$(1) \quad \frac{bc}{xy} = \frac{\Pi'}{\Pi}.$$

Il s'agit d'exprimer que la droite GH est verticale; or elle est parallèle à IK ; la droite IK est donc verticale, et par suite perpendiculaire sur la droite DE ; et comme K est le milieu de DE , le point I est à égale distance des points D et E .

Appelons p la longueur de la médiane AI du triangle ABC , et soient $\beta = \angle IAC$, $\gamma = \angle IAB$, les angles qu'elle fait avec les côtés. Les triangles DIA , EIA , nous donnent les relations :

$$\begin{aligned} DI^2 &= x^2 + p^2 - 2px \cos \beta, \\ EI^2 &= y^2 + p^2 - 2py \cos \gamma, \end{aligned}$$

et la seconde condition s'exprime par l'équation

$$(2) \quad x^2 - y^2 - 2px \cos \beta + 2py \cos \gamma = 0.$$

Les deux équations (1) et (2) permettent de trouver les inconnues x et y . En les considérant comme les abscisses et les ordonnées de deux courbes, les valeurs cherchées sont fournies par les intersections de deux hyperboles, ce qui conduit au plus à quatre solutions.

On peut éliminer y entre les équations (1) et (2); on tire de la première

$$y = \frac{\Pi bc}{\Pi' x}.$$

et substituant dans la seconde,

$$x^2 - \frac{\Pi^2 b^2 c^2}{\Pi'^2 x^2} - 2px \cos \beta + \frac{2p \Pi bc \cos \gamma}{\Pi' x} = 0,$$

ou, en multipliant par $\Pi'^2 x^2$,

$$(3) \quad \Pi'^2 x^4 - 2p \Pi'^2 \cos \beta x^3 + 2p \Pi \Pi' bc \cos \gamma x - \Pi^2 b^2 c^2 = 0.$$

Cette équation, étant de degré pair et ayant son dernier terme négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative. La règle des signes de Descartes nous apprend qu'elle ne peut avoir plus de trois racines positives, ce que nous savions déjà, et en changeant x en $-x$, plus d'une racine négative. Mais elle peut avoir deux racines imaginaires. Enfin, les racines réelles ne conduisent pas toujours à une solution admissible, car il faut qu'on ait $x < b$ et $y < c$. En résumé, il peut y avoir pour le problème trois solutions ou une seule; il est certain qu'il y en a une au moins toutes les fois que $\Pi < \Pi'$, condition nécessaire pour que le prisme puisse flotter.

II. Supposons en second lieu que le triangle ABC ait deux sommets plongés (fig. 60). Il faudra qu'on ait la proportion

$$\frac{ABC}{DECB} = \frac{\Pi'}{\Pi},$$

mais elle revient à celle-ci

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{\Pi'}{\Pi' - \Pi}.$$

L'autre condition d'équilibre exige que le centre de gravité G du triangle total, et le centre de gravité L du trapèze plongé $DECB$, soient sur la même verticale. Or soit H le centre de gravité du triangle qui émerge hors du liquide. Le centre de gravité G s'obtiendra en composant les poids du triangle ADE

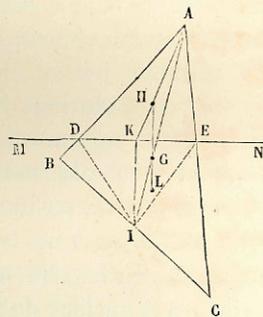


Fig. 60.

et du trapèze DECB, appliqués respectivement aux points H et L. Donc le point H est situé sur la droite GL, et la condition d'équilibre est encore que la droite GL soit perpendiculaire à DE, ou qu'on ait $DI = LD$.

L'équation (2) subsiste donc comme dans le premier cas : l'équation (1) est seule modifiée, et la modification se résume dans le changement de Π en $\Pi' - \Pi$.

On aura donc encore au plus trois solutions correspondantes à cette disposition de la figure.

Ce que nous avons fait pour le sommet A, nous pouvons le faire pour chacun des sommets B et C; à six solutions au plus pour chacun, cela fait en tout dix-huit positions d'équilibre.

Mais ces solutions peuvent n'être pas toutes admissibles. Le nombre minimum de solutions est égal à six, chaque sommet étant alternativement seul plongé et seul hors de l'eau; de ces six positions, trois correspondent à un équilibre stable, et trois à un équilibre instable; elles alternent dans l'ordre où on les obtient en faisant tourner successivement le prisme à la surface de l'eau. Car entre deux positions stables consécutives, positions auxquelles le prisme tend à revenir quand on l'en dérange, il y a nécessairement une position d'équilibre instable, celle où le prisme subit des tendances égales et contraires vers les deux positions stables voisines. Le nombre des solutions est donc nécessairement pair, autrement cette alternance entraînerait la stabilité et l'instabilité de l'équilibre pour une même position; ce qui indiquerait un équilibre indifférent.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DES LIQUIDES SUPERPOSÉS.

115. L'équilibre des liquides pesants superposés exige que les surfaces de séparation soient des plans horizontaux; pour que cet équilibre soit stable, il faut que les liquides les plus denses soient au-dessous des liquides les plus légers.

En effet, troublons infiniment peu l'équilibre, en altérant les surfaces de séparation ou en faisant pénétrer de petites masses de l'un des liquides dans l'espace occupé par le liquide voisin; pour fixer les idées, nous supposerons que l'on fasse entrer une portion du liquide supérieur dans l'espace occupé par le liquide inférieur. Si la densité du premier liquide est moindre que celle du second, la poussée du second liquide sur la masse étrangère qui y aura pénétré, sera plus grande que le poids de cette masse, et la résultante de ces deux forces tendra à ramener la masse étrangère au-dessus du liquide inférieur, c'est-à-dire à rétablir la superposition telle qu'elle existait primitivement. Si, au contraire, la densité du liquide supérieur était plus grande que celle du liquide inférieur, la masse empruntée au premier liquide traverserait le second, et l'équilibre ne se rétablirait pas.

Si l'on introduit dans une fiole fermée plusieurs liquides insolubles les uns dans les autres, et qu'après avoir agité la fiole, on la laisse reposer, les liquides se séparent au bout d'un temps plus ou moins long et se rangent, de haut en bas, dans l'ordre croissant des densités.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DES CORPS PLONGÉS DANS UN LIQUIDE PESANT

116. Quand un corps solide pesant est en équilibre au sein d'un fluide pesant en repos, le poids du corps est égal au poids du fluide déplacé, et les centres de gravité du corps solide et du volume fluide qu'il déplace sont situés sur la même verticale. Ces conditions suffisent pour l'équilibre. Pour que l'équilibre soit stable, il faut de plus que le centre de gravité du corps solide soit plus bas que le centre de gravité du fluide déplacé. Dérangeons infiniment peu le corps de sa position d'équilibre, de manière à incliner la droite qui joint les deux centres de gravité. La poussée du liquide et le poids du corps formeront alors un couple, qui tendra à ramener le

corps dans sa situation primitive si le point d'application de la poussée est au-dessus du point d'application du poids, et qui, dans le cas contraire, tendra à faire chavirer le corps.

L'équilibre est d'ailleurs indifférent à tout déplacement du corps qui n'altère pas le parallélisme de la droite joignant les deux centres de gravité. Si les deux centres coïncident, l'équilibre est complètement indifférent, et le corps solide peut, dans toutes ses positions, tenir lieu d'un volume égal de liquide.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS.

417. Avant d'étudier la question des corps flottants, nous résoudrons quelques problèmes préliminaires.

1° *Un solide pesant étant entièrement plongé dans un liquide pesant en repos, quel est le travail de la pesanteur et des pressions, lorsqu'on déplace le solide en le maintenant toujours entièrement plongé?*

Soit A le corps dans sa position primitive, au sein d'un liquide dont la surface libre est MN; soit G le centre de gravité du corps, O le centre de gravité du liquide déplacé, que nous appellerons le *centre de poussée*. Soient enfin P le poids du corps, qu'on peut supposer appliqué en G, et P' la poussée du liquide, appliquée en O.

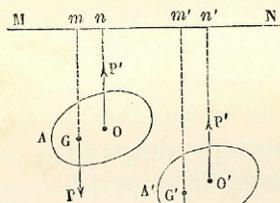


Fig. 61.

Soit A' la seconde position du corps; G' et O' sont les positions prises par les points G et O.

Le travail du poids du corps sera mesuré par le produit du poids P par la quantité verticale dont s'est abaissé le centre de gravité G. Prenons les distances Gm et G'm' des points G et G' au plan de comparaison MN; le travail cherché sera

$$P \times (G'm' - Gm).$$

La poussée P' est assimilable à un poids qui agirait en sens contraire de la pesanteur; son travail sera donc égal au produit de la force P' par la différence des distances On, O'n', des points O et O' à la surface libre, sauf à changer le signe de cette différence, ce qui donne $-P'(O'n' - On)$.

La somme des travaux de ces deux forces est

$$P(G'm' - Gm) - P'(O'n' - On),$$

ou bien

$$P(G'm' - Gm) - \Pi V(O'n' - On),$$

si l'on appelle V le volume du corps et Π le poids spécifique du liquide.

2° *Trouver le travail de la pression exercée par un liquide sur un prisme droit qu'on enfonce verticalement d'une certaine quantité.*

On suppose que la section droite du prisme est assez petite par rapport à la section du vase contenant le liquide, pour que la surface libre reste à la même hauteur, malgré l'enfoncement plus ou moins grand du prisme.

Soit ab le prisme, déjà enfoncé de la quantité $cb = x$; appelons sa section droite ω . La poussée du liquide sur le prisme, dans cette position, sera $\Pi\omega x$, en appelant Π le poids spécifique du liquide.

Elle est verticale et dirigée de bas en haut. Si on enfonce le prisme de la quantité infiniment petite $bb' = dx$, le travail de la pression sera

$$-\Pi\omega x dx$$

et pour un enfoncement total h, le travail cherché sera l'intégrale

$$\int_0^h -\Pi\omega x dx = -\Pi\omega \frac{h^2}{2}.$$

Cette formule suppose h moindre que la hauteur totale ab du prisme donné. On peut mettre le résultat sous la forme

$$\Pi\omega h \times \frac{h}{2}.$$

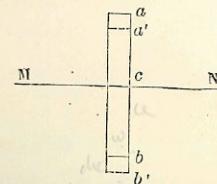


Fig. 62.

Or $\Pi\omega h$ est le poids du liquide déplacé, et $\frac{h}{2}$ est la distance de son centre de gravité à la surface libre. Le produit $\Pi\omega h \times \frac{h}{2}$ est donc le moment du poids du liquide déplacé par rapport au plan MN.

Si, au lieu d'enfoncer le prisme dans un liquide, on l'en retire entièrement, en le laissant toujours vertical, le travail de la pression de l'eau serait positif et égal à $\Pi\omega \frac{h^2}{2}$, h étant la quantité dont le prisme plongeait à l'origine.

Cette démonstration suppose que le prisme est resté vertical pendant l'enfoncement; mais le résultat obtenu est indépendant de cette hypothèse.

En effet, le travail des pressions pendant l'enfoncement est la somme des travaux afférents à l'enfoncement de chaque élément mn infiniment petit du prisme, à partir de la position $m'n'$ que cet élément occupait à la surface de l'eau, et, quelle que soit la route pq suivie par l'élément, le travail de la pression sera le produit du poids de liquide déplacé par la distance finale qr à la

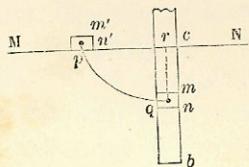


Fig. 65.

surface libre. Le travail total est donc la somme, depuis 0 jusqu'à h , des produits $-\omega\Pi dz \times z$, en appelant z la distance qr , et dz la hauteur mn de l'élément considéré. Ce qui donne encore $-\Pi\omega \frac{h^2}{2}$.

118. Trouver le travail de la pesanteur et des pressions sur un corps flottant à la surface du liquide, qui recevrait un déplacement infiniment petit à partir de sa position d'équilibre.

Nous supposons que le corps flottant AB soit en équilibre, quand il est immergé jusqu'à la section CD. Imaginons qu'il reçoive un déplacement infiniment petit, tel que la section qui limite la nouvelle portion immergée soit C'D'. Il y aura à tenir compte, dans l'évaluation des travaux des pressions, du

plus grand enfoncement donné à la portion déjà plongée CDR, et de l'enfoncement nouveau de la tranche comprise entre les sections CD et C'D'.

Soit G le centre de gravité du corps;

O le centre de poussée ou *centre de carène*. L'équilibre ayant lieu, par hypothèse, quand la section CD est dans le plan MN, la droite GO est perpendiculaire au plan CD. Désignons la distance GO par a et l'angle de la droite OG avec la verticale par θ ; cet angle, qui mesure l'inclinaison de la droite OG sur la verticale, mesure aussi l'inclinaison du plan CD par rapport à l'horizon. Quant à la quantité a , nous lui donnerons le signe + si le point O est au-dessus du point G dans l'état d'équilibre, et le signe - si O est au-dessous.

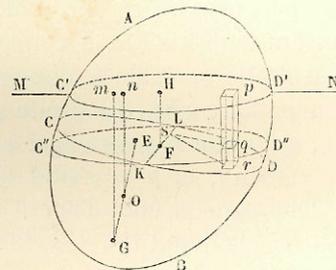


Fig. 64.

Des points O et G, abaissons sur le plan MN les perpendiculaires On , Gm ; soit $GE = z$, $Gm = z_1$; nous aurons $OE = z - a$ et $On = z_1 - a \cos \theta$.

Soit F le centre de gravité de la section de flottaison CD; appelons ζ la distance FH de ce point au plan MN. Le travail cherché pourra s'évaluer en fonction des quantités variables θ et ζ .

Soit encore Π le poids spécifique du liquide, et V le volume CBD du liquide déplacé dans la position d'équilibre. Le poids du corps sera égal à ΠV .

1° Le travail de la pesanteur correspondant au déplacement du corps sera

$$\Pi V (z_1 - z).$$

2° Le travail des pressions exercées par le liquide sur la carène CBD sera de même

$$-\Pi V \times (On - OE),$$

ou bien

$$\begin{aligned} -\Pi V[z_1 - a \cos \theta - (z - a)] &= -\Pi V(z_1 - z) - \Pi Va(1 - \cos \theta) \\ &= -\Pi V(z_1 - z) - 2\Pi Va \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

5° Pour évaluer le travail des pressions sur la tranche CDD'C' nouvellement immergée, décomposons-la en prismes verticaux *pr* infiniment petits. Soit $d\omega$ l'aire de la section faite dans le prisme *pr* par le plan CD. Il s'agit d'en trouver la hauteur. Pour cela, menons par le point F, centre de gravité de la section CD, parallèlement à C'D', un plan C'D'', qui coupera le plan CD suivant la droite KL; il coupera le prisme *pr* suivant la section droite *q*, égale à $d\omega \cos \theta$. Du point *r* abaissons *rS* perpendiculaire à KL. La droite *qS* sera aussi perpendiculaire à KL, et l'angle *rSq* sera égal à θ . Faisons $rS = x$. Nous aurons $qr = x \sin \theta$, et $pr = x \sin \theta + FH = \zeta + x \sin \theta$.

Le prisme *pr* était d'abord hors du liquide, et il s'y est enfoncé de la quantité $\zeta + x \sin \theta$; le travail correspondant de la poussée est donc

$$-\Pi d\omega \cos \theta \frac{(\zeta + x \sin \theta)^2}{2},$$

expression dont il faut faire la somme, en l'étendant à tous les éléments $d\omega$ de la section CD. L'erreur que l'on commet en substituant à la tranche CDC'D' le cylindre qui projette la section CD sur le plan horizontal, est infiniment petite par rapport à la quantité cherchée.

La somme de tous ces éléments s'exprime par l'intégrale double

$$-\Pi \iint d\omega \cos \theta \frac{(\zeta + x \sin \theta)^2}{2},$$

ou bien, en développant le carré,

$$-\frac{\Pi}{2} \left(\int \int \zeta^2 d\omega \cos \theta + 2 \int \int \zeta x \sin \theta \cos \theta d\omega + \int \int x^2 d\omega \cos \theta \sin^2 \theta \right).$$

Les quantités ζ et θ sont des constantes dans ces intégrations, ce qui permet d'écrire

$$-\frac{\Pi}{2} \zeta^2 \cos \theta \int \int d\omega - \Pi \zeta \sin \theta \cos \theta \int \int x d\omega - \frac{\Pi}{2} \cos \theta \sin^2 \theta \int \int x^2 d\omega.$$

$\iint d\omega$ est l'aire Ω de la section CD;

$\iint x d\omega$ est la somme des moments des éléments de surface $d\omega$ par rapport à la droite KL, qui passe par leur centre de gravité: cette somme est donc nulle;

$\iint x^2 d\omega$ est la somme des *moments d'inertie* des mêmes éléments par rapport à la même droite; nous la représentons par I.

La somme des travaux des pressions sur la tranche CDD'C' est en définitive

$$-\frac{\Pi \Omega}{2} \zeta^2 \cos \theta - \frac{\Pi I}{2} \cos \theta \sin^2 \theta,$$

et comme l'angle θ est infiniment petit, on peut remplacer $\cos \theta$ par l'unité, et $\sin \theta$ par θ , en ne conservant dans les termes écrits que les infiniment petits du second ordre; ce qui réduit la somme cherchée à

$$-\frac{\Pi \Omega}{2} \zeta^2 - \frac{\Pi I \theta^2}{2}.$$

Réunissant les trois parties que nous venons d'évaluer successivement, il vient

$$T = \Pi V(z_1 - z) - \Pi V(z_1 - z) - 2\Pi Va \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\Pi \Omega}{2} \zeta^2 - \frac{\Pi I \theta^2}{2},$$

ou bien, en réduisant et en remplaçant encore $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ par $\frac{\theta^2}{4}$,

$$T = -\frac{\Pi}{2} (aV + I) \theta^2 - \frac{\Pi}{2} \Omega \zeta^2.$$

Cette formule est générale, quel que soit le déplacement infiniment petit imprimé au solide, pourvu que les sections du corps par des plans varient d'une manière continue dans le voisinage du plan de flottaison.

119. La stabilité de l'équilibre d'un corps flottant s'établit par la discussion de l'équation des forces vives (Cf. III, § 187).

Supposons le corps en équilibre; imprimons-lui un déplacement très petit. Ce déplacement peut toujours se ramener à

trois translations et à trois rotations simultanées. Nous supposons que les trois translations soient parallèles respectivement à trois axes rectangulaires, dont deux horizontaux, et le troisième vertical; les rotations s'opéreront autour de ces mêmes axes. Les translations horizontales et la rotation autour de l'axe vertical ne donnent naissance à aucun travail des pressions du liquide sur la partie plongée. Les seuls déplacements qui donnent lieu à une production de travaux sont la translation verticale et les rotations autour des axes horizontaux, que l'on peut réduire à une seule rotation autour d'un axe horizontal. Les quantités ζ et θ , qui mesurent le déplacement linéaire du corps le long de la verticale et le déplacement angulaire autour d'un axe horizontal, interviendront donc seules dans l'équation du travail.

Soit Σmv_0^2 la somme des forces vives imprimées au corps dans une position initiale, définie par des valeurs infiniment petites ζ_0 et θ_0 des variables ζ et θ . Nous pouvons supposer la somme Σmv_0^2 aussi petite que nous voudrions; et appelant Σmv^2 la somme des forces vives du corps dans une position quelconque ζ et θ , il viendra l'équation

$$\begin{aligned} \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 &= 2(T - T_0) \\ &= -\Pi(aV + I)\theta^2 - \Pi\Omega\zeta^2 + \Pi(aV + I)\theta_0^2 + \Pi\Omega\zeta_0^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\Sigma mv^2 = C - \Pi(aV + I)\theta^2 - \Pi\Omega\zeta^2,$$

en appelant C la constante

$$\Sigma mv_0^2 + \Pi(aV + I)\theta_0^2 + \Pi\Omega\zeta_0^2,$$

qui correspond aux conditions initiales, et qui est nécessairement positive et infiniment petite.

La somme Σmv^2 est toujours positive; donc le second membre est positif, et par suite on aura toujours

$$\Pi(aV + I)\theta^2 + \Pi\Omega\zeta^2 < C.$$

Les quantités Π , V , I et Ω sont des quantités absolues: θ^2 et ζ^2 sont toujours positifs. Il n'y a dans l'inégalité précédente que a qui soit susceptible de changer de signe. Si a est positif, ou

si le point O , centre de carène, est au-dessus du point G , centre de gravité du solide, le premier membre est la somme de deux termes positifs, et, pour qu'il soit toujours moindre que la constante C , qui est infiniment petite, il faut que θ et ζ soient eux-mêmes infiniment petits. Si donc le centre de carène est au-dessus du centre de gravité, l'équilibre est stable; car θ et ζ ne peuvent pas croître indéfiniment, et ont pour limites supérieures, en valeur absolue,

$$\theta = \sqrt{\frac{C}{\Pi(aV + I)}}, \text{ avec } \zeta = 0,$$

et

$$\zeta = \sqrt{\frac{C}{\Pi\Omega}}, \text{ avec } \theta = 0.$$

Si a est négatif et égal à $-a'$, l'inégalité prend la forme

$$\Pi(I - a'V)\theta^2 + \Pi\Omega\zeta^2 < C,$$

et la conclusion que nous venons de tirer reste la même, pourvu que $I - a'V$ soit positif, ou que a' soit $< \frac{I}{V}$. La stabilité est donc encore assurée, et les valeurs absolues de θ et ζ ont des limites, quand le centre de carène est au-dessous du centre de gravité, pourvu que la distance de ces deux points soit moindre que le moment d'inertie de la section de flottaison, par rapport à une droite menée dans son plan par son centre de gravité, divisé par le volume de la carène.

Si on avait $a' > \frac{I}{V}$, le signe du premier membre de l'inégalité ne serait pas défini, et on pourrait y satisfaire par de très grandes valeurs absolues de θ et de ζ . L'équilibre n'aurait alors aucune stabilité.

La condition $a' < \frac{I}{V}$ doit être remplie pour toutes les valeurs du moment d'inertie I , qui varie avec la position de la droite KL , par rapport à laquelle il est déterminé. Il faut donc qu'elle soit satisfaite pour la moindre valeur de ce moment d'i-

nertie. Les moments d'inertie des aires planes donnent lieu à une théorie analogue à celle des moments d'inertie des solides (III, § 243). On démontre facilement que, si l'on considère les moments d'inertie d'une aire plane AB par rapport à une infinité de droites menées dans son plan par un même point F, on obtient une ellipse RS en prenant sur chaque droite, à partir du point F, une longueur FR, inversement proportionnelle au rayon de giration, $\sqrt{\frac{I}{\Omega}}$, de l'aire plane par rapport

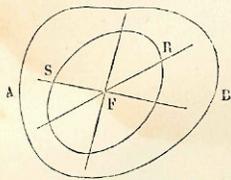


Fig. 63.

à la direction FR. Le minimum du moment d'inertie I correspond à la direction du grand axe de l'ellipse ainsi construite au centre de gravité de la section de flottaison.

Cette théorie de la stabilité, qui a remplacé l'ancienne théorie du métacentre, due à Bouguer, est loin d'être complète, car elle néglige les actions dynamiques du fluide, c'est-à-dire les excès de pression dus au mouvement relatif du solide. Ces actions dynamiques contribuent à accroître la stabilité, quand elles proviennent du déplacement du solide au sein d'un fluide en repos; elles peuvent, au contraire, compromettre la stabilité du corps flottant, lorsqu'elles sont dues à un mouvement propre du fluide. L'expérience de la navigation maritime a fait connaître depuis longtemps des formes qui assurent la stabilité des corps flottants, et vérifie la règle déduite de la théorie que nous venons d'exposer.

CHAPITRE II

HYDRODYNAMIQUE.

120. L'équation de l'hydrostatique donne pour chaque point d'un fluide en équilibre les valeurs de la pression en fonction des coordonnées. Le problème de l'hydrodynamique est beaucoup plus compliqué. Il s'agit, en effet, de déterminer pour chaque valeur du temps t et pour chaque point (x, y, z) de l'espace occupé par le fluide, non-seulement la pression p , mais encore la vitesse, en grandeur et en direction, du point matériel fluide qui occupe ce point géométrique; et, en outre, si le fluide n'est pas un liquide homogène, la valeur ρ de la masse spécifique de ce point matériel. La vitesse sera connue en grandeur et en direction si l'on définit ses trois composantes parallèles aux axes; nous les appellerons u, v, w . Le problème consiste donc à déterminer les cinq fonctions

$$u, v, w, p, \rho,$$

au moyen des quatre variables indépendantes

$$x, y, z, t.$$

Supposons cette détermination opérée; pour trouver la trajectoire d'un point matériel, il suffira d'observer que, dans le temps dt , les coordonnées x, y, z , du point s'accroissent respectivement de $u dt, v dt, w dt$, de sorte que les équations du

mouvement du point considéré seront données par l'intégration des équations différentielles

$$\begin{aligned} dx &= u dt, \\ dy &= v dt, \\ dz &= w dt. \end{aligned}$$

121. Cherchons aussi ce que deviennent la pression p et la densité ρ du même point matériel.

En général, soit $f(x, y, z, t)$ une certaine fonction, relative à un point géométrique défini (x, y, z) , et à une valeur déterminée du temps t . Si l'on suppose que les variables indépendantes x, y, z et t s'accroissent respectivement de dx, dy, dz et dt , l'accroissement df de la fonction sera donné par l'équation générale :

$$df = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz + \frac{df}{dt} dt.$$

Mais si, au lieu de prendre arbitrairement dx, dy, dz , on prend ces différentielles le long de la trajectoire du point matériel M, quand il se transporte de M en M' pendant le temps dt , il faudra faire $dx = u dt, dy = v dt, dz = w dt$, et on aura

$$df = \left(\frac{df}{dx} u + \frac{df}{dy} v + \frac{df}{dz} w + \frac{df}{dt} \right) dt$$

pour l'accroissement de la fonction f le long de la trajectoire du point M.

Cette formule est applicable à toute fonction des variables x, y, z, t , et par suite aux fonctions u, v, w, p, ρ , qu'il s'agit de définir. Nous aurons donc

$$\begin{aligned} du &= \left(u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} + \frac{du}{dt} \right) dt, \\ dv &= \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dt} \right) dt, \\ dw &= \left(u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt} \right) dt, \\ dp &= \left(u \frac{dp}{dx} + v \frac{dp}{dy} + w \frac{dp}{dz} + \frac{dp}{dt} \right) dt, \\ d\rho &= \left(u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} + \frac{d\rho}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

Le rapport de du à dt sera l'accélération du point M, projetée sur l'axe des x ; de même $\frac{1}{dt} dv$ et $\frac{1}{dt} dw$ seront les accélérations projetées sur les axes des y et des z .

122. Reprenons les équations de l'équilibre d'une molécule fluide (§ 80); on peut les mettre sous la forme

$$\frac{dp}{dx} = \rho X,$$

$$\frac{dp}{dy} = \rho Y,$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho Z,$$

ou encore, sous la forme

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0,$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = 0,$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = 0.$$

X, Y, Z sont les composantes de la force rapportée à l'unité de masse. Sous la seconde forme, on voit que les pressions développées autour de la molécule équivalent, au point de vue de l'équilibre, à des composantes $-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy}, -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}$, parallèles aux axes et appliquées à l'unité de masse supposée libre.

Dans le cas du mouvement, au lieu d'égaliser à 0 les sommes algébriques de ces forces, il faudra les égaliser aux accélérations projetées sur les mêmes axes, ce qui donne les trois équations

$$(4) \quad \begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} + \frac{du}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt}. \end{cases}$$

On obtient une quatrième équation en exprimant que le mouvement du fluide ne crée pas de vide au milieu de la masse; cette équation porte le nom d'équation de continuité. Elle restreint la généralité du problème; car rien ne prouve *a priori* que la masse fluide ne doive pas se diviser par suite de son mouvement.

La vitesse u , parallèle à OX (fig. 45, p. 155), règne sensiblement dans toute l'étendue de la face $ADEF$, perpendiculairement à cette face, et amène dans l'intérieur du parallélépipède $ABCDEFGH$, pendant le temps dt , une masse fluide égale à

$$\rho u dt dy dz,$$

ρ étant la densité du fluide au point A .

Mais, en même temps, la vitesse qui règne dans toute l'étendue de la face opposée $BGHC$ fait sortir du parallélépipède une masse de fluide égale à la masse $\rho u dt dy dz$, augmentée de sa différentielle partielle relative à x , ce que nous exprimons par la notation

$$\rho u dt dy dz + \frac{d(\rho u)}{dx} dx dt dy dz,$$

de sorte que les débits simultanés des faces opposées $ADEF$, $BCHG$, augmentent la masse fluide contenue dans le parallélépipède, de la différence

$$-\frac{d(\rho u)}{dx} dx dy dz dt.$$

Par la même raison, les débits simultanés des faces $ABGF$, $DCHE$, augmentent la même masse de

$$-\frac{d(\rho v)}{dy} dx dy dz dt,$$

et les débits des faces $ABCD$, $FGHE$, de

$$-\frac{d(\rho w)}{dz} dx dy dz dt.$$

La somme de ces trois variations simultanées est égale à la

variation totale de la masse pendant le temps dt ; or la variation de la densité est égale à $\frac{d\rho}{dt} dt$; multipliée par le volume,

elle donne la variation de la masse totale $\frac{d\rho}{dt} dx dy dz dt$.

Donc enfin

$$\frac{d\rho}{dt} dx dy dz dt = -\frac{d(\rho u)}{dx} dx dy dz dt - \frac{d(\rho v)}{dy} dx dy dz dt - \frac{d(\rho w)}{dz} dx dy dz dt,$$

ou bien, en divisant par $dx dy dz dt$,

$$(2) \quad \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} + \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

équation qui peut encore s'écrire

$$\left(u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} + \frac{d\rho}{dt} \right) + \rho \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0.$$

La première parenthèse est égale à $\frac{1}{dt} d\rho$, et l'équation prend la forme

$$(4) \quad d\rho + \rho dt \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0.$$

Si le fluide est un liquide homogène ou un mélange de liquides, on a $d\rho = 0$, car une molécule liquide ne change pas de densité le long de sa trajectoire; l'équation (2) se scinde alors en deux autres :

$$(5) \quad \begin{cases} u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} + \frac{d\rho}{dt} = 0, \\ \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0. \end{cases}$$

S'il s'agit d'un gaz à température constante, on a entre p et ρ la relation (6) $p = K\rho$, qui, jointe à l'équation (2), complète le nombre des équations destinées à définir analytiquement les cinq fonctions inconnues.

Les équations (1) et (5) ou (1), (2) et (6), sont d'ailleurs

tellement *rebelles*¹, qu'elles ont rebuté tous les efforts des analystes. On a renoncé à en chercher les intégrales générales, qui peuvent fort bien n'être pas exprimables par les signes de l'analyse. Pour en déduire quelques résultats utiles, il faut en restreindre singulièrement la généralité.

SIMPLIFICATION DES ÉQUATIONS DANS DES HYPOTHÈSES PARTICULIÈRES.

123. Nous supposons d'abord que la fonction

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

soit la différentielle exacte d'une fonction T des coordonnées x, y, z , et nous poserons

$$Xdx + Ydy + Zdz = dT.$$

Nous supposons, en outre, qu'à une certaine époque, définie par une valeur t du temps, la fonction $udx + vdy + wdz$ soit aussi la différentielle exacte, par rapport à x, y, z , d'une fonction φ des quatre variables x, y, z, t . Je dis que, s'il en est ainsi, la fonction $udx + vdy + wdz$ sera une différentielle à toute époque, c'est-à-dire pour toute valeur du temps t .

Soit, en effet, pour une valeur t' du temps,

$$udx + vdy + wdz = d\varphi',$$

φ' étant une fonction de x, y, z et t , et $d\varphi'$ la différentielle totale de cette fonction, où t est traité comme une constante, et où l'on fait $t = t'$.

On aura à cette époque

$$u = \frac{d\varphi'}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi'}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi'}{dz},$$

et à l'époque $t' + \theta$, θ étant un temps infiniment petit,

$$u = \frac{d\varphi'}{dx} + \theta \frac{du}{dt}, \quad v = \frac{d\varphi'}{dy} + \theta \frac{dv}{dt}, \quad w = \frac{d\varphi'}{dz} + \theta \frac{dw}{dt},$$

¹ Lagrange.

$\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ étant les dérivées partielles de u, v, w , par rapport à t .

La somme $udx + vdy + wdz$ devient, au bout du temps θ , égale à

$$\left(\frac{d\varphi'}{dx} dx + \frac{d\varphi'}{dy} dy + \frac{d\varphi'}{dz} dz \right) + \theta \left(\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right),$$

ou bien à

$$d\varphi' + \theta \left(\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right).$$

La nouvelle valeur de la fonction est donc une différentielle exacte par rapport aux variables x, y, z , si la parenthèse est une différentielle par rapport à ces mêmes variables.

Substituons les valeurs de u, v, w , dans les équations (1); elles deviendront, pour l'époque t' ,

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= \frac{d\varphi'}{dx} \frac{d^2\varphi'}{dx^2} + \frac{d\varphi'}{dy} \frac{d^2\varphi'}{dy dx} + \frac{d\varphi'}{dz} \frac{d^2\varphi'}{dz dx} + \frac{du}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= \frac{d\varphi'}{dx} \frac{d^2\varphi'}{dx dy} + \frac{d\varphi'}{dy} \frac{d^2\varphi'}{dy^2} + \frac{d\varphi'}{dz} \frac{d^2\varphi'}{dz dy} + \frac{dv}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} &= \frac{d\varphi'}{dx} \frac{d^2\varphi'}{dx dz} + \frac{d\varphi'}{dy} \frac{d^2\varphi'}{dy dz} + \frac{d\varphi'}{dz} \frac{d^2\varphi'}{dz^2} + \frac{dw}{dt}. \end{aligned}$$

Multiplions la première par dx , la seconde par dy , la troisième par dz , et ajoutons; il vient, en faisant les réductions,

$$\begin{aligned} dT - \frac{1}{\rho} dp &= \frac{1}{2} d \left[\left(\frac{d\varphi'}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{dz} \right)^2 \right] \\ &+ \left(\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right), \end{aligned}$$

les différentielles étant prises sans faire varier le temps.

Le premier membre est une différentielle exacte si ρ est constant (liquide homogène), ou si ρ est fonction de p (gaz à température constante). Le premier terme du second membre est aussi une différentielle exacte. Le second terme l'est donc également, et par suite $udx + vdy + wdz$ est une différentielle exacte au temps $t' + \theta$, si elle l'est au temps t' . Donc elle l'est à toute époque.

Si, par exemple, le fluide part du repos, on a à cette époque

$u=0, v=0, w=0$, ce qui rend $udx + vdy + wdz$ différentielle exacte; on est assuré alors que la condition est remplie dans toute la suite du mouvement.

124. Soit donc à la fois

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz &= dT, \\ udx + vdy + wdz &= d\varphi. \end{aligned}$$

On déduit de la seconde équation

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz},$$

et l'équation de continuité (2) prend la forme

$$(6) \quad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\left(\rho \frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho \frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho \frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz} = 0.$$

La transformation opérée dans le paragraphe précédent nous donne d'ailleurs à toute époque

$$dT - \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{2} d \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] + d \frac{d\varphi}{dt},$$

les différentielles étant prises seulement par rapport à x, y, z , sans faire varier le temps. Intégrant dans la même hypothèse, il vient l'équation

$$(7) \quad T - \int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] + \frac{d\varphi}{dt}.$$

$\int \frac{dp}{\rho}$ peut s'effectuer d'ailleurs si ρ est constant, ou fonction de p , et même si ρ était fonction du temps t , puisque le temps, dans tous ces calculs, est traité comme une constante.

L'équation (7) pourrait être complétée par une fonction arbitraire du temps; mais cette fonction peut être supposée contenue dans la fonction φ , qui n'est définie que par sa différentielle $d\varphi$ relative à x, y, z , abstraction faite du temps t .

125. Dans le cas des liquides homogènes, ρ étant une constante absolue, l'équation (6) devient

$$(8) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

et l'équation (7)

$$(9) \quad T - \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Le problème analytique est ramené à intégrer l'équation aux différences partielles (8); après avoir trouvé l'expression la plus générale de φ en fonction de x, y, z et t , l'équation (9) fera connaître p . Ensuite les équations

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz},$$

donneront u, v, w .

PETITES OSCILLATIONS.

126. Lorsqu'un fluide est animé d'un mouvement oscillatoire très petit, les équations du mouvement se simplifient également. On peut négliger d'abord dans les équations (1) les produits $u \frac{du}{dx}, v \frac{dv}{dy}, \dots$ dont deux dimensions sont petites, et réduire approximativement ces équations à la forme :

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt}. \end{aligned}$$

Multipliant la première par dx , la seconde par dy , la troisième par dz , et ajoutant, il vient

$$dT - \frac{1}{\rho} dp = \frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz.$$

Donc $udx + vdy + dwz$ est une différentielle exacte par rapport à x, y, z . Car l'équation précédente peut s'écrire

$$dT - \frac{1}{\rho} dp = \frac{d}{dt} (udx + vdy + wdz),$$

et par suite $udx + vdy + wdz$ est l'intégrale de $\left(dT - \frac{dp}{\rho}\right) dt$ prise par rapport à t seul, ou, ce qui revient au même, la différentielle par rapport à x, y, z de la fonction $\int T dt - \int dt \int \frac{dp}{\rho}$. Soit donc $udx + vdy + wdz = d\varphi$. Il viendra

$$dT - \frac{dp}{\rho} = \frac{d}{dt}(d\varphi) = d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right);$$

les différentielles indiquées sont prises seulement par rapport à x, y, z .

On en déduit en intégrant

$$(10) \quad T - \int \frac{dp}{\rho} = \frac{d\varphi}{dt},$$

équation à joindre à l'équation (6), s'il s'agit d'un gaz à température constante, auquel cas $\int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{K dp}{p} = K \log \text{nép. } p$. S'il s'agit d'un liquide homogène, on aurait $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$, et on devrait joindre l'équation (10) à l'équation (8).

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION (8).

127. L'équation

$$(8) \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

ayant une forme linéaire, si l'on en a plusieurs solutions, $\varphi = \alpha, \varphi = \beta, \varphi = \gamma, \dots$ on en obtiendra une autre en posant $\varphi = \alpha + \beta + \gamma \dots$, ou encore en égalant φ à la somme des produits de chaque solution par des constantes arbitraires :

$$\varphi = C\alpha + C'\beta + C''\gamma + \dots$$

Or on trouvera autant de solutions particulières qu'on voudra de la manière suivante : soit M (fig. 66) le point dont les coordonnées sont x, y, z . Soit M' un autre point tout à fait arbitraire, dont les coordonnées seront ξ, η, ζ , et auquel nous attribuerons une masse μ quelconque.

Appelons Δ la distance MM' :

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

La fonction $\frac{\mu}{\Delta}$, considérée comme fonction de x, y, z , satisfait à l'équation (8). En effet, on en déduit, en prenant la dérivée partielle par rapport à x ,

$$\frac{d}{dx} \frac{\mu}{\Delta} = -\frac{\mu}{\Delta^2} \frac{d\Delta}{dx} = -\frac{\mu}{\Delta^2} \times \frac{x - \xi}{\Delta}.$$

De même

$$\frac{d}{dy} \frac{\mu}{\Delta} = -\frac{\mu}{\Delta^2} \times \frac{y - \eta}{\Delta},$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\mu}{\Delta} = -\frac{\mu}{\Delta^2} \times \frac{z - \zeta}{\Delta}.$$

Les rapports $\frac{x - \xi}{\Delta}, \frac{y - \eta}{\Delta}, \frac{z - \zeta}{\Delta}$ sont les cosinus des angles que la direction MM' fait avec les axes coordonnés ; $\frac{\mu}{\Delta^2}$ est proportionnel à l'attraction que le point M exercerait sur la masse μ placée en M', suivant la loi de la gravitation universelle. La fonction $\frac{\mu}{\Delta}$ a donc cette propriété que ses dérivées partielles par rapport à x, y, z , donnent respectivement les composantes de l'attraction subie par le point M' de la part du point M.

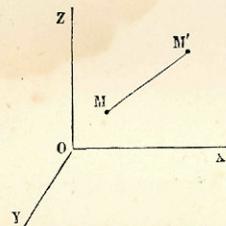


Fig. 66.

Passons aux secondes dérivées :

$$\frac{d^2 \frac{\mu}{\Delta}}{dx^2} = \frac{3\mu(x-\xi)^2}{\Delta^5} - \frac{\mu}{\Delta^3},$$

$$\frac{d^2 \frac{\mu}{\Delta}}{dy^2} = \frac{3\mu(y-\eta)^2}{\Delta^5} - \frac{\mu}{\Delta^3},$$

$$\frac{d^2 \frac{\mu}{\Delta}}{dz^2} = \frac{3\mu(z-\zeta)^2}{\Delta^5} - \frac{\mu}{\Delta^3}.$$

La somme des trois équations nous donne

$$\frac{d^2 \frac{\mu}{\Delta}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{\mu}{\Delta}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{\mu}{\Delta}}{dz^2} = \frac{3\mu [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]}{\Delta^5} - \frac{3\mu}{\Delta^3} = 0,$$

et par suite $\frac{\mu}{\Delta}$ est une solution de l'équation (8).

Si donc on considère autant de points M' que l'on voudra, ayant chacun une masse distincte, on satisfera à l'équation (8) en posant

$$\varphi = \Sigma \frac{\mu}{\Delta}.$$

Nous pouvons admettre que les points M' se touchent de manière à constituer un milieu attractif, où la masse spécifique, ρ' , sera exprimée en fonction des coordonnées ξ, η, ζ de chaque point; la masse élémentaire sera alors $\rho d\xi d\eta d\zeta$, et la somme Σ se changera en une intégrale triple :

$$\varphi = \iiint \frac{\rho' d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

La fonction φ est ce qu'on appelle le *potentiel* du système matériel par rapport au point x, y, z ; la propriété fondamentale du potentiel est que ses dérivées partielles par rapport à x, y, z , sont les composantes de l'attraction exercée par le point (x, y, z) sur le système (ξ, η, ζ) d'après la loi de Newton.

Dans le problème spécial qui nous occupe, ξ, η, ζ peuvent être supposés fonctions du temps t ; ρ' est une fonction arbitraire des variables ξ, η, ζ et t ; enfin les limites de l'intégra-

tion sont des fonctions entièrement arbitraires des variables ξ, η et ζ .

Il reste dans chaque cas particulier à déterminer ces arbitraires, mais cette question constitue, en général, un problème très épineux d'analyse.

RÉGIME PERMANENT, THÉORÈME DE DANIEL BERNOULLI.

128. Le *régime permanent* a lieu dans un fluide en mouvement quand, en chaque point, passe à chaque instant une molécule possédant la même densité, soumise à la même pression, et animée de la même vitesse. Analytiquement, le régime permanent est défini par cette condition que les cinq fonctions u, v, w, p, ρ soient indépendantes du temps t . Le mouvement du système reproduit à chaque instant l'état qui existait l'instant d'avant, ce qui constitue une sorte d'équilibre mobile. Un cours d'eau, dans lequel chaque masse liquide qui s'écoule est immédiatement remplacée par une masse identique et animée du même mouvement, offre à peu près l'image de la permanence du régime.

Faisons donc dans nos équations

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Les équations (1) se réduisent à la forme suivante :

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} = u', \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} = v', \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} &= u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} = w', \end{aligned}$$

en appelant u', v', w' les projections de l'accélération sur les axes coordonnés. Car on a en général (§ 121)

$$w' = \frac{1}{dt} du = u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} + \frac{du}{dt};$$

mais ici on suppose $\frac{du}{dt}$ constamment nul, et la valeur de u' se réduit à ses trois premiers termes. Multipliant ces trois équations par dx , dy , dz , et ajoutant, il vient, en appelant T la fonction dont la différentielle est $Xdx + Ydy + Zdz$,

$$dT - \frac{1}{\rho} dp = u'dx + v'dy + w'dz.$$

Faisons $dx = udt$, $dy = vdt$, $dz = wdt$, ce qui revient à suivre la molécule mobile le long de sa trajectoire. Le second membre se réduira à

$$u'udt + v'vdt + w'wdt,$$

ou à

$$udu + vdv + wdw,$$

puisque $u'dt$ est égal à du , $v'dt$ à dv , $w'dt$ à dw . Il vient donc

$$dT - \frac{1}{\rho} dp = udu + vdv + wdw = \frac{1}{2} d(u^2 + v^2 + w^2).$$

Or $u^2 + v^2 + w^2$ est le carré de la vitesse absolue V^2 de la molécule fluide qui passe au point x , y , z . On peut donc écrire

$$dT - \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{2} d(V^2).$$

Intégrant, on a

$$T - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} = \text{constante.}$$

Dans le cas des liquides homogènes, on a $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$; dans le cas des gaz à température constante, on aurait $\int \frac{dp}{\rho} = K \log n p$.

129. Le théorème de Daniel Bernoulli, qui forme la base de l'*hydraulique*, résulte de l'application de cette équation aux liquides homogènes pesants. Les forces se réduisant à la pesanteur, on aura

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Donc

$$dT = -gz.$$

$$T = -gz.$$

L'équation du régime permanent devient, en changeant les signes :

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{constante,}$$

ou bien

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = z + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g} = \Pi,$$

H désignant une hauteur constante, et Π le poids spécifique du liquide.

z est la hauteur d'un point du liquide au-dessus d'un plan de comparaison horizontal;

p est la pression en ce point; $\frac{p}{\Pi}$ est la hauteur représentative de la pression;

V est la vitesse des molécules qui passent en ce point, et $\frac{V^2}{2g}$ la hauteur due à cette vitesse.

En ajoutant ces trois hauteurs en tout point d'un même filet liquide soumis au régime permanent, on obtient un niveau constant, que l'on appelle en hydraulique le *plan de charge*. Le théorème de Daniel Bernoulli s'exprimera donc en disant *qu'en tous les points d'un filet liquide pesant, satisfaisant aux conditions de la permanence du régime, la hauteur du plan de charge est constante.*

Cette conclusion suppose que le liquide n'a aucune *viscosité*; autrement la pression autour d'un point ne serait pas la même dans toutes les directions; les équations générales du mouvement devraient être modifiées; enfin on constaterait d'un point à l'autre du même filet des différences de niveau dans le plan de charge, dues au travail négatif des frottements. Ce sont ces différences qu'on appelle en hydraulique *pertes de charge*.

DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME DE DANIEL BERNOULLI.

150. Le théorème de Daniel Bernoulli peut se démontrer directement, sans recourir aux équations générales de l'hydrodynamique, en appliquant au filet liquide pesant le théorème des forces vives.

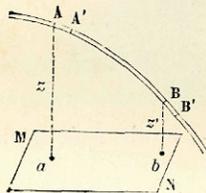


Fig. 67.

Soit AB le filet considéré, animé d'un mouvement permanent, en vertu duquel il se déplace dans sa propre direction, chaque petit volume liquide prenant la place du volume égal qui y fait suite.

Prenons deux points A et B sur ce filet ; soient au point A,

ω la section,

p la pression,

V la vitesse,

et z la hauteur Aa au-dessus du plan horizontal MN.

Soient de même au point B,

ω' la section,

p' la pression,

V' la vitesse,

et z' la hauteur Bb au-dessus du même plan.

Les produits ωV , $\omega' V'$ représenteront chacun le *débit* ou la *dépense* du filet, c'est-à-dire le volume écoulé dans l'unité de temps par les sections A et B. Ce volume est le même en ces deux points à cause de l'incompressibilité du liquide et de la permanence du régime. Désignons-le par la lettre Q. Le volume écoulé pendant un temps infiniment petit dt sera égal à Qdt , en tout point du filet AB.

Suivons le filet AB pendant le temps infiniment petit dt qu'il met à passer de la position AB à la position A'B', et appliquons le théorème des forces vives entre ces deux positions.

La région A'B, commune à ces deux positions, est occupée aux deux époques par des molécules de même masse et animées

des mêmes vitesses ; les forces vives correspondantes sont donc égales à ces deux époques, et elles se détruisent dans la différence. Il reste à compter la différence entre la force vive de la masse BB' et la force vive de la masse AA'. Or le volume commun occupé par ces deux masses est Qdt ; Π étant le poids spécifique du liquide, $\frac{\Pi Qdt}{g}$ est la masse, et

$\frac{\Pi Qdt}{2g} (V'^2 - V^2)$ est le demi-accroissement de la force vive du système, quand il passe de la position AB à la position A'B'.

Il faut évaluer ce demi-accroissement au travail des forces, qui sont ici la pesanteur et les pressions.

Pour le travail de la pesanteur, on l'évaluera comme on l'a déjà fait en hydrostatique (§ 76, 3°), en supposant que le poids AA' passe en BB', la partie AB restant immobile. Le travail cherché est donc égal à $\Pi Qdt \times (z - z')$.

Les pressions latérales au filet ont un travail nul, puisqu'elles sont normales au chemin décrit par leurs points d'application. Il suffit de considérer la pression en amont et la pression en aval ; la pression totale sur la section A est une force mouvante égale à $p\omega$, et le chemin décrit par son point d'application dans la direction même de la force est AA' ou Vdt ; son travail est donc $p\omega Vdt = pQdt$. On reconnaîtrait de même que le travail de la pression en B est négatif et égal à $-p'Qdt$. Réunissant tous ces travaux et égalant la somme au demi-accroissement des forces vives, il vient

$$\frac{\Pi Qdt}{2g} (V'^2 - V^2) = \Pi Qdt (z - z') + pQdt - p'Qdt,$$

et divisant par ΠQdt ,

$$\frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = z - z' + \frac{p}{\Pi} - \frac{p'}{\Pi},$$

ou bien

$$z + \frac{p}{\Pi} + \frac{V^2}{2g} = z' + \frac{p'}{\Pi} + \frac{V'^2}{2g},$$

c'est-à-dire l'équation que nous avons obtenue.

APPLICATION DU THÉORÈME DE BERNOULLI A L'ÉCOULEMENT
EN MINCE PAROI.

151. Le théorème de Bernoulli permet de déterminer la vitesse V en un point d'un filet liquide animé d'un mouvement permanent, lorsqu'on connaît la pression en ce point.

Soit PQ un vase dans lequel un liquide est entretenu à un niveau constant AB .

On pratique dans la paroi une ouverture très petite CD , par laquelle le liquide s'échappe. Au bout d'un temps assez court le régime permanent est établi. On demande la vitesse v du liquide dans la section ab , où l'écoulement s'opère par filets parallèles, et qu'on appelle *section contractée*. Cette section est peu éloignée de l'orifice CD , lorsque l'épaisseur de la paroi est suffisamment mince.

La pression dans tous les points de la section ab est égale à la pression atmosphérique; car, autrement, la veine liquide tendrait soit à se dilater, soit à se contracter sous la pression de l'atmosphère qui s'exerce au dehors.

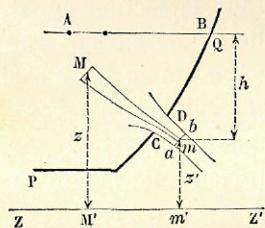


Fig. 68.

Considérons en particulier le filet qui passe en un point m de cette section; soit Mm le tracé du filet à l'intérieur du vase. Nous pouvons le prolonger ainsi jusque dans une région M où la vitesse du liquide soit très peu sensible. L'équation du débit,

$$\omega v = \omega' v' = Q,$$

montre, en effet, que la vitesse varie en raison inverse de la section. La section du vase étant beaucoup plus grande que la section de la veine en ab , les vitesses à l'intérieur du vase sont nécessairement beaucoup moindres que la vitesse à la sortie.

Nous pouvons donc admettre que la vitesse en M soit négligeable.

Soit z la hauteur MM' du point M au-dessus d'un plan horizontal ZZ' ; soit p la pression au point M . Appelons v la vitesse en m , z' la hauteur mm' , et p_0 la pression en m , égale, comme on sait, à la pression atmosphérique. Nous aurons, en appliquant l'équation de Bernoulli,

$$z + \frac{p}{\Pi} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\Pi} + z'.$$

Nous ne connaissons ni z , ni p ; mais, comme au point M le liquide est à peu près en repos, la distribution des pressions ne diffère pas sensiblement de la loi hydrostatique,

et on peut prendre la somme $z + \frac{p}{\Pi}$ comme s'il s'agissait

d'un liquide pesant en repos. Cette fonction est alors indépendante de la position du point M ; prenons-la pour un point A de la surface AB ; en ce point, la pression est égale à la pression atmosphérique, ou à p_0 , si le vase est ouvert à l'air libre, et si les niveaux de AB et de ab sont peu éloignés l'un de l'autre. Soit donc Z la hauteur du plan libre AB au-dessus du plan ZZ' ; on aura

$$z + \frac{p}{\Pi} = Z + \frac{p_0}{\Pi}.$$

L'équation devient

$$Z + \frac{p_0}{\Pi} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\Pi} + z',$$

d'où l'on déduit

$$v = \sqrt{2g(Z - z')} = \sqrt{2gh},$$

en appelant h la hauteur verticale du plan AB au-dessus de la section contractée. La vitesse d'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi est donc égale à la vitesse due à la hauteur de la surface libre au-dessus du centre de l'orifice.

Ce théorème est connu en hydraulique sous le nom de *théorème de Torricelli*.

La dépense Q de l'orifice par unité de temps est égale au produit $V\omega$ de la vitesse par l'aire ω de la section contractée :

$$Q = \omega \sqrt{2gh}.$$

On a déterminé par l'observation le rapport $\frac{\omega}{A}$ de l'aire de la section contractée à l'aire de l'orifice ; ce rapport, auquel on donne le nom de *coefficient de contraction*, est, en moyenne, égal à 0,62. On peut donc poser

$$Q = 0,62A \sqrt{2gh}.$$

ÉCOULEMENT D'UN LIQUIDE PAR FILETS RECTILIGNES PARALLÈLES, DANS UN CANAL OU DANS UN TUYAU.

152. *Quand un liquide, animé d'un mouvement satisfaisant aux conditions de la permanence, s'écoule dans un canal ou dans un tuyau par filets sensiblement rectilignes et parallèles, les pressions se distribuent dans une même section transversale conformément aux lois de l'hydrostatique, c'est-à-dire comme si le liquide était en repos dans le vase qui le contient.*

Les équations du mouvement d'un liquide homogène sont

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = u',$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = v',$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = w',$$

avec l'équation de continuité

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Les quantités u' , v' , w' , sont les accélérations projetées sur les axes coordonnés.

Prenons l'axe des x parallèle au mouvement des filets. Les

vitesse v et w seront nulles, ainsi que les accélérations v' et w' . Donc $\frac{dv}{dy} = 0$, $\frac{dw}{dz} = 0$, et l'équation de continuité donne

$$\frac{du}{dx} = 0. \text{ Mais on a toujours}$$

$$u' = u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} + \frac{du}{dt}.$$

La dérivée $\frac{du}{dt}$ est nulle, puisque le régime permanent est supposé établi. On a d'ailleurs $\frac{du}{dx} = 0$, $v = 0$ et $w = 0$. Donc $u' = 0$, et la vitesse u est constante pour un même filet. Le mouvement est donc uniforme.

Les dérivées $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ peuvent être différentes de zéro, la vitesse u variant d'un filet à l'autre.

Les trois premières équations du mouvement se réduisent ainsi aux équations suivantes :

$$\frac{dp}{dx} = \rho X,$$

$$\frac{dp}{dy} = \rho Y,$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho Z,$$

c'est-à-dire aux équations de l'hydrostatique, et les pressions se distribuent au sein de la masse liquide comme si elle était en repos. Cette conclusion doit être restreinte à une longueur infiniment petite de courant, s'il s'agit d'un liquide naturel; autrement il faudrait tenir compte des effets de la viscosité. Le théorème ne s'applique en définitive qu'à la répartition des pressions dans une même section transversale.

153. Faisons une application de ce théorème à l'écoulement par un orifice suivi d'un coursier. L'orifice CD (fig. 69) donne issue au liquide contenu dans le vase ABC et maintenu à un niveau constant AB; le liquide s'écoule par filets parallèles dans un canal dont le fond DH est représenté sur la figure.

Soit EF la section la plus rapprochée de l'orifice où l'écoulement par filets parallèles soit établi.

Appelons v la vitesse du filet liquide qui traverse la section EF au point P; soit p' la pression en ce point et z' la hauteur Pp au-dessus du plan de comparaison ZZ'. Soient z et p les quantités analogues en un autre point M du même filet, pris dans le vase assez loin de l'orifice pour que la vitesse soit sensiblement nulle : le théorème de Bernoulli appliqué au filet MP

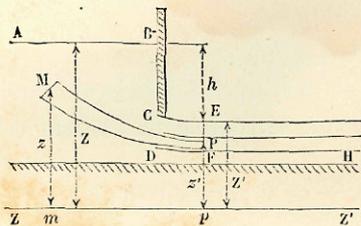


Fig. 69.

nous donnera l'équation

$$z + \frac{p}{\Pi} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p'}{\Pi} + z'.$$

Nous savons que $z + \frac{p}{\Pi}$ est égal à $Z + \frac{p_0}{\Pi}$, Z étant la hauteur du plan libre AB, et p_0 la pression atmosphérique. De même, l'écoulement en EF se faisant par filets parallèles, les pressions dans la section EF sont distribuées comme si le liquide était en repos. Donc $z' + \frac{p'}{\Pi}$ est égal à $Z' + \frac{p_0}{\Pi}$, Z' étant le z' de la surface libre dans le coursier. Il vient en définitive

$$Z + \frac{p_0}{\Pi} = Z' + \frac{p_0}{\Pi} + \frac{v^2}{2g},$$

ou bien

$$v = \sqrt{2g(Z - Z')} = \sqrt{2gh},$$

h étant la différence de niveau entre la surface libre du liquide dans le vase et la surface libre dans le canal de fuite. Tous les filets liquides qui traversent la section EF sont animés d'une même vitesse v .

On prouverait de même que, lorsqu'un liquide pesant sort par un orifice noyé, c'est-à-dire lorsque la veine liquide pénètre dans un liquide en repos, la vitesse de l'écoulement est égale à la vi-

tesse due à la différence de hauteur comprise entre le niveau du liquide dans le bief d'amont et le niveau du liquide dans le bief d'aval.

APPLICATION DE L'ÉQUATION DES FORCES VIVES AUX MACHINES HYDRAULIQUES.

154. Les machines hydrauliques sont mises en mouvement par une chute d'eau. Considérons, pour fixer les idées, une roue hydraulique O (fig. 70), sur les aubes $ab, a'b'$... de laquelle l'eau agit en passant du bief d'amont AB au bief d'aval CD.

Le mouvement du liquide est sensiblement permanent, le système mobile se retrouvant dans une situation exactement semblable à celle qu'il occupait, au bout du temps très court que l'aube ab met à prendre la place de l'aube suivante $a'b'$. Appelons θ cette durée, et appliquons le théorème des forces vives à la masse liquide pendant cet espace de temps.

Faisons deux sections transversales, l'une, EF, un peu en amont de la roue, l'autre, GH, un peu en aval. Tout filet liquide qui traverse la section EF en un point m se retrouvera dans la section GH en un certain point n . Soit ω la section du filet et v la vitesse de l'eau au point m .

Le volume écoulé pendant le temps θ sera $\omega v \theta$, et le volume total, débité par la section, sera $\Sigma \omega v \theta = \theta \Sigma \omega v = Q \theta$, en désignant par Q le débit du cours d'eau par unité de temps.

Pendant le temps θ , la section EF se transporte en E'F', et si l'on admet que la vitesse v soit commune à tous les filets, la distance parcourue est égale à $v \theta$.

Soient v', ω' , les quantités analogues relatives au filet n dans la section GH. Le volume débité pendant le temps θ sera encore $Q \theta$, et la section GH s'avancera à G'H', en parcourant une longueur $v' \theta$.

La partie du système liquide comprise entre les sections E'F' et GH est composée aux deux époques des mêmes molécules animées des mêmes vitesses; l'accroissement de force

vive entre les deux époques est donc la différence entre la force vive de la masse $GHH'G'$ et la force vive de la masse $EFF'E'$, ce qui donne

$$\frac{\Pi}{g} Q\theta (v'^2 - v^2).$$

Nous égalons la moitié de cette différence à la somme algébrique des travaux subis par le système. Or les forces qui agissent sont la pesanteur, la pression atmosphérique, les pressions propres du liquide, la résistance opposée par la roue, enfin certaines résistances accessoires, analogues aux résistances passives.

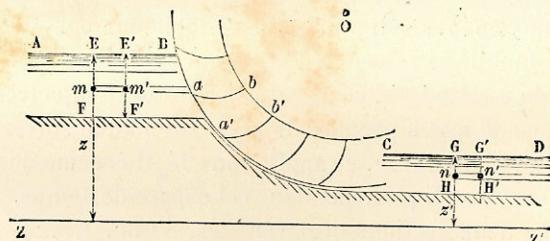


Fig. 70.

Le travail de la pesanteur est égal à celui qui résulterait du passage de la masse $EFF'E'$ dans la section $GHH'G'$. Le poids de cette masse est $\Pi Q\theta$. Soient h et h' les profondeurs du cours d'eau dans les sections EF, GH; z et z' les hauteurs des niveaux E et G au-dessus d'un même plan horizontal ZZ'. Le centre de gravité de la masse d'amont sera à la cote $z - \frac{h}{2}$, et celui de la masse d'aval à la cote $z' - \frac{h'}{2}$, les sections étant supposées rectangulaires. Donc le travail de la pesanteur est

$$\Pi Q\theta \left(z - \frac{h}{2} - z' + \frac{h'}{2} \right).$$

La pression atmosphérique peut être considérée comme agissant sur tout le pourtour du volume liquide, car elle se transmet dans les sections d'amont et d'aval, ainsi que sur

les parois latérales. Son travail est nul, puisque le liquide ne change pas de volume (§ 111).

Les pressions latérales ne donnent pas de travail non plus, si on les suppose normales aux chemins décrits par leurs points d'application. Il n'y a plus à compter que les pressions d'amont et celles d'aval, dans les sections EF et GH, abstraction faite de la pression de l'atmosphère.

Elles se répartissent dans ces deux sections suivant la loi hydrostatique (§ 152).

La pression moyenne dans la section EF est égale à la pression sur le centre de gravité, ou à $\Pi \frac{h}{2}$; elle s'applique à toute la section EF; son travail s'obtiendra en multipliant $\Pi \frac{h}{2}$ par la section EF, puis par le chemin décrit $v\theta$, ce qui revient à multiplier par $Q\theta$. Donc, enfin, le travail de la pression d'amont, qui est mouvante, est égal à $+\Pi \frac{h}{2} \times Q\theta$; le travail de la pression d'aval, qui est résistante, est de même $-\Pi \frac{h'}{2} \times Q\theta$.

Le travail de la résistance de la roue est égal et contraire au travail des actions normales exercées par l'eau sur la roue, ou au travail moteur transmis à l'appareil. Nous représenterons ce travail par $T_m\theta$, en appelant T_m le travail transmis à la roue dans l'unité de temps.

Enfin, nous désignerons par $-T_r$ la somme des travaux des résistances accessoires, rapportés à l'unité de temps.

L'équation des forces vives nous donne, en définitive,

$$\begin{aligned} & \frac{\Pi}{2g} Q\theta (v'^2 - v^2) \\ &= \Pi Q\theta \left(z - \frac{h}{2} - z' + \frac{h'}{2} \right) + \Pi \frac{h}{2} Q\theta - \Pi \frac{h'}{2} Q\theta - T_m\theta - T_r\theta, \end{aligned}$$

ou bien, après réduction,

$$T_m = \Pi Q \left(z - z' + \frac{v^2}{2g} \right) - \Pi Q \frac{v'^2}{2g} - T_r.$$

$\Pi Q \frac{v^2}{2g}$ est la demi-force vive de l'eau débitée dans l'unité de temps par le canal d'amenée.

$(z - z') \times \Pi Q$ est le travail dû à la chute de superficie. C'est le produit du poids de l'eau par la hauteur de chute $z - z'$.

$\Pi Q \frac{v'^2}{2g}$ est la force vive conservée par l'eau quand elle quitte la roue.

Enfin T_f est le travail dû à la viscosité, aux frottements du liquide contre le lit du canal, contre les aubes, contre lui-même. C'est un travail toujours négatif.

Le travail recueilli par la roue augmente avec la chute $z - z'$; il augmente aussi à mesure que la vitesse v' et le terme T_f diminuent. Aussi le meilleur récepteur hydraulique serait-il celui où l'eau entrerait sans choc, et d'où elle sortirait sans vitesse. Si elle entre sans choc, le terme T_f est sensiblement nul; si elle sort sans vitesse, v' est égal à zéro. Mais il est impossible de satisfaire complètement à ces conditions.

Le terme $\Pi Q \left(z - z' + \frac{v^2}{2g} \right)$ représente la puissance absolue de la chute, et le travail utilisé par le récepteur n'est jamais qu'une fraction de cette puissance. C'est cette fraction qui mesure le rendement de la machine.

FORMULE DE M. GÉRARDIN.

135. La nouvelle formule des moteurs hydrauliques de M. H. Gérardin¹ est fondée sur l'emploi de l'équation des moments des quantités de mouvement, appliquée à la masse fluide, par rapport à l'axe de rotation du récepteur; cette méthode a l'avantage d'éliminer les forces intérieures.

Considérons à l'instant t une portion de fluide agissant sur la roue et comprise entre une section d'amont du canal d'amenée et une section d'aval du canal de fuite.

¹ *Théorie des moteurs hydrauliques*. Paris, 1872, Gauthier-Villars

Soit m la masse d'une molécule,

u sa vitesse,

ρ sa distance à l'axe du récepteur,

α l'angle que fait la vitesse u avec l'arc infiniment petit que décrirait dans le temps dt le point géométrique occupé par la molécule m , s'il était entraîné par la roue;

φ la vitesse angulaire, constante ou variable, de la roue.

Le produit $mu \times \rho \cos \alpha$ sera le moment de la quantité de mouvement de la masse m par rapport à l'axe; $\Sigma mu \rho \cos \alpha$ représentera la somme de ces moments, étendue à toutes les molécules comprises entre les limites indiquées.

Appelons M la somme des moments, par rapport à l'axe de la roue, des forces extérieures qui sollicitent la masse fluide, à l'exception des réactions exercées par la roue sur les molécules qui la touchent; les forces comprises dans la somme M sont donc la pesanteur, les pressions du fluide environnant, les pressions normales des parois fixes, la résistance de l'air et les frottements des parois.

Soit μ la somme des moments par rapport au même axe des actions exercées par la roue sur la masse fluide; $-\mu$ sera la somme des moments des réactions du fluide sur la roue.

Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement à la masse fluide pendant un intervalle de temps dt infiniment petit. Nous aurons

$$d(\Sigma mu \rho \cos \alpha) = (M - \mu) dt,$$

d'où l'on déduit

$$\mu = M - \frac{d}{dt} \Sigma mu \rho \cos \alpha.$$

Multiplions par φdt , angle décrit par la roue pendant le temps dt ; le produit $\mu \times \varphi dt$ sera le travail élémentaire dT transmis à la roue, et on aura

$$dT = M \varphi dt - \varphi d(\Sigma mu \rho \cos \alpha),$$

formule très remarquable en ce qu'elle ne repose sur aucune hypothèse, et qu'elle ne suppose ni la permanence du régime,

ni la continuité de la masse fluide en mouvement. Le travail transmis dT n'est d'ailleurs pas entièrement utilisé par la roue; la meilleure utilisation correspond au cas où la vitesse angulaire φ est constante; autrement une portion du travail moteur est employée en pure perte à produire les variations de vitesse du corps tournant.

CHAPITRE III

PRINCIPES DE LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR.

156. La chaleur est une source de travail; inversement, le travail mécanique est une source de chaleur. Envisagée à ce point de vue, la chaleur est assimilable à la force vive, car le mouvement de tout système matériel présente une suite d'échanges entre la force vive et le travail des forces extérieures et intérieures. La théorie nouvelle de la chaleur n'est que le développement de ce premier aperçu.

Le phénomène le plus apparent parmi les faits calorifiques est résumé par le mot de *température*; c'est ce phénomène qui nous conduit à distinguer les corps plus chauds des corps plus froids. On sait depuis longtemps que cet effet n'est pas le seul que la chaleur produise. Un bloc de glace à 0° , que l'on chauffe, fond et se change en eau liquide sans que sa température s'élève. La chaleur qui s'y introduit, dite *chaleur latente de fusion*, n'est pas sensible au thermomètre. De même, la chaleur qui est employée à réduire de l'eau liquide en vapeur, à 100° et sous la pression normale atmosphérique, n'élève pas la température de l'eau, mais produit son changement d'état; c'est la *chaleur latente de vaporisation*. Dans les deux cas, la quantité de chaleur qu'on fait pénétrer dans le corps opère un certain travail, celui de la *désagrégation des molécules*, qui, de solides, deviennent liquides ou gazeuses, et ce travail équivaut à la chaleur employée à le produire. L'étude des gaz a fait reconnaître une

propriété analogue. Quand on échauffe un gaz en vase clos, sans lui permettre d'occuper un plus grand volume, sa température s'élève d'un certain nombre de degrés pour une quantité déterminée de chaleur qui lui a été communiquée, et en même temps sa pression s'accroît. Si, au contraire, on l'échauffe du même nombre de degrés en laissant son volume augmenter de manière que sa pression reste constante, on constate qu'il faut lui communiquer une quantité de chaleur plus grande. Dans le premier cas, la chaleur n'a servi qu'à échauffer le gaz; dans le second, une partie a servi à produire l'échauffement, et l'autre s'est transformée dans le travail de l'expansion du gaz.

La *quantité de chaleur* renfermée dans un corps est mesurée, d'après les nouvelles idées, par la somme des forces vives des molécules correspondantes à des mouvements vibratoires insensibles. Nous avons reconnu (III, § 186) qu'à un instant donné la force vive totale d'un système matériel se décompose en deux parties : l'une est la force vive due à la translation du système, supposé concentré en son centre de gravité; l'autre est la force vive dans le mouvement relatif à des axes de directions constantes menés par le centre de gravité. A ces deux parties, il faut ajouter la force vive due aux vibrations insensibles des molécules matérielles autour de leurs positions moyennes, et c'est ce terme qui mesure la quantité de chaleur contenue dans le système à l'instant considéré.

DÉFINITION DE L'ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR.

137. On appelle *calorie* la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré centigrade la température de l'unité de poids d'eau liquide. C'est l'unité qui sert à évaluer les quantités de chaleur.

La *chaleur spécifique* d'un corps est le nombre de calories qu'il faut employer pour élever la température de ce corps d'un degré centigrade. Cette définition n'est pas complète; car

si le corps en s'échauffant se dilate et accomplit un certain travail, la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré sa température est supérieure à celle qui suffit lorsque le volume reste le même. De là deux chaleurs spécifiques, l'une à *volume constant*, l'autre à *pression constante*; ces deux quantités diffèrent pour tous les corps; mais la différence, peu considérable pour les solides et les liquides, dont la dilatation est toujours faible, acquiert une valeur très sensible pour les gaz, dont le coefficient de dilatation est plus élevé.

La *chaleur latente* de fusion ou de vaporisation d'un corps est la quantité de chaleur nécessaire pour fondre ou pour vaporiser l'unité de poids du corps, *pris sous une pression définie*; cette dernière condition est peu importante pour la fusion, mais elle a, au contraire, une importance capitale en ce qui concerne la vaporisation.

138. Le travail accompli dans la fusion d'un solide ou la vaporisation d'un liquide consiste, en grande partie, en un travail intérieur difficile à évaluer. Il en est de même du travail de la dilatation d'un solide, car outre le travail extérieur accompli sur le milieu ambiant, et égal au produit de la pression du milieu par la variation du volume (§ 111), on doit compter le travail intérieur dû aux déplacements relatifs des molécules, et cette seconde partie échappe à toute mesure précise. Pour trouver avec exactitude le rapport du travail à la chaleur, il convient donc de choisir comme exemples les corps dont les dilatations ne donnent lieu à aucun travail intérieur : les gaz permanents étant parmi les corps ceux dont les molécules ont le plus d'indépendance et le moins de viscosité, satisfont mieux que tous les autres à cette condition, et c'est sur l'étude qu'on en a faite que l'on peut fonder la nouvelle théorie.

139 Prenons un mètre cube d'air sec, à la température zéro du thermomètre centigrade, et sous la pression normale de 760 millimètres de mercure, ou de 10,340 kilogrammes par mètre carré.

Portons la température de cette masse gazeuse à τ degrés, en supposant d'abord que le volume reste le même, la pression augmentant en conséquence. Le nombre des calories à introduire dans le gaz est alors égal à 0,1685 par kilogramme et par degré; ce nombre 0,1685 est la *chaleur spécifique de l'air à volume constant*; or le mètre cube d'air à 0° et sous la pression normale pèse 1^{kil},299; donc la quantité de chaleur employée à l'échauffement du gaz, sans production de travail extérieur, est le produit $0,1685 \times 1,299 \times \tau = 0^{\text{cal}},218\,8815 \times \tau$.

En second lieu, échauffons la même masse du même nombre de degrés, en laissant le volume s'accroître de manière à maintenir la pression constante. Chaque unité de poids du gaz absorbera une quantité de chaleur égale à 0,2375 par degré d'élévation de température; 0,2375 est la *chaleur spécifique de l'air à pression constante*; cela représente en tout une quantité de chaleur égale au produit

$$0,2375 \times 1,299 \times \tau = 0^{\text{cal}},5085125 \times \tau.$$

Cette quantité de chaleur se décompose en deux parts : l'une, égale, comme tout à l'heure, à $0,2188815 \tau$, est la chaleur absorbée pour l'échauffement du gaz, c'est celle qui dans la masse reste sensible au thermomètre; la seconde, égale à la différence $(0,5085125 - 0,2188815) \tau$ ou à $0,0896310 \times \tau$, s'est convertie en travail et représente le travail accompli par la dilatation du gaz.

Or, lorsqu'une masse fluide, soumise de tous côtés à une pression constante, augmente de volume, le travail produit sur le milieu ambiant est égal au produit de la pression par la variation de volume (§ 111). L'air atmosphérique, et en général tous les gaz permanents ont le nombre 0,00567 pour coefficient de dilatation; ce nombre indique de quelle fraction le volume augmente, sous pression constante, quand la température s'accroît de 1°. Le travail cherché sera le produit de $0,00567 \times \tau$ par la pression atmosphérique, 10540 kilogrammes, ce qui donne

$$57,94780 \times \tau.$$

Donc le rapport du travail accompli à la chaleur employée à le produire est le nombre

$$\frac{57,94780 \times \tau}{0,0896310 \times \tau} = 425,578,$$

c'est-à-dire que, dans l'expérience conduite comme nous l'avons indiqué, une calorie se transforme en un travail de 425 kilogrammètres, ou *équivalent* à cette quantité de travail.

139. En général, soit V un certain volume de gaz, à la température zéro, sous la pression p; soit Π le poids spécifique de ce gaz sous cette pression et à cette température. Appelons c sa chaleur spécifique à pression constante, c_1 sa chaleur spécifique à volume constant, et α son coefficient de dilatation.

Si nous portons la température du gaz à τ degrés, la quantité de chaleur à lui communiquer sera égale à $\Pi V \times c_1 \tau$ quand le volume reste constant. Lorsque le volume augmente et que la pression reste constante, l'augmentation de volume est égale à $V \times \alpha \tau$, et le travail produit par la dilatation est

$$pV \times \alpha \tau.$$

Or la quantité de chaleur employée pour produire ce résultat est

$$\Pi V \times c \tau.$$

De cette quantité, la partie $\Pi V \times c_1 \tau$ est employée à échauffer le gaz; le reste, $\Pi V \times (c - c_1) \tau$, est transformé en travail, et le rapport du travail produit à la chaleur correspondante est égal à la fraction

$$\frac{pV \alpha \tau}{\Pi V \times (c - c_1) \tau} = \frac{p \alpha}{\Pi (c - c_1)}.$$

Ce nombre est indépendant du volume V soumis à l'expérience et de l'écart des températures. Reportons-nous à l'équation de Mariotte et de Gay-Lussac (§ 69); on pourra l'écrire, en y faisant $\tau = 0$,

$$\frac{p}{\Pi} = K,$$

puisque p est la pression, et Π le poids spécifique du gaz à la température $\tau=0$. Nous en déduisons

$$\frac{pz}{\Pi} = Kz = R,$$

en remplaçant Kz par une autre constante : R est alors la constante qui entre dans la formule de Mariotte et de Gay-Lussac mise sous la forme

$$\frac{p}{\Pi} = R \left(\frac{1}{\alpha} + \tau \right),$$

au lieu de

$$\frac{p}{\Pi} = K(1 + \alpha\tau).$$

La première forme est plus commode que la seconde, et elle conduit à exprimer la température d'un corps par le nombre $\frac{1}{\alpha} + \tau$ au lieu du nombre τ . Cela revient à descendre le zéro de la graduation centigrade à $\frac{1}{\alpha}$ degrés, ou à 273° , au-dessous du zéro défini par la température de fusion de la glace. Ce nouveau zéro est appelé le *zéro absolu*; si la température du gaz pouvait descendre à ce degré du thermomètre ordinaire, sa pression deviendrait rigoureusement nulle.

Soit θ la température mesurée à partir du zéro absolu, ou ce qu'on appelle la *température absolue* : on aura l'équation fort simple

$$\frac{p}{\Pi} = R\theta$$

pour lier ensemble la pression, le poids spécifique et la température d'une masse gazeuse. Le rapport du travail produit à la chaleur employée à le produire est donc

$$\frac{pz}{\Pi(c - c_1)} = \frac{R}{c - c_1}.$$

C'est ce rapport qu'on appelle *équivalent mécanique de la chaleur* ; l'inverse, $\frac{c - c_1}{R}$, est l'*équivalent calorifique du travail*. Comme on vient de les définir, ces nombres pourraient être con-

sidérés comme des constantes spécifiques, variant avec le corps soumis aux expériences. Nous ferons voir au contraire que l'équivalent mécanique de la chaleur est constant d'une manière absolue ; si l'on constate de petites différences entre les résultats que l'on obtient en cherchant la valeur par diverses méthodes, ces différences tiennent à l'incertitude qui règne sur la détermination des coefficients empiriques des formules, et on est certain qu'elles s'effaceraient si les nombres admis dans les calculs étaient connus avec une parfaite rigueur.

ÉQUATIONS FONDAMENTALES.

140. Nous considérerons dans ce qui suit l'unité de poids d'un corps quelconque ; Π étant le poids spécifique de ce corps, dans des conditions déterminées de pression et de température, le volume V de l'unité de poids dans les mêmes conditions sera représenté numériquement par la fraction $\frac{1}{\Pi}$. C'est ce nombre, inverse du poids spécifique, que nous appellerons la *volume spécifique* du corps.

Étant données deux de ces trois quantités, *pression, température, volume spécifique*, la troisième est entièrement déterminée ; désignons par θ la température absolue, par p la pression, par V le volume spécifique : nous aurons entre ces trois quantités une relation de la forme

$$(1) \quad \theta = f(p, V),$$

sans rien préjuger d'ailleurs sur la nature de la fonction f .

La *quantité de chaleur contenue dans l'unité de poids* d'un corps, ou *quantité de chaleur interne*, dépend des mêmes éléments, pression, volume spécifique, température, et comme la température est déjà exprimable par une fonction de p et V , on aura, en représentant par U la chaleur interne et par F une nouvelle fonction,

$$(2) \quad U = F(p, V).$$

Lorsque le corps considéré reçoit du dehors une quantité

Q de chaleur et qu'il se dilate en passant du volume V au volume V_1 , sous des pressions variables d'après une loi déterminée, la quantité Q se partage en deux parts : l'une s'ajoute à la chaleur interne U, et l'amène à la valeur U_1 ; l'autre est transformée en travail; or le travail produit par la dilatation du corps est exprimé par l'intégrale

$$\int_V^{V_1} p dV.$$

Appelons A l'équivalent calorifique du travail, considéré provisoirement comme une constante spécifique relative au corps dont il s'agit. La quantité de chaleur employée à produire cette quantité de travail sera

$$A \int_V^{V_1} p dV,$$

et nous aurons la troisième équation

$$(3) \quad Q = U_1 - U + A \int_V^{V_1} p dV.$$

La théorie mécanique de la chaleur est le développement de ces trois équations. Elle est fondée sur deux principes que nous allons exposer après avoir établi quelques nouvelles définitions.

CYCLE DIRECT, INVERSE. — REPRÉSENTATION DES CYCLES.

141. Les quantités p et V sont, dans la théorie de la chaleur, des variables indépendantes en fonction desquelles peuvent s'exprimer les quantités U et θ .

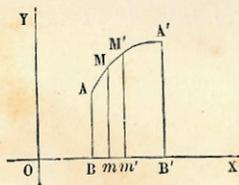


Fig. 71.

Traçons dans un plan deux axes rectangulaires OX, OY; nous prendrons le premier pour *axe des volumes spécifiques V*, le second pour *axe des pressions p*; à un point quelconque A du plan correspondent une abscisse OB qui représente une

valeur de V, et une ordonnée AB qui représente une valeur de p ; ces deux quantités définissent complètement l'état thermique du corps considéré. Pour abrégé, on dira que le corps est à l'état A, pour exprimer qu'il a un volume spécifique $V=OB$, une pression $p=BA$, la température θ étant donnée par l'équation (1), et la quantité de chaleur interne U par l'équation (2).

La suite des états thermiques d'un corps qui passe successivement par différentes valeurs de p et de V est représentée sur l'épure par une certaine ligne AA'. Considérons sur cette ligne deux points infiniment voisins M, M', et menons les ordonnées Mm, M'm'. L'intervalle mm' sera la variation dV du volume occupé par le corps quand il passe de l'état M à l'état M', et l'ordonnée mM représentant la pression p, l'aire infiniment petite Mmm'M' est égale au produit $p dV$, et mesure le travail élémentaire extérieur accompli par l'unité de poids du corps, quand son état passe de M en M'. On en conclut que l'aire ABB'A', comprise entre l'axe des volumes, les ordonnées extrêmes, et la courbe des états successifs, est égale au travail total produit par l'unité de poids du corps quand il passe de l'état A à l'état A'.

On voit du même coup que la ligne AMA', qui définit les états successifs du corps, n'est pas sans influence sur la quantité de chaleur à introduire dans le corps pour l'amener de l'état initial A à l'état final A'; car l'équation (3) nous montre que cette quantité de chaleur Q est la somme de deux parties, dont l'une, $U_1 - U$, dépend seulement des positions des points A' et A, et dont l'autre, $A \int_V^{V_1} p dV$, est proportionnelle à l'aire AMA'B'B.

Supposons qu'après être parti de l'état A et avoir atteint l'état A', par la route AMA', le corps revienne à l'état initial A par une autre route A'pA (fig. 72); les quantités U et θ se retrouveront les mêmes au commencement et à la fin de cette évolution, et par suite la quantité totale Q de chaleur extérieure introduite dans le corps pour l'accomplir se réduit au

terme $\int p dV$, l'intégrale étant prise le long du circuit fermé $AMA'\mu A$; cette intégrale, dans laquelle les aires $m\mu\mu'm'$ doivent être comptées négativement, représente l'aire de ce circuit. Donc, lorsqu'un corps accomplit une évolution complète qui le ramène à son état primitif, le travail produit par unité de poids est représenté par l'aire du circuit fermé correspondant à cette évolution, et la chaleur dépensée est le

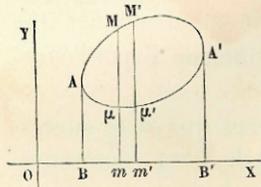


Fig. 72.

produit de cette aire par l'équivalent calorifique.

Si, au lieu de faire suivre au corps la ligne $AMA'\mu A$ dans le sens des lettres, on lui fait suivre la même ligne dans le sens inverse, $A\mu A'MA$, les aires élémentaires vont toutes changer de signe; leur somme deviendra donc négative, et représentera, non pas un travail accompli par le corps sur le milieu ambiant, mais un travail subi par le corps de la part de ce milieu; en même temps, la quantité Q de chaleur, égale encore à $\int p dV$, sera négative, et, prise en valeur absolue, représentera la quantité de chaleur émise par le corps au dehors. Il y a donc lieu de distinguer le sens dans lequel s'opèrent les évolutions complètes, qui ramènent un corps à son état initial. Nous appellerons *cycle direct* l'évolution dans le sens $AMA'\mu A$, qui exige l'emploi d'une certaine quantité de chaleur, et qui fait produire au corps un travail positif; et *cycle inverse*, l'évolution $A\mu A'MA$, qui suppose un travail extérieur exercé sur le corps, et le dégagement au dehors d'une quantité de chaleur proportionnelle.

Au moyen des cycles directs, on pourra donc transformer la chaleur en travail, comme cela a lieu dans la machine à vapeur et les autres machines thermiques. Au moyen des cycles inverses, on pourra transformer le travail en chaleur: c'est ce qui a lieu, par exemple, dans la locomotive pendant le renversement de la vapeur.

L'ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR EST CONSTANT.

142. Pour démontrer cette proposition, qui est la base même de la théorie mécanique, nous admettrons comme axiome qu'on ne peut pas plus créer ou détruire de la chaleur que du travail; nous savons qu'il est impossible de créer gratuitement du travail (§ 14), et comme la chaleur peut se transformer en travail, la création du travail résulterait de la création de la chaleur, si cette dernière création n'était pas également impossible.

Prenons deux corps différents X et Y; soumettons le premier à une série de m cycles directs, dans chacun desquels nous produirons un travail T en dépensant une quantité de chaleur Q . Soumettons le second à une série de n cycles inverses, dans chacun desquels nous exercerons sur le corps un travail T' qui produira une quantité de chaleur Q' . Puis faisons le compte des quantités de chaleur dépensées et produites, et des quantités de travail produites et dépensées dans ces $m + n$ opérations.

La quantité de chaleur totale dépensée est mesurée par la différence $mQ - nQ'$, et la quantité de travail produite est de $mT - nT'$. On peut toujours, en choisissant convenablement les entiers m et n , rendre aussi petite qu'on voudra l'une de ces deux différences. Or je dis qu'elles s'annulent ensemble, car, n'admettant dans toutes les opérations faites que des échanges de chaleur en travail et de travail en chaleur, si nous avons

$$mQ - nQ' = 0,$$

sans avoir aussi $mT - nT' = 0$, il y aurait création de travail positif ou négatif sans dépense équivalente, c'est-à-dire *création gratuite et spontanée de travail*. De même, si nous avons $mT - nT' = 0$, nous devons aussi avoir $mQ - nQ' = 0$, sans quoi il y aurait création ou destruction de chaleur sans dé-

pense ou sans production de travail, ce qui est également impossible. On a donc à la fois

$$mQ - nQ' = 0, \quad nT - n'T' = 0.$$

On en déduit

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{T}{T'}.$$

et par suite

$$\frac{Q}{T} = \frac{Q'}{T'}.$$

Ce rapport, qui n'est autre chose que l'équivalent calorifique du travail, ou l'inverse de l'équivalent mécanique, est donc le même pour les deux corps X et Y, ce qui revient à dire qu'il est le même pour tous les corps.

PREMIÈRE LOI, OU LOI DE MEYER OU DE JOULE.

143. Nous pourrions formuler comme il suit la première loi de la théorie mécanique de la chaleur, en disant avec M. Ad. Hirn :

Toutes les fois que la chaleur, en agissant sur un corps quelconque, donne lieu à la production d'un travail mécanique recueilli en dehors de ce corps, il disparaît une quantité de chaleur proportionnelle au travail produit;

Et réciproquement, toutes les fois qu'un travail mécanique est consommé en actions quelconques sur un corps, il apparaît une quantité de chaleur proportionnelle à ce travail dépensé.

Le rapport qui existe entre les quantités de chaleur disparues ou apparues et les quantités de travail produites ou consommées est une constante.

DÉTERMINATION GÉNÉRALE DE L'ÉQUIVALENT MÉCANIQUE.

144. Prenons un corps quelconque dont l'état thermique est défini par le point A, rapporté aux axes OX, OY des volumes

et des pressions, et faisons-lui accomplir un cycle direct, représenté par les côtés du rectangle infiniment petit, ABCD.

Soient p et V la pression et le volume spécifique en A; $p + dp$, V seront ces mêmes quantités correspondantes à l'état B; de même $p + dp$ et $V + dV$ correspondront à l'état C, p et $V + dV$ à l'état D.

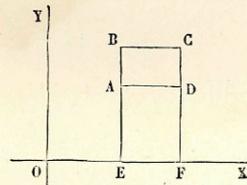


Fig. 75.

Le travail accompli sera mesuré par l'aire ABCD, ou par $dpdV$; et par suite la quantité de chaleur Q qu'il faut introduire dans le corps pour produire ce travail en accomplissant l'évolution complète ABCDA, est le produit $AdpdV$.

Cherchons les quantités de chaleur qu'il faut successivement introduire dans le corps pour lui faire parcourir les quatre côtés du rectangle.

Appelons c la chaleur spécifique du corps à pression constante, et c_1 la chaleur spécifique à volume constant; ces quantités peuvent être variables avec l'état thermique du corps; nous admettrons donc que c et c_1 représentent les valeurs de ces quantités relatives au point A; aux autres sommets du rectangle, elles seront égales à c et c_1 augmentées de leurs différentielles, partielles ou totales.

Pour faire passer le corps de A en B sans changement de volume, il faut introduire une quantité de chaleur q égale au produit de c_1 par la différence des températures. Or cette différence est la différentielle de θ relative à p seul, et on aura

$$q = c_1 \frac{d\theta}{dp} dp.$$

Soit q' la quantité de chaleur nécessaire pour amener le corps de l'état B à l'état C, la pression restant constante et égale à $p + dp$; la chaleur spécifique à employer ici est la chaleur spécifique à pression constante c , augmentée de sa différentielle partielle relative à p ; ce sera donc $c + \frac{dc}{dp} dp$; or

la température est en B

$$\theta + \frac{d\theta}{dp} dp,$$

et en C

$$\left(\theta + \frac{d\theta}{dp} dp\right) + \frac{d}{dV} \left(\theta + \frac{d\theta}{dp} dp\right) dV;$$

la différence est

$$\frac{d}{dV} \left(\theta + \frac{d\theta}{dp} dp\right) dV = \frac{d\theta}{dV} dV + \frac{d^2\theta}{dpdV} dpdV;$$

donc enfin

$$q' = \left(c + \frac{dc}{dp} dp\right) \left(\frac{d\theta}{dV} dV + \frac{d^2\theta}{dpdV} dpdV\right).$$

Il s'agit ensuite de ramener le corps de l'état C à l'état A, en suivant le chemin CDA, et en lui enlevant certaines quantités de chaleur, q'' pour le trajet CD, et q''' pour le trajet DA. Or ces quantités à enlever au corps sont égales en valeur absolue à celles qu'il faudrait y introduire pour le faire passer de l'état A à l'état D par le chemin AD, puis de l'état D à l'état C par le chemin DC.

De A à D, la quantité q'' serait égale au produit

$$q'' = c \frac{d\theta}{dV} dV,$$

et de D à C, la quantité q''' serait donnée par la formule

$$q''' = \left(c_1 + \frac{dc_1}{dV} dV\right) \left(\frac{d\theta}{dp} dp + \frac{d^2\theta}{dpdV} dpdV\right).$$

On voit que q''' et q'' se déduisent respectivement de q et q' en changeant

en	c	c_1	p	$V,$
	c_1	c	V	$p.$

La quantité de chaleur dépensée par le circuit ABCDA est égale à $q + q' - q'' - q'''$, ou bien à

$$c_1 \frac{d\theta}{dp} dp + \left(c + \frac{dc}{dp} dp\right) \left(\frac{d\theta}{dV} dV + \frac{d^2\theta}{dpdV} dpdV\right) \\ \rightarrow c \frac{d\theta}{dV} dV - \left(c_1 + \frac{dc_1}{dV} dV\right) \left(\frac{d\theta}{dp} dp + \frac{d^2\theta}{dpdV} dpdV\right).$$

Réduisant, effaçant les infiniment petits du troisième ordre, et égalant à ΔpdV , il vient

$$\left((c - c_1) \frac{d^2\theta}{dpdV} + \frac{dc}{dp} \frac{d\theta}{dV}\right) dpdV - \frac{dc_1}{dV} \frac{d\theta}{dp} dpdV = \Delta pdV,$$

et par conséquent, en supprimant les facteurs $dpdV$,

$$(4) \quad (c - c_1) \frac{d^2\theta}{dpdV} + \frac{dc}{dp} \frac{d\theta}{dV} - \frac{dc_1}{dV} \frac{d\theta}{dp} = \Delta,$$

équation générale qui donne l'équivalent calorifique du travail, et qui, appliquée à un corps quelconque, doit fournir pour A la même valeur.

On peut déduire l'équation (4) de la considération des équations (1), (2) et (3).

Différentions ces trois équations. Il vient

$$d\theta = \frac{d\theta}{dp} dp + \frac{d\theta}{dV} dV,$$

$$dU = \frac{dU}{dp} dp + \frac{dU}{dV} dV,$$

$$dQ = \frac{dU}{dp} dp + \left(\frac{dU}{dV} + \Delta p\right) dV.$$

Soit c la chaleur spécifique à pression constante, c_1 la chaleur spécifique à volume constant.

La quantité de chaleur introduite dans le gaz quand la pression reste égale à p , et que le volume varie de dV , est égale à $cd\theta = c \frac{d\theta}{dV} dV$; mais une partie de cette chaleur se transforme en un travail égal à ΔpdV ; le gaz ne retient donc sous forme de chaleur que $\left(c \frac{d\theta}{dV} - \Delta p\right) dV$, et par suite

$$\frac{dU}{dV} = c \frac{d\theta}{dV} - \Delta p.$$

Si, au lieu de faire varier le volume, on fait varier p , le volume V restant constant, la quantité de chaleur introduite dans le gaz pour un accroissement $d\theta$ est égale à $c_1 d\theta = c_1 \frac{d\theta}{dp} dp$, et

cette chaleur reste à l'état de chaleur, puisqu'il n'y a pas de travail produit. Donc

$$\frac{dU}{dp} = c_1 \frac{d\theta}{dp}$$

Prenons la dérivée de la première équation par rapport à p , la dérivée de la seconde par rapport à V , et égalons ces deux dérivées qui doivent être identiques. Nous aurons en définitive l'équation

$$c \frac{d^2\theta}{dVdp} + \frac{dc}{dp} \frac{d\theta}{dV} - A = c_1 \frac{d^2\theta}{dpdV} + \frac{dc_1}{dV} \frac{d\theta}{dp},$$

qui n'est autre que l'équation (4).

145. Appliquons cette formule aux gaz permanents, pour lesquels on a l'équation

$$pV = R\theta.$$

On sait, par l'expérience, que la chaleur spécifique à pression constante, c , ne varie pas avec la pression, de sorte que $\frac{dc}{dp} = 0$. On n'a pas aussi bien vérifié que $\frac{dc_1}{dV}$ soit égal à zéro, mais cette constance de la chaleur spécifique à volume constant avec le volume spécifique paraît du moins très probable. On a donc simplement pour les gaz

$$(4 \text{ bis}) \quad A = (c - c_1) \frac{d^2\theta}{dpdV}.$$

Or

$$\frac{d^2\theta}{dpdV} = \frac{d^2 \left(\frac{pV}{R} \right)}{dpdV} = \frac{1}{R}.$$

Donc enfin $A = \frac{(c - c_1)}{R}$, ou $E = \frac{1}{A} = \frac{R}{c - c_1}$, formule que nous avons déjà trouvée directement (§ 139).

CYCLE DE SADI CARNOT.

146. On peut tracer sur l'épure certains lieux géométriques qui jouent un rôle important dans la théorie de la chaleur. Parmi ces lignes, on doit mentionner les *isothermes* et les *lignes adiabatiques*.

Les *isothermes* sont définies par l'équation générale

$$(1) \quad \theta = f(p, V),$$

dans laquelle on donne successivement à θ différentes valeurs constantes. Pour les gaz permanents, les lignes isothermes sont une série d'hyperboles, qui ont les axes coordonnés pour asymptotes, car l'équation (1) devient dans ce cas particulier

$$pV = R\theta.$$

Nous supposons que les deux courbes MN, PQ soient des lignes isothermes pour le corps soumis aux expériences, et qu'elles correspondent, la première à la température θ_0 , la seconde à la température θ_1 .

Une *ligne adiabatique*, ou de *nulle transmission*, définit les états thermiques successifs que le corps peut prendre sans recevoir de chaleur extérieure, ou sans en émettre au dehors. C'est une *ligne de détente naturelle*. L'équation (3) nous a donné

$$Q = U_1 - U + A \int_V^{V_1} p dV.$$

L'équation des lignes adiabatiques est $Q = 0$, ou bien

$$U_1 + A \int_{V_0}^{V_1} p dV = U + A \int_{V_0}^V p dV,$$

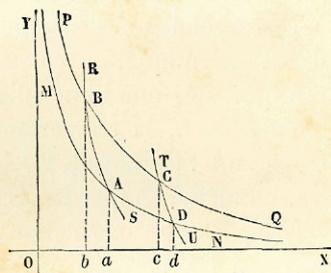


Fig. 74.

ce qui revient encore à

$$U + A \int_{v_0}^v p dV = \text{constante},$$

ou, en différentiant, à

$$dU + A p dV = 0.$$

Comme U est connu en fonction de p et de V par l'équation (2), on obtiendra l'équation générale des lignes adiabatiques en intégrant cette équation différentielle.

147. Soient RS, TU, deux de ces lignes; elles coupent les deux isothermes en quatre points, A, B, C, D, et forment ainsi un contour fermé, qui peut servir de guide à un cycle direct ou inverse.

Le cycle direct s'opère dans le sens ABCDA; de A en B, le volume du corps est réduit de l'abscisse Oa à l'abscisse Ob ; sa pression est portée de l'ordonnée aA à l'ordonnée bB ; en un mot, le corps subit une compression qui élève sa température de la valeur θ_0 correspondante à l'isotherme MN, à la valeur θ_1 correspondante à l'isotherme PQ; et dans ce changement d'état thermique, le corps ne reçoit ni n'émet de chaleur, puisqu'il suit une ligne adiabatique.

De B en C, la température θ_1 reste constante, puisque le corps suit l'isotherme PQ, mais le volume augmente de Ob à Oc ; en même temps, la pression diminue de bB à cC , et pour accomplir cette expansion sans diminuer la température du corps, il est nécessaire d'introduire une certaine quantité Q de chaleur extérieure. Nous supposerons que cette quantité soit fournie par une source indéfinie de chaleur à la température θ_1 , avec laquelle le corps sera mis en communication pendant toute la durée de la seconde période. Nous appellerons cette source *source supérieure*.

De C en D, le corps suit une ligne adiabatique, et ne reçoit ni n'émet de chaleur; il subit une expansion, puisque le volume passe de la valeur Oc à la valeur plus grande Od , et sa pression diminue de cC à dD ; cette expansion s'o-

père aux dépens de la chaleur interne du corps, dont la température tombe de la valeur θ_1 à la valeur θ_0 .

Enfin de D en A, la température du corps conserve la valeur θ_0 ; sa pression augmente de dD à aA , son volume diminue de Od à Oa , et cette double modification exige que le corps émette au dehors une certaine quantité de chaleur Q' . Nous supposerons encore que cette quantité de chaleur soit recueillie par une *source inférieure* de chaleur, à la température θ_0 , avec laquelle le corps sera mis en communication pendant toute cette période.

Il y a donc, dans le cycle direct, quatre périodes à considérer: dans la première AB et la troisième CD, la chaleur interne du corps est seule employée à produire les changements d'état thermique. Dans la seconde BC, il y a emploi d'une quantité Q de chaleur empruntée à la source supérieure, et dans la quatrième, il y a émission au dehors d'une certaine quantité de chaleur Q' recueillie par la source inférieure.

En définitive, le corps a produit par ce cycle direct une quantité de travail égale à l'aire ABCD, et on a dépensé pour produire ce résultat une quantité de chaleur $Q - Q'$, de sorte qu'en appelant T le travail représenté par l'aire ABCD, on a l'équation

$$Q - Q' = AT.$$

Le cycle ABCD prend le nom de *cycle de Sadi Carnot*; Sadi Carnot est le premier qui ait essayé une théorie mécanique de la chaleur tirée de l'étude de la machine à vapeur. Or le cycle ABCD est à peu près l'image de ce qui se passe dans le jeu d'une telle machine: la période BC correspond à l'*admission*, pendant laquelle la vapeur est en communication avec la chaudière, *source supérieure* à la température θ_1 ; la période CD, à la *détente*, sauf que, pendant la détente, la vapeur, isolée de la chaudière, est en contact avec les parois du cylindre, et qu'il se fait quelques échanges de chaleur, peu importants du reste, entre ces deux corps à des températures différentes, effet contraire à l'hypothèse de la détente adiabatique. La période DA correspond à la *condensation*, la vapeur se mettant

à la température θ_0 , d'une source inférieure qui est le condenseur; enfin, la période AB, à la compression dans les espaces libres, sauf une restriction identique à celle qu'on vient de faire pour la période de détente CD.

DEUXIÈME LOI OU LOI DE CLAUSIUS.

148. Sadi Carnot, conservant l'ancienne théorie qui faisait de la chaleur un fluide impondérable *sui generis*, admettait que toute la chaleur contenue dans la vapeur fournie par la chaudière se retrouve dans l'eau produite par cette vapeur dans le condenseur, et que le travail est produit par la chute de chaleur de la température θ à la température θ_0 . La température, dans l'ancienne théorie, est la tension du fluide calorifique, ou la cote de niveau du réservoir où il est emmagasiné. La quantité de chaleur produite par la chaudière, en tombant de la hauteur $\theta_1 - \theta_0$, engendrerait un travail recueilli en partie par la machine, comme un poids P d'eau, en tombant d'une hauteur H, produit un travail transmis en partie au récepteur hydraulique.

Cette comparaison ingénieuse n'est pas entièrement exacte, puisque la chaleur Q' dégagée dans la période DA est plus petite que la chaleur Q absorbée pendant la période BC. Les idées de Carnot n'en ont pas moins conduit M. Clausius à une seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur, que l'on peut formuler ainsi qu'il suit :

Lorsqu'un corps accomplit un cycle de Carnot, les rapports $\frac{Q}{T}$, $\frac{Q'}{T}$ sont indépendants de la nature de ce corps, et ne dépendent que des températures θ_0 et θ_1 .

Il suffit d'établir la proposition pour l'un des rapports $\frac{Q}{T}$, $\frac{Q'}{T}$; car l'équation $Q - Q' = AT$ la démontre pour l'un si elle est reconnue vraie pour l'autre.

Observons d'abord que si, dans l'évolution directe, le corps

produit sur le milieu ambiant un travail T, moyennant l'emprunt de la quantité de chaleur Q à la source supérieure, et l'abandon d'une quantité de chaleur Q' à la source inférieure, on peut, en renversant le cycle, et en exerçant sur le corps ce même travail T, faire passer la quantité Q de chaleur dans la source supérieure, en empruntant la quantité de chaleur Q' à la source inférieure.

Prenons successivement deux corps X et Y; faisons parcourir au premier m cycles de Carnot dans le sens direct, entre deux sources de chaleur aux températures θ_1 et θ_0 ; faisons parcourir au second n cycles de Carnot entre les mêmes sources, mais dans le sens inverse. Appelons Q la quantité de chaleur fournie par la source supérieure à chacune des m évolutions directes du corps X;

Q' , la quantité versée à chacune de ces évolutions dans la source inférieure;

T, le travail produit.

Appelons de même :

Q_1 , la quantité de chaleur puisée à la source inférieure par le corps Y dans chacune des n évolutions inverses;

Q_1 , la quantité de chaleur versée par le même corps à chaque évolution dans la source supérieure;

T_1 , le travail exercé par le corps à chaque évolution.

Au bout des m évolutions directes du corps X et des n évolutions inverses du corps Y, le travail total produit par l'ensemble de ces opérations sera égal à

$$mT - nT_1,$$

et nous pourrons prendre les nombres entiers m et n assez grands pour que cette différence soit aussi petite qu'on voudra. Supposons-la donc nulle. La quantité de chaleur perdue par la source supérieure sera mesurée par la différence

$$mQ - nQ_1,$$

et la quantité de chaleur gagnée par la source inférieure sera de même mesurée par la différence

$$mQ' - nQ'_1.$$

Or ces deux différences doivent s'annuler en même temps que $mT - nT_1$; autrement, il y aurait transport d'une certaine quantité de chaleur de l'une des sources à l'autre, et cela sans travail produit ou sans travail dépensé, chose que l'on peut regarder comme impossible lorsqu'on admet que les deux sources de chaleur communiquent entre elles seulement par l'intermédiaire des corps X et Y.

En d'autres termes, la série des opérations se compense exactement pour chaque source considérée isolément, et l'on a à la fois les trois égalités

$$mT - nT_1 = 0, \quad mQ - nQ_1 = 0, \quad mQ' - nQ'_1 = 0.$$

On en déduit

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{Q'}{Q'_1} = \frac{T}{T_1}.$$

Donc

$$\frac{Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1},$$

ce qui démontre la loi : le rapport $\frac{Q}{T}$ est indépendant de la nature du corps soumis à l'expérience, mais il dépend des températures des deux sources, θ_0 et θ_1 .

On a aussi

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{Q_1}{Q'_1},$$

et ce rapport, indépendant de la nature des corps, est une fonction des températures θ_0 et θ_1 .

APPLICATION DE LA SECONDE LOI.

149. Nous appliquerons la loi de Clausius à un cycle de Carnot infiniment petit dans les deux sens, ABCD; AD est un élément d'isotherme à la température θ ; BC est un élément d'isotherme à la température $\theta + d\theta$. Les éléments AB, CD appartiennent

à deux lignes adiabatiques infiniment voisines. Il résulte de là que la figure ABCD diffère infiniment peu d'un parallélogramme, et que sa surface est équivalente à l'aire AB'C'D obtenue en prolongeant les ordonnées des points A et D, jusqu'à la rencontre de la direction de l'élément BC; elle est donc égale au produit $AB' \times ad$.

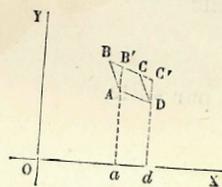


Fig. 75.

Or AB' est l'accroissement de pression qui résulte de l'accroissement $d\theta$ de température, quand le volume spécifique reste égal à Oa . On a en général entre les variations de la pression du volume et de la température l'équation

$$d\theta = \frac{d\theta}{dp} dp + \frac{d\theta}{dV} dV.$$

Ici nous devons faire $dV = 0$, et nous aurons pour la longueur AB' :

$$dp = \frac{1}{\left(\frac{d\theta}{dp}\right)} d\theta.$$

La longueur ad est la variation de volume subie par le corps quand il passe de l'état A à l'état D; représentons-la par dV .

L'aire représentative du travail produit sera donc égale à $dpdV$ ou à $\frac{dVd\theta}{\left(\frac{d\theta}{dp}\right)}$, et on aura, en appelant dQ la quantité de

chaleur versée à la source inférieure dans la période DA, et dQ' la quantité de chaleur puisée à la source supérieure dans la période BC,

$$(a) \quad dQ' - dQ = A \frac{dVd\theta}{\left(\frac{d\theta}{dp}\right)}.$$

Mais, en vertu de la seconde loi, le rapport $\frac{dQ'}{dQ}$ est une fonction des températures θ et $\theta + d\theta$, indépendante de la nature

du corps. D'un autre côté, dQ' est ce que devient dQ quand la température passe de la valeur θ à la valeur $\theta + d\theta$. On a donc

$$dQ' = dQ + \frac{d(dQ)}{d\theta} d\theta,$$

et par suite

$$\frac{dQ'}{dQ} = 1 + \frac{1}{dQ} \frac{d(dQ)}{d\theta} d\theta.$$

Ce rapport étant en vertu de la seconde loi indépendant de la nature du corps, et dépendant uniquement de la température, nous ferons $\frac{1}{dQ} \times \frac{d(dQ)}{d\theta} = \frac{1}{\varphi(\theta)}$, la fonction φ étant la même pour tous les corps. On aura alors

$$\frac{dQ'}{dQ} = 1 + \frac{1}{\varphi(\theta)} d\theta.$$

Donc

$$\frac{dQ' - dQ}{dQ} = \frac{1}{\varphi(\theta)} d\theta;$$

et substituant dans l'équation (a), il vient

$$(b) \quad dQ d\theta = \Lambda \varphi(\theta) \left(\frac{dV d\theta}{dp} \right),$$

ou bien

$$\left(\frac{d\theta}{dp} \right) dQ = \Lambda \varphi(\theta) dV.$$

La différentielle dQ est la quantité de chaleur à introduire dans le corps pour lui faire décrire l'élément isotherme AD. La température étant égale à θ tout le long de cette courbe, on a $d\theta = 0$, et par suite les variations de p et de V sont liées par la relation

$$\frac{d\theta}{dp} dp + \frac{d\theta}{dV} dV = 0.$$

D'un autre côté, l'équation (3) différenciée donne

$$dQ = dU + \Lambda p dV = \frac{dU}{dp} dp + \left(\frac{dU}{dV} + \Lambda p \right) dV.$$

Remplaçons dans cette équation dp par sa valeur tirée de la précédente; il viendra

$$dQ = \left(-\frac{dU}{dp} \frac{d\theta}{dV} + \frac{dU}{dV} + \Lambda p \right) dV,$$

et substituant dans l'équation (b), on aura

$$(5) \quad \left(\frac{dU}{dV} + \Lambda p \right) \frac{d\theta}{dp} - \frac{dU}{dp} \frac{d\theta}{dV} = \Lambda \varphi(\theta),$$

équation qui va nous servir à déterminer la fonction φ .

150. Nous pouvons transformer l'équation (5) en déterminant les dérivées $\frac{dU}{dp}$, $\frac{dU}{dV}$. Reprenons pour cela l'équation

$$dU = \frac{dU}{dp} dp + \frac{dU}{dV} dV,$$

que l'on obtient en différenciant l'équation (2).

Échauffons l'unité de poids du corps de la quantité $d\theta$, sans changement de volume; la quantité de chaleur dU qu'il faut y introduire sera égale à $\frac{dU}{dp} dp$; or elle est d'un autre côté

égale à $c_1 d\theta$, et $d\theta$ est égal à $\frac{d\theta}{dp} dp$, puisque le volume V reste invariable.

Donc

$$\frac{dU}{dp} = c_1 \frac{d\theta}{dp}.$$

Échauffons l'unité de poids du corps de la même quantité $d\theta$, mais en laissant la pression constante. La quantité de chaleur à y introduire pour cela sera $c \frac{d\theta}{dV} dV$; mais cette quantité de chaleur est employée en partie à échauffer le corps, en partie à produire le travail $p dV$; donc enfin

$$c \frac{d\theta}{dV} dV = \frac{dU}{dV} dV + \Lambda p dV,$$

et par suite

$$\frac{dU}{dV} = c \frac{d\theta}{dV} - Ap.$$

Remplaçons dans l'équation (5) les dérivées $\frac{dU}{dV}$, $\frac{dU}{dp}$ par ces valeurs; il viendra

$$c \frac{d\theta}{dV} \frac{d\theta}{dp} - c_1 \frac{d\theta}{dp} \frac{d\theta}{dV} = A\varphi(\theta),$$

ou bien

$$(6) \quad (c - c_1) \frac{d\theta}{dV} \frac{d\theta}{dp} = A\varphi(\theta).$$

Mais nous avons déjà (§ 145) l'équation (4 bis), qui s'applique spécialement aux gaz permanents,

$$(4 \text{ bis}) \quad A = (c - c_1) \frac{d^2\theta}{dV dp}.$$

Multipliant membre à membre, et effaçant les facteurs A et $c - c_1$, il vient

$$\varphi(\theta) = \frac{\frac{d\theta}{dV} \frac{d\theta}{dp}}{\frac{d^2\theta}{dV dp}}.$$

Pour les gaz permanents qui suivent les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, on a

$$pV = R\theta.$$

Donc $\frac{d\theta}{dV} = \frac{p}{R}$, $\frac{d\theta}{dp} = \frac{V}{R}$, $\frac{d^2\theta}{dp dV} = \frac{1}{R}$, et par conséquent

$$\varphi(\theta) = \frac{\frac{p}{R} \times \frac{V}{R}}{\frac{1}{R}} = \frac{pV}{R} = \theta.$$

La fonction $\varphi(\theta)$, qui est indépendante de la nature des corps soumis aux opérations, est donc simplement la *température absolue*, ou la température comptée sur l'échelle centigrade à partir du zéro absolu, c'est-à-dire à partir du degré -273° de l'échelle vulgaire.

APPLICATION AUX GAZ PERMANENTS.

151. L'équation de Mariotte et de Gay-Lussac,

$$R\theta = pV,$$

exprime la température absolue en fonction de la pression et du volume spécifique; c'est l'équation (1) appliquée aux gaz permanents. Proposons-nous de déterminer dans le même cas la quantité U de chaleur interne contenue dans l'unité de poids d'un gaz, ou de déterminer la fonction F qui figure dans l'équation (2)

$$U = F(p, V).$$

Pour cela, différencions cette équation. Il vient

$$dU = \frac{dU}{dp} dp + \frac{dU}{dV} dV.$$

$\frac{dU}{dp} dp$ est l'accroissement infiniment petit de chaleur interne, quand la pression varie de dp , le volume restant constant. La variation de température, dans les mêmes conditions, est $\frac{d\theta}{dp} dp$; et c_1 étant la chaleur spécifique à volume constant, la quantité de chaleur correspondante est

$$c_1 \frac{d\theta}{dp} dp.$$

Donc on a l'équation

$$\frac{dU}{dp} = c_1 \frac{d\theta}{dp} = \frac{c_1 V}{R}.$$

$\frac{dU}{dV} dV$ est de même l'accroissement infiniment petit de chaleur interne correspondant à un accroissement dV du volume, sans variation de la pression. Pour réaliser cette modification, la quantité de chaleur à introduire dans le corps est $c \frac{d\theta}{dV} dV$, mais elle n'est pas tout entière employée à l'échauf-

fement du gaz, car la partie $(c - c_1) \frac{d\theta}{dV} dV$ est transformée en travail; le reste $c_1 \frac{d\theta}{dV} dV$ contribue seul à l'accroissement de la température. Donc enfin

$$\frac{dU}{dV} = c_1 \frac{d\theta}{dV} = \frac{c_1 p}{R}.$$

Introduisons ces deux dérivées dans l'équation qui donne dU ; il viendra

$$dU = \frac{c_1 V}{R} dp + \frac{c_1 p}{R} dV = \frac{c_1}{R} (V dp + p dV) = \frac{d(pV)}{R},$$

et intégrant

$$U = U_0 + \frac{c_1}{R} pV = U_0 + c_1 \theta.$$

Nous pouvons admettre qu'au zéro absolu la quantité de chaleur contenue dans le gaz est nulle; autrement, on pourrait abaisser encore la température du gaz. On a donc $U_0 = 0$, ce qui réduit l'équation précédente à

$$(8) \quad U = c_1 \theta.$$

La quantité de chaleur interne contenue dans un gaz permanent est égale au produit de la chaleur spécifique à volume constant par la température absolue.

152. Cherchons aussi l'équation des lignes adiabatiques; nous aurons pour cela à intégrer l'équation différentielle

$$dU + A p dV = 0.$$

L'équation (8) différenciée nous donne $dU = c_1 d\theta$, et l'équation (7)

$$d\theta = \frac{1}{R} d(pV).$$

De plus on a pour les gaz A $= \frac{c - c_1}{R}$ (§ 139).

L'équation différentielle des lignes adiabatiques devient après ces substitutions

$$\frac{c_1}{R} d(pV) + \frac{c - c_1}{R} p dV = 0,$$

ou bien

$$c p dV + c_1 V dp = 0.$$

Divisant par pV , il vient

$$c \frac{dV}{V} + c_1 \frac{dp}{p} = 0,$$

et en intégrant

$$c \log V + c_1 \log p = \text{constante};$$

les logarithmes sont pris dans le système népérien. Cette équation peut s'écrire

$$c \log V + c_1 \log p = c \log V_0 + c_1 \log p_0,$$

ou

$$c \log \frac{V}{V_0} = c_1 \log \frac{p_0}{p},$$

et revenant des logarithmes aux nombres,

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^c = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{c_1},$$

et enfin

$$(9) \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{c}{c_1}}.$$

Telle est l'équation de la ligne adiabatique qui passe par le point (V_0, p_0) . Cette formule est connue dans la théorie de la chaleur sous le nom d'*équation de Poisson* ou de *Laplace*. Elle est commune à l'ancienne théorie et à la nouvelle.

La différence des températures entre le point (V, p) et le point (V_0, p_0) d'une ligne adiabatique sera donnée en mettant l'équation différentielle de cette ligne sous la forme

$$c_1 d\theta = -A p dV,$$

et en intégrant entre les limites V_0 et V . Il viendra

$$c_1 (\theta - \theta_0) = -A \int_{V_0}^V p dV.$$

Or l'équation (9) donne

$$p = p_0 V_0^{\frac{c}{c_1}} \times \frac{1}{V^{\frac{c}{c_1}}},$$

ou en faisant, pour abrégér, $\frac{c}{c_1} = \gamma$,

$$p = p_0 v_0^\gamma \times v^{-\gamma}$$

Par suite

$$p dV = p_0 v_0^\gamma \times v^{-\gamma} dV,$$

dont l'intégrale est, entre les limites V_0 et V_1 ,

$$p_0 v_0^\gamma \times \left(\frac{V_1^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} - \frac{V_0^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right) = \frac{p_0 v_0^\gamma}{1 - \frac{c}{c_1}} V_1^{\gamma-1} - \frac{p_0 v_0^\gamma}{1 - \frac{c}{c_1}}$$

$$= \frac{c_1}{c - c_1} \left[p_0 v_0 - p_0 v \times \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{c_1}{c - c_1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right].$$

On a donc

$$\theta - \theta_0 = - \frac{A p_0 v_0}{c - c_1} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right],$$

et comme $p_0 V_0 = R \theta_0$, et que $A = \frac{c - c_1}{R}$,

$$\theta - \theta_0 = - \theta_0 \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right],$$

ce qui se réduit enfin à

$$(10) \quad \theta = \theta_0 \times \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \theta_0 \times \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\frac{c - c_1}{c_1}}.$$

ÉCOULEMENT PERMANENT DES GAZ.

153. Appliquons l'équation des forces vives pendant un intervalle de temps très court à la masse de gaz comprise entre le piston mobile P et l'orifice CD d'un vase. Nous supposerons cet orifice évasé pour éviter à la sortie du vase la contraction des filets fluides; l'écoulement se fait alors par filets perpendiculaires à la section CD, avec une vitesse commune v qu'il s'agit de déterminer.

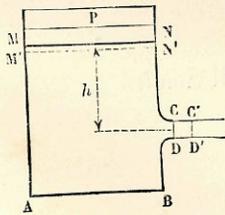


Fig 76.

Le piston P est destiné à maintenir la pression du gaz à l'in-

térieur du vase, malgré l'écoulement qui se fait au dehors. A mesure que le gaz s'écoule, le piston P doit donc se déplacer, mais la section MN est supposée très grande par rapport à la section CD, de sorte que la vitesse du piston demeure très petite par rapport à la vitesse v . Quoi qu'il en soit, représentons par v_0 cette vitesse.

Soit p_0 la pression intérieure du gaz, et p_1 la pression extérieure autour de la veine fluide CD, et aussi dans l'étendue de la section CD (§ 151).

Le régime est supposé permanent; le poids de gaz qui sort pendant un temps dt par l'orifice CD est égal au poids du gaz déplacé par le piston dans le même intervalle de temps. Appelons Π_0 et Π_1 les poids spécifiques correspondants aux pressions p_0 et p_1 , et aux températures au dedans du vase et dans la veine fluide.

Soient ω la section CD, et Ω la section MN.

Les volumes débités dans le temps dt par ces deux sections seront

$$\Omega v_0 dt \quad \text{et} \quad \omega v dt,$$

et les poids correspondants

$$\Pi_0 \Omega v_0 dt \quad \text{et} \quad \Pi_1 \omega v dt,$$

quantités égales que nous représenterons par $Q dt$.

La masse commune à ces deux volumes est égale à $\frac{Q}{g} dt$, et la force vive est $\frac{Q}{g} v^2 dt$ pour le volume sortant CDD'C', et $\frac{Q}{g} v_0^2 dt$ pour le volume MNN'M' déplacé par le piston. Le demi-accroissement des forces vives correspondantes au transport de la masse MNCD dans la position M'N'C'D' est donc égal à

$$\frac{Q}{2g} dt (v^2 - v_0^2).$$

Ce demi-accroissement est égal à la somme des travaux élémentaires des forces qui agissent sur le système matériel en mouvement; ces forces sont la pesanteur, les pressions ex-

térieures sur les faces MN et CD, et les forces intérieures qu'on ne peut négliger quand il s'agit d'un gaz élastique, et non d'un liquide incompressible.

Le travail de la pesanteur est égal au poids Qdt , multiplié par la hauteur verticale h comprise entre le centre de gravité du piston et le centre de gravité de l'orifice, c'est-à-dire à $Qdt \times h$.

Le travail de la pression du piston est positif et égal à

$$p_0 \times \text{vol. (MNN'M')} = \frac{p_0}{\Pi_0} \times Qdt.$$

Le travail de la pression dans la veine CD est négatif et égal

$$\text{à } -\frac{p_1}{\Pi_1} \times Qdt.$$

Enfin, le travail des forces intérieures est égal, au signe près, au travail nécessaire pour amener le poids Qdt de gaz de la pression p_0 de l'intérieur à la pression p_1 du dehors; appelant V le volume spécifique sous une pression quelconque p , ce travail, pris positivement, sera égal par unité de poids à $-\int_{p=p_0}^{p=p_1} pdV$, et pour le poids Qdt , à $-Qdt \int_{p_0}^{p_1} pdV$;

donc le travail des forces intérieures est $+Qdt \int_{p_0}^{p_1} pdV$.

On a en résumé l'équation

$$\frac{Qdt}{2g} (v^2 - v_0^2) = Qdt \times h + \frac{p_0}{\Pi_0} Qdt - \frac{p_1}{\Pi_1} Qdt + Qdt \int_{p_0}^{p_1} pdV,$$

ou, en divisant par Qdt ,

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\Pi_0} - \frac{p_1}{\Pi_1} + \int_{p_0}^{p_1} pdV.$$

Le dernier terme dépend de la manière dont la température varie le long des filets fluides. On peut faire à ce sujet trois hypothèses principales.

154. 1° Poids spécifique constant. Alors $\Pi_0 = \Pi_1$, et $dV = 0$.

La formule devient

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\Pi_1} - \frac{p_1}{\Pi_1},$$

et le gaz se comporte comme un liquide dont le poids spécifique serait égal à Π_1 . Le gaz se refroidit à mesure qu'il s'écoule; en effet on a

$$\frac{p_1}{\Pi_1} = R\theta_1$$

et

$$\frac{p_0}{\Pi_1} = R\theta_0.$$

Si donc $p_1 < p_0$, il faut aussi que $\theta_1 < \theta_0$.

Le gaz perd par unité de poids écoulé une quantité de chaleur interne $c_1(\theta_0 - \theta_1)$, et cette disparition de chaleur équivaut à un travail moteur, $\Lambda c_1(\theta_0 - \theta_1)$, qui s'ajoute au travail de la pesanteur et des pressions pour augmenter la vitesse de l'écoulement.

155. 2° Température constante. Alors

$$\frac{p_1}{\Pi_1} = \frac{p_0}{\Pi_0} = R\theta,$$

et l'équation se réduit à

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = h + \int_{p_0}^{p_1} pdV.$$

Or l'équation $pV = R\theta$, où θ est constant, nous donne $p dV = -V dp$, et

$$\int_{p=p_0}^{p=p_1} pdV = -\int_{p_0}^{p_1} V dp = -R\theta \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = -R\theta \log \frac{p_1}{p_0} = R\theta \log \frac{p_0}{p_1}.$$

L'équation du mouvement devient donc

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = h + R\theta \log \frac{p_0}{p_1}.$$

En général v_0 est beaucoup plus petit que v , puisque la section du piston est beaucoup plus grande que celle de l'orifice.

La hauteur h est peu considérable par rapport au second terme, et la formule devient

$$\frac{v^2}{2g} = R\theta \log \frac{p_0}{p_1}.$$

Cette formule est connue dans la dynamique des gaz sous le nom de *formule de Navier*. Elle peut se simplifier notablement lorsque le rapport $\frac{p_1}{p_0}$ est voisin de l'unité. Remarquons que $\log \frac{p_1}{p_0}$ est l'intégrale de $\frac{dp}{p}$ prise entre les limites p_0 et p_1 ; si ces deux limites sont peu différentes, nous pouvons substituer approximativement à la quantité variable p qui est en dénominateur, la moyenne arithmétique, $\frac{p_0 + p_1}{2}$, de ses valeurs extrêmes. Il vient alors

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\left(\frac{p_0 + p_1}{2}\right)} = \frac{p_1 - p_0}{\left(\frac{p_0 + p_1}{2}\right)} = \frac{2}{p_0 + p_1} (p_1 - p_0),$$

et l'équation prend la forme simple

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{2R\theta}{p_0 + p_1} (p_0 - p_1).$$

Remarquons que sous la pression moyenne $\frac{p_1 + p_0}{2}$, le poids spécifique Π du gaz à la température θ est donné par l'équation

$$\frac{p_1 + p_0}{2\Pi} = R\theta.$$

Donc

$$\frac{2R\theta}{p_1 + p_0} = \frac{1}{\Pi}, \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{2g} = \frac{p_0}{\Pi} - \frac{p_1}{\Pi};$$

ce qui montre que le gaz se comporte comme un liquide dont le poids spécifique Π correspondrait à la demi-somme des pressions extrêmes.

L'unité de poids du gaz à la température absolue θ con-

tient une quantité de chaleur interne $c_1\theta$. La température ne changeant pas malgré le travail extérieur produit par la détente du gaz, la quantité de chaleur qu'il faut communiquer au gaz par unité de poids pendant la détente est égale à $A \int p dV$, c'est-à-dire à $AR\theta \log \frac{p_0}{p_1}$.

Cherchons encore l'expression de la *dépense* de l'orifice; on peut l'évaluer soit en poids, soit en volume. En poids, elle est égale $\Pi_1 \omega v$; en volume, sous la pression p_1 , à ωv , et sous une pression p' quelconque, la température restant la même, à $\omega v \times \frac{p_1}{p'}$.

$$\text{Or } v = \sqrt{2gR\theta \log \frac{p_0}{p_1}}.$$

La dépense en volume de gaz, réduite à la pression p' , est donc égale à

$$\frac{\omega}{p'} \sqrt{2gR\theta} \times p_1 \sqrt{\log \frac{p_0}{p_1}},$$

et sous cette forme on voit qu'il y a une valeur de p_1 qui la rend maximum. Pour trouver cette valeur, il suffit d'égaliser à 0 la dérivée du carré $p_1^2 \log \frac{p_0}{p_1}$, ou de $p_1^2 \log p_0 - p_1^2 \log p_1$. Il vient ainsi

$$2p_1 \log p_0 - 2p_1 \log p_1 - p_1 = 0,$$

ou bien $2 \log p_0 - 2 \log p_1 - 1 = 0$, en écartant la solution $p_1 = 0$. On en déduit $\frac{p_0}{p_1} = \sqrt{e}$, et $p_1 = \frac{p_0}{\sqrt{e}}$, e étant la base des logarithmes népériens.

156. 3° *Le gaz en s'écoulant ne reçoit ni n'émet de chaleur*: en d'autres termes, la courbe de ses états thermiques successifs est une ligne adiabatique.

Reprenons l'équation

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = h + \frac{p_0}{\Pi_0} - \frac{p_1}{\Pi_1} + \int_{p_0}^{p_1} p dV.$$

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, on a à la fois les deux équations

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\frac{c}{c_1}} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma,$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\frac{c}{c_1} - 1} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma - 1},$$

V_1, V_0 sont les volumes spécifiques inverses des poids spécifiques Π_1 et Π_0 .

On a donc

$$\frac{p_1}{\Pi_1} = R\theta_1, \quad \frac{p_0}{\Pi_0} = R\theta_0.$$

On a de plus (§ 152)

$$p dV = p_0 V_0^\gamma \times V^{-\gamma} dV.$$

Donc

$$\int p dV = p_0 V_0^\gamma \times \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1},$$

intégrale qu'il faut prendre entre les limites correspondantes à p_0 et à p_1 , ou, ce qui revient au même, entre les limites V_0 et V_1 . Ce qui donne

$$\int_{p_0}^{p_1} p dV = p_0 V_0^\gamma \times \left(\frac{V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{V_0^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) = p_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma \times \frac{V_1}{1-\gamma} - \frac{p_0 V_0}{1-\gamma}$$

$$= \frac{p_1 V_1 - p_0 V_0}{1-\gamma} = \frac{R(\theta_1 - \theta_0)}{1 - \frac{c}{c_1}}.$$

Substituons dans l'équation du mouvement, il vient

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = h + R\theta_0 - R\theta_1 + \frac{c_1 R(\theta_1 - \theta_0)}{c_1 - c}$$

$$= h + R(\theta_0 - \theta_1) \times \left(1 + \frac{c_1}{c - c_1} \right) = h + \frac{c R(\theta_0 - \theta_1)}{c - c_1}.$$

$$\text{Or } \frac{1}{A} = \frac{R}{c - c_1}.$$

Donc enfin

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = h + \frac{c}{A}(\theta_0 - \theta_1),$$

formule qu'on peut simplifier en supprimant les termes négligeables, $\frac{v_0^2}{2g}$ et h , ce qui donne

$$v = \sqrt{2g \frac{c}{A} (\theta_0 - \theta_1)}$$

Cette équation est due à Weisbach.

On peut déterminer θ_1 en fonction de θ_0 , de p_1 et de p_0 , par l'équation $\theta_1 = \theta_0 \times \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1}$, et comme

$$\frac{V_0}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

d'où résulte

$$\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{c}{c_1}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{c-c_1}{c}},$$

on a aussi

$$\theta_1 = \theta_0 \times \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{c-c_1}{c}},$$

et la formule simplifiée devient

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{c}{A} \theta_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{c-c_1}{c}} \right].$$

157. Cette formule, ainsi que d'autres équations de la théorie de la chaleur et de la physique mathématique, renferme le rapport $\frac{c}{c_1}$ des deux chaleurs spécifiques des gaz.

On peut déduire ce rapport de la connaissance des valeurs de c et de c_1 ; mais on peut aussi le déterminer sans passer par les valeurs des chaleurs spécifiques, dès qu'on connaît le coefficient de dilatation α , et le coefficient β d'élévation de la température pour une compression déterminée.

En effet, soit θ la température d'un gaz; élevons sa température de la quantité $d\theta$ sans changement de pression. Il faudra pour cela lui communiquer par unité de poids une

quantité de chaleur $cd\theta$, et le volume sera multiplié par le rapport $\frac{1 + \alpha(\theta + d\theta)}{1 + \alpha\theta}$, ou par $1 + \frac{\alpha d\theta}{1 + \alpha\theta}$.

Exerçons ensuite sur ce gaz une compression mesurée par la fraction $\frac{\alpha d\theta}{1 + \alpha\theta}$, de manière à ramener le volume du gaz à ce qu'il était d'abord.

L'élévation de température correspondante sera $\frac{\alpha\beta d\theta}{1 + \alpha\theta}$; la température définitive sera donc égale à $\theta + d\theta + \frac{\alpha\beta d\theta}{1 + \alpha\theta}$, et comme le volume est redevenu le même, on aurait obtenu la même élévation de température en introduisant dans chaque unité de poids du gaz une quantité de chaleur égale à $e_1(d\theta + \frac{\alpha\beta d\theta}{1 + \alpha\theta})$; d'où résulte l'égalité

$$e_1 d\theta \left(1 + \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\theta}\right) = cd\theta,$$

$$\text{et par suite } \frac{c}{e_1} = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\theta}.$$

Une expérience de Clément et Désormes est fondée sur ce principe. Mais elle conduit à une valeur un peu trop faible, 1,35, du rapport cherché. Généralement on adopte aujourd'hui la valeur $\frac{c}{e_1} = 1,41$, ou environ $\sqrt{2}^1$.

CYCLE DE CARNOT POUR UN GAZ PERMANENT. — RENDEMENT DES MACHINES THERMIQUES.

158. Soit ABCD le cycle complet, formé de deux lignes isothermes AB, CD, aux températures θ et θ_0 , et de deux lignes adiabatiques BC, DA.

Appelons p la pression et V le volume spécifique qui cor-

¹ 1,42 d'après Masson, 1,39 d'après Regnault, 1,37 d'après Gay-Lussac.

respondent au point A; p_1 et V_1 les mêmes quantités en B; p_2 et V_2 les mêmes quantités en C, et p_3 et V_3 en D.

Nous aurons par la définition des lignes isothermes

$$pV = p_1V_1 = R\theta,$$

$$p_2V_2 = p_3V_3 = R\theta_0,$$

et par la définition des lignes adiabatiques,

$$\frac{p}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V}\right)^\gamma, \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma.$$

$$\text{De ces équations on tire } \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V}\right)^{\gamma-1} = \frac{\theta}{\theta_0}.$$

Le cycle est défini par les températures θ et θ_0 qui donnent le tracé des isothermes, et par deux points, soit A et B, soit A et C, qui donnent les lignes adiabatiques. Les équations permettent de trouver les inconnues en fonction de ces données.

Le travail produit par le cycle direct est mesuré par l'aire du quadrilatère courbe ABCD; au lieu d'évaluer directement cette surface, rappelons-nous (§ 551) qu'il est aussi égal à $E(Q - Q')$, Q étant la quantité de chaleur prise à la source supérieure pour faire décrire au gaz le côté AB, et Q' la quantité versée à la source inférieure pendant le parcours CD. Or la température ne changeant pas dans le premier parcours, la quantité Q est tout entière transformée en travail, et on a

$$EQ = \int_V^{V_1} p dV = R\theta \int_V^{V_1} \frac{dV}{V} = R\theta \log \frac{V_1}{V}.$$

$$\text{De même } EQ' = R\theta_0 \log \frac{V_2}{V_3}.$$

Mais $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V}$ en vertu de la dernière relation.

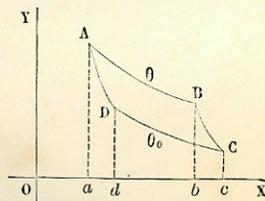


Fig. 77.

Donc $\frac{V_1}{V} = \frac{V_2}{V_3}$, et par suite $\log \frac{V_1}{V} = \log \frac{V_2}{V_3}$.

D'où résulte

$$E(Q - Q') = R(\theta - \theta_0) \log \frac{V_1}{V}.$$

Le principe de Clausius nous apprend que le rapport $\frac{Q}{Q'}$ est indépendant du corps soumis au cycle de Carnot, et ne dépend que des températures θ et θ_0 . Donc il en est de même du rapport

$$\frac{Q - Q'}{Q},$$

qui mesure le *rendement* de la machine thermique où un corps quelconque serait assujéti à un cycle de cette nature; car c'est le rapport de la chaleur convertie en travail à la chaleur totale fournie par la source supérieure. Or ici

$$\frac{Q - Q'}{Q} = \frac{\left(\frac{R(\theta - \theta_0) \log \frac{V_1}{V}}{E} \right)}{\left(\frac{R\theta \log \frac{V_1}{V}}{E} \right)} = \frac{\theta - \theta_0}{\theta}.$$

Donc dans tous les cas, et quel que soit le corps assujéti à décrire un cycle de Carnot, le rendement de la machine, ou le coefficient d'utilisation de la chaleur, est égal au rapport de la *chute de chaleur*, $\theta - \theta_0$, entre les deux sources, à la température absolue de la source la plus chaude. Ce résultat est d'accord avec les conséquences que Sadi Carnot avait autrefois déduites de la théorie du fluide calorifique.

Il serait facile de démontrer que lorsqu'un corps accomplit un cycle thermique quelconque, le *rendement* de ce cycle, ou le rapport de la chaleur utilisée à la chaleur totale communiquée au corps, est moindre que le rendement du *cycle de Carnot circonscrit*, c'est-à-dire du cycle de Carnot correspondant à la même chute de chaleur.

APPLICATION AUX VAPEURS.

159. La *pression p d'une vapeur saturée* est une fonction de la température absolue θ (§ 69). Soit d'une manière générale

$$p = F(\theta)$$

la relation empirique qui lie ensemble ces deux quantités.

La fonction F a été déterminée pour la vapeur d'eau par diverses expériences, entre autres par celles de Regnault, qui l'a exprimée sous la forme suivante :

Soit F la pression de la vapeur évaluée en millimètres de mercure;

τ la température en degrés de l'échelle centigrade, à partir du zéro ordinaire, c'est-à-dire la différence $\theta - 273^\circ$;

a, b, α des nombres constants; on aura

$$\log \text{ tab. } F = a - b\alpha\tau,$$

avec les déterminations suivantes :

$$a = 5,4255177,$$

$$\log \text{ tab. } b = 0,6821547,$$

$$\log \text{ tab. } \alpha = 1,9972511.$$

D'ailleurs p se déduit de F par la proportion

$$\frac{p}{F} = \frac{10340}{760},$$

en observant que 10340 kilogrammes par mètre carré expriment la pression normale atmosphérique de 760 millimètres de mercure.

160. La *chaleur spécifique de l'eau liquide* est variable avec la température; et en appelant c la chaleur spécifique à la température τ , mesurée en degrés centigrades de l'échelle ordinaire, on a la relation empirique:

$$c = 1 + 0,00004\tau + 0,0000009\tau^2.$$

La différence avec l'unité est donc peu sensible; pour $\tau = 200^\circ$, elle s'élève seulement à 0,016.

La formule suppose que l'eau, pendant qu'on l'échauffe, reste sous la pression constante qui correspond à la vapeur saturée à τ degrés.

161. Supposons qu'on prenne un kilogramme d'eau à zéro, qu'on l'élève à la température τ sous la pression qui correspond à la saturation à τ degrés, et qu'enfin on le réduise en vapeur sous cette pression. La quantité de chaleur λ à introduire dans ce kilogramme d'eau pour en accomplir l'échauffement et la vaporisation est donnée par la formule empirique

$$\lambda = 606,5 + 0,505\tau.$$

Par exemple à 100° , la vapeur saturée est sous la pression normale; la quantité de chaleur λ nécessaire pour convertir en vapeur sous cette pression un kilogramme d'eau pris à 0° est égale à 657 calories.

Cette quantité se décompose en deux parties: l'une est la quantité de chaleur nécessaire pour échauffer l'eau liquide de 0 à 100° ; l'autre est la *chaleur latente de vaporisation* à la température de 100° . Pour calculer la première partie, remarquons que, pour produire un accroissement $d\tau$ de la température, la quantité de chaleur nécessaire est égale à $cd\tau$, ou à

$$d\tau + 0,00004\tau d\tau + 0,0000009\tau^2 d\tau.$$

Il suffit donc d'intégrer cette expression entre les limites 0 et 100° . L'intégrale prise à partir de 0° est

$$\tau + 0,00002\tau^2 + 0,0000003\tau^3.$$

Faisant $\tau = 100$, il vient la valeur numérique 100,5. Il faut donc 100 calories $\frac{1}{2}$ pour amener un kilogramme d'eau liquide de 0 à 100° ; il en faut par conséquent $657 - 100,5 = 556,5$ pour convertir ce kilogramme d'eau en vapeur, toutes les opérations s'effectuant sous la pression normale de 760 milli-

mètres de mercure. Cette seconde partie est la chaleur de vaporisation à la température de 100° .

En général, r étant la chaleur de vaporisation à la température τ , on a

$$r = \lambda - \int_0^\tau cd\tau.$$

FORMATION DE LA VAPEUR A L'ÉTAT DE SATURATION.

162. Prenons un kilogramme d'eau à la température absolue θ , et transformons-le en vapeur saturée à cette même température, c'est-à-dire sous la pression constante $F(\theta)$.

Cherchons la quantité de chaleur r qu'il faut y introduire du dehors pour produire ce changement d'état.

Pour la calculer, nous nous servons de la formule déduite dans le § 149 de la considération du cycle de Carnot: nous la prendrons sous la forme

$$\frac{d\theta}{dp} dQ = \Lambda_{\tau(\theta)} dV,$$

et nous remplacerons dQ par dr .

$\frac{d\theta}{dp}$ est la dérivée de θ par rapport à p , ou la limite du rapport de l'accroissement de la température à l'accroissement de la pression, quand le volume V ne change pas. Pour obtenir cette dérivée, nous ne pouvons faire aucun usage de l'équation (1) différenciée; car elle nous donne

$$d\theta = \frac{d\theta}{dp} dp + \frac{d\theta}{dV} dV.$$

Or, dans le changement d'état, la température restant la même, la pression aussi, on a $d\theta = 0$ et $dp = 0$; de plus θ et p sont liés par la relation

$$p = F(\theta),$$

où n'entre pas V ; donc $\frac{d\theta}{dV} = 0$. L'équation (1) différenciée se réduit donc à une identité, et ne nous apprend rien.

Nous avons du moins, en différentiant l'équation $p = F(\theta)$,

$$dp = F'(\theta) d\theta.$$

$$\text{Donc } \frac{d\theta}{dp} = \frac{1}{F'(\theta)}.$$

La fonction $\varphi(\theta)$, la même pour tous les corps, est égale à θ ; substituant, il vient

$$\frac{dr}{F'(\theta)} = A\theta dV,$$

ou bien $dr = A\theta F'(\theta) dV$.

Intégrons en observant que θ est constant. Il viendra

$$r = A\theta F'(\theta)(V - V'),$$

V' désignant le volume de l'unité de poids d'eau liquide, et V le volume de l'unité de poids de vapeur saturée à la même température. Nous représenterons cette différence $V - V'$ par la lettre u ; ce sera l'excès du volume spécifique de la vapeur saturée sur le volume spécifique de l'eau liquide dans les mêmes conditions de température et de pression. Nous aurons donc

$$r = A\theta F'(\theta)u.$$

Mais puisque l'eau en se vaporisant se dilate du volume u sous la pression p , elle accomplit un travail extérieur pu , qui correspond à l'emploi d'une quantité de chaleur Apu , et par suite, la chaleur interne fixée par l'eau est égale à la différence $r - Apu$; appelant ρ l'excès de la chaleur interne du kilogramme de vapeur saturée sur la chaleur interne du kilogramme d'eau liquide, nous aurons

$$\rho = r - Apu = A[\theta F'(\theta) - p]u = A[\theta F'(\theta) - F(\theta)]u.$$

Mais

$$u = \frac{r}{A\theta F'(\theta)},$$

et par conséquent

$$Apu = \frac{rp}{\theta F'(\theta)} = \frac{rF(\theta)}{\theta F'(\theta)}.$$

La chaleur de vaporisation r , égale à $\lambda - \int_0^\tau cd\tau$, est une fonction de la température τ , ou de la température absolue θ ; il en est de même de u , et par suite aussi de ρ .

Soit encore J l'excès de la chaleur interne du kilogramme de vapeur saturée à τ degrés sur la chaleur interne du kilogramme d'eau à zéro.

Ces diverses fonctions, u , ρ , J , ont été déterminées par expérience. M. Zeuner a donné les formules suivantes :

$$Apu = 50,456 \log \text{nép. } \frac{\theta}{100},$$

$$\rho = 575,05 - 0,7882\tau,$$

$$J = 575,54 - 0,2542\tau.$$

Connaissant Apu et p en fonction de θ , on en déduira u en fonction de la même variable.

DENSITÉ DE LA VAPEUR SATURÉE.

163. On peut déduire de là le poids spécifique de la vapeur saturée à diverses températures. En effet, le volume spécifique V de la vapeur saturée est égal au volume spécifique de l'eau liquide à la même température, augmenté de u ; et comme l'eau à l'état liquide a une dilatation tout à fait négligeable, on peut poser

$$= V_0 + u,$$

en appelant V_0 le volume spécifique de l'eau liquide à 0° . Si le mètre cube est l'unité de volume et le kilogramme l'unité de poids, le volume spécifique de l'eau liquide est un litre, ou $0^{\text{mc}},001$. Donc $V = 0,001 + u$, et par suite le poids spécifique

de la vapeur est $\frac{1}{V} = \frac{1}{0,001 + u}$.

La table suivante, extraite des travaux de M. Zeuner,

donne quelques nombres relatifs à la vapeur d'eau saturée.

PRESSION DE LA VAPEUR		TEMPÉRATURE EN DEGRÉS CENTIGRADES (ÉCHELLE ORDINAIRE) τ	QUANTITÉ DE CHALEUR CONVERTIE EN TRAVAIL EXTERNE PAR LE CHANGEMENT D'ÉTAT $\Delta p u$	EXCÈS DE LA CHALEUR INTERNE D'UN KIL. DE VAPEUR SATURÉE SUR UN KIL. D'EAU À LA MÊME TEMPÉRATURE $\rho = r - \Delta p u$	EXCÈS DU VOLUME SPÉCIFIQUE DE LA VAPEUR SUR LE VOLUME DE L'EAU LIQUIDE u	POIDS SPÉCIFIQUE DE LA VAPEUR SATURÉE $\frac{1}{V}$ POIDS DU MÈTRE CUBE EN KILOGRAMMES
EN ATMOSPHÈRES	EN KILOGR. PAR MÈTRE CARRÉ p					
$\frac{1}{2}$	5167 ^{kih}	81°,71	58,562	510,65	5,1644	0,516
1	10534	100°,00	40,092	493,21	4,6459	0,607
$1\frac{1}{2}$	15501	114°,74	41,056	486,96	4,1225	0,890
2	20668	120°,60	41,730	479,97	0,8561	1,167
$2\frac{1}{2}$	25855	127°,80	42,282	474,50	0,6959	1,459
3	31002	133°,91	42,742	469,48	0,5846	1,708
$3\frac{1}{2}$	36169	139°,24	43,159	465,27	0,5057	1,975
4	41556	144°,00	43,488	461,55	0,4461	2,257
5	51670	152°,22	44,085	455,05	0,5417	2,737
6	62004	159°,22	44,580	449,55	0,5048	3,270
7	72558	165°,54	45,008	444,71	0,2658	3,776
8	82672	170°,81	45,386	440,40	0,2528	4,277
9	95006	175°,77	45,725	436,49	0,2084	4,775
10	105340	180°,51	46,031	432,91	0,1889	5,266
11	115674	184°,50	46,511	429,91	0,1727	5,757
12	124008	188°,41	46,771	426,52	0,1592	6,242

MÉLANGES DE VAPEUR ET D'EAU LIQUIDE.

164. Un kilogramme d'eau, renfermé dans un vase à la température τ , est en partie transformé en vapeur sous la pression p de saturation; cette pression est donnée par l'équation

$$p = F(\tau + 273).$$

Cherchons l'excès de chaleur interne contenue dans ce mélange, en sus de la chaleur interne d'un kilogramme d'eau liquide à 0° . Nous supposons connue la fraction m du poids total qui est à l'état de vapeur, de telle sorte que $1 - m$ soit la fraction à l'état liquide.

Soient V_0 le volume spécifique de l'eau liquide à 0° ;

V le volume de l'eau liquide à τ degrés;

V' le volume de la vapeur saturée à τ degrés.

On peut considérer la totalité du poids comme ayant été portée de la température 0° à la température τ sans changement d'état; la quantité de chaleur à introduire dans le kilogramme d'eau pour obtenir ce résultat est $\int_0^\tau cd\tau$, mais une partie est employée à produire un travail extérieur égal à $p(V - V_0)$; donc la chaleur fixée dans le corps à l'état de chaleur interne est seulement la différence

$$\int_0^\tau cd\tau - \Delta p(V - V_0).$$

De plus, le poids m d'eau est transformé en vapeur à la température τ et sous la pression p . Appelant r la chaleur de vaporisation (§ 161), la quantité de chaleur interne acquise par le corps sera égale à

$$m[r - \Delta p(V' - V)],$$

ou bien $m(r - \Delta p u)$.

La somme de ces deux quantités est la quantité de chaleur cherchée

$$\int_0^\tau cd\tau - \Delta p(V - V_0) + mr - m\Delta p u.$$

Cette formule se simplifie en remplaçant $r - \Delta p u$ par la fonction ρ , et en supprimant le terme $\Delta p(V - V_0)$, qui est négligeable à cause du peu de dilatation de l'eau liquide. Il vient alors la formule usuelle

$$Y = \int_0^\tau cd\tau + m\rho.$$

La quantité de chaleur nécessaire pour porter, sous la pression constante p , un kilogramme d'eau liquide de la température 0° à la température τ , et pour en convertir la fraction m en vapeur saturée, est donc égale à Y augmenté de la quantité de chaleur convertie en travail, ou à $Y + m\Delta p u$.

165. Cherchons comment varie la quantité Y quand la tem-

température τ varie de $d\tau$. La pression p varie d'après l'équation

$$p = F(\tau + 275^\circ) \quad \text{ou} \quad p = F(\theta),$$

car la vapeur reste saturée, puisqu'elle est toujours en contact avec l'eau liquide. Mais le poids m de vapeur varie aussi.

On aura donc d'une manière générale

$$dY = cd\tau + d(mr) = cd\tau + d(mr) - Ad(mpu).$$

Or

$$d(mpu) = pd(mu) + mudp = pd(mu) + muF'(\theta)d\theta.$$

Nous avons d'un autre côté

$$r = A\delta F'(\theta)u$$

Donc

$$AuF'(\theta) = \frac{r}{\theta}$$

Substituant, il vient

$$dY = cd\tau + d(mr) - \frac{mr}{\theta}d\tau - Apd(mu).$$

Nous pouvons remplacer $d\theta$ par $d\tau$, puisque $\theta = \tau + 275$.

Le produit $pd(mu)$ représente approximativement le travail extérieur correspondant au changement d'état de la nouvelle quantité d'eau vaporisée. En effet, si V est le volume du kilogramme d'eau liquide, $V + mu$ est le volume occupé par le mélange du poids m de vapeur saturée et du poids $1 - m$ d'eau liquide. La variation de ce volume est $dV + d(mu)$; comme l'eau liquide est à peine dilatable, on peut négliger dV devant $d(mu)$; ce dernier terme représente seul la variation cherchée, et $pd(mu)$ est le travail extérieur produit par le changement d'état. Donc $Apd(mu)$ est la quantité de chaleur correspondante, et $dY + Apd(mu)$ est la quantité de chaleur dQ qu'il est nécessaire d'introduire dans le mélange pour produire l'élévation de température $d\tau$.

On a donc

$$dQ = cd\tau + d(mr) - \frac{mr}{\theta}d\tau,$$

ou bien, en revenant aux températures absolues,

$$dQ = cd\theta + d(mr) - \frac{mr}{\theta}d\theta.$$

Si le changement infiniment petit s'est opéré sans émission ni introduction de chaleur extérieure, $dQ = 0$; la condition pour qu'il en soit ainsi s'exprime par l'équation

$$cd\theta + d(mr) - \frac{mr}{\theta}d\theta = 0$$

Divisons par θ et intégrons; il vient

$$\int \frac{cd\theta}{\theta} + \frac{mr}{\theta} = \text{constante},$$

ou bien, en prenant l'intégrale entre les limites θ_1 et θ_2 , et désignant par m_1, m_2 les proportions de l'eau convertie en vapeur à ces deux températures, et par r_1, r_2 les chaleurs de vaporisation correspondantes,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{cd\theta}{\theta} = \frac{m_1 r_1}{\theta_1} - \frac{m_2 r_2}{\theta_2}.$$

Ces équations permettent de résoudre les problèmes suivants.

166. La totalité du liquide étant transformée en vapeur saturée à la température θ_1 , reconnaître si cette vapeur est saturée ou surchauffée à la température θ_2 .

On exprimera la condition indiquée en posant $m_1 = 1$; il viendra donc

$$\frac{m_2 r_2}{\theta_2} = \frac{r_1}{\theta_1} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{cd\theta}{\theta}$$

Si cette équation donne pour m_2 une valeur supérieure à l'unité, cela indique que la vapeur ne sature plus l'espace à la température θ_2 ; car s'il restait du liquide, ce liquide tendrait encore à se transformer en vapeur. Dans ce cas, la vapeur est surchauffée. Si, au contraire, $m_2 < 1$, une partie de la vapeur se condense à l'état liquide. Enfin, si $m_2 = 1$, la

vapeur reste saturée à la température θ_2 comme à la température θ_1 .

167. Le mélange d'eau liquide et de vapeur ne recevant de l'extérieur aucune chaleur, et n'en émettant pas, quelle doit être la valeur du rapport m pour qu'une variation $d\theta$ de température n'entraîne ni formation de vapeur ni condensation?

L'équation différentielle

$$cd\theta + d(mr) - \frac{mrd\theta}{\theta} = 0$$

résout la question en y faisant m constant, et en résolvant par rapport à m . Il vient

$$m \left(dr - \frac{rd\theta}{\theta} \right) + cd\theta = 0$$

et

$$m = \frac{c\theta}{r - \theta \frac{dr}{d\theta}}$$

Dans cette formule nous substituerons les valeurs de c et de r en fonction de θ ou de τ , données dans les §§ 160 et 161; il viendra en définitive, en mettant en évidence la température τ :

$$m = (273 + \tau) \times \frac{1 + 0,00004\tau + 0,0000009\tau^2}{796,235 + 0,01092\tau + 0,0002657\tau^2 + 0,0000006\tau^3}$$

Cette formule, réduite en table, donne les résultats suivants :

TEMPÉRATURE τ	PROPORTIONS DU MÉLANGE	
	EN VAPEUR m	EN EAU LIQUIDE $1 - m$
0°	0,543	0,657
50°	0,407	0,593
100°	0,472	0,528
150°	0,559	0,461
200°	0,604	0,596

La proportion de vapeur augmente avec la température du mélange; elle augmente donc aussi quand on comprime le mélange, puisque toute compression dégage de la chaleur, et elle diminue quand on le laisse se dilater, puisqu'il en résulte un refroidissement. Si donc la proportion de vapeur dans un mélange de vapeur et d'eau liquide est égale ou supérieure à la valeur de m indiquée dans cette table, la compression du mélange sera accompagnée d'une vaporisation partielle d'eau liquide, et l'expansion d'une condensation partielle de vapeur.

Les effets contraires auront lieu si la proportion de vapeur est inférieure à la valeur de m , et c'est là le phénomène qui se produit le plus souvent, notamment pendant la détente dans les machines à vapeur.

VITESSE DE L'ÉCOULEMENT DES VAPEURS.

168. Le problème de l'écoulement des vapeurs se résout comme celui de l'écoulement des gaz (§ 155), et conduit à la formule générale

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p_1}{\Pi_1} - \frac{p_2}{\Pi_2} + \frac{Q + U_1 - U_2}{A}$$

dans laquelle v est la vitesse de l'écoulement;

p_1, p_2 les pressions à l'intérieur du vase et au pourtour de la veine fluide;

Π_1 et Π_2 les poids spécifiques correspondants;

Q la quantité de chaleur reçue du dehors par unité de poids du fluide;

U_1 la quantité de chaleur interne du fluide dans le vase, par unité de poids;

U_2 la quantité de chaleur interne du fluide dans la veine, par unité de poids;

A l'équivalent calorifique du travail.

Pour appliquer cette formule, nous supposerons que le fluide est formé d'un mélange comprenant un poids m_1 de va-

peur et un poids $1 - m_1$ d'eau liquide, et qu'il ne reçoive ni n'émette aucune chaleur pendant tout son trajet, ce qui revient à faire $Q = 0$.

La proportion m de vapeur variera à mesure que le mélange s'écoule, et comme il n'y a ni chaleur extérieure reçue, ni chaleur émise au dehors, on aura, en appelant m_2 la proportion de vapeur dans la veine fluide, θ_1 et θ_2 les températures absolues, τ_1 et τ_2 les températures à l'échelle ordinaire :

$$\frac{m_1 r_1}{\theta_1} - \frac{m_2 r_2}{\theta_2} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{cd\tau}{\theta}$$

La chaleur spécifique c de l'eau liquide varie peu avec la température ; en la regardant comme constante, on aura

$$\int \frac{cd\tau}{\theta} = c \int \frac{d\tau}{\theta} = c \int \frac{d\theta}{\theta} = c \log \frac{\theta_2}{\theta_1},$$

les logarithmes étant pris dans le système népérien.

On aura donc approximativement l'équation

$$\frac{m_1 r_1}{\theta_1} - \frac{m_2 r_2}{\theta_2} = c \log \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

M. Zeuner fait $c = 1,0224$ pour l'eau à la température des chaudières à haute pression, et $c = 1,015$ pour les températures voisines de 100° . On a de plus, d'après Regnault (§ 161) :

$$r = 606,5 + 0,505\tau - (\tau + 0,00002\tau^2 + 0,0000005\tau^3),$$

formule qu'on peut simplifier, en posant

$$r = 606,5 + 0,505\tau - c\tau,$$

et en remplaçant c par $1,0224$ ou par $1,015$, selon les cas. A l'aide de l'une ou de l'autre de ces équations on calculera les valeurs de r_1 et r_2 aux températures τ_1 et τ_2 , et l'équation posée plus haut fera connaître m_2 .

On connaît donc les proportions du mélange de vapeur et d'eau dans le vase et dans la veine. Le volume spécifique, $\frac{1}{\Pi_1}$,

du fluide dans le vase diffère très peu du volume spécifique de la vapeur qui y entre, car le volume de l'eau est négligeable vis-à-vis du volume de la vapeur. Appelons u_1 l'excès du volume spécifique de la vapeur sur le volume spécifique de l'eau à la température τ_1 ; nous pourrons poser

$$\frac{1}{\Pi_1} = m_1 u_1,$$

et par suite $\frac{p_1}{\Pi_1} = m_1 p_1 u_1$.

Nous ferons de même $\frac{p_2}{\Pi_2} = m_2 p_2 u_2$.

Enfin nous avons (§ 164)

$$U_1 = \int_0^{\tau_1} cd\tau + m_1 r_1 - m_1 p_1 u_1,$$

$$U_2 = \int_0^{\tau_2} cd\tau + m_2 r_2 - m_2 p_2 u_2.$$

Substituant toutes ces valeurs dans l'équation générale du mouvement, il vient

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2g} &= m_1 p_1 u_1 - m_2 p_2 u_2 + \frac{\int_{\tau_2}^{\tau_1} cd\tau + m_1 r_1 - m_2 r_2}{A} - m_1 p_1 u_1 + m_2 p_2 u_2 \\ &= \frac{1}{A} \left(\int_{\tau_2}^{\tau_1} cd\tau + m_1 r_1 - m_2 r_2 \right). \end{aligned}$$

Or

$$m_2 r_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1} \times m_1 r_1 - \theta_2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{cd\tau}{\theta}.$$

Attribuons encore à c une valeur moyenne constante, il viendra

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} cd\tau = c(\tau_1 - \tau_2),$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{cd\tau}{\theta} = c \log \text{nép.} \frac{\theta_2}{\theta_1} = -c \log \text{nép.} \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

Approximativement, on peut aussi remplacer θ en dénominateur par une valeur constante; on pourra faire sans grande erreur $\theta = \theta_2$, à cause de la petitesse de la différence $\tau_2 - \tau_1$, par rapport aux valeurs du dénominateur θ , qui varie de $\tau_1 + 275$ à $\tau_2 + 275$.

On aura alors

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{cd\tau}{\theta} = -\frac{c(\tau_1 - \tau_2)}{\theta_2},$$

$$m_2 r_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1} m_1 r_1 + c(\tau_1 - \tau_2),$$

et

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{c(\tau_1 - \tau_2)}{A} + \frac{m_1 r_1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} m_1 r_1 - c(\tau_1 - \tau_2)}{A}$$

$$= \frac{m_1 r_1}{A} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1} = \frac{m_1 r_1}{A} \frac{\tau_1 - \tau_2}{275 + \tau_1}.$$

Le carré de la vitesse de l'écoulement contient donc en facteur la *chute de chaleur*, $\tau_1 - \tau_2$, entre le vase et la veine fluide.

Quand la pression intérieure p_1 est beaucoup plus élevée que la pression extérieure p_2 , la vapeur s'échappe avec une vitesse très considérable, et l'expansion qui résulte de ce changement de pression est accompagnée d'un refroidissement très sensible. C'est pour cela qu'on peut sans danger placer la main dans un jet de vapeur sortant d'une chaudière à haute pression, tandis qu'il serait très dangereux de faire la même expérience avec la vapeur sortant d'une chaudière où la pression serait légèrement supérieure à la pression atmosphérique.

RECHERCHE DU TRAVAIL DANS LA MACHINE A VAPEUR.

169. Nous ferons pour cette recherche les hypothèses suivantes :

La vapeur produite par la chaudière sous la pression p_1 est admise dans un cylindre, où elle pousse un piston mobile. Lorsque le piston a parcouru la fraction k de sa course, le

conduit d'admission se ferme, et la vapeur se détend dans le cylindre jusqu'au bout de la course du piston, sans émission sensible de chaleur au dehors, et sans introduction de chaleur extérieure. La communication est alors ouverte avec le condenseur, et elle reste ouverte pendant toute la course rétrograde du piston; nous représenterons par p_2 la pression dans le condenseur.

Le travail de la vapeur est proportionnel au poids de fluide que l'on introduit dans les cylindres; nous supposons ici que cette quantité soit égale à l'unité de poids; elle comprend un poids m_1 de vapeur, et un poids $1 - m_1$ d'eau liquide à la même température.

Il y a trois périodes à distinguer dans l'oscillation complète du piston : l'*admission*, la *détente* et la *condensation* ou *échappement*.

1° *Admission*. — Soit V_1 le volume spécifique de l'eau liquide sous la pression p_1 et à la température τ_1 de la chaudière; u_1 , l'excès du volume de la vapeur saturée sur le volume d'eau liquide dans les mêmes conditions. L'emploi dans le cylindre de l'unité de poids du mélange d'eau et de vapeur correspond à un travail égal à $p_1(V_1 + m_1 u_1)$; mais il faut remplacer dans la chaudière le volume d'eau V_1 par un volume égal fourni par l'alimentation, et cette opération exige un travail $p_1 V_1$, que la machine doit développer : le travail moteur disponible se réduit à $m_1 p_1 u_1$.

2° *Détente*. — Supposons que, pendant la détente, l'état thermique du mélange suive une ligne adiabatique entre les températures τ_1 et τ_2 . Le travail créé par cette détente sera égal à $\frac{U_1 - U_2}{A}$, en désignant par U_1 et U_2 les chaleurs internes du mélange à la fin de l'admission et au commencement de l'échappement. Or on a trouvé (§ 164) les formules :

$$U_1 = \int_0^{\tau_1} cd\tau + m_1 r_1 - m_1 A p_1 u_1,$$

$$U_2 = \int_0^{\tau_2} cd\tau + m_2 r_2 - m_2 A p_2 u_2.$$

On connaît r_1, r_2 (§ 161); le rapport m_2 est donné en fonction de m_1 par l'équation (§ 165)

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{cd\tau}{\theta} + \frac{m_1 r_1}{\theta_1} - \frac{m_2 r_2}{\theta_2} = 0.$$

Les volumes $m_1 u_1$ et $m_2 u_2$ sont respectivement proportionnels à la capacité du cylindre rempli par la vapeur au moment où cesse l'admission, et à la capacité totale du cylindre :

on a donc $\frac{m_1 u_1}{m_2 u_2} = k$, nombre donné.

On pourra calculer U_1, U_2 , puis $\frac{U_1 - U_2}{A}$, qui représente le travail utile transmis à la machine pendant la détente.

5° *Échappement*. — Le travail de la contre-pression est négatif et s'obtient, en valeur absolue, en multipliant la pression p_2 par l'espace que décrit le piston, ou par le volume total du cylindre, c'est-à-dire par $m_1 u_1$, en ne tenant toujours compte que du volume de la vapeur. Le travail cherché est donc $-p_2 m_2 u_2$.

En définitive, le travail produit par l'unité de poids du mélange d'eau et de vapeur passant dans le cylindre est égal à

$$\begin{aligned} T &= p_1 m_1 u_1 + \frac{\int_0^{\tau_1} cd\tau + m_1 r_1 - m_1 \Delta p_1 u_1 - \int_0^{\tau_2} cd\tau - m_2 r_2 + m_2 \Delta p_2 u_2}{A} \\ &\quad - p_2 m_2 u_2 \\ &= p_1 m_1 u_1 + \frac{1}{A} \int_{\tau_2}^{\tau_1} cd\tau + \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{A} - m_1 p_1 u_1 + m_2 p_2 u_2 - m_2 p_2 u_2 \\ &= \frac{1}{A} \int_{\tau_2}^{\tau_1} cd\tau + \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{A}. \end{aligned}$$

Si l'on attribue à c une valeur moyenne, on peut faire

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} cd\tau = c(\tau_1 - \tau_2).$$

De même

$$\begin{aligned} m_2 r_2 &= \frac{\theta_2}{\theta_1} m_1 r_1 + \theta_2 \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{cd\tau}{\theta} = \text{approximativement } \frac{\theta_2}{\theta_1} m_1 r_1 + c(\tau_1 - \tau_2), \\ \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{A} &= \frac{1}{A} \left(m_1 r_1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} m_1 r_1 - c(\tau_1 - \tau_2) \right) = \frac{1}{A} \left(\frac{m_1 r_1}{\theta_1} - c \right) (\tau_1 - \tau_2). \end{aligned}$$

Il vient par conséquent

$$T = \frac{c(\tau_1 - \tau_2)}{A} + \frac{1}{A} \frac{m_1 r_1}{\theta_1} (\tau_1 - \tau_2) - \frac{c(\tau_1 - \tau_2)}{A} = \frac{m_1 r_1}{A \theta_1} (\tau_1 - \tau_2).$$

Sous cette forme, il semble que T varie avec le rapport m_1 ; mais en faisant des applications numériques de la formule on reconnaît que, dans les limites de la pratique, le rapport m_1 influe à peine sur la valeur de T , de sorte qu'il existe un rapport à peu près constant entre la chaleur dépensée pour le service de la chaudière et le travail utile produit.

Pour de plus amples détails sur ce sujet, et pour l'application de la théorie mécanique de la chaleur aux liquides et aux solides, nous renverrons à l'ouvrage de Ch. Combes, intitulé : *Exposé des principes de la théorie mécanique de la chaleur*¹, auquel nous avons fait de nombreux emprunts pour la rédaction de ce chapitre.

¹ Paris, 1867.

NOTES

THÉORÈME DE CLAUDIUS.

170. Toutes les fois qu'un corps accomplit un cycle complet et réversible, représenté sur le plan par un contour fermé quelconque AB, l'intégrale $\int \frac{dQ}{\theta}$, prise le long de ce contour à partir d'un point A pour revenir à ce même point, est égale à zéro.

La quantité dQ représente la quantité de chaleur reçue (ou émise) par le corps pour lui faire décrire un arc élémentaire mn du contour donné, et θ la température absolue correspondante à cet élément.

Découpons le cycle AB par une série de lignes adiabatiques infiniment voisines, et soient mm' , m' , deux lignes consécutives interceptant sur le périmètre du contour un arc infiniment petit mn ; ces deux lignes intercepteront sur le bord opposé un autre arc $m'n'$. Soient C et D les points de contact du contour avec les lignes adia-

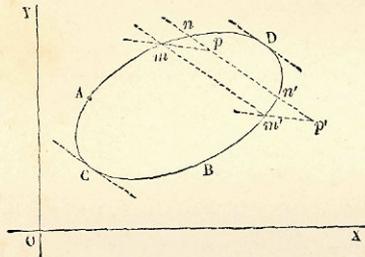


Fig. 78.

tiques extrêmes qui le comprennent. Menons par les points m et m' deux lignes isothermes correspondantes mp , $m'p'$.

Soit dQ la quantité de chaleur qu'il faut communiquer au corps pour lui faire décrire l'élément mn ;

dQ' la quantité de chaleur qu'il faut lui enlever pour lui faire décrire l'élément $n'm'$;

dq la quantité de chaleur qu'il faudrait lui communiquer pour lui faire décrire l'élément mp , sans changement de sa température θ , puisque cet élément est isotherme;

dq' la quantité de chaleur qu'il faudrait lui enlever pour lui faire décrire l'élément isotherme $p'm'$, à la température θ' .

Au point de vue des quantités de chaleur communiquées au corps, l'ensemble des deux trajets mn et $n'm'$ équivaut à l'ensemble des trajets $mnpmp'p'n'm'$, car les trajets successifs pm , mp , $p'm'$ et $m'p'$ se détruisent deux à deux, et quant aux trajets np , pp' , $p'n'$, qui s'accomplissent suivant des lignes adiabatiques, il ne correspondent à aucune variation dans la quantité de chaleur possédée par le corps. Par la même raison, on peut ajouter à l'ensemble des trajets indiqués la courbe $m'm$, qui est aussi adiabatique, et alors le chemin assigné fictivement au corps se réduit à trois cycles, savoir

$$mnp, \quad mpp'n'm, \quad m'p'n'm'.$$

Faisons le calcul des quantités de chaleur qui correspondent à chacun d'eux.

Par le cycle mnp , le corps reçoit dQ le long de mn ; il ne reçoit ni ne perd rien le long de np ; il perd la quantité dq le long de pm ; le travail accompli est mesuré par l'aire mnp , multipliée par l'équivalent A. Donc

$$dQ - dq = A \times mnp.$$

On aura de même pour le cycle $m'p'n'm'$, décrit dans le sens inverse,

$$dQ' - dq' = A \times m'n'p'.$$

Quant au cycle $mpp'n'm$, c'est un cycle de Carnot, dans lequel la chute de chaleur est $\theta - \theta'$, et on a (§ 158)

$$\frac{dq - dq'}{dQ} = \frac{\theta - \theta'}{\theta}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{dq}{\theta} = \frac{dq'}{\theta'}.$$

Divisons par θ la première équation, par θ' la seconde, et retranchons; il viendra

$$\frac{dQ}{\theta} - \frac{dQ'}{\theta'} = A \left(\frac{mnp}{\theta} - \frac{m'n'p'}{\theta'} \right),$$

et intégrant entre les limites fournies par les contacts du contour avec les lignes adiabatiques extrêmes, c'est-à-dire depuis le point C jusqu'au point D, le long des arcs CAD, CBD, on aura

$$\int_C^D \frac{dQ}{\theta} - \int_C^D \frac{dQ'}{\theta'} = A \left(\int \frac{mnp}{\theta} - \int \frac{m'n'p'}{\theta'} \right).$$

A la limite, le second membre se réduit à zéro; car les aires mnp , $m'n'p'$ sont des infiniment petits du second ordre, dont les sommes sont

rigoureusement nulles; par conséquent le premier membre est nul aussi, et l'on a

$$\int_C^D \frac{dQ}{\theta} = \int_C^D \frac{dQ'}{\theta'}$$

ce qui revient à dire que l'intégrale $\int \frac{dQ}{\theta}$, prise le long du contour fermé ADBC en revenant au point de départ, est identiquement nulle.

171. *Corollaire.* — La fonction $\frac{dQ}{\theta}$ des variables indépendantes p et V est

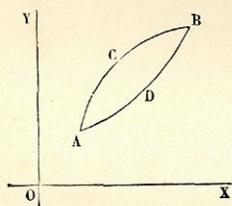


Fig. 79.

une différentielle exacte. En effet, si l'on prend l'intégrale $\int \frac{dQ}{\theta}$ d'un point A à un point B le long d'un chemin arbitraire ACB, le résultat qu'on trouvera ne dépendra que des positions des points extrêmes; on trouverait le même résultat pour tout autre chemin ADB, puisque l'intégrale prise le long du contour ACBDA est identiquement nulle.

Donc $\int_A^B \frac{dQ}{\theta}$ ne dépend que des positions des points A et B, c'est-à-dire des valeurs des variables V et θ qui définissent ces points. En d'autres termes $\int \frac{dQ}{\theta}$ est une fonction de ces deux variables, et par suite $\frac{dQ}{\theta}$ est la différentielle exacte de cette fonction.

M. Clausius a donné le nom d'*entropie* à cette fonction $\int \frac{dQ}{\theta}$. Nous la représenterons par la lettre S , et nous aurons par conséquent

$$dS = \frac{dQ}{\theta}.$$

On parviendrait aux mêmes conclusions en prenant pour variables indépendantes V et θ , et en regardant p comme une fonction de ces variables.

FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UN FLUIDE.

172. M. Massieu¹ a donné le nom de *fonction caractéristique d'un fluide* à une fonction H des variables V et θ , d'où l'on peut déduire par le calcul l'entropie S , la quantité de chaleur interne U , la pression p et les autres

¹ Mémoire sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et sur la théorie des vapeurs, par F. Massieu (*Savants étrangers*, t. XXII, n° 2, 1875).

propriétés du fluide, telles que la chaleur spécifique, le coefficient de dilatation, etc. L'introduction de ces fonctions caractéristiques dans la science de la chaleur lie entre elles des propriétés qui paraissent distinctes au premier abord; elle permet en outre de distinguer parmi les lois physiques, découvertes par l'observation, celles qui sont applicables indistinctement à tous les corps, de celles qui n'appartiennent qu'à une certaine classe de corps, en vertu de quelque propriété particulière. Dans le premier cas, la vérification de la loi proposée conduit à une identité; dans le second, à une égalité qui ne devient identique qu'en vertu de certaines hypothèses.

Nous allons donner une idée de cette théorie, en prenant pour variables indépendantes la température absolue θ et le volume spécifique V .

Nous aurons d'abord les équations

$$(1) \quad dS = \frac{dQ}{\theta},$$

$$(2) \quad dQ = dU + ApdV = \theta dS;$$

Aux deux membres de l'équation (2) ajoutons $Sd\theta$, ce qui rend le dernier membre égal à la différentielle du produit $S\theta$; il viendra

$$dU + Sd\theta + ApdV = d(S\theta),$$

ou bien

$$Sd\theta + ApdV = d(S\theta - U).$$

La fonction $S\theta - U = H$ est ce que M. Massieu appelle la *fonction caractéristique* du corps.

Nous ferons donc

$$(3) \quad S\theta - U = H,$$

et il viendra

$$(4) \quad dH = Sd\theta + ApdV.$$

H étant exprimé en fonction de θ et V , S est la dérivée partielle de H par rapport à θ , Ap la dérivée partielle de H par rapport à V , et l'on a

$$(5) \quad S = \frac{dH}{d\theta},$$

$$(6) \quad Ap = \frac{dH}{dV},$$

et par suite

$$(7) \quad U = S\theta - H = \theta \frac{dH}{d\theta} - H.$$

Différentions (5) par rapport à θ ; il vient

$$S + \theta \frac{dS}{d\theta} - \frac{dU}{d\theta} = \frac{dH}{d\theta}.$$

Mais, en vertu de (5), $S = \frac{dH}{d\theta}$; donc

$$(8) \quad \theta \frac{dS}{d\theta} = \frac{dU}{d\theta}.$$

Différentions de même (5) par rapport à V ; nous aurons

$$\theta \frac{dS}{dV} - \frac{dU}{dV} = \frac{dH}{dV},$$

quantité égale à Λp en vertu de (6). Donc

$$(9) \quad \theta \frac{dS}{dV} - \frac{dU}{dV} = \Lambda p.$$

Enfin, différentions (5) par rapport à V ; il vient successivement

$$(10) \quad \frac{dS}{dV} = \frac{d}{dV} \left(\frac{dH}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dH}{dV} \right) = \frac{d}{d\theta} (\Lambda p) = \Lambda \frac{dp}{d\theta}.$$

Remplaçons dans (9) $\frac{dS}{dV}$ par sa valeur tirée de (10); il viendra, en résolvant par rapport à $\frac{dU}{dV}$,

$$(11) \quad \frac{dU}{dV} = \Lambda \left(\theta \frac{dp}{d\theta} - p \right) = \Lambda \theta^2 \times \frac{\theta dp - p d\theta}{\theta^2 d\theta} \\ = \Lambda \theta^2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{p}{\theta} \right).$$

173. *Application aux gaz parfaits.* — Le gaz idéal auquel on donne le nom de gaz parfait suit exactement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et l'on a par conséquent

$$pV = R\theta.$$

Donc

$$\frac{p}{\theta} = \frac{R}{V},$$

et par suite

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{p}{\theta} \right) = 0.$$

L'équation (11), $\frac{dU}{dV} = 0$, montre que la chaleur interne, U , ne dépend que de la température.

La *chaleur spécifique sous pression constante*, c , se calculera comme il suit.

Laissons p constant. La quantité de chaleur dQ qu'il faut introduire dans le gaz pour élever dans ces conditions sa température de $d\theta$ est $cd\theta$. On a donc, en vertu de l'équation (2) et de l'équation (5),

$$dQ = cd\theta = \theta dS = \theta d \left(\frac{dH}{d\theta} \right) = \theta \left(\frac{d^2H}{d\theta^2} d\theta + \frac{d^2H}{d\theta dV} dV \right).$$

Mais différentions (6) en observant que p reste constant, ce qui donne

$$\frac{d^2H}{dV d\theta} d\theta + \frac{d^2H}{dV^2} dV = 0.$$

De cette relation tirons dV , substituons dans l'équation précédente, et divisons par $d\theta$; il viendra

$$c = \theta \left[\frac{d^2H}{d\theta^2} - \frac{\left(\frac{d^2H}{dV d\theta} \right)^2}{\frac{d^2H}{dV^2}} \right]$$

On déterminera la *chaleur spécifique c_1 à volume constant* en supposant V constant et p variable. On trouve immédiatement l'équation

$$c_1 = \frac{dU}{d\theta},$$

qui montre que c_1 ne peut varier qu'avec la température, car U n'est fonction que de cette variable.

La différence $c - c_1$ des deux chaleurs spécifiques s'exprime par le rapport

$$c - c_1 = -\theta \frac{\left(\frac{d^2H}{dV d\theta} \right)^2}{\left(\frac{d^2H}{dV^2} \right)} = -\Lambda \theta \frac{\left(\frac{dp}{d\theta} \right)^2}{\left(\frac{dp}{dV} \right)} = -\Lambda \theta \times \frac{\left(\frac{R}{V} \right)^2}{\frac{-R\theta}{V^2}} = \Lambda R.$$

Le *coefficient de dilatation à pression constante* β est le rapport $\frac{1}{V} \frac{dU}{d\theta}$, dans le cas où p est supposé constant. Il vient en introduisant cette hypothèse dans le calcul,

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{\left(\frac{dV d\theta}{d^2H} \right)}{\left(\frac{d^2H}{d^2V} \right)} = -\frac{1}{V} \frac{d\theta}{dV}.$$

Formons la fonction caractéristique du gaz parfait. On aura d'abord pour la chaleur interne

$$U = \int_0^\theta c_1 d\theta = \int_0^\theta (c - \Lambda R) d\theta = \int_0^\theta cd\theta - \Lambda R\theta.$$

Cette quantité U est la chaleur interne totale du gaz; pour avoir l'excès de la chaleur interne du gaz à la température θ sur la chaleur qu'il possède au zéro centigrade, correspondant à $\theta_0 = 273^\circ$ de l'échelle absolue, il faut en retrancher la valeur de U pour $\theta = \theta_0$, ce qui donne pour nouvelle valeur de U

$$U = \int_{\theta_0}^{\theta} cd\theta - AR(\theta - \theta_0).$$

L'entropie S se calculera en supposant que la masse de gaz prise à zéro et sous la pression normale atmosphérique, c'est-à-dire à θ_0 degrés, soit portée sous pression constante du volume V_0 au volume V , ce qui suppose un accroissement de température de θ_0 à θ_1 ; puisqu'on porte la température de θ_1 à θ , sous volume constant, la pression variant de la pression atmosphérique à la pression p . La fonction S sera la somme $\int \frac{dQ}{\theta}$ des quantités de chaleur introduites successivement dans la masse gazeuse, et on aura

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{cd\theta}{\theta} + \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{c_1 d\theta}{\theta}.$$

Dans cette équation, remplaçons c_1 par sa valeur $c - AR$; il viendra

$$\begin{aligned} S &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{cd\theta}{\theta} + \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{cd\theta}{\theta} - AR \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{cd\theta}{\theta} - AR \log \text{nép.} \frac{\theta}{\theta_1}. \end{aligned}$$

Les expériences de M. Regnault ont montré que la chaleur spécifique c est sensiblement constante pour un grand nombre de gaz permanents entre des limites de température très étendues. Donc

$$S = c \log \text{nép.} \frac{\theta}{\theta_0} - AR \log \text{nép.} \frac{\theta}{\theta_1}.$$

Pour déterminer θ_1 , nous appliquerons la loi de Gay-Lussac; V_0 étant le volume du gaz à θ_0 degrés, et V le volume de la même masse sous la même pression, à θ degrés absolus, on a

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\theta_1}{\theta_0},$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\theta_1} &= \frac{\theta}{\theta_0} \times \frac{\theta_0}{\theta_1} = \frac{\theta}{\theta_0} \frac{V_0}{V}, \\ S &= c \log \text{nép.} \frac{\theta}{\theta_0} - AR \log \text{nép.} \frac{\theta V_0}{\theta_0 V}, \\ &= c \log \text{nép.} \frac{\theta}{\theta_0} + AR \log \text{nép.} \frac{\theta_0 V}{\theta V_0}. \end{aligned}$$

La fonction caractéristique H est enfin

$$H = S\theta - U = c\theta \log \text{nép.} \frac{\theta}{\theta_0} + AR\theta \log \text{nép.} \frac{\theta_0 V}{\theta V_0} - (c - AR)(\theta - \theta_0).$$

174. La même théorie s'applique aux vapeurs. Soit L la quantité de chaleur nécessaire pour porter de θ_0 à θ degrés l'unité de poids du liquide;

c la chaleur spécifique de l'eau liquide, égale à $\frac{dL}{d\theta}$;

m la fraction du liquide qui est réduite en vapeur saturée;

r la chaleur de vaporisation;

e le volume spécifique du liquide;

V le volume spécifique du mélange de liquide et de vapeur;

u la différence $V - e$.

On aura successivement

$$U = L + mr - Ap(V - e),$$

en retranchant de la quantité totale de chaleur donnée à la masse fluide l'équivalent calorifique du travail extérieur produit par son changement de volume;

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{cd\theta}{\theta} + \frac{mr}{\theta},$$

$$H = S\theta - U = \theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{cd\theta}{\theta} - L + Ap(V - e).$$

L'intégration par parties donne, en partageant $\frac{cd\theta}{\theta}$ en deux facteurs $\frac{1}{\theta}$ et $cd\theta = dL$,

$$\int \frac{cd\theta}{\theta} = \int \frac{dL}{\theta} = \frac{L}{\theta} + \int L \frac{d\theta}{\theta^2},$$

et par suite

$$H = \theta \int_{\theta_0}^{\theta} L \frac{d\theta}{\theta^2} + Ap(V - e).$$

Mais $S = \frac{dH}{d\theta}$; donc

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{cd\theta}{\theta} + c - \frac{dL}{d\theta} + \frac{Adp}{d\theta}(V - e).$$

Comparons ce résultat avec l'équation $S = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{cd\theta}{\theta} + \frac{mr}{\theta}$, et observons que $c = \frac{dL}{d\theta}$. Il vient en définitive

$$A \frac{dp}{d\theta} (V - e) = \frac{mr}{\theta},$$

ou bien, en remplaçant $V - e$ par mu , et en supprimant le facteur m ,

$$Au \frac{dp}{d\theta} = \frac{r}{\theta},$$

équation qui servira à déterminer u , puis le rapport $\frac{1}{u + e}$, qui mesure le poids spécifique de la vapeur sèche à l'état de saturation.

LIVRE VII

DES MOTEURS

CHAPITRE PREMIER

DES MOTEURS ANIMÉS

175. Les moteurs animés sont l'homme et les animaux qu'il emploie pour son service, principalement le cheval, l'âne, le bœuf, etc.

Les mouvements que l'on observe chez les animaux appartiennent à deux classes distinctes. Les uns sont *instinctifs*, et semblent à proprement parler constituer la vie : ce sont les battements du cœur, le jeu des poumons, et la plupart des mouvements qui résultent de l'accomplissement des diverses fonctions animales. Les autres sont *volontaires* : ce sont ceux au moyen desquels l'animal change de place, assure sa nourriture, exerce des efforts et exécute certains travaux. Tels sont les mouvements qu'on demande aux moteurs animés. Leur caractère principal est le pouvoir qui appartient à l'animal de les accomplir ; les forces ainsi mises en jeu existent chez lui pour ainsi dire en réserve, mais une intervention de sa volonté est nécessaire pour en manifester l'existence au dehors. Les anciens philosophes avaient été conduits par cette consi-

dération à distinguer deux sortes de forces : les forces en action et les forces en puissance, *vires in actu*, *vires in posse*. A vrai dire, il n'y a pas là deux natures différentes de forces ; les forces en action sont des forces en puissance dont l'animal vient à tirer un certain parti, et qui autrement se seraient consommées d'une manière latente, sans produire de travail apparent. De même, une chaudière en pression représente une certaine puissance motrice, lors même que la vapeur produite par l'action du feu s'échappe en pure perte par les soupapes de sûreté. Cette puissance, cette force *potentielle*, ne devient force *in actu*, ou force effective, que lorsque le mécanicien ouvre le régulateur et laisse entrer la vapeur dans les cylindres de la machine.

176. Le corps d'un animal et ses membres, systèmes matériels soumis comme tous les autres à la loi de l'inertie, sont les récepteurs primitifs auxquels s'appliquent ses efforts spontanés. Ils agissent ensuite sur d'autres systèmes matériels, soit pour en déterminer le mouvement, soit pour y prendre un point d'appui.

Le travail extérieur produit est ici le seul effet qu'il importe de mesurer. On sait qu'on l'évalue en faisant la somme des efforts exercés par le moteur sur un corps mobile, multipliés chacun par l'espace que parcourt son point d'application, ces efforts étant estimés suivant la direction du mouvement effectif. Si on appelle F la force développée par le moteur, projetée sur la direction du mouvement, v la vitesse du point d'application de la force, et dt la durée infiniment petite de l'action de la force F , le travail élémentaire sera le produit $Fvdt$, et le travail total produit dans un intervalle donné sera l'intégrale $\int Fvdt$, prise entre les limites convenables. La somme rapportée à la durée du travail journalier qu'on fait produire au moteur peut se mettre sous la forme d'un produit de trois facteurs, PVT, P désignant l'effort moyen exercé par le moteur, V la vitesse moyenne du point d'application de cet effort, et T la durée

de la journée de travail, ou plutôt la somme des durées du travail exécuté chaque jour.

Le raisonnement et l'observation s'accordent à faire reconnaître que ce produit PVT est susceptible d'un maximum. Les facteurs en sont très variables, suivant le genre de travail exécuté et le mode d'action employé pour l'exécuter. Prenons pour exemple un cheval qui tire une voiture sur une chaussée ; l'effort qu'il fait varie avec le poids de la voiture, l'état de la chaussée, le diamètre des fusées des essieux, l'état de graissage, l'inclinaison du chemin, etc. ; mais outre ces divers éléments, le cheval peut mener la voiture au pas, au trot ou au galop ; à cette dernière allure, il ne peut fournir qu'un relai assez court, et sa force de traction est beaucoup moindre, de sorte que le produit PVT, dans lequel le facteur V est grand et les facteurs P et T très petits, peut être inférieur à la valeur qu'il prend pour un cheval de roulier marchant à petite vitesse. L'expérience seule peut éclairer sur la meilleure détermination de ces divers facteurs. On conçoit bien d'ailleurs qu'il doit en être ainsi : le moteur animé qui imprime une vitesse moyenne V au système matériel sur lequel il agit, doit imprimer cette même vitesse à son propre corps ou à une partie au moins de son corps ; or cette vitesse est limitée par le fait même de son organisation, et demande à elle seule un effort qui diminue d'autant la somme des forces disponibles pour produire l'effet principal.

C'est par l'observation qu'on détermine pour chaque moteur animé les valeurs les plus convenables des facteurs P, V, T. Généralement, le maximum du produit correspond à des valeurs moyennes pour les facteurs : un travail continu, fait avec une petite vitesse, et en développant des efforts modérés, surpasse au bout de la journée le travail discontinu produit par une série de *coups de collier* très énergiques, séparés par des repos fréquents.

177. Le tableau suivant, dressé par Navier, résume les principales observations faites sur le travail des moteurs animés.

NATURE DU TRAVAIL	POIDS ÉLEVÉ OU EFFORT MOYEN EXERCÉ	VITESSE OU CHEMIN PARCOURU PAR SECONDE	TRAVAIL PAR SECONDE	DURÉE DU TRAVAIL JOURNALIER	QUANTITÉ DE TRAVAIL JOURNALIER
	kilogr.	mètres.	km.	heures.	km.
ÉLEVATION VERTICALE DES POIDS.					
Un homme montant une rampe douce ou un escalier, sans fardeau, son travail consistant dans l'élevation du poids de son corps.	65	0,15	9,75	8	280,800
Un manoeuvre élevant des poids avec une corde et une poulie, ce qui l'oblige à faire descendre les cordes à vide.	18	0,20	5,60	6	77,760
Un manoeuvre élevant des poids ou les soulevant à la main.	20	0,17	5,40	6	75,440
Un manoeuvre élevant des poids en les portant sur son dos au haut d'une rampe douce ou d'un escalier, et revenant à vide.	65	0,04	2,60	6	58,160
Un manoeuvre élevant des matériaux avec une brouette en montant une rampe au douzième, et revenant à vide. .	60	0,02	1,20	10	45,200
Un manoeuvre élevant des terres à la pelle à la hauteur moyenne de 1 ^m ,60.	2,7	0,40	1,08	10	58,880
ACTION SUR LES MACHINES.					
Un manoeuvre agissant sur une roue à chevilles ou à tambour:	60	0,15	9,00	8	259,200
Au niveau de l'axe de la roue.	12	0,70	8,40	8	251,120
Vers le bas de la roue ou à 24°					
Un manoeuvre marchant et poussant ou tirant horizontalement.	12	0,60	7,20	8	207,560
Un manoeuvre agissant sur une manivelle.	8	0,75	6,00	8	172,800
Un manoeuvre exercé, poussant et tirant alternativement dans le sens vertical.	6	0,75	4,50	10	162,000
Un cheval attelé à une voiture et allant au pas.	70	0,90	65,00	10	2,168,000
Un cheval attelé à un manège et allant au pas.	45	0,90	40,50	8	1,466,400
Un cheval attelé à un manège et allant au trot.	50	2,00	60,00	4 $\frac{1}{2}$	972,400
Un bœuf attelé à un manège et allant au pas.	65	0,60	59,00	8	1,125,200
Un mulet.	50	0,90	27,00	8	777,600
Un âne.	14	0,80	11,60	8	354,080

En moyenne, les puissances mécaniques de l'homme, du cheval, du bœuf, du mulet et de l'âne sont entre elles comme les nombres, 1, 6, 5, 4 et $1\frac{1}{2}$.

178. L'organisation physique du moteur a une grande influence sur la quantité de travail qu'il est capable de produire, et sur le mode qu'il convient d'adopter pour rendre cette quantité maximum. L'homme, quand il se tient debout, a la colonne vertébrale verticale; les animaux tels que le bœuf, l'âne, le cheval, ont l'échine horizontale. Or le plus grand effort que puisse développer un moteur animé est parallèle à sa colonne vertébrale; d'où résulte que l'homme paraît plutôt destiné à porter des fardeaux, et les autres moteurs à exercer une traction. Un cheval, par exemple, peut exercer un effort beaucoup plus énergique comme bête de trait que comme bête de somme. Pour l'homme, le fardeau qu'il a le plus de facilité à porter est son propre corps, et le travail le plus naturel qu'on puisse lui demander consiste à élever verticalement son poids. On a utilisé cette remarque pour élever verticalement des terres. L'ouvrier amène sa brouette pleine sur l'un des plateaux d'un monte-charge; il monte lui-même en haut du monte-charge par une échelle, et se place dans l'autre plateau; le poids de l'homme enlève le poids de la brouette, et la fait parvenir au niveau supérieur, où un autre ouvrier la reprend. D'après une expérience faite à Vincennes, un homme peut dans ces conditions produire la limite de son travail journalier.

179. Les transports horizontaux donnent lieu (II, § 312) à la production d'un certain travail, tout entier dû aux résistances passives.

L'évaluation du travail accompli peut se rapporter encore au kilogramme et au mètre horizontal parcouru; mais cette manière de compter n'a rien d'absolu, et pour un même transport effectué, le travail dépensé acquiert des valeurs bien diverses suivant le degré de viabilité de la route parcourue; il est moindre sur une chaussée bien entretenue que sur un che-

min boueux ou rempli d'ornières; moindre à vitesse égale sur un chemin de fer que sur une route, et moindre sur un canal que sur un chemin de fer, quand la vitesse du transport est suffisamment petite. Le tableau suivant renferme quelques renseignements sur les quantités de travail fournies par les moteurs le long des routes dans un état moyen d'entretien.

NATURE DU TRANSPORT	POIDS TRANSPORTÉ	VITESSE	EFFET UTILE PAR SECONDE	DURÉE DE L'ACTION JOURNALIÈRE	EFFET UTILE PAR JOUR
	kilogr.	mètr.	km.	heures.	km.
Un homme marchant sans fardeau.	65	1,50	97,5	10,0	3,510,000
Un manoeuvre conduisant une brouette et revenant à vide.	60	0,50	50,0	10,0	1,080,000
Un homme portant des fardeaux sur le dos.	40	0,75	50,0	7,0	756,000
Un cheval attelé à une charrette et marchant au pas.	700	1,10	770,0	10,0	27,720,000
Un cheval attelé et marchant au trot.	550	2,20	770,0	4,5	12,474,000
Un cheval chargé sur le dos, au pas.	120	1,10	152,0	10,0	4,752,000
Un cheval chargé sur le dos, au trot.	80	2,20	176,0	7,0	4,455,000

DE L'ALIMENTATION DES MOTEURS ANIMÉS.

180. L'alimentation des moteurs animés, et plus généralement l'alimentation de tous les animaux, doit fournir à la fois à l'entretien de l'organisme et à la dépense de travail faite par l'animal.

La source du travail fourni par les moteurs animés est la chaleur produite dans les poumons par la combustion des aliments au contact de l'oxygène. A ce point de vue, les animaux supérieurs sont de vraies machines thermiques, ayant

leur foyer et leur grille, et exigeant pour travailler une certaine dépense de combustible. Mais une partie des matériaux fournis par la nutrition est employée à la réparation du corps, ce qui n'a pas d'analogie avec l'entretien des machines dont on se sert dans l'industrie.

L'alimentation des moteurs animés comprend donc deux parts : une portion constitue la *ration d'entretien*, en entendant ce mot dans le sens physiologique le plus large possible, et l'autre portion, la *ration de travail*; en même temps, les aliments se partagent en deux catégories : les uns sont les *aliments plastiques*, qui conviennent spécialement à l'entretien des organes; les autres, les *aliments respiratoires*, qui jouent le rôle du combustible dans les machines à vapeur, et qui influent sur la puissance mécanique du moteur. A dire vrai, les matières alimentaires n'appartiennent pas exclusivement à l'un ou à l'autre de ces types absolus, et pour les classer, il faut seulement s'en tenir à la prédominance de certains éléments parmi ceux qui les composent. Les aliments plastiques, pour l'homme, sont en général caractérisés par l'azote; les aliments respiratoires, par l'hydrogène et le carbone.

Il en résulte que la ration d'entretien doit renfermer une quantité suffisante de matières azotées, sans quoi le sujet dépérit, et que la ration de travail calculée d'après le travail produit doit comprendre des composés de carbone et d'hydrogène, éléments combustibles. Ces règles n'ont rien d'absolu, car il faut tenir compte dans chaque cas particulier d'une foule de circonstances qu'on ne saurait réduire en formules. La variété du régime alimentaire paraît être en effet une condition de santé et de force pour un animal, et d'un autre côté, on ne saurait méconnaître l'influence de l'habitude, qui finit par transformer les tempéraments.

D'après Payen, un homme adulte en bonne santé perd par vingt-quatre heures 20 grammes d'azote et 560 grammes de carbone; les 20 grammes d'azote correspondent à environ 150 grammes de matières azotées. Pour qu'il n'y ait pas appauvrissement graduel du sujet, il faut qu'il absorbe chaque jour

un poids de nourriture variée qui suffise à réparer ces pertes : par exemple, un kilogramme de pain, et environ 500 grammes de viande, sans os (ou 586 grammes de viande, os compris). En général, les ouvriers les mieux nourris sont ceux qui produisent le plus de travail.

181. La chaleur développée dans les poumons et dans toutes les régions de l'appareil circulatoire étant la source de tout le travail produit par un moteur animé, il peut paraître surprenant que le travail échauffe l'ouvrier ou l'animal qui le produit ; il semble, en effet, qu'alors le travail produise de la chaleur au lieu d'en consommer. L'action, chez un animal, stimule la circulation et augmente le pouvoir absorbant des tissus ; une partie de la chaleur emmagasinée par l'animal à l'état latent reparait donc à ce moment sous forme de chaleur interne, et contribue à élever la température. Toute la chaleur créée par la respiration ne se transforme donc pas en travail extérieur.

Mais on a remarqué que la portion de chaleur employée pour échauffer le corps de l'animal diminue avec l'habitude, de sorte qu'un cheval accoutumé à un service régulier s'échauffe moins, par exemple, que celui qui serait appelé à faire exceptionnellement le même service.

La relation intime entre le travail et la chaleur est encore mise en évidence chez les oiseaux. Comme le mécanisme du vol exige de grands efforts, la respiration et la circulation sont plus actives chez les oiseaux que chez les mammifères. Ils possèdent ainsi à la fois les deux avantages qui leur permettent de se diriger dans les airs : une grande puissance mécanique et un poids extrêmement faible. C'est à la difficulté que l'industrie humaine trouve à réunir ces deux qualités dans un même appareil qu'il faut attribuer le peu de succès des tentatives d'aviation et de direction des aérostats.

CHAPITRE II

DES MOTEURS HYDRAULIQUES.

DES MOTEURS HYDRAULIQUES.

182. Les moteurs ou plutôt les *récepteurs hydrauliques* mettent à profit le travail accompli par une chute d'eau. Nous en avons déjà exposé sommairement la théorie générale (§ 154), et nous sommes arrivés à l'équation suivante,

$$T = PH + \frac{P}{2g} v^2 - \frac{P}{2g} u^2 - T_r,$$

qui donne le travail utilisé par la machine en fonction du poids P de l'eau qui tombe par unité de temps d'une hauteur H , de la vitesse v de l'eau en amont, de sa vitesse u à la sortie, et enfin du travail T_r des résistances secondaires pendant le même intervalle de temps. Pour que le rendement de l'appareil soit le plus grand possible, il faut que l'eau motrice y entre sans choc et en sorte sans vitesse appréciable. Les meilleurs récepteurs sont ceux qui satisfont le mieux à ces conditions.

183. Les récepteurs hydrauliques se partagent en deux grandes classes : les *roues* et les *turbines*. Les roues tournent autour d'un axe horizontal, et les turbines autour d'un axe vertical¹. Les roues se subdivisent en *roues en dessous*, *roues*

¹ On a créé récemment des types de *turbines à axe horizontal*, ce qui oblige à modifier la définition. On peut dire que la turbine est caractérisée par cette circonstance que les filets liquides s'échappent de l'appareil par des orifices distincts des orifices d'entrée.

de côté, roues en dessus, suivant la hauteur à laquelle l'eau entre dans la roue. Les turbines appartiennent en général à deux types principaux : la turbine *Fourneyron*, où les filets liquides s'échappent par des trajectoires horizontales, et la turbine *d'Euler*, où les molécules liquides changent de hauteur en traversant la partie mobile de l'appareil.

Nous ne ferons pas ici une étude complète de tous ces récepteurs, ce sujet ne pouvant être traité en détail que dans les cours d'hydraulique. Nous nous bornerons à en examiner quelques exemples.

ROUES EN DESSOUS.

184. Les premières roues en dessous étaient les roues à palettes planes, récepteurs très grossiers, où l'eau agissait par son choc, et d'où elle sortait avec une vitesse sensiblement égale à celle de la roue elle-même. Le rendement n'excédait pas 0,53. Poncelet a perfectionné cet appareil en courbant les palettes. La théorie de sa roue à aubes courbes peut être présentée approximativement comme il suit.

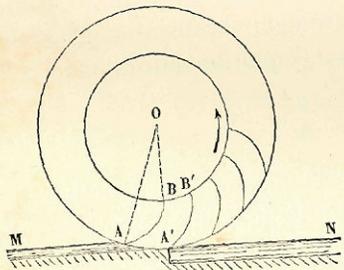


Fig. 81.

Soit O le centre de la roue ;
 $AB, A'B', \dots$ les aubes courbes successives ;
 MA , la nappe liquide qui atteint la roue en son point le plus bas avec une vitesse v .

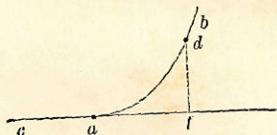


Fig. 82.

Soit v' la vitesse linéaire du point le plus bas A de la roue. Pour simplifier, nous admettrons que le rayon OA de la roue est infiniment grand, de manière que le déplacement de l'aube AB , dans la région inférieure de la roue, soit

sensiblement une translation horizontale sous la vitesse v' . Soit donc ca la trajectoire horizontale d'une molécule liquide, animée de la vitesse v . Elle entrera sans choc sur l'aube si la courbe ab est tangente à l'horizontale ca .

La vitesse relative de la molécule par rapport à l'aube mobile sera égale à la différence $v - v'$; par suite la molécule, parvenue sur la courbe mobile ab , s'y élèvera jusqu'en un point d tel, que la hauteur df soit égale à la hauteur due à la vitesse $v - v'$, c'est-à-dire à la hauteur $\frac{(v - v')^2}{2g}$. Cette hauteur at-

teinte, la molécule redescendra le long de la courbe da , en reprenant aux mêmes points des vitesses relatives égales et contraires à celles qu'elle avait en montant ; de sorte qu'en arrivant en a , elle possédera dans le sens ac une vitesse relative égale à $v - v'$. L'aube ayant la vitesse v' dans le sens af , la vitesse absolue de la molécule liquide à la sortie est égale à $(v - v') - v'$ ou à $v - 2v'$; elle est nulle, et la seconde condition imposée à la roue est satisfaite, si l'on a $v' = \frac{1}{2}v$, ou si la circonférence extérieure de la roue a pour vitesse linéaire la moitié de la vitesse d'affluence du liquide. Alors le rendement serait égal à l'unité, abstraction faite des résistances passives. On peut ajouter que la hauteur df est égale au quart de la chute qui produit la vitesse v .

En réalité, l'aube AB ne peut être tangente à la circonférence extérieure, sans quoi il n'entrerait dans la roue qu'une quantité d'eau infiniment petite ; on lui fait faire avec cette circonférence un angle de 30° ; l'eau ne sort pas sans vitesse, mais du moins elle ne conserve à la sortie qu'une vitesse très faible. La roue serait dans d'excellentes conditions de rendement, si le mouvement ascendant des filets liquides qui y entrent n'était pas gêné par le mouvement descendant des filets qui ont déjà accompli la moitié de leur excursion ; de là des frottements et des mouvements irréguliers qui représentent une perte de force vive. Le rendement constaté s'élève en définitive à environ 0,65.

ROUE EN DESSUS.

185. La roue en dessus ou roue à augets est un excellent récepteur, surtout quand sa vitesse est faible. L'eau introduite dans les augets supérieurs agit par son poids en descendant avec eux, jusqu'à la position à laquelle ils commencent à se vider dans le bief d'aval. On peut déterminer approximativement la forme que prend pendant le mouvement la surface libre du liquide dans chaque auget. Admettons, pour plus de simplicité, qu'il y ait équilibre relatif de l'eau contenue dans un auget sous l'action des forces qui la sollicitent. Ces forces sont la pesanteur et la force centrifuge. On est donc ramené à un problème analogue à celui du pendule conique (§ 59), ou de l'équilibre d'un liquide pesant tournant autour d'un axe vertical (§ 95); seulement ici l'axe de rotation est horizontal.

Soit O l'axe de la roue;

CDB , un auget;

AB , la surface libre du liquide qui y est contenu.

La molécule M située sur cette surface libre est en équilibre, d'après notre supposition, sous l'action de son poids ME , qui agit suivant la verticale, et de la force centrifuge MF , dirigée suivant le prolongement du rayon OM . Soit m la masse de la molécule, ω la vitesse angulaire de la roue, r la distance OM ; nous aurons $ME = mg$, et $MF = m\omega^2 r$. La surface libre doit être normale au point M à la résultante MG des deux forces MF et ME . Prolongeons MG jus-

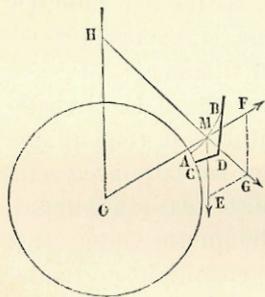


Fig. 85.

qu'à la rencontre en H avec la verticale OH menée par le point O . Les triangles OHM , EMG sont semblables et donnent la proportion

$$\frac{OH}{OM} = \frac{ME}{EG}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{OH}{r} = \frac{mg}{m\omega^2 r}.$$

On en déduit $OH = \frac{g}{\omega^2}$, quantité constante, quel que soit le point M et quel que soit l'auget considéré. Les normales à la surface libre vont donc toutes passer en projection par le point H , et par suite les surfaces libres du liquide dans chaque auget sont des portions de cylindres droits à base circulaire ayant pour axe commun la droite projetée en H .

Ce résultat prouve en même temps que l'hypothèse de l'équilibre relatif est inadmissible, puisqu'elle conduit à attribuer à la surface du liquide une forme variable d'un auget à l'autre. Ce n'est qu'à titre d'approximation qu'on peut faire usage de cette supposition. En d'autres termes, on constate, non pas un équilibre véritable, mais une tendance vers un équilibre dont les conditions sont incessamment altérées. Il n'y a, dans la pratique, aucun inconvénient à maintenir une hypothèse qui après tout n'est pas éloignée de la vérité.

Il résulte de là que les augets commencent d'autant plus tôt à se vider que la roue marche plus vite. Le récepteur recueille seulement le travail de la pesanteur sur la quantité d'eau qu'il contient effectivement. Il importe donc que l'auget se vide le plus bas possible; on y parvient en le remplissant seulement au tiers de sa capacité, et en adoptant pour la roue une vitesse très modérée. Dans ces conditions le rendement de la roue, comparé à la puissance absolue, PH , de la chute, peut s'élever jusqu'à 0,90.

TURBINE FOURNEYRON.

186. La turbine de *M. Fourneyron* (fig. 84 et 85) consiste dans une couronne horizontale, représentée en coupe par les rectangles GH , et $G'H'$, réunie par des bras LM , $L'M'$ à l'axe vertical IK , autour duquel elle est assujettie à tourner.

L'eau motrice tombe du niveau PP' du bief d'amont au niveau NN' du bief d'aval, en passant par le cylindre $ABCD$, qui l'amène à la couronne mobile. Le tuyau EF , appelé *tuyau portefond*, isole cette eau de l'axe IK , et prévient les déperdi-

tions de liquide. Le cylindre ABCD est traversé par des cloisons verticales fixes, figurées par les courbes ab dans la coupe horizontale; elles ont pour objet de diriger les filets liquides de manière à les faire entrer dans la couronne mobile sous un angle

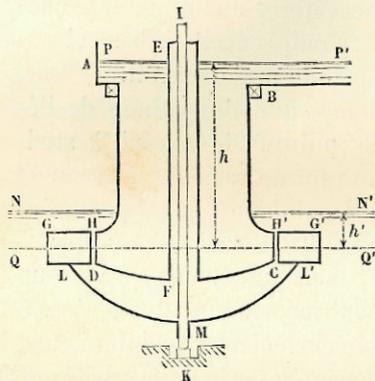


Fig. 84.

déterminé. La couronne est elle-même partagée par des cloisons directrices équidistantes bc , le long desquelles les filets fluides doivent glisser en exerçant sur elles une pression qui détermine le mouvement dans le sens de la flèche f . Ce mouvement est transmis par les bras LM à l'axe IK, et de là aux engrenages ou aux courroies qui relient l'axe aux machines-outils.

Pour faire la théorie de l'appareil, réduisons par la pensée la couronne à son plan moyen QQ', et supposons que les filets liquides y entrent à la hauteur de ce plan, tangentiellement aux cloisons fixes ab et avec une vitesse u . Si p_a est la pression atmosphérique qui s'exerce en PP', h la hauteur du plan PP' au-dessus du plan QQ', p la pression en b , le théorème de Bernoulli détermine la vitesse u par l'équation

$$(1) \quad \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\Pi} = h + \frac{p_a}{\Pi},$$

Π étant le poids spécifique du liquide. La pression p n'est pas encore connue.

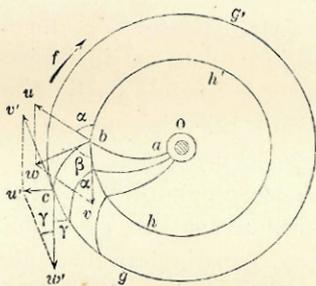


Fig. 85.

L'eau entre dans la couronne avec la vitesse absolue bu ; mais le point b de la couronne est animé d'une vitesse linéaire v dans le sens de la flèche f . Pour avoir la vitesse relative de l'eau par rapport à la couronne, il suffit de composer la vitesse bu avec une vitesse bv , égale et contraire à la vitesse linéaire du point b , ce qui conduit à une résultante bw . Il n'y aura pas choc à l'entrée si cette résultante est tangente à la cloison bc . Nous supposons cette condition remplie.

Soient α et β les angles que les cloisons ab et bc font avec la circonférence intérieure de la couronne. Le triangle bvw nous donne les deux équations :

$$(2) \quad w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha,$$

$$(3) \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{u}{w}.$$

Le filet liquide qui parcourt la cloison bc dans son mouvement relatif est soumis à la pression motrice p au point b , à une pression résistante p' au point c , aux réactions normales de la cloison bc , à la pesanteur et aux forces apparentes, savoir les forces centrifuges et les forces centrifuges composées. Appliquant au mouvement de ce filet le théorème des forces vives, on élimine à la fois la pesanteur, les forces centrifuges composées, et les réactions de la cloison directrice, puisque toutes ces forces sont normales au chemin décrit et ne produisent aucun travail. Le théorème de Bernoulli, complété par l'addition du terme qui correspond au travail de la force centrifuge (III, § 216), donne la vitesse relative w' de sortie. On parvient à l'équation

$$(4) \quad \frac{w'^2}{2g} + \frac{p'}{\Pi} = \frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\Pi} + \frac{v'^2}{2g} - \frac{v^2}{2g},$$

v' étant la vitesse linéaire de la circonférence extérieure. Si r et r' sont les rayons des deux circonférences extrêmes qui comprènnent la couronne, on aura entre v et v' l'équation

$$(5) \quad \frac{v'}{v} = \frac{r'}{r}.$$

Composons enfin la vitesse relative w' avec la vitesse d'entraînement v' du point c ; la résultante cu' sera la vitesse absolue avec laquelle l'eau quitte la couronne pour entrer dans le bief d'aval. La seconde condition d'un bon rendement exige que cette vitesse u' soit la moindre possible. Elle est donnée dans le triangle $cu'w'$, où γ est l'angle de la cloison bc avec la circonférence extérieure de la couronne :

$$u'^2 = w'^2 + v'^2 - 2w'v' \cos \gamma,$$

ou bien

$$(6) \quad u'^2 = (w' - v')^2 + 4v'w' \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

On rendra u' très petit en donnant à γ une petite valeur, et en faisant $w' = v'$. On aurait même $u' = 0$, et le récepteur serait parfait, si l'on faisait $w' = v'$ et $\gamma = 0$. Mais cette détermination-limite est inadmissible. En effet, considérons un arc infiniment ds , égal à une partie aliquote de la circonférence intérieure bhh' ; considérons en même temps l'arc ds' , égal à la même partie aliquote de la circonférence extérieure cgg' ; le second de ces arcs débite à l'extérieur l'eau que le premier débite à l'intérieur de la couronne. La continuité du débit exige en effet que les dépenses de ces deux orifices soient les mêmes. Or l'arc ds est traversé par un courant liquide animé de la vitesse u , qui fait avec sa direction un angle α ; le débit est donc proportionnel au produit $uds \sin \alpha$. Le débit de l'arc ds' dans le mouvement relatif est de même proportionnel à $w'ds' \sin \gamma$, et l'on a

$$uds \sin \alpha = w'ds' \sin \gamma,$$

ou bien, puisque ds et ds' sont entre eux comme les rayons des circonférences,

$$(7) \quad ur \sin \alpha = w'r' \sin \gamma.$$

Cette équation montre que γ ne peut être nul sans rendre nul le débit de la turbine. On fait ordinairement $\gamma = 50^\circ$.

La pression p' qui règne hors de la couronne est égale à la pression atmosphérique augmentée de la pression correspon-

dante à la hauteur h' comprise entre les plans NN' et QQ' . C'est une des données de la question.

En résumé, on connaît les angles α et γ , les hauteurs h et h' , les rayons r et r' , les vitesses v et v' , et on a à déterminer les sept inconnues

$$u, w, \beta, p, v', w', u'.$$

Pour cela on a sept équations, de sorte que le problème est déterminé. Le rendement s'obtient en observant que, si P est le poids d'eau écoulé dans l'unité de temps par la turbine, et H la hauteur de la chute $h - h'$, la puissance de la chute est PH, et la puissance perdue est représentée par la demi-force vive conservée par l'eau à la sortie, ou par $\frac{1}{2} P u'^2$; le rendement est donc égal à

$$1 - \frac{P u'^2}{2gPH} = 1 - \frac{u'^2}{2gH}.$$

Cette quantité s'exprime en fonction des angles α et γ .

Ajoutons, en effet, les équations (1), (2) et (4), après avoir divisé par $2g$ l'équation (2); puis remplaçons $h - h'$ par H et w' par v' . Il vient

$$uv \cos \alpha = gH.$$

Nous avons de plus

$$(5) \quad \begin{aligned} v'r &= vr, \\ w' &= v', \end{aligned}$$

et

$$(7) \quad w'r' \sin \gamma = ur \sin \alpha.$$

Multipliant membre à membre et effaçant les facteurs communs, il vient

$$w'^2 = gH \frac{\tan \alpha}{\sin \gamma}.$$

Mais l'équation (6), dans laquelle on fait $w' = v'$, donne

$$u'^2 = 4v'^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 4w'^2 \times \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Donc

$$u'^2 = 4gH \frac{\tan \alpha \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin \gamma}.$$

Le rendement maximum de l'appareil est enfin égal à

$$1 - \frac{2 \tan \alpha \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin \gamma} = 1 - \tan \alpha \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = 1 - \tan \alpha \tan \frac{\gamma}{2}.$$

PRESSION D'UNE VEINE LIQUIDE SUR UN PLAN MATÉRIEL INDÉFINI.

187. Soit AB un plan matériel indéfini, sur lequel une veine fluide vient tomber. On demande de déterminer la résultante F des pressions normales exercées par le plan sur la veine fluide, égale et contraire à la résultante des actions normales exercées par la veine fluide sur le plan.

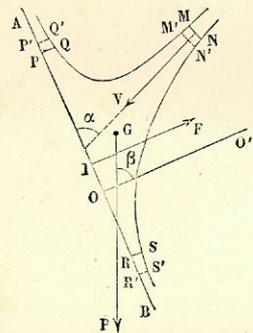


Fig. 86.

Soit MN une section transversale de la veine; les filets fluides qui traversent cette section sont tous parallèles et animés d'une même vitesse V. Au delà de cette section, les filets fluides s'infléchissent, et viennent s'étaler sur le plan, en prenant des vitesses variables d'un filet à l'autre, mais toutes parallèles au plan AB. La veine a donc la forme MQSN; on peut la couper par un cylindre PQRS, normal au plan AB, et tel que toutes les molécules fluides, une fois ce cylindre franchi, aient des vitesses sensiblement parallèles à ce plan. Cette hypothèse ne serait pas toujours admissible si le plan AB était limité, ou si l'on y substituait une surface courbe.

Appliquons au système matériel compris entre le plan MN et la surface PQRS le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe OO', normal au plan AB. Si dans un temps

infinitement petit dt , le système se transporte de la position MNPQRS dans la position M'N'P'Q'R'S', l'accroissement des quantités de mouvement s'obtiendra en retranchant les quantités de mouvement des molécules en MNM'N' des quantités de mouvement des molécules comprises entre les deux surfaces PQRS et P'Q'R'S', ces quantités de mouvement étant projetées d'ailleurs sur la droite OO'. Les quantités de mouvement des molécules composant l'anneau liquide PQRS, P'Q'R'S' sont nulles en projection, puisque les vitesses de ces molécules sont normales à l'axe. Les molécules en MNM'N' ont une vitesse V, qui fait avec le plan un angle α , et avec l'axe de projection un angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Soit Ω la section MN; le volume MNM'N' sera $\Omega \times Vdt$, la masse $\frac{\Pi}{g} \Omega Vdt$, et la quantité de mouvement projetée sera par conséquent $\frac{\Pi}{g} \Omega V^2 dt \sin \alpha$.

Les forces qui agissent sur le système sont : 1° la pression atmosphérique, qui règne sur toute la section MN, puisque l'écoulement s'y fait par filets parallèles, et qui enveloppe d'ailleurs tout le volume de la veine fluide; elle se détruit en projection sur un axe quelconque;

2° La réaction normale du plan, abstraction faite de la pression atmosphérique; nous la représenterons par la lettre F; le point d'application de cette force est inconnu. Le frottement du fluide contre le plan AB est normal à l'axe OO', et ne donne rien en projection;

3° Le poids de la masse fluide, force verticale appliquée en son centre de gravité G, et que nous représenterons par P.

Le théorème des quantités de mouvement donne en définitive

$$-\frac{\Pi}{g} \Omega V^2 dt \sin \alpha = (P \cos \beta - F) dt,$$

et on en déduit

$$F = P \cos \beta + \frac{\Pi}{g} \Omega V^2 \sin \alpha.$$

La force F se compose donc de deux parties. La première, $P \cos \beta$, est la composante normale du poids de la masse $MNRSPQ$ posée sur le plan incliné AB ; c'est ce qu'on appelle la *pression statique*, pour indiquer qu'elle subsisterait encore si la masse fluide était solidifiée et posée sur le plan.

La seconde partie $\frac{\Pi}{g} \Omega V^2 \sin \alpha$ dépend de la vitesse V , et constitue la *pression dynamique* de la veine. Elle est exprimable par le produit $2\Pi\Omega \times \frac{V^2}{2g} \sin \alpha$, ou par le double du poids d'un cylindre fluide ayant pour base la section Ω , pour longueur d'arête la hauteur $\frac{V^2}{2g}$ due à la vitesse V , et dans lequel les arêtes feraient avec le plan de la base un angle α .

La même théorie s'applique au cas où le plan choqué est mobile; seulement, il faut substituer à la vitesse V la vitesse relative de la veine par rapport à ce plan.

THÉORIE DES MOULINS A VENT.

188. Un moulin à vent est un récepteur destiné à utiliser

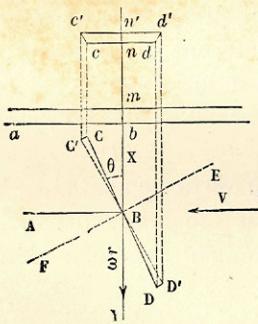


Fig. 87.

les mouvements naturels de l'air. L'appareil comprend un certain nombre d'ails, ordinairement quatre, formées d'un cadre gauche en charpente, sur lequel on tend des toiles. Les ailes sont montées sur des bras, implantés normalement à l'axe qui transmet le mouvement aux meules ou aux autres machines-outils. Cet axe, sensiblement horizontal, doit être dirigé contre le vent; on a

remarqué qu'il convenait de lui donner une petite inclinaison montante, le vent ayant à la surface du sol une direction légèrement plongeante.

L'air, animé d'une vitesse V , frappe les ailes du moulin. Soit AB la projection horizontale, et ab la projection verticale de l'axe de rotation; cherchons l'action exercée par l'air dans son mouvement relatif sur l'élément de surface gauche projeté horizontalement en $CDD'C'$ et verticalement en $cd d'c'$. Nous appellerons ω la vitesse angulaire de l'aile autour de l'axe (AB, ab). Une expérience de M. Athanase Dupré, de Rennes, fait connaître l'action exercée par l'air en mouvement sur une petite surface.

189. Un tube OA , plein d'air, bouché en A , reçoit dans le plan de la figure un mouvement de rotation uniforme autour du point fixe O . Proposons-nous d'abord de déterminer la loi de répartition des pressions à l'intérieur du tube pendant le mouvement. Soit p la pression dans une section M située à la distance $OM = r$ de l'axe de rotation. L'accélération centrifuge a pour valeur $\omega^2 r$, et l'équilibre de la masse fluide satisfait à l'équation

$$dp = \rho \times \omega^2 r dr.$$

Mais en vertu de la loi de Mariotte $p = K\rho$, K étant une constante. On en déduit

$$K \frac{dp}{p} = \omega^2 r dr$$

et

$$K \log \frac{p}{p_0} = \frac{\omega^2}{2} (r^2 - r_0^2).$$

La pression p en un point défini par sa distance r est donc définie par l'équation

$$p = p_0 e^{\frac{\omega^2}{2K} (r^2 - r_0^2)} = C e^{\frac{\omega^2 r^2}{2K}} = C e^{\frac{V^2}{2K}},$$

en désignant par V la vitesse linéaire ωr du point considéré, et par C une constante qui reste à déterminer.

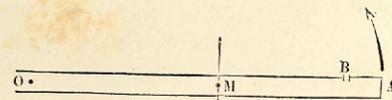


Fig. 88.

Cela posé, M. A. Dupré a observé que, si l'on ouvrait dans la paroi latérale du tube un orifice en B, du côté qui refoule l'air atmosphérique pendant le mouvement, cet orifice ne donnait passage ni à l'air extérieur pour entrer dans le tube, ni à l'air du tube pour en sortir; et cela, quelle que fût la vitesse angulaire ω et la distance r . On peut en conclure que la pression p développée par l'action de l'air extérieur dans le mouvement relatif fait équilibre à la pression p calculée par la formule hydrostatique, de sorte que la pression par unité de surface développée par le mouvement normal d'un élément de surface dans l'air sous la vitesse V serait exprimée par la formule exponentielle

$$p = C e^{\frac{V^2}{2K}}$$

Lorsque la vitesse V n'est pas très grande, on peut développer l'exponentielle en série, et se contenter des deux premiers termes; il vient alors

$$p = C + \frac{CV^2}{2K}$$

Le premier terme représente la pression statique de l'air; si l'on en fait abstraction pour ne tenir compte que de la partie dynamique de la réaction mutuelle, il vient

$$R = \frac{CV^2}{2K} = AV^2,$$

et on retrouve la loi du carré de la vitesse relative (§ 187), que nous appliquerons à notre problème.

190. L'élément de l'aile est défini (fig. 87) par sa distance $r = bn$ à l'axe de rotation; par l'angle θ , que la génératrice de la surface gauche fait avec le plan moyen XY du moulin à vent, ou avec un plan normal à l'axe de rotation; enfin par sa largeur $dr = nm'$ et sa longueur $b = CD$. La vitesse angulaire de l'aile étant ω autour de l'axe AB, la vitesse linéaire du point n est égale à ωr dans la direction BY. Cette vitesse est sensiblement la même pour tous les points de l'élément considéré. Estimons la *vitesse relative normale* de l'air par

rapport à l'élément CDD'C'; il suffit pour la trouver de projeter les vitesses sur la normale EF à cet élément, et de retrancher les vitesses ainsi ramenées au même sens. La vitesse absolue de l'air donne suivant cette direction une composante $V \cos \theta$; la vitesse absolue de l'élément a une composante $\omega r \sin \theta$, et la vitesse normale relative est égale à $V \cos \theta - \omega r \sin \theta$. La pression dynamique exercée par le vent sur l'élément a pour valeur le produit

$$K b d r (V \cos \theta - \omega r \sin \theta)^2,$$

K représentant un coefficient qui varie avec le poids spécifique de l'air, $b d r$ la surface pressée, et $(V \cos \theta - \omega r \sin \theta)^2$ le carré de la vitesse relative estimée normalement à la surface.

Le chemin parcouru par l'élément d'aile pendant le temps dt est égal à $\omega r dt$, dans la direction BY; projeté sur la direction de la force, il est égal à $\omega r dt \sin \theta$.

Le travail élémentaire correspondant au temps dt est donc, pour la petite surface CDD'C',

$$K b d r (V \cos \theta - \omega r \sin \theta)^2 \times \omega r dt \sin \theta.$$

Pour l'unité de temps, il sera

$$K b d r (V \cos \theta - \omega r \sin \theta)^2 \times \omega r \sin \theta,$$

et pour les quatre ailes, le travail T recueilli par l'appareil s'obtiendra en prenant l'intégrale de cette différentielle pour tous les éléments des ailes. On aura donc en définitive, en faisant sortir les facteurs constants du signe \int ,

$$T = 4 K b \omega \int_{r_0}^{r_1} (V \cos \theta - \omega r \sin \theta)^2 \sin \theta r dr,$$

r_0 et r_1 représentant les limites extrêmes de l'aile, et θ étant entre ces limites une fonction connue de la variable r .

Pour trouver la forme la plus convenable de l'aile correspondante à des valeurs données de V et de ω , on devra déterminer la fonction θ de manière que l'intégrale soit maximum. Comme elle se compose d'éléments tous positifs, on satisfait à la condition en rendant maximum chacun de ces éléments indépendamment des autres, ce qui revient à évaluer à zéro la

différentielle par rapport à θ seul de la quantité placée sous le signe \int . Il vient ainsi :

$$2(V\cos\theta - \omega r\sin\theta)(-V\sin\theta - \omega r\cos\theta)\sin\theta + (V\cos\theta - \omega r\sin\theta)^2\cos\theta = 0.$$

Cette équation se décompose en deux facteurs, savoir :

$$\begin{aligned} V\cos\theta - \omega r\sin\theta &= 0, \\ (V\cos\theta - \omega r\sin\theta)\cos\theta - 2(V\sin\theta + \omega r\cos\theta)\sin\theta &= 0. \end{aligned}$$

La première solution est inadmissible, car elle annulerait le travail T qu'on veut rendre maximum ; elle définit la forme de l'aile qui, en se mouvant avec la vitesse angulaire ω dans l'air animé de la vitesse V , ne subirait de la part du vent aucune action normale.

L'autre équation donne la condition cherchée : divisant par $2V\cos^2\theta$, et changeant les signes, il vient

$$\tan^2\theta + \frac{\omega r}{2V}\tan\theta - \frac{1}{2} = 0.$$

Cette équation donne pour $\tan\theta$ deux valeurs : l'une positive, l'autre négative ; la première seule résout la question dans le sens direct de son énoncé. On voit que la forme la plus convenable de l'aile varie avec le rapport $\frac{\omega}{V}$.

CHAPITRE III

DES MACHINES A VAPEUR ET AUTRES MACHINES THERMIQUES.

MACHINE DE PAPIN.

191. La machine à vapeur, telle qu'on l'emploie aujourd'hui, est le résultat des perfectionnements successifs d'une idée première due à Denis Papin. Il s'était proposé d'obtenir le mouvement oscillatoire d'un piston placé dans un cylindre, en faisant agir sur lui d'un côté la pression d'un fluide, de l'autre la pression de l'atmosphère.

Concevons qu'au moment où le piston P est parvenu au haut d'un cylindre $ABCD$ ouvert à sa partie supérieure, on fasse le vide sous ce piston ; la pression atmosphérique qui continue à agir sur la face P' n'étant plus équilibrée par la pression du fluide contenu dans le cylindre, tend à faire descendre le piston. Admettons que ce mouvement soit accompli. Une fois que le piston est parvenu au bas de sa course, supposons qu'on rétablisse la pression du fluide à l'intérieur du cylindre. Le piston, soumis à la fois à deux pressions égales et contraires, sera entraîné vers le haut par le poids des organes de la machine, ou, au besoin, par un contrepoids. Le mouvement oscillatoire s'obtiendra donc en opérant dans le cylindre des dilatations et des raréfactions alternatives du fluide qui y est renfermé. On transformera ensuite

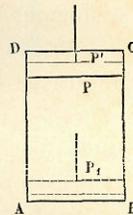


Fig. 89.

ce mouvement oscillatoire en un mouvement quelconque, par exemple en mouvement circulaire continu. Tel est le type sommaire de la *machine atmosphérique*, ou *machine à simple effet*.

Papin songea d'abord à utiliser pour cet objet la poudre à canon. Supposons qu'on place entre le piston P_1 , ramené au bas de sa course, et le fond AB du cylindre, une petite couche de poudre à laquelle on mettra le feu. Au moment de la déflagration, le piston sera chassé vers le haut et viendra prendre sa position supérieure P. Puis les gaz de la poudre se refroidissant, la pression intérieure diminuera, et le piston sera ramené de P en P_1 par l'excès de la pression atmosphérique sur la pression intérieure. On introduit alors à la base du cylindre une nouvelle quantité de poudre, qu'on enflamme, et le mouvement peut être ainsi prolongé aussi longtemps qu'on le voudra.

Cette solution, abandonnée par Papin, a été reprise de nos jours et appliquée au battage des pieux. La poudre qu'il convient d'employer alors est la poudre blanche, au chlorate de potasse, qui s'enflamme sous le choc du marteau.

192. Le procédé auquel Papin semble s'être arrêté consiste à remplacer la poudre par une couche d'eau placée sur le fond AB du cylindre. Si l'on chauffe cette eau jusqu'à la transformer en vapeur, on développera sous le piston une pression égale à la pression atmosphérique, et le piston remontera de P_1 en P. Puis, éloignant le feu du cylindre, on laissera se condenser la vapeur, qui repassera bientôt à l'état liquide; la pression atmosphérique, supérieure à ce moment à la pression intérieure du fluide, fera rétrograder le piston et le ramènera en P_1 .

L'oscillation du piston résultera ainsi de l'éloignement et du rapprochement alternatif du feu. A l'intérieur du cylindre, l'eau passera alternativement de l'état liquide à l'état de vapeur, et de l'état de vapeur à l'état liquide. La machine à vapeur est tout entière dans ce premier essai.

MACHINE DE NEWCOMEN.

193. Le premier perfectionnement notable de la machine de Papin a consisté à séparer du cylindre où se meut le pis-

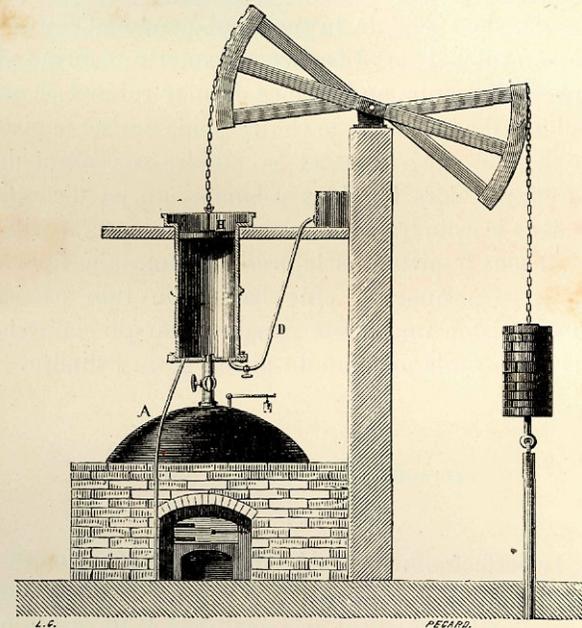


Fig. 90.

ton la chaudière où s'opère la vaporisation de l'eau. On obtient ainsi la *machine atmosphérique*, ou *pompe à feu* de Newcomen, qui fut pendant longtemps employée à l'épuisement des mines.

L'eau liquide est vaporisée dans la chaudière A, placée sur le foyer. La vapeur se rend dans le cylindre par un conduit qu'on peut ouvrir ou fermer à volonté au moyen d'un robinet. Le piston H est attaché par une chaîne à un balancier mo-

bile autour d'un point fixe. Cette chaîne s'enroule sur un arc de cercle ayant ce point pour centre, de manière à conserver invariable la position de la partie libre du lien. L'autre extrémité du balancier porte un arc analogue, auquel s'attache la chaîne qui conduit les pompes. Un contre-poids tend à faire descendre cette partie de l'appareil et à soulever le piston II. A proximité du cylindre se trouve placé un réservoir d'eau froide, d'où part le tuyau D qui conduit l'eau dans le cylindre; un robinet sert à fermer et à ouvrir ce tuyau. Pour que le piston II monte, on ferme ce dernier robinet et on ouvre le robinet d'admission; le contre-poids amène le piston II dans sa position supérieure, et le cylindre se remplit de vapeur. On tourne alors les deux robinets; un jet d'eau froide pénètre dans le cylindre et la vapeur se condense aussitôt. Le vide se fait sous le piston, et la pression atmosphérique le ramène dans sa position la plus basse. Un tube particulier verse sur le piston une petite couche d'eau qui empêche les fuites de vapeur à la jonction du piston et du cylindre.

PERFECTIONNEMENTS DUS A WATT.

194. Le perfectionnement dû à Newcomen se résumait dans la séparation de la chaudière d'avec le cylindre où se meut le piston. Le perfectionnement principal dû à Watt est de même la séparation du condenseur et du cylindre. Papin opérait dans un même espace les trois fonctions de la machine : production de la vapeur, action de la vapeur sur le piston, condensation de la vapeur. Watt sépare ces trois opérations et les fait accomplir dans trois organes distincts, ayant chacun une destination unique. C'est une application du principe de la *division du travail*.

L'emploi du condenseur est fondé sur un principe de physique formulé par Watt et connu sous le nom de *principe de la paroi froide*. Quand une quantité limitée de vapeur contenue

dans une enceinte à la température τ est mise en communication avec une autre enceinte à la température τ' , inférieure à τ , il se fait un écoulement de fluide de la première enceinte dans la seconde, et au bout d'un temps assez court, les deux enceintes sont remplies d'un mélange de vapeur et d'eau liquide dont la pression se règle sur la température τ' la plus basse. Pour condenser la vapeur sous le piston, il n'est donc pas nécessaire d'injecter de l'eau froide dans le cylindre, comme le faisait Newcomen. Il suffit d'ouvrir une communication libre entre le cylindre et un espace entretenu à la température la plus basse possible. La machine à vapeur, réduite à ses parties essentielles, comprend donc trois organes principaux; on peut se rendre compte de leur rôle sur la figure suivante :

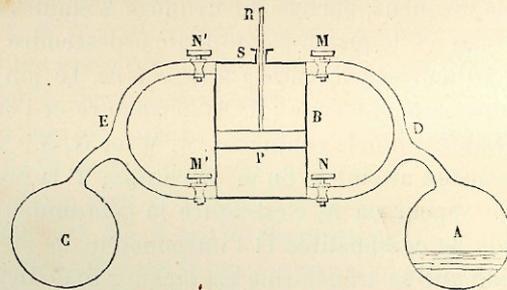


Fig. 91.

A, chaudière où l'eau est maintenue à l'état d'ébullition, à la température τ et sous la pression p ;

B, cylindre où se meut le piston P; la machine que nous représentons est une machine à *double effet*, c'est-à-dire une machine dans laquelle le piston est alternativement pressé sur ses deux faces; le piston transmet son mouvement au dehors du cylindre par la tige R, traversant une *boîte à étoupes* S;

C, condenseur entretenu à une température τ' , aussi basse que possible;

D, tubes d'amenée ou tubes d'admission, conduisant la vapeur de la chaudière au cylindre;

E, tubes de fuite ou d'échappement, conduisant la vapeur au condenseur;

M, N, M', N', robinets de distribution, que nous supposons manœuvrés à la main.

Pour faire monter le piston, on ouvre les robinets N et N', et on ferme les robinets M et M'. La partie supérieure du cylindre est alors en communication avec le condenseur, et les fluides qui y sont contenus prennent une pression peu différente de la pression p' correspondante à la température τ . La partie inférieure est en communication avec la chaudière, et subit une pression peu différente de la pression p . Le piston est donc sollicité vers le haut par une force égale à $(p - p')\Omega$, Ω étant sa surface. Quand il est parvenu au haut de sa course, on ferme les robinets N et N', et on ouvre M et M'. Les communications des deux parties du cylindre s'établissent dans l'ordre inverse, et le piston est sollicité à descendre par une pression résultante égale encore à $(p - p')\Omega$. Le jeu indéfini de la machine suppose donc : 1° la fermeture et l'ouverture alternatives des robinets conjugués M, M' et N, N', à chaque fois que le piston atteint la fin de sa course; 2° la production indéfinie de vapeur en A, c'est-à-dire la consommation d'un certain poids de combustible et l'introduction de la quantité d'eau liquide qui se transforme en vapeur; 3° enfin le maintien du condenseur à la température τ' , par une injection d'eau froide et par l'évacuation constante de toute l'eau de condensation qui tend à le remplir. La machine comprend donc, outre les organes principaux que nous avons d'indiqués plus haut, un foyer pour brûler le combustible sous la chaudière, une pompe alimentaire pour fournir à la chaudière l'eau enlevée par la vaporisation, une pompe aspirante ou pompe à air, pour vider le condenseur à mesure que la vapeur condensée s'y introduit, et une pompe à eau, pour y injecter de petites quantités d'eau froide, qui empêchent la température de s'élever.

Enfin, un mécanisme particulier rattachera le jeu des robinets de distribution M, N, M', N' aux pièces mobiles de la machine, de manière à supprimer l'emploi des ouvriers aux-

quels on confiait d'abord cette manœuvre. La première transmission de ce genre a été imaginée par un enfant, employé à tourner les robinets d'admission de la machine de Newcomen, et qui, au moyen de tringles et de ficelles attachées d'un côté au robinet, de l'autre au balancier de la machine, fit faire par la machine elle-même le travail dont il était chargé.

DÉTENTE.

195. Au lieu de manœuvrer à la fois les robinets M, M', et les robinets N, N', on peut, en réglant convenablement l'époque de leur ouverture et de leur fermeture, obtenir une meilleure utilisation de la vapeur produite.

Considérons le piston P dans sa course ascendante; les robinets M et M' restent fermés pendant toute cette partie, et le robinet N' est ouvert. Quant au robinet N, qui amène la vapeur sous la face AB du piston, au lieu de le laisser ouvert tout le temps de la course, nous le fermerons quand le piston sera parvenu à une position particulière AB. A partir de ce moment jusqu'au bout de la course ascendante, la vapeur comprise dans le cylindre entre la paroi mobile AB et les robinets N et M' se détend et sa pression diminue. Elle tombe ainsi de la pression p à une pression plus petite p_1 , et c'est sous cette dernière pression qu'elle se trouve au moment où la condensation commence par l'ouverture du robinet M'. La détente consiste donc à limiter l'admission par la fermeture du tube d'amenée avant que le piston ait accompli toute sa course. Le coefficient de la détente est le rapport de la longueur de course effectuée pendant la détente à la course totale.

Pour apprécier l'avantage de la détente, nous supposerons que, pendant que la vapeur se détend, la loi de Mariotte lui soit applicable, c'est-à-dire qu'elle se comporte comme un

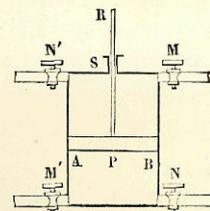


Fig. 92.

gaz dont la température serait constante. Pour que cette hypothèse soit admissible, il faut que l'on fournisse de la chaleur à la vapeur pendant que son volume augmente; autrement il y aurait abaissement de température, et, suivant les cas, vaporisation d'eau liquide ou condensation de vapeur au sein de la masse fluide dilatée. Appelons p la pression de la vapeur dans la chaudière, laquelle est sensiblement égale à la pression exercée sur la face du piston pendant l'admission. Soient Ω la section du piston;

l la portion de course qu'il décrit pendant l'admission;

L la course totale;

et V_0 le volume de l'espace mort compris entre les robinets et le piston au moment de son départ. Pendant la période d'admission, le travail moteur de la vapeur est mesuré par le produit

$$p\Omega l.$$

Au delà, la pression se réduit de plus en plus; si x est l'espace décrit par le piston à un certain instant, la pression q correspondante de la vapeur, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, sera donnée par la loi de Mariotte

$$q \times (V_0 + \Omega x) = p \times (V_0 + \Omega l).$$

Donc

$$q = p \times \frac{V_0 + \Omega l}{V_0 + \Omega x}.$$

Le travail élémentaire fourni par un déplacement dx du cylindre est $q\Omega dx$, ou bien

$$\frac{p(V_0 + \Omega l)\Omega dx}{V_0 + \Omega x},$$

et le travail total pendant la détente sera la somme de cette expression entre les limites l et L . Le travail moteur T fourni par la course entière est donc égal à

$$\begin{aligned} T &= p\Omega l + p(V_0 + \Omega l) \int_l^L \frac{\Omega dx}{V_0 + \Omega x} \\ &= p\Omega l + p(V_0 + \Omega l) \log \text{nép.} \frac{V_0 + \Omega L}{V_0 + \Omega l}. \end{aligned}$$

En général, on fait en sorte que l'espace mort V_0 soit le plus petit possible. Supposons-le nul. La formule devient

$$T = p\Omega l \left(1 + \log. \frac{L}{l} \right) = p\Omega l \left(1 + \log. \frac{p}{p_1} \right).$$

Or, pour obtenir ce résultat, il a suffi de dépenser un volume Ωl de vapeur produit sous la pression p . La dépense de combustible est proportionnelle à ce volume. Donc le facteur $1 + \log \text{nép.} \frac{p}{p_1}$ mesure l'utilisation de la dépense faite; si $p_1 = p$, c'est-à-dire s'il n'y a pas de détente, le facteur devient égal à l'unité; il croît à mesure que p_1 diminue, c'est-à-dire à mesure que la détente augmente et que l'admission diminue.

D'après ce raisonnement une machine à vapeur serait d'autant plus parfaite que la détente y est plus prolongée. Mais cette conclusion n'est vraie qu'avec certaines restrictions, car elle repose sur une hypothèse qui n'est pas ordinairement vérifiée, celle de la constance de la température pendant toute la détente. D'ailleurs la détente est évidemment limitée par la pression dans le condenseur. Elle est dite *complète* quand $p_1 = p'$.

Pour maintenir constante autant que possible la température de la vapeur, Watt entourait son cylindre d'une enceinte communiquant librement avec la chaudière et formant autour de lui comme une *chemise de vapeur*. Cette précaution avait pour effet de réchauffer la vapeur pendant sa détente à travers les parois du cylindre. Une partie de la chaleur produite dans le foyer est alors employée à opérer ce réchauffement.

TIROIRS SUBSTITUÉS AUX ROBINETS.

196. Au lieu des robinets qui ferment et ouvrent alternativement les tubes d'admission et d'échappement, on se sert d'appareils à mouvement alternatif appelés *tiroirs*. Voici

le système primitivement adopté par Watt sous le nom de *grand tiroir* ou de *tiroir en D*¹. Il s'applique spécialement aux machines sans détente.

Le cylindre AB, dans lequel se meut le piston P, est en communication avec une *boîte de distribution* M, par les conduits *m*, *n*, qu'on appelle les *lumières* d'échappement et d'admission. Dans cette boîte se meut le grand tiroir; il est formé de deux pistons D et E, réunis ensemble à distance invariable par un tuyau F qui les traverse tous les deux. Le grand tiroir est mobile dans la boîte de distribution entre les positions DE et D'E'; la première laisse les lumières *m* et *n* au-dessous des pistons D et E; la seconde les amène au-dessus.

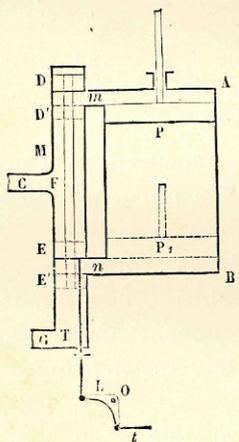


Fig. 95.

La boîte de distribution est alimentée directement par le tuyau C qui vient de la chaudière, et qui aboutit entre les deux pistons D et E; elle communique par le tuyau G avec le condenseur. La vapeur entoure le tuyau F dans tout l'intervalle des deux pistons.

Il suffira pour cela d'amener la vapeur par la lumière *m* au-dessus du piston, et d'établir la communication par la lumière *n* avec le condenseur G. On obtient ce double résultat en donnant au tiroir la position supérieure DE.

Supposons que le piston P soit au haut du cylindre, et qu'il ait à accomplir une nouvelle course dans le sens descendant. Quand le piston est parvenu en P₁, et qu'il faut le faire remonter en P, il n'y a qu'à introduire la vapeur sous le piston P₁ par la lumière *n*, en ouvrant à la vapeur située au-dessus un chemin vers le condenseur. On y parvient en amenant le grand tiroir dans la position D'E'; car alors la lumière *n* communique avec l'intervalle compris entre les deux

¹ Ce nom rappelle la forme de la coupe transversale du tuyau qui réunit les deux pistons D et E.

pistons du tiroir, et par là avec la chaudière, tandis que la lumière *m* communique avec le condenseur G par l'intermédiaire du tube F qui traverse les deux pistons.

L'épaisseur commune des deux pistons auxiliaires D et E doit être égale à la largeur des lumières *m* et *n* pour qu'il n'y ait pas de détente. Si elle était plus grande, il y aurait à la fois détente de la vapeur dans le cylindre sur une des faces du piston, et compression sur l'autre face dans les espaces libres.

Le jeu de la distribution se résume dans le mouvement alternatif du système DFE, qui doit passer de la position DE à la position D'E', puis revenir de la position D'E' à la position DE. Ce mouvement est en général emprunté au mouvement circulaire continu produit par la machine. Un excentrique, calé sur l'arbre principal, mène une tige *t* liée, par un levier coudé L analogue aux renvois de sonnettes et mobile autour du point O, à la tige T qui commande le tiroir.

La distribution sera assurée si le tiroir DE est dans sa position moyenne, les pistons D et E bouchant les lumières *m* et *n*, au moment où le piston principal P est au bout de sa course, avec cette condition que le tiroir se déplace vers le haut quand le piston principal est dans la position P à partir de laquelle il doit descendre, et qu'il se déplace vers le bas quand le piston principal est dans la position P₁ à partir de laquelle il doit monter. Il suffit pour cela de régler convenablement l'angle de l'excentrique avec la manivelle de l'arbre principal.

Le grand tiroir de Watt a l'inconvénient d'être lourd; l'ajustage en est assez délicat, et il ne conviendrait pas aux grandes vitesses que l'on donne maintenant aux machines à vapeur. Watt l'avait adopté, à une époque où les machines donnaient seulement un petit nombre de coups par minute, parce que les pressions de la vapeur sur ce tiroir se font à chaque instant équilibre; l'effort à faire pour le déplacer est donc indépendant de la pression de la vapeur; il dépend seulement des masses de l'appareil et de la vapeur

entraînée dans son mouvement, et du frottement des pistons contre les parois de la boîte, frottement réglé exclusivement par l'ajustage de l'appareil, puisque les pressions de la vapeur sur le système se détruisent et ne contribuent pas à l'augmenter.

PETIT TIROIR.

197. Le petit tiroir ou *tiroir à coquille* qu'on emploie aujourd'hui est beaucoup plus léger, mais les pressions de la vapeur n'y sont pas équilibrées, de sorte que l'effort à faire pour le déplacer est proportionnel à la différence entre les pressions dans la chaudière et dans les tubes d'échappement.

Latéralement au cylindre AB dans lequel se meut le piston principal P, on ménage une boîte de distribution communiquant librement avec la chaudière par le tuyau C.

La paroi extérieure du cylindre est dressée suivant une surface plane SS', qui ferme la boîte de distribution; dans l'épaisseur du métal compris entre la surface SS' et la surface intérieure du cylindre, on ouvre trois conduits, savoir : les deux lumières mm', nn', aboutissant aux deux extrémités du cylindre, et le conduit d'échappement G, aboutissant au condenseur. Le tiroir DE est une caisse rectangulaire, dont les parois ont exacte-

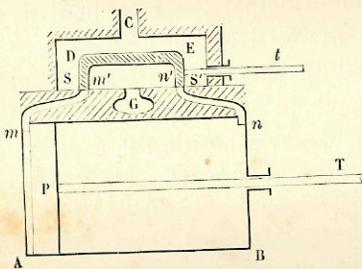


Fig. 94.

ment l'épaisseur des lumières m' et n' , et qui, dans sa position moyenne, couvre à la fois les deux lumières. Il est mené par une tige t , qui emprunte son mouvement à un excentrique calé sur l'arbre tournant, à angle droit en avant de la manivelle menée par le piston principal. De là résulte que quand le piston P est au bout de sa course, vers la gauche ou vers la droite, le tiroir DE est dans sa position moyenne, re-

présentée par la figure. Le tiroir se meut vers la droite si le piston P occupe sa position extrême à gauche : il découvre alors la lumière d'admission mm' , et en même temps il met en communication la lumière nn' avec le tuyau G, de sorte qu'il y a admission de la vapeur sur la face gauche du piston et condensation sur la face droite; le piston P, chassé de gauche à droite, retourne à l'autre bout du cylindre. Lorsqu'il y parvient, le tiroir DE est revenu à sa position moyenne, mais il est animé d'une vitesse dirigée de droite à gauche. Il va donc découvrir la lumière d'admission nn' , et mettre la lumière mm' en communication avec le condenseur G. Le piston est alors chassé vers la gauche, et accomplit sa course inverse.

Le problème est ainsi résolu. On voit que le tiroir supporte extérieurement la pression de la vapeur de la chaudière, et intérieurement la pression qui règne à l'orifice du tube d'échappement. La différence de ces deux pressions tend à appuyer le tiroir contre le plan SS', et développe un frottement proportionnel à cette différence. Le travail perdu par le frottement est d'ailleurs égal, pour une course simple du piston, au produit du frottement par l'espace décrit par le tiroir, et cet espace est égal au double de la largeur des lumières m' et n' . On peut donc le restreindre en diminuant cette dimension. Mais cet artifice entraîne un accroissement de l'autre dimension de la lumière, car la section totale offerte à l'écoulement de la vapeur doit conserver une valeur constante, et par suite il entraîne aussi un accroissement de la largeur du tiroir, c'est-à-dire un accroissement de sa surface et du frottement développé.

Appelons h la largeur commune des lumières m' et n' , l la distance d'axe en axe des deux lumières, b la longueur des lumières, p la pression extérieure au tiroir et p' la pression intérieure, enfin f le coefficient du frottement des métaux en contact suivant le plan SS'. La surface du tiroir est sensiblement égale à $(l + h) \times b$, et le frottement a pour valeur

$$f(p - p')(l + h)b.$$

Le travail du frottement pour une course unique est

$$f(p - p')(l + h)b \times 2h.$$

Or bh est un produit constant, égal à la section nécessaire des lumières. La seule manière de réduire le travail du frottement du tiroir est donc de réduire le facteur $l + h$, ce qu'on peut faire en rapprochant les deux lumières m' et n' .

Le petit tiroir, étant peu massif, se prête très bien aux grandes vitesses. L'ajustage en est d'autant plus facile que l'excès de pression développée sur sa face extérieure tend à l'appliquer plus exactement sur la surface SS' , le long de laquelle il doit glisser. Enfin il donne une solution très pratique du problème de la détente, car il suffit, comme nous le verrons plus loin, d'augmenter la largeur de ses bords, ou de garnir le tiroir de *recouvrements*, pour satisfaire à toutes les conditions demandées.

AUTRES PERFECTIONNEMENTS IMAGINÉS PAR WATT.

198. La machine de Watt à double effet est représentée dans la figure 95.

Outre le condenseur et la détente, Watt imagina le *parallélogramme articulé* (I, § 277), destiné à lier le balancier à la tige du piston; le *régulateur à boules* (§ 57); l'*engrenage planétaire* (I, § 246), qu'il abandonna bientôt pour s'en tenir à la transmission par bielle et manivelle; enfin, il indiqua le premier les avantages des hautes pressions, résultat entièrement confirmé par la théorie mécanique de la chaleur, puisque le coefficient d'utilisation d'une machine thermique est donné par la fraction $\frac{\tau - \tau'}{273^\circ + \tau}$, et se trouve

d'autant plus grand que l'écart $\tau - \tau'$ entre les températures extrêmes est plus grand lui-même. Aujourd'hui, la pression de la vapeur est souvent poussée dans les chaudières jusqu'à 10 atmosphères; la condensation peut alors se faire dans l'air

atmosphérique, sans condenseur particulier. C'est ce qui arrive par exemple pour les locomotives.

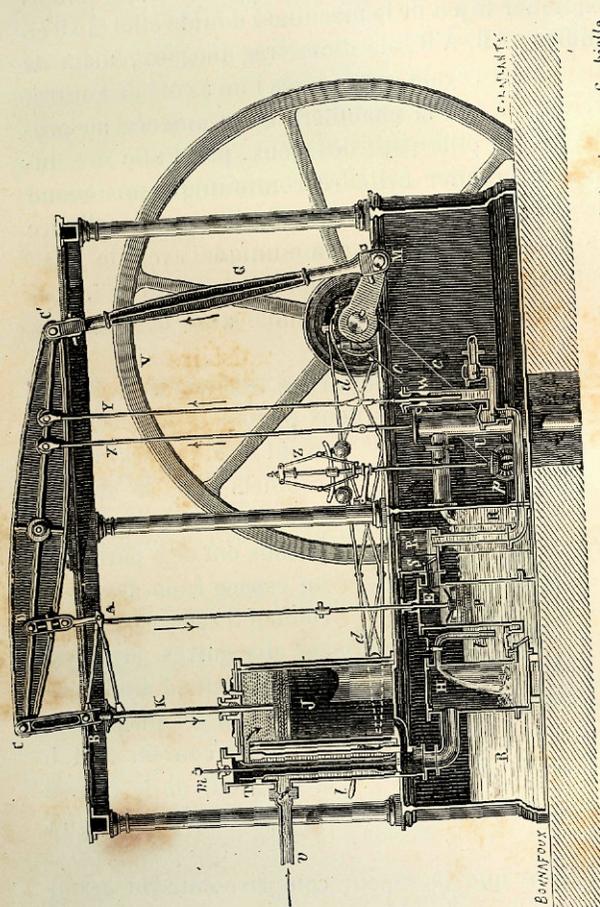


Fig. 95. — MACHINE DE WATT. — ABCD, parallélogramme articulé. — COQ, balancier. — G, bielle. — MO, manivelle. — O', arbre principal. — d, d, excentrique et barres d'excentrique commandant le tiroir. — L, levier à main, pour désenclaver le tiroir et le conduire directement à la main. — T, boîte de distribution. — v, conduit qui amène la vapeur. — J, cylindre et piston moteur. — K, tige de ce piston. — RII, bêche pleine d'eau froide. — t, tuyau qui amène l'eau froide. — B, corps de la pompe à air. — P, son piston, attaché à la bride AD du parallélogramme. — S, S, soupapes. — X, U, pompe à eau. — Y, W, pompe alimentaire, renvoyant dans la chaudière l'eau de condensation. — P', roue d'angle recevant le mouvement d'une courroie ce, et commandant le régulateur à boules ZI. — V, volant.

MACHINE DE WOOLF A DEUX CYLINDRES.

199. La machine de Woolf à deux cylindres a l'avantage de prolonger la durée de la détente si la machine marche avec

détente, ou de créer une détente si la machine marche à pleine pression. Pour en expliquer le mécanisme, nous emploierons un diagramme (fig. 96) analogue à celui qui nous a servi pour expliquer le jeu de la machine à double effet (§ 194).

Deux cylindres, AB, A'B', de diamètres inégaux, mais de longueur sensiblement égale, sont placés l'un à côté de l'autre.

La vapeur fournie par la chaudière O est amenée au premier cylindre AB, le plus petit des deux, par l'une des lumières n et m ; ce premier cylindre communique au second par deux tubes croisés $m'm''$ et $n'n''$; enfin le second cylindre A'B', le plus grand des deux, communique avec le condenseur G par les lumières d'échappement m''' et n''' . Les deux pistons P et P' marchent ensemble avec des vitesses égales.

La distribution est faite au moyen des robinets R, S, R', S', R'', S''. Quand, par exemple, les deux pistons commencent à descendre, les robinets S, R', S'' doivent être ouverts, et les robinets R, S', R'' doivent être fermés. Lorsque les pistons ont déjà parcouru un espace l , on ferme le robinet S sans rien changer aux autres, et la vapeur se détend au-dessus du piston P jusqu'à la fin de la course. Soit L

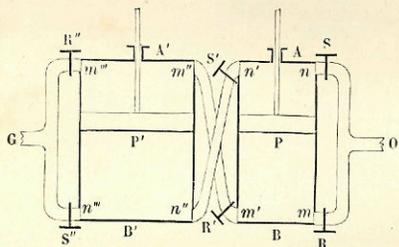


Fig. 96.

totale, ω la section du petit cylindre AB, Ω la section du grand cylindre A'B'.

Admettons encore que la vapeur comprise dans le grand cylindre au-dessus du piston P' et dans le petit au-dessus du piston P ne change pas de température en augmentant de volume. Soit x l'espace décrit par chacun des pistons. Cherchons les pressions de la vapeur dans les différentes régions de l'appareil. Appelons p la pression de la vapeur à l'admission; si $x < l$, la pression est égale à p sur la face supérieure du

petit piston. Si $x > l$, la pression effective est réduite à $\frac{pl}{x}$;

au bout de la course, elle est égale à $\frac{pl}{L}$. La vapeur occupe alors la totalité du cylindre, c'est-à-dire un volume $L\omega$, en négligeant les espaces nuisibles.

La vapeur qui remplit l'espace compris au-dessus du grand piston et au-dessous du petit occupait au commencement de la course le petit cylindre tout entier, c'est-à-dire un volume $L\omega$, sous la pression $\frac{pl}{L}$.

Dans la position définie par l'abscisse x , elle occupe un volume $(L-x)\omega + \Omega x$, et sa pression est

$$\frac{pl}{L} \times \frac{L\omega}{(L-x)\omega + \Omega x} = \frac{pl\omega}{L\omega + (\Omega - \omega)x}$$

Enfin, au-dessous du piston P' règne la pression p' des tuyaux d'échappement.

Pour un déplacement dx commun aux deux pistons, le travail élémentaire s'exprime par la fonction

$$\frac{pl}{x} \omega dx + \frac{pl\omega}{L\omega + (\Omega - \omega)x} (\Omega - \omega) dx - p'\Omega dx$$

si x est $> l$, et par la fonction

$$p\omega dx + \frac{pl\omega \times (\Omega - \omega) dx}{L\omega + (\Omega - \omega)x} - p'\Omega dx$$

si x est $< l$, la détente dans le premier cylindre n'étant pas alors commencée au-dessus du petit piston.

Le travail total pour une course simple est donc égal à

$$p\omega l + p\omega l \int_l^L \frac{dx}{x} + \int_0^L \frac{pl\omega(\Omega - \omega) dx}{L\omega + (\Omega - \omega)x} - p'\Omega L,$$

ou à

$$p\omega l - p'\Omega L + p\omega l \log \frac{L}{l} + pl\omega \log \frac{L\omega + (\Omega - \omega)L}{L\omega} \\ = p\omega l \left(1 + \log \frac{L}{l} + \log \frac{\Omega}{\omega} \right) - p'\Omega L = p\omega l \left(1 + \log \frac{L\Omega}{l\omega} \right) - p'\Omega L.$$

La dépense de combustible est sensiblement proportionnelle au volume ωl , de sorte qu'en faisant abstraction de la contre-pression du condenseur, le coefficient d'utilisation du combustible est égal au facteur

$$1 + \log \frac{\Omega L}{\omega l}.$$

On remarquera que ΩL est le volume total du grand cylindre, et ωl le volume de la partie du petit cylindre qui est remplie par la vapeur à pleine pression.

L'emploi des deux cylindres équivaut donc à une augmentation de la détente. Si le premier cylindre était seul utilisé, le travail moteur serait égal à $1 + \log \frac{L}{l}$ pour une admission

proportionnelle égale à $\frac{l}{L}$. Avec les deux cylindres ce coefficient

devient $1 + \log \frac{L\Omega}{l\omega}$, c'est-à-dire que tout se passe à ce point de vue comme si l'on employait un seul cylindre avec une admission proportionnelle $\frac{l}{L} \times \frac{\omega}{\Omega}$, réduite dans le rapport des sections des deux cylindres.

MACHINE DE CORNOUAILLES.

200. La *machine de Cornouailles* est le type des machines à détente et à simple effet destinées à l'épuisement des mines. Le mouvement oscillatoire du piston, au lieu d'être transformé en un mouvement circulaire continu, est transmis par un balancier à la maîtresse-tige qui commande toutes les pompes d'épuisement.

Le cylindre AB est muni d'un tuyau latéral avec lequel il communique par les deux lumières m et n . Ce tuyau débouche en O dans la chaudière, en G dans le condenseur; il renferme trois soupapes, S, S', S''. La première, S, est appelée

soupage d'admission; la seconde, S', *soupage d'équilibre*; la troisième, S'', *soupage d'exhaustion* ou *d'échappement*.

Pendant l'admission, la soupape S reste levée ainsi que la soupape S''; la soupape S', au contraire, reste fermée. La vapeur, sortant de la chaudière, passe par l'ouverture m et presse la face supérieure du piston, pendant que la face inférieure, communiquant avec le condenseur par l'ouverture n , ne subit qu'une pression très faible. Lorsque le piston P est descendu d'une certaine quantité, on ferme la soupape S. L'admission cesse, et la détente commence; elle se prolonge jusqu'à ce que le piston P soit parvenu au bas de sa course.

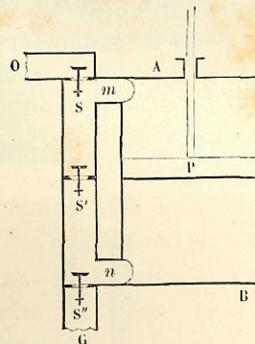


Fig. 97.

Alors la soupape S'' se ferme et la soupape d'équilibre S' s'ouvre. Les deux faces du piston P sont en libre communication l'une avec l'autre par l'intermédiaire du tuyau mn . Les pressions s'égalisent sur ces deux faces, et le piston remonte, entraîné par le poids de l'attirail des pompes attaché à l'autre extrémité du balancier. La course de bas en haut du piston s'effectue donc sans qu'il y ait travail de la vapeur, ce qui justifie le nom de machine à simple effet. Le travail moteur n'est produit que pendant la course descendante.

On peut régler à volonté l'époque de l'ouverture et de la fermeture des trois soupapes et disposer arbitrairement de la détente. Mais la manœuvre des soupapes exige un mécanisme particulier, car il n'y a pas ici d'arbre tournant sur lequel on puisse caler un excentrique. Le mouvement du piston et des pompes étant alternatif, il y a un instant d'arrêt de la machine à chaque extrémité de la course du piston. Or c'est à cet instant que doit s'opérer la manœuvre des soupapes S et S''. Le problème de la distribution revient donc à déplacer les soupapes à un instant où toutes les parties principales sont en repos. On l'a résolu en prolongeant, pour

ainsi dire, le mouvement de la machine au moyen d'un appareil spécial appelé *cataracte*.

Cet appareil (fig. 98) consiste en une bêche AA remplie d'eau, dans laquelle on place un corps de pompe muni d'un piston plongeur *p*.

Le corps de pompe est percé à sa base de deux ouvertures :

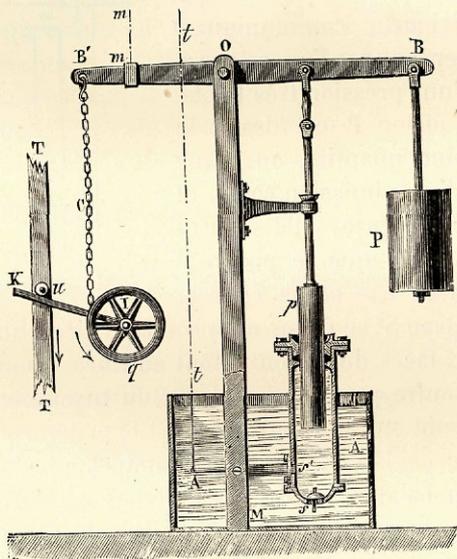


Fig. 98.

L'une, *s*, porte une soupape qui s'ouvre de dehors en dedans ; l'autre, *s'*, est un tube extérieur muni d'un robinet qu'on peut ouvrir plus ou moins à l'aide d'une tringle *tt*. La tige du piston est attachée à un levier *BB'* mobile autour d'un point fixe *O*, et muni en *B* d'un contre-poids. L'autre extrémité porte une chaîne *C*, qui s'enroule sur une poulie *q*, munie d'un bras *IK* et mobile autour de l'axe horizontal *I*.

Pendant que le piston principal descend, la tige *TT*, attachée au balancier de la machine, presse au moyen du taquet *u* sur le bras *IK*, et abaissant le point *B'* du levier, fait

monter le piston plongeur *p* ; l'eau de la bêche est aspirée dans le corps de pompe, et y entre à la fois par la soupape *s* soulevée vers l'intérieur et par l'ouverture *s'*. Cet effet produit, la tige abandonne le bras *IK*, et la cataracte fonctionne seule, indépendamment du reste de la machine. Le piston plongeur *p* descend sous l'action de son poids propre et du contre-poids *P* ; en descendant, il chasse l'eau aspirée par le corps de pompe ; mais cette eau ne peut sortir que par l'orifice *s'*, puisque la soupape *s* se referme dès que l'aspiration cesse.

L'expulsion de l'eau demande un temps plus long que l'aspiration, à cause de la réduction des orifices ouverts, et l'on peut, en étranglant la section *s'* au moyen du robinet, prolonger cette durée autant qu'on le voudra. Le retour du piston plongeur à sa position primitive pourra donc, si la cataracte a été convenablement réglée, continuer à s'opérer quand tout le reste de la machine demeure immobile, et on pourra emprunter au levier de la cataracte le mouvement nécessaire pour la manœuvre des soupapes au moment opportun. C'est à opérer cette manœuvre qu'est destinée la tringle *mm*.

Les soupapes de Cornouailles sont disposées de telle sorte qu'un petit déplacement suffise pour ouvrir à la vapeur de larges orifices. L'ouverture se fait par un simple déclenchement qui laisse agir un contre-poids ; la fermeture, en ramenant ce contre-poids à sa place primitive. Ces opérations sont effectuées par des poutrelles armées de tasseaux dont on peut faire varier la position à volonté, de manière à modifier la détente. Le règlement de la cataracte donne un moyen d'espacer plus ou moins les coups de piston successifs.

En résumé, les machines de Cornouailles ont une extrême flexibilité d'allure, bien utile dans un travail aussi irrégulier que l'épuisement d'une mine, et elles permettent de pousser très loin la détente, ce qui correspond à une économie de combustible.

MACHINE HORIZONTALE A ACTION DIRECTE.

201. On peut, en plaçant horizontalement le cylindre de la machine à vapeur, supprimer le balancier, pièce lourde dont le mouvement alternatif exige une grande rigidité dans l'axe de rotation. On obtient alors la *machine à action directe*, qui occupe peu de place; et qu'on emploie notamment dans toutes les locomotives.

Watt connaissait cette disposition, mais il ne l'employa jamais, craignant l'inégalité d'usure produite par le frottement du piston aux divers points de la surface intérieure du cylindre quand il est placé horizontalement. L'expérience a montré qu'il ne fallait pas s'exagérer cette influence.

MACHINES DE NAVIGATION.

202. La propulsion des bâtiments à vapeur s'effectue en communiquant un déplacement à l'eau en sens contraire de la marche. Le système matériel formé par le bâtiment et l'eau dans laquelle il plonge a son centre de gravité immobile, puisqu'il n'est soumis qu'à des forces intérieures mutuelles. L'eau mise en mouvement par l'appareil propulseur se déplaçant vers l'arrière, le bâtiment se déplace vers l'avant, en refoulant devant lui une certaine quantité d'eau, de telle sorte que le centre de gravité général reste immobile.

Deux systèmes principaux de propulsion peuvent être adoptés : les *roues à aubes* et l'*hélice*.

Les roues à aubes sont de simples roues à palettes planes, montées sur un arbre de couche traversant le bâtiment, et plongeant dans l'eau à leur partie inférieure. Elles sont mises en mouvement soit par une machine à balancier, soit par une machine à action directe. Dans le premier cas, on adopte en général la disposition (I, § 280) qui place le balancier

au niveau de la partie inférieure des cylindres. Dans le second, si le creux du bâtiment ne suffit pas pour fournir l'espace nécessaire au développement de la tige du piston et de la

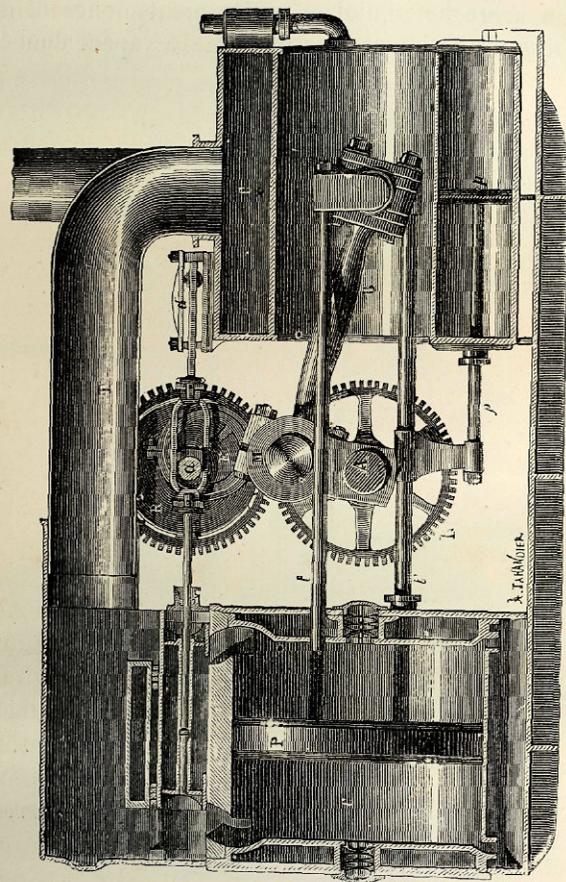


Fig. 99. — Machine à bielle renversée. — C, cylindre. — P, piston. — MA, manivelle qui met en mouvement la roue dentée E, laquelle transmet le mouvement à la roue R et de là à l'hélice, à l'aide d'un mécanisme permettant d'en changer le sens à volonté. — E, excentrique. — T, tirour. — P, pompe.

bielle, on peut avoir recours au *système oscillant* créé par M. Cavé (fig. 100). Dans tous les cas, l'arbre de couche est coudé pour recevoir les bielles, et des excentriques calés sur cet arbre assurent le jeu des tiroirs de distribution. On réunit

ordinairement ensemble deux cylindres avec manivelles à angle droit pour éviter les points morts. Un mécanisme particulier sert à changer le sens de la marche.

L'hélice est un fragment d'hélicoïde à plan directeur, monté sur un arbre horizontal et entièrement plongé dans l'eau à l'arrière du bâtiment. Une machine à vapeur donne

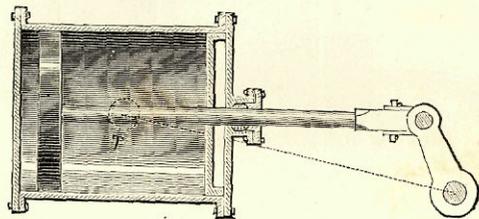


Fig. 100. — T, axe autour duquel oscille le cylindre.

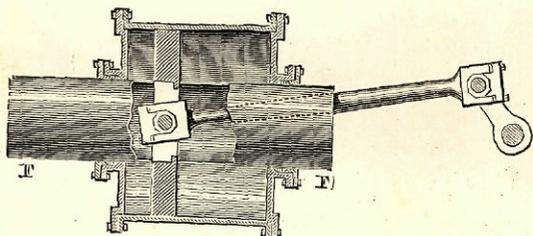


Fig. 101. — F, F, fourreau.

à cet arbre une rotation dans un sens déterminé. Les machines ont ordinairement des cylindres horizontaux ou inclinés, placés transversalement à la longueur du bâtiment. Le peu de largeur des bâtiments exige l'emploi de dispositions particulières : les plus usitées sont la *machine à fourreau* (fig. 101) et la *machine à bielle renversée* (fig. 99).

LOCOMOTIVE.

205. Une locomotive (fig. 102) est une machine à vapeur montée sur plusieurs paires de roues, dont l'une au moins

sert de moteur et prend ses points d'appuis sur les rails. Les traits particuliers à ce genre de machines à vapeur sont

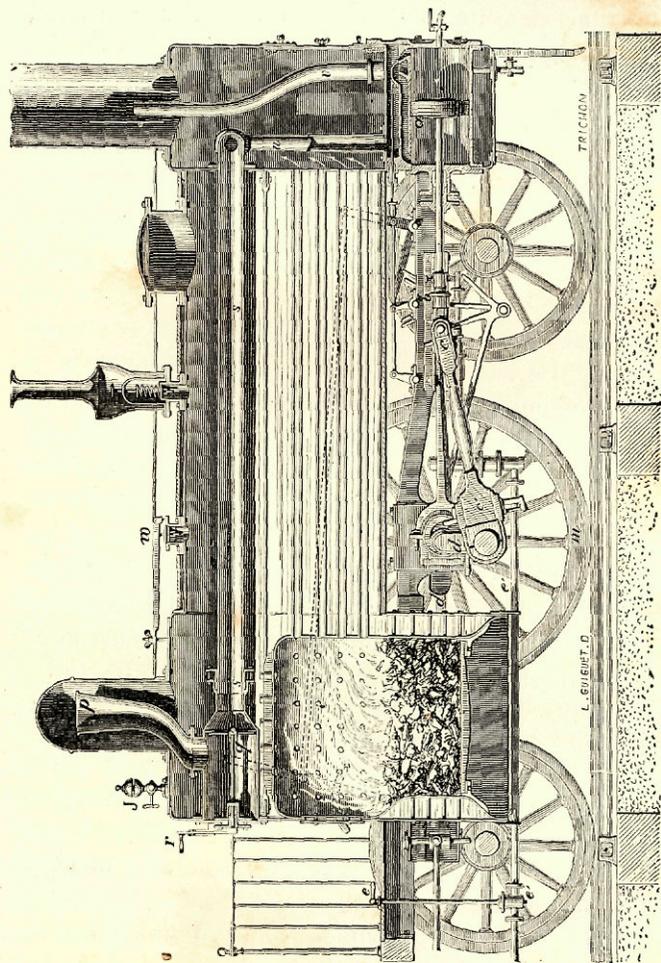


Fig. 102. — Locomotive (coupe en long). — *p*, prise de vapeur. — *q*, régulateur d'admission manœuvré par le levier *r*. — *ssu*, conduit de la vapeur aux cylindres *a*. — *v*, tuyau d'échappement. — *b*, tête de la tige du piston. — *cc'*, bielle. — *d*, manivelle. — *ee'e'*, alimentation. — *j*, sifflet. — *w*, soupape de sûreté.

l'emploi d'une *chaudière tubulaire* pour fournir une grande quantité de vapeur en peu de temps, et la condensation de la vapeur à la sortie des cylindres dans la cheminée du foyer,

pour activer le tirage. L'absence de condenseur suppose que la machine fonctionne à haute pression.

204. Soit O (fig. 103) le centre de la roue motrice; E le point de contact de cette roue avec le rail; OA la manivelle, AB la bielle, P le piston et CD le cylindre.

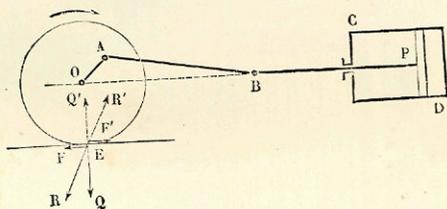


Fig. 103.

Soit R la pression exercée par la roue sur le rail au point E; la force R', égale et contraire à R, sera la réaction du rail sur la roue. Décomposons ces forces en deux composantes, l'une perpendiculaire au rail, l'autre parallèle. Nous obtenons ainsi les réactions normales, Q et Q', du rail et de la roue, et les réactions tangentielles F et F'. Appelons f le coefficient de frottement des solides en contact au point F. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait pas glissement de la roue sur le rail est exprimée par l'inégalité

$$\frac{F}{Q} < f,$$

ou $F < fQ$. La force Q est la portion du poids de la locomotive qui pèse sur la roue motrice O. La force F est développée par le jeu de la machine. C'est la réaction F', égale et contraire, qui produit la progression du train.

Le travail moteur de la machine, pour un tour entier de roue, est égal au travail résistant lorsque la vitesse de la locomotive est constante. Appelons H l'effort de traction que la locomotive doit exercer constamment sur le train pour le mener à une certaine vitesse. Soient R le rayon des roues motrices, p la pression de la vapeur à l'admission, p' la

pression de la vapeur dans les tuyaux d'échappement, r le rayon des cylindres, et l la course des pistons. La locomotive comprend deux cylindres, dont les manivelles sont calées à angle droit.

Pour simplifier le calcul, nous ferons abstraction de la détente.

Le travail moteur développé par une course simple de l'un des pistons est égal à $\pi r^2 l \times (p - p')$; pour l'allée et la venue du piston le travail sera double, et il sera quadruple pour les deux pistons marchant à la fois, ce qui fait $4\pi r^2 l \times (p - p')$ pour une oscillation complète des pistons, c'est-à-dire pour un tour de roue. Or la roue motrice roule sur le rail, puisqu'on suppose le glissement impossible; la locomotive avance donc de la quantité $2\pi R$, et le travail résistant pris positivement est égal à $2\pi RH$. On a en définitive l'égalité

$$4\pi r^2 l \times (p - p') = 2\pi RH,$$

d'où l'on déduit $H = \frac{2r^2 l (p - p')}{R}$.

L'effort de traction est donc proportionnel au produit $r^2 l$, ou bien au volume des cylindres, et inversement proportionnel au diamètre des roues motrices.

Si la locomotive doit mener un train très lourd, l'effort H sera très grand, et il faudra augmenter $r^2 l$ et diminuer R; on obtient ainsi le type des *machines à marchandises*, qui ont de grands cylindres et de petites roues motrices. Si, au contraire, la locomotive doit conduire un train léger, l'effort H étant moindre, on adoptera de petits cylindres et un grand diamètre de roues, ce qui caractérise les *machines à voyageurs*.

L'effort de traction H est la somme de toutes les forces F développées au contact des roues motrices et du rail, et chaque force F est limitée par l'inégalité $F < fQ$. On aura donc aussi

$$H < f(Q + Q' + \dots),$$

en appelant Q, Q',... les poids qui pèsent sur les roues mo-

trices. Lorsque l'effort H est grand, on augmente la somme $Q + Q' + Q'' + \dots$, qui limite cet effort, en faisant porter la machine sur plusieurs roues motrices. Les machines à marchandises ont au moins trois essieux couplés, et la somme $Q + Q' + \dots$ comprend la totalité du poids de la machine.

DISTRIBUTION AVEC DÉTENTE FIXE.

205. La détente fixe peut s'obtenir facilement en donnant au tiroir des recouvrements. Cette solution est connue sous le nom de *détente de Clapeyron*¹.

Le tiroir mn (fig. 104) est mené par la tige t , qui s'attache aux barres d'excentriques. Dans sa position moyenne, le

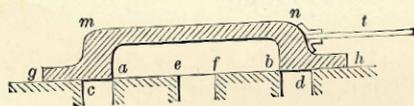


Fig. 104.

tiroir recouvre à la fois les deux lumières ac, bd . Les recouvrements sont placés à l'extérieur du tiroir, et consistent en deux brides égales, cg, dh . Les figures successives I à VII (fig. 105) montrent les principales positions occupées par le tiroir dans la suite de son mouvement relativement à l'une ac des deux lumières, et permettent d'étudier ce qui se passe sur la face gauche du piston moteur. De la position I à la position II, le tiroir marche vers la droite en découvrant de plus en plus la lumière; arrivé dans la position II, il rétrograde et revient à la position III, identique à la position I, sauf que la direction de sa vitesse est changée. Pendant tout ce temps, la lumière restant ouverte, la vapeur pénètre dans le cylindre sur la face gauche du piston : c'est la *période d'admission*.

Le tiroir, continuant à s'avancer, atteint la position IV, qui est la position moyenne. Dans l'intervalle, la face gauche du piston ne communique plus ni avec la chaudière, ni avec le tuyau d'échappement; c'est donc la *période de détente*.

¹ Sur le mouvement du tiroir, voir I, §§ 282 et 283.

A partir de la position IV, la lumière ac est en communication avec l'échappement ef ; elle s'ouvre graduellement jusqu'à la position V, puis reste ouverte pendant l'excursion que fait le tiroir à gauche de cette dernière position; ensuite elle est fermée graduellement par le retour du tiroir, jusqu'à ce qu'il soit revenu à la position moyenne VI. Toute l'excursion du tiroir à gauche de sa position moyenne correspond à la *période d'échappement*.

Enfin, de la position VI à la position VII, la communication entre la face gauche du piston et la condensation se trouve interrompue, sans être établie encore entre la même face et la chaudière; c'est la *période de compression dans les espaces libres*, ainsi que nous le reconnaitrons plus loin. Elle se termine à la position VII, qui est la reproduction complète de la position I.

Le mouvement rectiligne alternatif d'un point quelconque du tiroir est sensiblement identique au mouvement projeté sur la même droite du bouton de la manivelle qui le commande, ou du centre de l'excentrique qui tient lieu de cette manivelle. Considérons un point particulier, a , du tiroir, et regardons

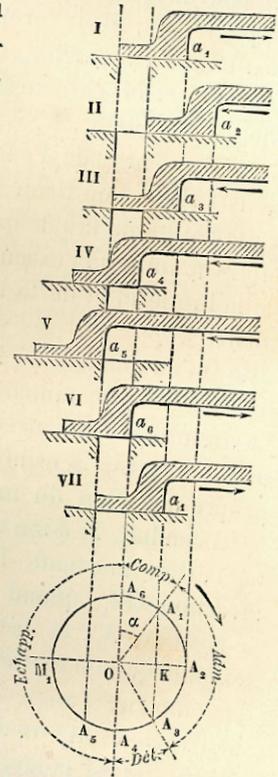


Fig. 105

le mouvement de ce point le long de la table de distribution comme la projection du mouvement d'un point mobile sur une circonférence. Le point a est dans sa position moyenne lorsque le tiroir occupe les positions IV et VI. Prenons un point O sur l'alignement des points a_4 et a_6 ; ce sera le centre du cercle cherché. La position II nous donne la limite

extrême de l'excursion du tiroir vers la droite. Projetons le point a_2 en A_2 sur l'horizontale menée par le point O ; OA_2 sera le rayon du cercle que devra suivre le point mobile. Décrivons donc une circonférence du point O comme centre avec OA_2 pour rayon; les positions successives $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1$, du point a du tiroir seront respectivement les projections des positions $A_1, A_2, \dots, A_6, A_1$, occupées successivement par le point directeur parcourant ce cercle, dans le sens de la flèche: ces points A_1, A_2, \dots peuvent aussi représenter les positions du centre de l'excentrique correspondantes aux positions I, II, ... du tiroir.

Il résulte de là : 1° que le rayon OA_2 est égal à l'excentricité. On voit que l'excentricité est la somme de la largeur ac de la lumière, et de la longueur cg de la bride de recouvrement;

2° Qu'au moment où le tiroir passe dans la position I, l'admission allant commencer, il faut que le piston moteur soit à l'extrémité de sa course vers la gauche. Or le mouvement du piston est aussi sensiblement identique à la projection sur sa propre direction du mouvement du bouton de la manivelle qu'il conduit. Si donc on regarde le point O comme le centre de l'arbre tournant, la manivelle du piston devra avoir la direction OM_1 quand le centre de l'excentrique occupe la position A_1 , et la distribution sera assurée en calant l'excentrique de manière que son centre fasse avec la manivelle motrice l'angle M_1OA_1 . Appelons α l'excès de cet angle sur l'angle droit; on donne à cet angle α le nom d'*avance angulaire*. Si l est la largeur de la lumière ac , et r la longueur cg du recouvrement extérieur, le rayon OA_2 d'excentricité est égal à $r + l$; la distance KA_2 est égale au chemin décrit par le tiroir entre les positions I et II; elle est égale, par conséquent, à la largeur l de la lumière. Donc $OK = r$ et l'angle α est donné par l'équation

$$\sin \alpha = \frac{OK}{OA_2} = \frac{r}{r+l}$$

Pour trouver les espaces décrits par le piston pendant

l'admission, la détente, etc., rapportées à la course entière, appelons ρ le rayon de la manivelle principale. Pendant l'admission, la manivelle OM_1 tourne dans le sens de la flèche d'un angle A_1OA_5 , égal à $180^\circ - 2\alpha$. Le piston décrit sensiblement une longueur égale à $\rho \times (1 + \cos 2\alpha)$.

Pendant la détente, la manivelle tourne de l'angle α , et le piston décrit sensiblement un espace égal à $\rho (\cos \alpha - \cos 2\alpha)$. L'échappement correspond à un angle de 180° décrit par la manivelle, pendant lequel le piston avance d'abord vers la droite de la quantité $\rho (1 - \cos \alpha)$, puis rétrograde vers la gauche en parcourant un espace égal à $\rho (1 + \cos \alpha)$. La quatrième période correspond à un angle α décrit par la manivelle, et à un déplacement linéaire $\rho (1 - \cos \alpha)$ du piston, qui comprime dans les espaces libres les fluides emprisonnés à sa gauche par la fermeture de l'échappement. Aussi donne-t-on à cette quatrième période le nom de période de compression.

La fraction qui mesure l'admission est

$$\frac{\rho(1 + \cos 2\alpha)}{2\rho} = \frac{1 + (1 - 2\sin^2 \alpha)}{2} = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha;$$

c'est à ce nombre qu'on donne quelquefois le nom de coefficient de détente, bien qu'il soit plus exact d'appeler ainsi la fraction qui mesure la course pendant la détente, savoir

$$\frac{\rho(\cos \alpha - \cos 2\alpha)}{2\rho} = \frac{1}{2}(\cos \alpha - \cos 2\alpha).$$

Les mouvements simultanés du tiroir et du piston sont représentés sur la figure 106.

A_1, A_2, \dots , cercle décrit par le centre de l'excentrique.

M_1, M_2, \dots , cercle décrit par le bouton de la manivelle.

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, positions principales du piston.

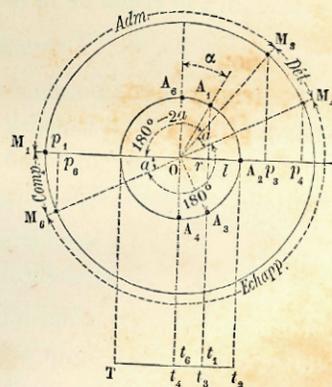


Fig. 106.

t_1, t_3, t_4, t_6 , positions correspondantes du tiroir.
 $90^\circ + \alpha$, angle de calage de l'excentrique.

Une épure analogue donnerait toutes les circonstances de la distribution, s'il y avait un *recouvrement intérieur*. La bride intérieure est du reste toujours très petite. Elle tend à augmenter les périodes de détente et de compression, et à réduire la période d'échappement.

En augmentant légèrement l'angle de calage α , on produit l'*admission anticipée*, c'est-à-dire qu'on fait commencer l'admission un peu avant que le piston ait atteint la fin de sa course. Cet artifice est surtout utile dans les machines à grande vitesse, pour éviter les chocs du piston contre les couvres du cylindre.

ÉPURE FAUVEAU.

206. Les mouvements simultanés du piston et du tiroir sont définis approximativement par deux équations que nous allons poser. Soit θ l'angle décrit par la manivelle du piston à partir de la position OM_1 (fig. 106); appelons x la course du piston à partir de la position correspondante p_1 ; nous aurons, en appelant ρ le rayon de la manivelle,

$$x = \rho(1 - \cos \theta).$$

L'angle que fait au même moment le rayon d'excentricité avec la droite OM_1 est égal à $\theta + 90^\circ + \alpha$, et la course du tiroir, à partir du point qui forme la limite gauche de son excursion, est donnée par l'égalité

$$y = (r + l)[1 - \cos(\theta + 90^\circ + \alpha)] \\ = (r + l)[1 + \sin(\theta + \alpha)].$$

Nous pouvons considérer x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point mobile; les projections de ce point sur les axes feront connaître à la fois le mouvement du tiroir et celui du piston. L'équation du lieu décrit par le point mobile s'obtiendra en éliminant θ entre les deux équations.

La construction résultante prend le nom d'*épure Fauveau*, du nom de l'ingénieur qui l'a employée le premier.

Construisons la courbe par points.

Pour $\theta = 0$, on a à la fois $x = 0$ et $y = (r + l)(1 + \sin \alpha)$.

Or $\sin \alpha = \frac{r}{r + l}$. Donc $y = r + l + r = 2r + l$.

Ayant pris sur l'axe OY une longueur $OI = r + l$, égale à la demi-course du tiroir, on aura la position du tiroir en portant au delà une longueur $Ia = r$. Le tiroir sera alors sur le point de dévouvrir la lumière d'admission.

La limite supérieure de y est $2(r + l) = OA$; elle correspond à $\sin(\theta + \alpha) = 1$, ou à $\theta = 90^\circ - \alpha$. On a alors $x = \rho(1 - \cos \theta) = \rho(1 - \cos \alpha)$, ce qui donne un point b . Le lieu est tangent en ce point à l'horizontale AB.

En continuant ainsi, on reconnaîtra que la courbe est une ellipse inscrite dans le rectangle ABCO dont les dimensions sont $OC = 2\rho$, course du piston, et $OA = 2(r + l)$, course du tiroir. Le centre O' du rectangle est aussi le centre de la courbe; si l'on prend un point M quelconque sur cette courbe, et qu'on le projette sur les axes en P et en Q, les points P et Q seront des positions simultanées du piston et du tiroir sur

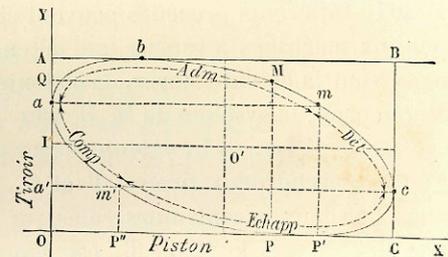


Fig. 107.

les droites OC, OA. L'admission sur l'une des faces du piston commencera quand le tiroir sera dans la position a ; le piston occupe alors soit la position O, soit la position P' , projections des points a et m qui tous deux ont la même ordonnée Oa . On reconnaîtrait de même que l'échappement commence quand le tiroir revenant sur ses pas occupe la position a' , et qu'il dure tout le temps que le tiroir met à

aller de a' en O et à revenir de O en a' . Pendant ce temps, le piston rétrograde de la position C à la position P'', projections des points c et m' . Les diverses phases de la distribution sont donc représentées sur la figure par les arcs successifs de l'ellipse interceptés par les horizontales am , $a'm'$, conformément au tableau suivant.

PÉRIODES	MOUVEMENT		
	DU POINT M	DU TIROIR	DU PISTON
Admission. . . .	de a en m	de a en A et retour en a	de O en P'
Détente.	de m en c	de a en a'	de P' en C
Echappement. . .	de c en m'	de a' en O et retour en a'	de C en P''
Compression. . .	de m' en a	de a' en a	de P'' en O

DÉTENTE VARIABLE.

207. Différents procédés peuvent être employés pour donner aux machines à vapeur une détente variable. Les principaux sont la détente Meyer, la détente Farcot, la coulisse de Stephenson, le système de M. Deprez.

Détente Meyer. — La détente Meyer est représentée fig. 108. Elle comprend deux tiroirs, B et C, manœuvrés simultanément par deux excentriques calés sur l'arbre de couche de la machine; l'un, le tiroir B, est commandé par la tige D; l'autre, le tiroir C, est commandé par une tige E. Le tiroir principal B, au lieu d'avoir de simples recouvrements extérieurs, comme le tiroir ordinaire, porte des lumières p , p' , par lesquelles la vapeur passe de la boîte de distribution, A, dans les lumières m , m , du cylindre. La cavité n sert à l'échappement de la vapeur par le creux du tiroir.

La détente se produit quand le tiroir B est placé de manière à permettre l'admission par une lumière que le tiroir C vient boucher. Pour faire varier la fraction de dé-

tente, il suffit d'augmenter ou de diminuer la longueur du tiroir C; pour cela, ce tiroir est formé de deux morceaux, c et c' , traversés dans toute leur longueur par une tige cylindrique portant en f et f' deux pas de vis renversés. Si l'on fait tourner cette tige sur son axe dans un sens, on rapproche les parties c et c' , et le tiroir se raccourcit; on pro-

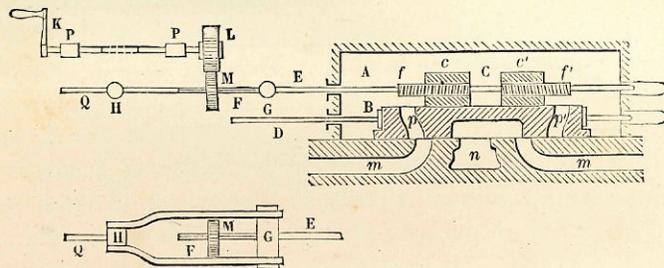


Fig. 108.

duit l'effet inverse en faisant tourner la tige en sens contraire. Le second tiroir doit donc être relié à son excentrique par une tige E qui puisse recevoir un mouvement de rotation sur son axe. Cette tige E traverse un goujon G dans lequel elle peut tourner; elle est prolongée par une tige à section carrée, F, sur laquelle est montée une roue dentée M. Le goujon G est attaché par un étrier articulé en H à la tige Q de l'excentrique. La roue M, dans laquelle glisse librement la tige F, engrène avec une autre roue L; on lui imprime au moyen de la manivelle K un déplacement angulaire autour de son axe, dans un sens ou dans l'autre. De cette manière, on écarte ou on rapproche à volonté les deux moitiés c et c' du second tiroir pendant le mouvement de la machine, et on donne ainsi au coefficient de détente telle valeur qu'on veut, depuis l'admission à pleine pression jusqu'à une admission infiniment petite. Dans certaines machines, l'écartement et le rapprochement des parties c et c' sont opérés par la machine elle-même au moyen du jeu du régulateur.

208. *Détente Farcot.* — La détente Farcot (fig. 109) emploie

aussi deux tiroirs, mais le tiroir principal entraîne à frottement le second tiroir jusqu'à ce qu'il bute contre une came dont on règle à volonté la position. Le second tiroir s'arrête à cet instant, et le tiroir principal continue sa course en glissant sous l'autre tiroir devenu fixe. Les lumières d'admission se trouvent alors fermées et la détente s'opère.

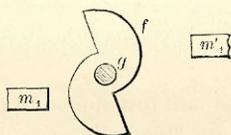
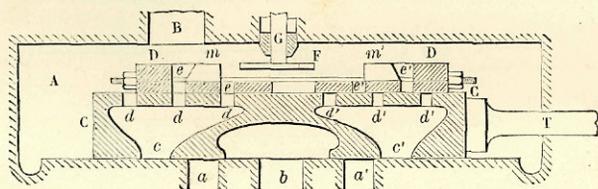


Fig. 109.

- A, boîte à distribution ;
 a, a', lumières d'admission du cylindre ;
 B, tuyau d'amenée de la vapeur ;
 b, lumière d'échappement ;
 CC, tiroir principal, manœuvré par la tige T ;
 c, d, d, d, ouvertures correspondantes à la lumière a ;
 c', d', d', d', ouvertures correspondantes à la lumière a' ;
 DD, second tiroir, appuyé par des ressorts sur le tiroir CC, qui l'entraîne à frottement ;
 e, e, ouvertures correspondantes aux ouvertures d, d, d ;
 e', e', ouvertures correspondantes aux ouvertures d', d', d' ;
 F, came butant contre les saillies m', m', du second tiroir, et l'arrêtant dans son mouvement ;
 G, arbre vertical commandant la came et permettant de faire varier la détente ;

f et g, projection horizontale de la came F et coupe horizontale de l'arbre G ; m, m', projections horizontales des saillies m et m'.

COULISSE DE STEPHENSON.

209. La coulisse de Stephenson, que nous avons décrite (I, § 284), a pour premier objet le changement de la marche de la machine ; il suffit pour cela de substituer à l'excentrique calé à $90^\circ + \alpha$ en avant de la manivelle un excentrique symétrique du premier, c'est-à-dire calé à $90^\circ + \alpha$ en arrière. Chacun de ces excentriques mène une barre dont l'extrémité s'articule à la coulisse. L'arbre de relevage, déplacé à l'aide d'un levier de changement de marche, ou mieux à l'aide d'une vis, permet de régler à volonté la position du coulisseau qui commande la tige du tiroir. On pourra donc conduire à volonté le tiroir par l'excentrique de la marche en avant, ou bien par l'excentrique de la marche en arrière. Placé au milieu de la coulisse, le coulisseau reste à peu près immobile ; l'oscillation très petite qu'il subit à droite et à gauche de sa position moyenne ne découvre pas ou découvre à peine les lumières d'admission, et la coulisse est à son point mort. La distribution est alors interrompue. Les positions intermédiaires entre le point mort et chaque position extrême du coulisseau correspondent à divers degrés de détente, jusqu'à la détente normale, c'est-à-dire jusqu'à la détente réglée par les dimensions r et l du tiroir. La coulisse ne change rien à ces dimensions r et l, mais elle permet de modifier la course du tiroir et les positions relatives du tiroir et du piston principal. La solution de Stephenson est purement approximative, et elle présente l'inconvénient de ne pas assurer les mêmes longueurs d'admission à l'aller et au retour du piston. Néanmoins on l'a adoptée pour les locomotives, à cause de la grande simplicité du mécanisme.

DISTRIBUTION DE M. DEPREZ.

210. Avant d'exposer le principe du mécanisme récemment imaginé par M. Deprez pour la distribution de la vapeur, il est nécessaire de faire connaître une construction géométrique qui lui est également due, et qui a l'avantage de conduire avec la plus grande facilité aux variations des divers éléments de la détente.

Nous supposons que la distribution soit faite au moyen d'un tiroir à recouvrements extérieurs; appelons l la largeur des lumières d'admission, r la longueur du recouvrement: la distribution normale s'opère en faisant mener le tiroir par un excentrique ayant un rayon d'excentricité égal à $r + l$, et un angle de calage égal à $90^\circ + \alpha$, α étant l'angle aigu donné par la relation

$$\sin \alpha = \frac{r}{r + l}.$$

Appelons ρ la demi-course du tiroir;

R la demi-course du piston;

x l'espace décrit par le piston à partir de sa position moyenne;

y l'espace décrit par le tiroir à partir de sa position moyenne; ces deux quantités sont affectées d'un signe suivant le sens dans lequel elles sont portées;

ω l'angle décrit par la manivelle principale à partir de son passage au point mort.

Les espaces x et y seront liés à l'angle ω par les relations

$$x = -R \cos \omega,$$

$$y = \rho \cos [180^\circ - (90^\circ + \alpha) - \omega] = \rho \sin (\omega + \alpha).$$

Ces deux équations ne sont pas rigoureusement exactes, car elles supposent le parallélisme des bielles.

Les épures du § 205 donnent une image des mouvements

simultanés du piston et du tiroir, ou des variations simultanées des quantités x et y , au moyen des projections orthogonales sur un même diamètre de deux points directeurs, dont l'un parcourrait un cercle de rayon R , l'autre un cercle concentrique de rayon ρ , l'angle compris entre les deux rayons menés du centre à ces deux points restant constant et égal à $90^\circ + \alpha$.

La construction de M. Deprez consiste à projeter obliquement le point directeur du tiroir en lui faisant décrire un cercle de rayon égal à $\rho \sin \alpha$.

Soit O (fig. 110) la position moyenne du tiroir; A et A', les deux positions extrêmes également distantes de la position moyenne. Par le point A, menons une droite AP faisant avec AA' l'angle α ; puis du point O comme centre décrivons une circonférence tangente à la droite AP. Le rayon OP de cette circonférence sera égal à $OA \times \sin OAP = OA \sin \alpha$. Si donc $OA = \rho$, demi-course du tiroir, on aura $OP = \rho \sin \alpha$.

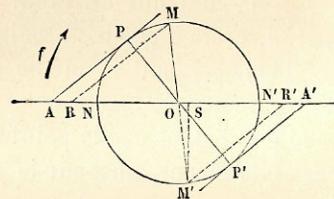


Fig. 110.

Cela posé, par un point quelconque M pris sur la circonférence, menons MR parallèle à AP, ce qui déterminera un point R sur la droite AA'. Ce point définira la position du tiroir correspondante à l'angle $AOM = \omega$ décrit par la manivelle principale dans le sens de la flèche f à partir du rayon OA' . En effet, soit $OR = y$. Le triangle ROM donne la proportion

$$\frac{OR}{OM} = \frac{\sin RMO}{\sin MRO} = \frac{\sin [180^\circ - \omega - \alpha]}{\sin \alpha} = \frac{\sin (\omega + \alpha)}{\sin \alpha},$$

et comme $OM = \rho \sin \alpha$, il en résulte

$$OR = y = \rho \sin (\omega + \alpha).$$

Les positions successives du tiroir entre les points extrêmes A et A' sont donc les projections obliques du point mobile M, faites parallèlement à la droite AP.

Pour trouver sur la même figure les positions correspondantes du piston, il suffit de prendre une échelle des longueurs telle, que le diamètre NN' en représente la course totale, et de projeter orthogonalement en S sur ce diamètre le point M' opposé au point M . Nous prenons l'extrémité M' , et non l'extrémité M , pour satisfaire aux conditions de signes; car, au passage du point mort, on a pour $\omega = 0$, $x = -R$ et $y = \rho \sin \alpha$, quantités de signes contraires. Le point directeur du piston doit donc être en N' quand le point directeur du tiroir est en N , et par suite les points directeurs des deux systèmes mobiles sont diamétralement opposés.

Dans la distribution normale, on a $\rho = r + l$ et $\rho \sin \alpha = r$. Le rayon ON est donc égal au recouvrement.

Suivons le point directeur du piston pendant qu'il parcourt le cercle à partir du point N dans le sens de la flèche f (fig. 111). Pendant le même temps, le point directeur du tiroir parcourt ce même cercle à partir du point M_1 . Menons par le point M_1 et par le point O des parallèles à la droite AP ; nous obtiendrons ainsi sur la circonférence les points M_2, M_3, M_4, M_5 , et en nous reportant aux explications du § 205, nous reconnaitrons que les arcs $M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5$, représentent respectivement l'admission, la détente, l'échappement et la compression dans les espaces libres.

Pour faire varier la détente, on peut soit faire varier la demi-course ρ du tiroir, soit l'angle d'avance α , soit enfin ces deux éléments à la fois. La solution adoptée par M. Deprez consiste à faire varier ρ et α de manière à conserver une valeur constante au produit $\rho \sin \alpha = r$. Soit, par exemple, OA_1 la nouvelle valeur de ρ . Du point A_1 menons au cercle

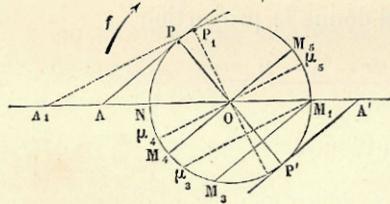


Fig. 111.

une tangente A_1P_1 , puis par les points O et M_1 menons des parallèles à A_1P_1 ; nous obtiendrons les points M_2, M_3, M_4, M_5 , qui

limitent les arcs correspondants aux quatre phases de la distribution. On voit que l'admission est prolongée et la détente diminuée à mesure que l'angle α diminue et que la demi-course OA_1 augmente. L'effet inverse se produit quand α augmente et que ρ diminue.

211. La distribution de M. Deprez est effectuée au moyen d'un excentrique ayant un rayon d'excentricité égal au recouvrement extérieur du tiroir, et calé sur l'arbre tournant à 180° en avant de la manivelle principale. Le centre de cet excentrique est le point directeur M du tiroir. Il ne reste plus qu'à établir la liaison entre ce point M et le point R , tête de la tige qui commande le tiroir, de telle manière que la direction MR reste parallèle à la tangente AP . M. Deprez y parvient par le dispositif suivant (fig. 112).

Une tige RR' , de longueur constante, attachée en R à la tige du tiroir, est assujettie à glisser entre les parallèles XX', YY' ; elle reste, par conséquent, parallèle à elle-même. Une autre tige MS s'attache en M au point directeur assujetti à décrire le cercle OP . L'autre extrémité S glisse le long de la tige RR' . De plus, le milieu T de la tige MS est relié au point R par une troisième tige articulée RT , égale en longueur à la moitié de la longueur MS . Il résulte de là que MS est

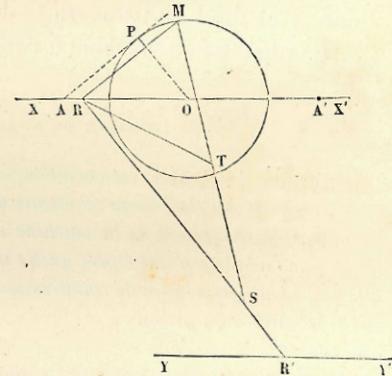


Fig. 112.

l'hypoténuse d'un triangle rectangle MRS , dont le côté RS a une direction constante, et que la direction RM conserve aussi son parallélisme. Si donc on fait mouvoir le point M le long du cercle OP , la droite fictive MR se déplacera parallèlement à elle-même, et le tiroir lié au point R recevra le long de la droite XX' le mouvement voulu.

Pour faire varier la détente, il suffira de changer la direction de la tige RR', ce qui revient à relever ou à abaisser la droite YY'. Le même artifice permet de changer le sens de la marche, car il suffit pour cela de faire passer la droite YY' au-dessus de la droite XX', de sorte qu'avec un seul excentrique on obtient la marche dans les deux sens, et dans des conditions de symétrie qui n'existent pas pour la distribution ordinaire avec les deux excentriques et la coulisse.

Au lieu d'assujettir le point R' à glisser sur une droite matérielle YY', M. Deprez remplace cette droite par un arc de cercle de grand rayon, qui n'en diffère pas sensiblement dans les limites de la course, et rattache simplement par une bride le point R' à un centre pris dans une direction perpendiculaire à YY'. On pourrait aussi adopter la solution décrite I, § 281.

Enfin, cette distribution peut être encore améliorée beaucoup, au moyen de divers procédés imaginés la plupart par M. Deprez, et dont on trouvera la description dans les *Études* de Ch. Combes sur la machine à vapeur¹.

THÉORÈME DE M. DEPREZ².

212. Lorsque la détente est complète, et que la compression dans les espaces libres ramène la vapeur contenue dans le cylindre à la pression de la chaudière, le rendement de la machine n'est influencé ni par les espaces libres ni par l'admission anticipée, quelle que soit la loi de détente, pourvu qu'elle soit identique à la loi de compression.

Soit Ω la surface du piston ;

L sa course ,

l la longueur qu'il décrit pendant l'admission dans la course directe ;

λ la longueur décrite par le piston dans sa course rétrograde pendant l'admission anticipée ;

P la pression de la vapeur dans la chaudière.

p la pression dans le condenseur ;

¹ Paris, Dunod.

² Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Lille, 1874. — Étude sur l'influence de la distribution sur le rendement économique des machines à vapeur, par Marcel Deprez, ingénieur (Revue universelle des mines, 1874).

u le volume de l'espace libre ;

K le travail moteur produit par la détente d'un mètre cube de vapeur pris à la pression P et détendu jusqu'à la pression p ;

m le rapport du volume occupé par la vapeur sous la pression p au volume occupé par la même quantité de vapeur sous la pression P.

Par détente complète, on entend que la vapeur au moment de l'échappement est amenée à la pression p du condenseur.

On suppose de plus 1° que l'échappement commence à la fin de la course du piston ; 2° que la loi de compression soit identique à la loi de détente, c'est-à-dire que pendant cette période la vapeur passe de la pression p du condenseur à la pression P de la chaudière, en subissant un travail extérieur égal à K par mètre cube ; son volume varie en même temps dans le rapport de m à 1.

Faisons le calcul des quantités de travail produites ou absorbées par la vapeur pendant les diverses périodes d'une course complète, en ne considérant qu'une face du piston.

Admission directe. Le travail de la vapeur est positif, et égal à $+\Omega l P$.

Détente. Par hypothèse, un mètre cube se détendant de la pression P à la pression p , dans les mêmes conditions que la vapeur du cylindre, produit un travail K.

Le volume qui se détend est ici $u + \Omega l$, en tenant compte de l'espace libre ; le travail produit est donc $+(u + \Omega l)K$. A la fin de cette période, le piston a atteint l'extrémité de sa course. Donc

$$(u + \Omega l)m = u + \Omega l.$$

Pour évaluer les travaux correspondant à la course rétrograde, nous supposerons encore que le piston parcoure le cylindre dans le sens direct, ce qui revient à évaluer le travail de la vapeur comme s'il était positif ; il suffira d'en changer le signe pour avoir le travail cherché.

Admission anticipée. Le travail produit, changé de signe, sera égal à $-\Omega \lambda P$.

Compression. Le volume de vapeur contenu dans le cylindre et l'espace libre au bout de l'admission anticipée est $u + \Omega \lambda$; à la fin de la compression ce sera $(u + \Omega \lambda)m$, et le travail correspondant de la vapeur sera $-(u + \Omega \lambda)K$, en tenant compte du signe ;

Échappement. Pendant l'échappement, la pression de la vapeur reste égale à p , et le travail produit s'obtiendra en multipliant cette pression par le volume engendré par le piston pendant la période, ce qui donne

$$-p(\Omega L - [(u + \Omega \lambda)m - u]) ;$$

en effet ΩL est le volume du cylindre quand l'échappement commence, et le volume occupé par la vapeur quand l'échappement finit étant $(u + \Omega \lambda)m$,

il reste $(u + \Omega\lambda)m - u$ pour le volume qu'elle occupe dans le cylindre, en retranchant l'espace libre u , qui reste en dehors.

Soit T le travail total produit par l'oscillation entière du piston; on aura

$$\begin{aligned} T &= \Omega l P + (u + \Omega l) K - \Omega l P - (u + \Omega \lambda) K - p[\Omega l - (u + \Omega \lambda)m + u] \\ &= \Omega(l - \lambda)P + \Omega(l - \lambda)K - p[\Omega l + u - (u + \Omega \lambda)m]. \end{aligned}$$

Remplaçons $\Omega l + u$ par sa valeur $(u + \Omega l)m$; il vient, en mettant $\Omega(l - \lambda)$ en facteur commun,

$$T = \Omega(l - \lambda)(P + K - pm).$$

Or je dis que $\Omega(l - \lambda)$ est le volume de vapeur fourni en réalité par la chaudière à chaque coup de piston. Au premier abord il semble que ce volume soit égal à Ωl , puisque tel est le volume décrit par le piston pendant l'admission directe. Mais au commencement de l'admission anticipée le cylindre possède, en vertu de la compression qui vient de finir, un volume de vapeur égal à $\Omega \lambda$. Ce volume est d'abord refoulé dans la chaudière pendant la marche rétrograde du piston; puis il rentre aussitôt dans le cylindre pendant que le piston décrit la longueur λ dans le sens direct. La quantité de vapeur nouvelle réellement fournie par la chaudière pour un coup de piston est donc mesurée en volume par la différence $\Omega(l - \lambda)$.

Donc le travail produit, rapporté au mètre cube de vapeur pris dans la chaudière, travail qu'on peut appeler le *rendement* de la machine, est mesuré par la somme $P + K - pm$, quantité indépendante de λ et de u . Les conditions dans lesquelles on suppose que la machine travaille annulent complètement l'influence de l'espace nuisible.

Dans la machine théorique, où l'on suppose qu'il n'y a ni espace libre, ni admission anticipée, ni compression, m étant toujours le coefficient qui mesure le degré de détente, on a pour travail moteur correspondant à un coup de piston

$$\Omega l(P + K - pm);$$

donc 1° le rapport de la puissance motrice de la machine réelle à celle de la machine théorique est égal à $\frac{l - \lambda}{l}$, quantité indépendante des pressions P et p , et de la loi de détente; 2° le *rendement* $P + K - pm$ est le même dans les deux machines.

MACHINE A AIR CHAUD.

215. Pour donner une idée des *machines à air chaud*, nous emprunterons à la *Théorie mécanique de la chaleur* de Ch. Combes la description sommaire de la machine Franchot, dont le modèle a été exposé à Paris en 1855.

Cette machine se compose de deux cylindres, A et B, que nous supposons égaux; ils sont placés l'un à côté de l'autre, et communiquent ensemble par deux tubes, C et D. L'un de ces cylindres, A, est le *cylindre chaud*; il est maintenu à une température τ au moyen d'un foyer établi en E. L'autre, B, est le *cylindre froid*; il est maintenu à la température τ' du milieu ambiant. Les tubes C et D sont remplis de toiles métalliques à travers les vides desquelles l'air contenu dans l'appareil peut passer d'un cylindre à l'autre quand les pistons P et Q sont en mouvement. Les tiges F et G des pistons

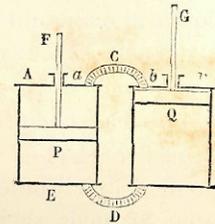


Fig. 115.

sont articulées par l'intermédiaire de bielles aux manivelles rectangulaires OM, ON de l'arbre tournant O (fig. 114), de telle sorte que la manivelle OM, mise en mouvement par la bielle F du *piston chaud*, soit en avant de la manivelle ON qui correspond au *piston froid*. L'air passe alternativement d'un cylindre dans l'autre quand on fait mouvoir les pistons; dans ce mouvement, l'air chaud contenu dans le cylindre A abandonne, en passant dans le cylindre B, l'excès de sa chaleur aux toiles métalliques des tuyaux C et D; et l'air froid contenu dans le cylindre B, quand il passe dans le cylindre A, s'échauffe en traversant les mêmes toiles. Les pistons P et Q séparent d'ailleurs le volume intérieur des cylindres et des tuyaux en deux régions entre lesquelles il n'y a aucune communication.

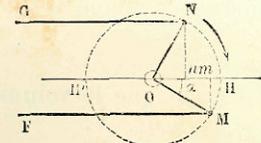


Fig. 114.

Proposons-nous de trouver l'expression du travail moteur correspondant à un tour entier de l'arbre des manivelles. Appelons S la section commune des cylindres, L la moitié de la course commune des deux pistons, ou la longueur des manivelles, l la longueur des conduits C et D réduite à la section S , de sorte que Sl en représente le volume.

A un moment donné, soit α l'angle décrit par la *manivelle*

chaude OM à partir de son point mort H. Les mouvements des pistons P et Q sont sensiblement identiques aux mouvements des projections m et n des boutons des manivelles sur le diamètre HH'. Le volume d'air compris dans le cylindre A au-dessus du piston P est donc égal au produit de la section S par la distance du piston P à la face intérieure du couvercle du cylindre, distance sensiblement égale à mH , ou à $L(1 - \cos \alpha)$, ce qui donne $SL(1 - \cos \alpha)$. Cet air est à la température τ . Le volume d'air compris dans le cylindre froid au même moment est égal à $SL(1 - \sin \alpha)$, et cet air est à la température τ' . Quant à l'air contenu dans le conduit C, il occupe un volume Sl , mais sa température varie d'un point à l'autre du tuyau entre les limites τ au point a et τ' au point b .

La masse d'air située au-dessus des pistons occupe donc un volume total

$$V_1 = SL(1 - \cos \alpha) + SL(1 - \sin \alpha) + Sl = S[2L + l - L(\sin \alpha + \cos \alpha)].$$

Le volume V_2 de la masse d'air située au-dessous s'exprimerait de même par la formule

$$V_2 = S[2L + l + L(\sin \alpha + \cos \alpha)],$$

en sorte que le volume total $V_1 + V_2$ soit constant et égal à $2S(2L + l)$.

Soit p_0 la pression naturelle, commune à toute la masse d'air au-dessus et au-dessous des pistons à l'origine du mouvement, quand on n'a pas encore échauffé le cylindre A; appelons de même p la pression commune à la masse d'air située au-dessus des pistons, et p' la pression commune à la masse d'air située au-dessous, lorsque la manivelle chaude a tourné de l'angle α . Pour déterminer les pressions p et p' , réduisons les volumes à la pression initiale p_0 et à la température initiale τ' .

Le volume d'air chaud, $SL(1 - \cos \alpha)$, est sous la pression p et à la température τ ; ramené à la pression p_0 et à la température τ' , il devient

$$SL(1 - \cos \alpha) \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1 + K\tau'}{1 + K\tau},$$

en appelant K le coefficient de la dilatation des gaz.

Le volume d'air froid $SL(1 - \sin \alpha)$, qui est sous la pression p et à la température τ' , ramené à la pression p_0 sans changement de température, devient

$$SL(1 - \sin \alpha) \frac{p}{p_0}.$$

L'air contenu dans les interstices des toiles métalliques peut être partagé par des plans transversaux en tranches dont la section Ω est la somme des sections libres entre les fils, et dont l'épaisseur $d\lambda$ se mesure sur la ligne d'axe du tuyau. Cet air est à la pression p commune à toute la masse, et à une température θ comprise entre τ et τ' . Ramené à la pression p_0 et à la température τ' , le volume $\Omega d\lambda$ devient

$$\Omega d\lambda \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1 + K\tau'}{1 + K\theta},$$

et si l'on appelle λ_1 la longueur développée du tuyau, la somme des volumes de l'air contenu dans la conduite, réduits partout à la pression p_0 et à la température τ' , est égale à l'intégrale

$$\int_0^{\lambda_1} \Omega d\lambda \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1 + K\tau'}{1 + K\theta} = \Omega \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1 + K\tau'}{1 + K\theta} \times \int_0^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{1 + K\theta}.$$

Cette intégrale ne pouvant être calculée qu'autant que θ est connu en fonction de λ , on admettra que la température varie le long de la conduite suivant une loi linéaire entre les limites τ et τ' , ce qui permet de poser

$$\theta = \tau - (\tau - \tau') \frac{\lambda}{\lambda_1}.$$

On trouve alors

$$\Omega \int_0^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{1 + K\theta} = \Omega \lambda_1 \log \frac{1 + K\tau}{1 + K\tau'},$$

ce qu'on peut écrire approximativement

$$Sl \times \frac{K(\tau - \tau')}{1 + K\tau'}.$$

en observant que le volume total $\Omega\lambda$ de l'air contenu dans le tuyau est égal par définition à Sl , et que le produit $K(\tau - \tau')$ est généralement assez petit pour qu'on puisse prendre au lieu du logarithme le premier terme du développement en série de $\log \left[1 + \frac{K(\tau - \tau')}{1 + K\tau'} \right]$.

Le volume réduit de l'air contenu dans le tuyau C est donc égal à

$$\frac{p}{p_0} \times 1 + K\tau' \times Sl \times \frac{K(\tau - \tau')}{1 + K\tau'}$$

ou bien à

$$Sl \times \frac{p}{p_0} \times K(\tau - \tau')$$

A l'origine du mouvement, l'air contenu au-dessus des pistons occupait le volume $S(2L + l)$ sous la pression p_0 et à la température τ' ; on a donc l'équation suivante pour déterminer p :

$$\frac{p}{p_0} \left[SL(1 - \cos \alpha) \frac{1 + K\tau'}{1 + K\tau} + SL(1 - \sin \alpha) + Sl \times K(\tau - \tau') \right] = S(2L + l),$$

d'où l'on déduit

$$p = p_0 \times \frac{(2L + l)(1 + K\tau)}{L(1 + \cos \alpha)(1 + K\tau') + L(1 - \sin \alpha)(1 + K\tau) + lK(\tau - \tau')(1 + K\tau)}$$

On aurait de même pour déterminer la pression p' de l'air au-dessous des pistons

$$p' = p_0 \times \frac{(2L + l)(1 + K\tau)}{L(1 + \cos \alpha)(1 + K\tau') + L(1 + \sin \alpha)(1 + K\tau) + lK(\tau - \tau')(1 + K\tau)}$$

Ces valeurs étant déterminées, il est facile d'en déduire le travail moteur des pressions p et p' . En effet, ce travail est la somme des deux intégrales $\int p dV_1 + \int p' dV_2$, et comme la somme $V_1 + V_2$ est constante, ce qui entraîne l'égalité $dV_2 = -dV_1$, cette somme est aussi égale à $\int (p - p') dV_1$.

On a d'ailleurs, en différentiant la première équation posée plus haut,

$$dV_1 = S(\sin \alpha - \cos \alpha) d\alpha.$$

Donc enfin le travail T , accompli par l'air pour un angle α décrit à partir du point mort par la manivelle chaude, est donné par la formule

$$T = \int_0^\alpha S(p - p')(\sin \alpha - \cos \alpha) d\alpha.$$

Pour le tour entier, on prendra la limite supérieure égale à 2π .

Le produit $(p - p')(\sin \alpha - \cos \alpha)$ est nul pour quatre valeurs de α comprises entre 0 et 2π ; savoir pour $\sin \alpha = \cos \alpha$, ce qui donne $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$; et pour $p = p'$, ce qui a lieu aussi en deux points de la circonférence. On reconnaît par là que la machine a quatre points morts dans chaque tour, et que son allure serait peu régulière. La machine Franchot n'a d'ailleurs jamais été construite.

MOTEUR LENOIR.

214. Le *moteur Lenoir* est une machine à gaz, dans laquelle on emploie un mélange d'air et de gaz d'éclairage; l'expansion se produit en mettant le feu à ce mélange au moyen d'une étincelle électrique. La machine n'ayant pas de chaudière occupe très peu de place et convient particulièrement pour les petits ateliers.

La figure 115 représente l'élévation latérale de la machine, la figure 116 la coupe horizontale du cylindre, et la figure 117 la disposition du tiroir manœuvré par la tige X.

C est le cylindre dans lequel se meut le piston P.

Les conduites RR' amènent vis-à-vis des lumières d'admission le gaz d'éclairage fourni par le tuyau T. Le tiroir destiné à régler l'alimentation du cylindre est formé de deux plaques entre lesquelles l'air extérieur peut librement circuler; il est traversé de petits conduits *ff* par lesquels le gaz peut passer, lorsque le mouvement du tiroir l'amène en regard des ouvertures *a*. Une fente ménagée dans la plaque postérieure donne

en même temps passage à l'air atmosphérique. Le mouvement du tiroir est obtenu au moyen d'un excentrique calé sur l'arbre de la machine.

Il résulte de cette disposition que le piston P, entraîné par l'inertie du volant calé sur l'arbre tournant, aspire l'air et le

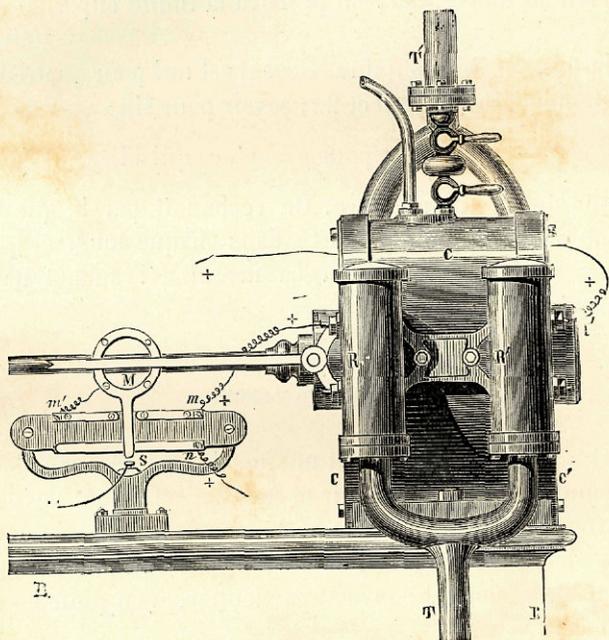


Fig. 115.

gaz au moment où le tiroir débouche l'une des lumières d'admission. Il reste à mettre le feu au mélange. Pour cela, on se sert d'une pile électrique et d'un appareil à induction de Ruhmkorff. Le fil électrique vient aboutir à l'appareil S, formé de trois barrettes métalliques *n*, *m*, *m'*, isolées les unes des autres. De ces barrettes partent deux groupes de fils qui traversent les fonds du cylindre, et qui sont coupés à l'intérieur, de manière à laisser entre leurs extrémités un intervalle que le courant franchira sous

forme d'étincelle. Le courant passe dans la partie gauche du cylindre quand on établit une communication métallique entre les barrettes *m* et *n*; il passe dans la partie

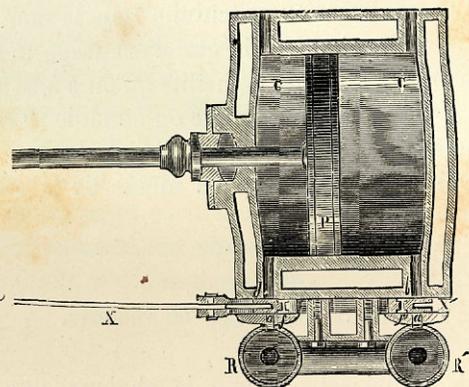


Fig. 116.

droite quand la communication est établie entre les barrettes *n* et *m'*. Pour obtenir alternativement l'étincelle dans les deux fonds du cylindre, et la production de travail correspondante à l'expansion du mélange gazeux au moment où la combinaison s'opère, il suffit donc d'attacher à la tige du piston un curseur métallique M, qui glisse le long de la barre *n*, en passant de la barre *m* à la barre *m'*, puis, au retour, de la barre *m'* à la barre *m*.

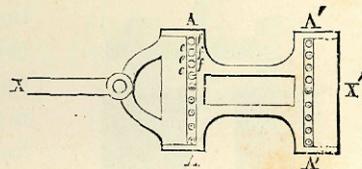


Fig. 117.

Le résultat de la combinaison de l'hydrogène et de l'oxygène de l'air est de l'eau, qui s'échappe par des conduits spéciaux, fermés et ouverts par un tiroir ordinaire. Un tuyau T sert à entourer d'eau froide tout le cylindre pour rafraîchir le métal, que l'élévation de la température détériorerait rapidement. Cette eau s'échauffant regagne les couches les plus élevées du réservoir, et est remplacée par de l'eau plus froide.

Pour augmenter l'expansion des gaz, on ajoute au mélange un peu de vapeur d'eau, fourni par un petit réservoir d'eau chaude à proximité du cylindre.

En résumé, le moteur Lenoir est une application industrielle de l'appareil connu en chimie sous le nom d'*eudiomètre*. On emploie seulement le gaz d'éclairage à la place de l'hydrogène pur, à cause de la facilité qu'on a à se le procurer. Si au lieu de l'étincelle électrique on emploie pour mettre le feu au mélange détonant un petit jet de gaz, allumé et éteint alternativement par le jeu même de la machine, on obtient le *moteur Hugon*.

MACHINE ÉLECTRIQUE DE FROMENT.

215. L'électricité est, comme la chaleur, une source de travail, et rien n'empêche de l'employer comme puissance motrice. Cette solution a été jusqu'ici peu usitée, parce que la production de l'électricité était plus dispendieuse que la production du calorique; on ne s'en est longtemps servi que pour opérer à grande distance un mouvement exigeant peu de force. C'est le principe du télégraphe électrique. On a aussi essayé d'employer l'électricité comme moteur d'une machine analogue à la machine à vapeur. Nous donnerons pour exemple la machine de Froment.

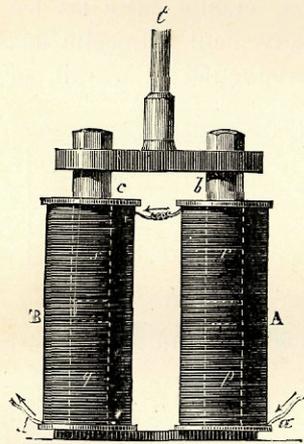


Fig. 118.

A et B (fig. 118) sont deux électro-aimants, formés de deux bobines recouvertes d'un fil isolé *ab*, *cd*, dans lequel passe le courant électrique, et de quatre barreaux de fer doux, deux fixes *p* et *q*, et deux mo-

bilés *r* et *s*, reliés deux à deux par des traverses métalliques. Quand le courant passe, le fer doux s'aimante, et les aimants *pq*, *rs* ont les pôles de noms contraires en regard l'un de l'autre.

Les barreaux mobiles *r* et *s* sont attirés par les barreaux fixes. Ce mouvement est transmis par la tige *t* à l'extrémité d'un balancier. Quand le courant est interrompu, cette attraction cesse; à ce moment la machine est disposée de telle sorte que le courant passe dans un autre électro-aimant, tout semblable au premier, mais placé à l'autre extrémité du balancier; d'où résulte pour cette pièce une traction en sens inverse. Le mouvement oscillatoire du balancier est ensuite transformé en mouvement circulaire continu par l'intermédiaire d'une bielle et d'une manivelle.

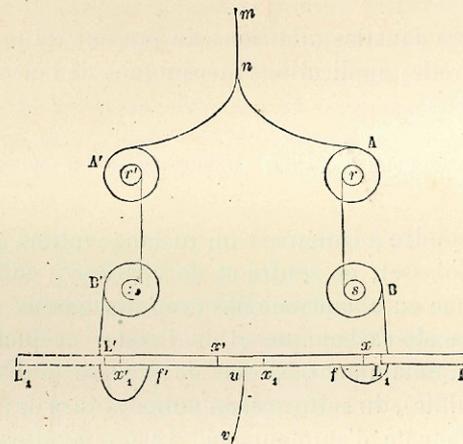


Fig. 119.

La figure 119 montre une des dispositions qu'on peut prendre pour que le courant fourni par la pile électrique passe alternativement dans un électro-aimant et dans l'autre. Soient A et B les bobines du premier électro-aimant, A' et B' celles du second; *m* le fil venant de la pile. Il se bifurque en *n*; un brin suit le chemin *nArsBf*, et l'autre le chemin *n, A'v's'B'f'*; le fil *uv* retourne à la pile; dans les deux chemins le courant

emprunte sur un certain parcours une glissière mobile LL' , à laquelle la machine donne un mouvement de va-et-vient. La glissière est en ivoire, matière isolante; mais elle est recouverte sur la longueur xx' d'une plaque métallique qui laisse passer le courant. Les extrémités des fils f, f' et u glissent en la touchant constamment. On voit que, quand cette pièce a la position LL' , le courant prendra le chemin $mnAB/uv$, tandis qu'il prendra le chemin $mnA'B'f'uv$ lorsqu'elle aura la position $L'L'$.

On peut aussi employer pour changer le courant les commutateurs circulaires, auxquels la machine donne un mouvement continu autour de leurs axes.

Ce qui distingue ces machines, c'est la grande régularité de leur allure; aussi les emploie-t-on pour des travaux de précision.

On trouvera dans les *additions* au présent volume l'indication des nouvelles applications mécaniques de l'électricité.

DE LA POUDRE A CANON CONSIDÉRÉE COMME MOTEUR.

216. La poudre à canon est un mélange intime de salpêtre (azotate de potasse), de soufre et de charbon; enflammé, ce mélange donne en abondance des produits gazeux, principalement de l'acide carbonique et de l'azote, et quelques produits solides, notamment des sels de potasse (sulfate, carbonate, hyposulfite), du sulfure et du sulfocyanure de potassium, enfin du carbonate d'ammoniaque. La température produite dans ces réactions chimiques s'élève assez pour volatiliser tous les composés solides; la masse de gaz formée, ramenée à la pression atmosphérique, occuperait environ un espace 2400 fois plus grand que le volume apparent de la poudre. Si la déflagration s'effectue dans une chambre fermée par une paroi mobile, cette paroi sera chassée par l'expansion des gaz comme le piston d'une machine à vapeur. On utilise cette propriété pour lancer des projectiles et pour effectuer des déblais dans les terrains très résistants.

La poudre française est à peu près composée en poids de la manière suivante :

Salpêtre.	75
Soufre.	12,5
Charbon.	12,5
	<hr/>
	100,0

100 grammes de poudre donnent par l'inflammation environ 19 litres de gaz. La puissance motrice des différentes poudres varie suivant la provenance et le mode de fabrication.

217. Le problème de la *balistique intérieure* est encore loin d'être complètement résolu. Nous nous bornerons ici à donner un aperçu de la première solution qu'on en ait proposée; elle repose sur l'hypothèse de l'uniformité à un même instant de la densité des gaz produits par la poudre dans toute l'étendue de la pièce. Cette hypothèse n'est pas entièrement exacte, comme nous le reconnaitrons plus loin; mais elle donne une première approximation dont on se contente généralement.

Appliquons au système matériel formé par le projectile, le canon et la poudre, les théorèmes des quantités de mouvement et des forces vives.

Soient m, M, μ , les masses du projectile, du canon et de la charge;

v, V , les vitesses du projectile et du canon à un instant quelconque. Ces vitesses étant prises positivement, nous devons, dans la formule des quantités de mouvement, donner à V le signe $-$, pour indiquer que la pièce recule pendant que le boulet est chassé en avant.

La vitesse est variable d'un point à l'autre pour les molécules gazeuses de la poudre; les molécules voisines du boulet ont la vitesse v ; les molécules voisines du fond de la pièce ont la vitesse $-V$. Nous admettrons que la vitesse moyenne des molécules gazeuses de la charge soit la moyenne arithmétique entre ces deux vitesses extrêmes, ce qui revient à attribuer à l'ensemble de la charge une vitesse commune $\frac{v - V}{2}$.

Projetons les quantités de mouvement et les forces sur l'axe

de la pièce, supposé horizontal; la pesanteur ne donnera rien, et nous pourrons aussi négliger la résistance de l'air au mouvement du projectile et au recul du canon. Les forces extérieures seront donc ou nulles ou négligeables, et nous aurons l'équation approximative :

$$mv - MV + \mu \frac{v - V}{2} = 0.$$

De cette équation on tire cette conséquence que le rapport $\frac{v}{V}$ des vitesses est constant.

Nous compléterons notre première hypothèse en admettant une distribution particulière des vitesses, à un instant donné, entre toutes les tranches de la charge.

Soit AB la longueur occupée par la charge; élevons en B une perpendiculaire Bb que nous prendrons égale à la vitesse v du point B qui accompagne le boulet; en A, élevons en sens

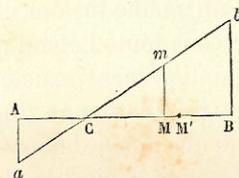


Fig. 120.

contraire une perpendiculaire Aa que nous prendrons égale à la vitesse de recul V , du point A qui accompagne le fond de la pièce. Menons la droite ab , nous admettrons qu'en un point M quelconque de la charge la vitesse soit égale à l'ordonnée Mm de la droite ab . Il résulte de là que le point C a une vitesse nulle, et comme le rapport $\frac{v}{V}$ est constant, ce point correspond à une tranche fixe de la charge. Nous lui donnerons le nom de *tranche immobile*; c'est l'origine fixe à partir de laquelle il convient de compter les distances parcourues par la pièce dans un sens et par le projectile dans l'autre. Cette hypothèse nous permet d'évaluer à un instant donné la somme des forces vives des molécules de la poudre.

Soit $CM = x$ la distance d'une tranche M à la tranche immobile. La masse totale μ de la charge étant uniformément répartie, la masse par unité de longueur est $\frac{\mu}{AB}$, et la masse de

la tranche comprise entre les points M et M' est $\frac{\mu dx}{AB}$; la force vive de cette tranche est, en appelant u la vitesse proportionnelle à Mm ,

$$\frac{\mu dx}{AB} \times u^2 = \frac{\mu dx}{AB} \times \left(\frac{Mm}{Bb} v \right)^2,$$

ou bien

$$\frac{\mu dx}{AB} \times \left(\frac{CM}{CB} v \right)^2 = \frac{\mu v^2 x^2 dx}{AB \times CB^2}.$$

La somme des forces vives à l'instant considéré est donc

$$\int_{AB \times CB^2}^{\mu v^2 x^2 dx} = \frac{\mu v^2}{AB \times CB^2} \int x^2 dx,$$

l'intégrale étant prise entre les limites $x = -CA$ et $x = +CB$. Il vient en définitive pour cette somme

$$\frac{1}{5} \frac{\mu v^2}{AB \times CB^2} \times (CB^5 + CA^5) = \frac{1}{5} \mu v^2 \times \frac{CB^5 + CA^5}{CB + CA} \times \frac{1}{CB^2}.$$

On peut remplacer, dans le rapport qui multiplie $\frac{1}{5} \mu v^2$, CB et CA respectivement par v et V , qui leur sont proportionnels; il vient pour ce rapport

$$\frac{v^5 + V^5}{(v + V)v^2}.$$

ce qui donne, en définitive, pour la somme des forces vives de la poudre

$$\frac{1}{5} \mu \frac{v^5 + V^5}{v + V}.$$

La force vive du boulet, que nous supposons simplement animé d'une translation suivant l'axe de la pièce, est mv^2 ; celle de la pièce est MV^2 .

Appliquons ces formules entre l'époque où le feu a été mis à la poudre et celle où le boulet sort du canon. La somme des forces vives acquises par le système sera sensiblement égale au double du travail produit par les gaz de la poudre; or si l'on appelle p la pression des gaz à un moment donné, Ω

la section intérieure du canon, que, pour plus de simplicité, nous regarderons comme uniforme, et z la longueur occupée dans la pièce par la charge à ce même instant, le travail de la poudre jusqu'à cet instant sera égal à l'intégrale

$$\int p \Omega dz,$$

prise entre les limites $z = l$, longueur initiale de la charge et $z = L$, longueur du canon.

La densité initiale de la charge est égale à son poids, $g\mu$, divisé par le volume Ωl occupé par la poudre.

Lorsque la charge occupe la longueur z , sa densité supposée uniforme est égale à la densité initiale multipliée par le rapport inverse des longueurs, ou à $\frac{g\mu}{\Omega l} \times \frac{l}{z}$, ou enfin à $\frac{g\mu}{\Omega z}$.

On admet que la pression des gaz de la poudre varie proportionnellement à une certaine puissance de la densité : nous poserons donc

$$p = K \times \left(\frac{g\mu}{\Omega z} \right)^n,$$

en désignant par K et par n des nombres constants qu'on devra déterminer par expérience. Substituant dans l'intégrale du travail, il vient

$$\int_l^L p \Omega dz = \frac{K \Omega g^n \mu^n}{\Omega^n} \int_l^L \frac{dz}{z^n} = \frac{K g^n \mu^n}{(n-1) \Omega^{n-1}} \left(\frac{1}{l^{n-1}} - \frac{1}{L^{n-1}} \right),$$

et égalant ce travail à la demi-somme des forces vives, on obtient l'équation

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{6} \mu \frac{v^3 + V^3}{v + V} = \frac{K g^n \mu^n}{(n-1) \Omega^{n-1}} \left(\frac{1}{l^{n-1}} - \frac{1}{L^{n-1}} \right),$$

qui, jointe à l'équation des quantités de mouvement

$$m v - M V + \frac{1}{2} \mu (v - V) = 0,$$

achève de déterminer v et V .

218. Les calculs précédents sont fondés sur l'hypothèse

que la densité des gaz est uniforme à chaque instant dans toute l'étendue occupée par la charge. Cette supposition est nécessairement inexacte ; car les tranches successives que l'on rencontre en rétrogradant à partir du boulet jusqu'à la tranche immobile, ont des pressions croissantes, puisque chacune pousse le boulet et les tranches qui la précèdent, et la densité doit varier en même temps que la pression. Le problème acquiert ainsi un plus grand degré de complication, et n'a pu être résolu jusqu'ici qu'au moyen d'une nouvelle hypothèse sur la répartition des densités.

219. Lorsqu'on connaît expérimentalement la vitesse v de sortie du boulet, on peut en déduire par approximation la vitesse V du recul, et la pression moyenne des gaz de la poudre. L'équation des quantités de mouvement donne d'abord V en fonction de v et des poids du boulet, de la pièce et de la charge. Ensuite la demi-force vive du boulet, $\frac{1}{2} m v^2$, divisée par la longueur L du canon donne l'effort moyen de la poudre ; divisant enfin par la section droite du projectile, on en déduit la pression moyenne des gaz par unité de surface.

Soit, par exemple, un projectile pesant 12 kilogrammes ; la charge est le tiers du poids du projectile, et le poids de la pièce est égal à 320 fois le même poids. Si la vitesse à la sortie est de 400 mètres, la vitesse du recul sera de 1^m,45 au moment où le boulet sortira de la bouche à feu. La longueur intérieure du canon étant d'environ 2^m,75, l'effort moyen est égal à $\frac{12 \times 400^2}{2,75 \times 2g} =$ environ 36,000 kilogrammes ; ce qui, divisé par l'aire transversale du boulet, donnera la pression moyenne des gaz. La pression maximum monte nécessairement beaucoup au-dessus de cette moyenne.

Le métal d'un canon doit être en état de résister aux énormes pressions qui se développent à l'intérieur des pièces d'artillerie. Il y résiste en réalité, non-seulement par son élasticité, mais encore par son inertie. Les fuites de gaz doivent être

évités; outre qu'elles sont dangereuses pour les servants, elles détériorent très promptement l'arme, en agrandissant les ouvertures par lesquelles elles commencent à se produire.

CANON SANS REcul DE G. P. HARDING¹.

220. La figure 121 représente la coupe longitudinale d'un canon ouvert aux deux bouts. Le côté X représente la culasse, et le côté Y la bouche par laquelle le projectile doit sortir.

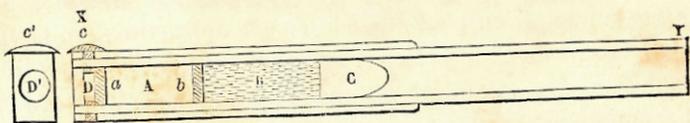


Fig. 121.

L'espace A, compris entre deux bourres légères *a* et *b*, est plein d'air. La bourre *a* est maintenue latéralement par un diaphragme *c*, que la figure *c'* montre de face. Un trou, projeté en D et D', est réservé à travers ce diaphragme.

La charge occupe l'espace BC; en B est une charge de poudre-coton, en C le boulet.

La lumière par laquelle on met le feu à la poudre est ouverte à l'arrière de l'espace B.

Quand on enflamme la poudre, les gaz produits instantanément agissent d'une part sur le boulet, de l'autre, sur la cloison *b*, à laquelle le choc des gaz imprime dans le premier instant une vitesse rétrograde extrêmement grande, sans qu'il y ait pour elle pendant cet instant aucun déplacement perceptible (III, § 547). Mais la cloison est en contact avec un matelas élastique d'air compris entre les cloisons *a* et *b*; le choc subi par le corps *b* se transmet à la tranche élastique infiniment voisine; celle-ci le transmet, sans déplacement appréciable, à la tranche précédente, et ainsi de suite, jusqu'à

¹ Voir le journal anglais *Engineering*, march 50, 1866.

la cloison *a*; mais avant que l'onde excitée dans l'air ait parcouru la distance *ba*, le boulet s'est déjà déplacé, et la pression des gaz de la poudre est beaucoup réduite sur la face antérieure de la paroi *b*. La transmission du choc à la colonne d'air atmosphérique qui presse sur l'ouverture D suffit en définitive pour empêcher la projection de la bourre au dehors¹.

Il semble paradoxal d'admettre que la pression des gaz produise l'expulsion du boulet, quand elle est impuissante à produire celle des bourres très-légères qui tiennent lieu de culasse. Cela résulte précisément de la différence des densités. Le boulet, ayant un poids considérable, part avec une vitesse relativement modérée, en refoulant l'air dont la résistance n'absorbe qu'une faible fraction de sa force vive initiale. La cloison *b* ayant, au contraire, une très-petite densité, la résistance de l'air emprisonné en A suffit pour diminuer la vitesse qu'elle reçoit du choc jusqu'à rendre cette vitesse insensible.

On s'explique de même les faits suivants, qui sont bien connus :

1° Quand dans un canon de fusil on a laissé de l'air entre la poudre et la bourre, le fusil est en danger d'éclater dans la région occupée par l'air, sans qu'il y ait projection de la bourre.

2° Si l'on remplace la culasse d'un canon par une bourre légère, et qu'on fasse partir le coup, la bourre est projetée vers l'arrière à une petite distance, et le boulet est projeté vers l'avant à une distance beaucoup plus grande. L'influence des milieux est manifeste dans cette expérience; car, dans le vide, les déplacements simultanés imprimés en sens contraires à la bourre et au boulet seraient en raison inverse de leurs masses respectives.

3° Sur une table horizontale on place une charge de poudre ordinaire, à laquelle on met le feu. Les gaz produits s'échappent à l'air libre sans exercer sur la table de pression

¹ On peut comparer cette transmission du choc aux tranches successives de l'air à celle qu'on observe dans une série de boules d'ivoire jointives (III, § 551, 1°)

bien énergique. Si, au contraire, on recouvre la charge d'une feuille de papier, la résistance exercée par l'air sur cette feuille au moment où l'explosion tend à la soulever pourra être assez considérable pour que la table soit écrasée par le coup.

Les résultats dépendent d'ailleurs des propriétés particulières de la matière explosible employée; ainsi les effets de la nitroglycérine et ceux de la dynamite sont beaucoup plus destructeurs que ceux de la poudre de mine ordinaire.

Dans l'expérience de Harding, l'emploi de la poudre-coton est commandé de préférence à la poudre de guerre, parce que la rapidité de la combustion est une des conditions du succès. Ce canon n'a pas de recul; car les bourres subissent seules des pressions rétrogrades, qui sont transmises à l'air, et non aux parties solides du canon.

REMARQUE GÉNÉRALE.

221. L'explosion d'une mine, d'une torpille, la décharge d'une arme à feu, sont autant d'exemples d'un travail mécanique considérable produit à un instant donné par une force à peu près insignifiante : la pression du doigt sur la détente de l'arme à feu ou sur la touche de l'exploseur électrique. Il n'y a aucun rapport nécessaire entre le travail produit par l'explosion et le travail dépensé par l'homme qui met le feu aux poudres.

La charge d'une arme à feu représente une somme d'énergies potentielles qui attendent une occasion pour passer à l'état de forces effectives et développer un travail moteur (§ 175). Cette occasion, c'est, dans l'exemple de l'arme à feu, la chaleur développée par l'inflammation de la poudre fulminante, chaleur due à un choc, qui lui-même est la conséquence du jeu d'un ressort élastique, auquel la pression du doigt sur la détente laisse la liberté d'agir, mais qui a dû être primitivement tendu par un travail particulier.

L'événement qui détermine l'explosion, à savoir la pression sur la détente, est, en définitive, l'occasion, et non la cause unique de l'effet produit.

Il est probable que, dans la plupart des phénomènes naturels, notamment dans les phénomènes physiologiques, ce qu'on regarde comme la cause d'un effet sensible est seulement l'occasion qui permet à la véritable cause d'agir. Le monde moral fournirait aussi une foule d'exemples analogues.

ADDITIONS

EFFET DU DÉSEMBRAYAGE PARTIEL D'UN GROUPE DE CORPS TOURNANTS (§ 20).

222. Un corps tournant, qu'on appellera le *corps principal*, soumis à une force mouvante, communique le mouvement, au moyen d'engrenages ou de courroies, à deux groupes de corps tournants soumis à des résistances données. On supprime à un instant déterminé la liaison entre le corps principal et l'un des deux groupes : on demande comment ce désembayage modifiera le mouvement du reste du système.

Soient I le moment d'inertie du corps principal par rapport à l'axe de rotation ;

ω sa vitesse angulaire à un instant donné ;

FR le moment par rapport à l'axe de la force mouvante qui agit sur ce corps tournant ;

Désignons de même par

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$$

les *raisons* des divers corps tournants du premier groupe, par rapport au groupe principal ; par

$$F_1R_1, F_2R_2, \dots, F_kR_k$$

les moments des forces qui agissent sur chacun d'eux, par rapport à leurs axes respectifs; par

$$I_1, I_2, I_3 \dots I_k$$

les moments d'inertie de ces corps par rapport aux mêmes axes. Soient

$$\begin{array}{cccc} \lambda'_1, & \lambda'_2, & \dots & \lambda'_i \\ F'_1 R'_1, & F'_2 R'_2, & \dots & F'_i R'_i \\ I'_1, & I'_2, & \dots & I'_i \end{array}$$

les données analogues pour les i corps tournants qui composent le second groupe.

Le mouvement de l'ensemble de tous ces corps sera déterminé par l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{FR + \sum_1^k F_m R_m \lambda_m + \sum_1^i F'_m R'_m \lambda'_m}{I + \sum_1^k I_m \lambda_m^2 + \sum_1^i I'_m \lambda'^2_m}$$

équation dans laquelle les produits $FR\lambda$ sont censés porter leurs signes avec eux. Si l'on désembraye le second groupe, l'équation se réduit à

$$(2) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{FR + \sum_1^k F_m R_m \lambda_m}{I + \sum_1^k I_m \lambda_m^2}$$

Or, supposons que le premier mouvement soit uniforme. Cela aura lieu si l'on a l'équation

$$(5) \quad FR + \sum_1^k F_m R_m \lambda_m + \sum_1^i F'_m R'_m \lambda'_m = 0.$$

Par hypothèse, les produits $F_m R_m \lambda_m$, $F'_m R'_m \lambda'_m$ sont tous négatifs, puisque les forces appliquées aux deux groupes sont résistantes. L'équation (5) donne donc pour $FR + \sum_1^k F_m R_m \lambda_m$ une valeur positive, égale à $-\sum_1^i F'_m R'_m \lambda'_m$, et, par suite, $\frac{d\omega}{dt}$, qui était nul quand tout le système était en mouvement,

devient positif après le désembrayage du second groupe; en d'autres termes, le mouvement s'accélère.

Quant au second groupe, son mouvement se prolonge en vertu de l'inertie, sous l'action des résistances F' qui tendent à réduire graduellement sa vitesse. Si l'on appelle ω'_1 la vitesse angulaire du premier corps tournant de ce second groupe, les vitesses angulaires des autres corps seront

$$\omega'_2 = \omega'_1 \frac{\lambda'_2}{\lambda'_1}, \quad \omega'_3 = \omega'_1 \frac{\lambda'_3}{\lambda'_1},$$

et les produits $F'_m R'_m \lambda'_m$, $I'_m \lambda'^2_m$, de l'équation (1), se changeront respectivement en

$$F'_m R'_m \frac{\lambda'_m}{\lambda'_1}, \quad I'_m \frac{\lambda'^2_m}{\lambda'^2_1},$$

quand on rapportera le mouvement au corps dont la vitesse angulaire est ω'_1 , au lieu de le rapporter au corps dont la vitesse angulaire est ω .

L'équation du mouvement sera par conséquent

$$\frac{d\omega'_1}{dt} = \frac{\sum_1^i F'_m R'_m \frac{\lambda'_m}{\lambda'_1}}{\sum_1^i I'_m \frac{\lambda'^2_m}{\lambda'^2_1}}$$

ou bien

$$\frac{d\omega'_1}{dt} = \lambda'_1 \frac{\sum_1^i F'_m R'_m \lambda'_m}{\sum_1^i I'_m \lambda'^2_m}.$$

On voit que $\frac{d\omega'_1}{dt}$ est négatif, et que le système désembrayé perd graduellement sa vitesse sous l'action des résistances auxquelles il reste soumis.

On reconnaît par là l'influence du désembrayage d'une partie des outils menés par un même moteur; les outils désembrayés se ralentissent et ne tardent pas à s'arrêter, pendant que le système non désembrayé continue son mouvement

avec une accélération qui peut être très sensible, et qui peut nuire au travail des outils et à la résistance des pièces. Pour remédier à cette variation subite des vitesses, on a recours à divers moyens, principalement aux *régulateurs*, qui introduisent une résistance accessoire au moment où certaines résistances cessent, et tendent à ramener la vitesse de la machine à une limite déterminée.

On peut remarquer aussi que $\frac{d\omega}{dt}$ est d'autant plus petit, après le désembrayage du second groupe, que le moment d'inertie I du corps principal est plus considérable, de sorte que les variations de la vitesse sont ralenties, sinon empêchées, par la présence d'un *volant* calé sur l'arbre tournant qui reçoit directement le mouvement de la machine motrice.

CALCUL DE L'ÉTABLISSEMENT D'UN VOLANT DANS LE CAS GÉNÉRAL

(§ 52).

223. Le problème du § 52, qui a pour objet l'établissement d'un volant pour une machine à balancier, est un exemple de la méthode à suivre pour le calcul du volant, lorsqu'il y a dans la machine des pièces *excentriques*, animées d'un mouvement autre qu'un mouvement de rotation continu. Nous généraliserons ici cette méthode.

La machine dont il s'agit comprend deux séries de pièces, les unes animées d'une rotation continue, les autres douées de mouvements quelconques. On pourra représenter la demi-force vive de l'ensemble des pièces de la première série par l'expression

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sum I^2,$$

dans laquelle ω est la vitesse angulaire d'un corps tournant qu'on regarde comme le *corps principal*, I le moment d'inertie d'un corps tournant quelconque par rapport à son axe, et λ le

rapport des vitesses angulaires de ce corps et du corps principal. La demi-force vive des pièces de la seconde série pourra se représenter de même par l'expression

$$\sum \frac{1}{2} mv^2,$$

en désignant par m la masse et v la vitesse d'un point matériel quelconque appartenant aux pièces excentriques.

Si T est le travail total des forces mouvantes et résistantes, depuis un certain instant pris pour origine jusqu'à l'instant où les vitesses sont ω et v , et C une constante qui représente la demi-force vive à cet instant initial, on aura l'équation

$$(1) \quad \frac{1}{2} \omega^2 \sum I^2 + \sum \frac{1}{2} mv^2 = T + C.$$

La fonction T oscille entre deux limites fixes, l'une positive, l'autre négative, et se réduit périodiquement à zéro : cette condition est nécessaire pour que le mouvement soit *périodiquement uniforme*.

La machine est à liaisons complètes, et si l'on appelle α l'angle décrit par l'arbre principal depuis la position arbitraire qu'il occupait à l'instant initial, on aura entre la vitesse v de chaque point m et la vitesse angulaire ω de l'arbre principal, un rapport qui dépendra de la position de la machine, c'est-à-dire de l'angle α . Posons donc

$$(2) \quad v = \omega f(\alpha);$$

nous aurons autant d'équations (2) qu'il y a de points m dans la machine. Substituant dans l'équation (1), il vient

$$(3) \quad \frac{1}{2} \omega^2 \left[\sum I^2 + \sum m \overline{f(\alpha)^2} \right] = T + C.$$

Cherchons au moyen de cette équation le maximum et le minimum de ω . Il vient, en différentiant et en divisant par dt ,

$$\omega \frac{d\omega}{dt} \left[\sum I^2 + \sum m \overline{f(\alpha)^2} \right] + \frac{1}{2} \omega^2 \sum 2mf(\alpha)f'(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dT}{dt} \frac{d\alpha}{dt}.$$

Mais $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$, et l'équation précédente devient, en divisant par ω ,

$$(4) \quad \frac{d\omega}{dt} \left[\sum l^2 + \sum m\overline{f(\alpha)^2} \right] + \omega^2 \sum m f(\alpha) f'(\alpha) = \frac{dT}{d\alpha}.$$

Le maximum et le minimum de ω correspondent à $\frac{d\omega}{dt} = 0$, ou à l'équation

$$(5) \quad \frac{dT}{d\alpha} - \omega^2 \sum m f(\alpha) f'(\alpha) = 0,$$

qu'on devra résoudre.

La solution rigoureuse consisterait à éliminer ω^2 entre les équations (5) et (3), et à chercher les racines de l'équation finale en α . Mais il est plus simple de recourir à une méthode approximative, bien suffisante pour les besoins de la pratique. On substituera à ω dans l'équation (5) une valeur moyenne Ω , qu'on déduira du nombre de tours que fait l'arbre principal pendant l'unité de temps; on remplacera cette équation (5) par l'équation suivante :

$$(5 \text{ bis}) \quad \frac{dT}{d\alpha} - \Omega^2 \sum m f(\alpha) f'(\alpha) = 0,$$

où Ω^2 est un facteur constant. On pourra alors procéder par approximations successives. L'ensemble des pièces excentriques ayant généralement peu d'importance par rapport à l'ensemble des arbres tournants, on cherchera d'abord les racines de l'équation

$$\frac{dT}{d\alpha} = 0;$$

chacune de ces racines sera substituée dans la somme $\sum m f(\alpha) f'(\alpha)$, et il en résultera une nouvelle équation

$$\frac{dT}{d\alpha} = \Omega^2 \sum m f(\alpha) f'(\alpha),$$

qui fera connaître les corrections qu'on doit leur faire

subir. Ce procédé peut être répété plusieurs fois, jusqu'à ce qu'on ait obtenu une vérification satisfaisante de l'équation proposée.

On obtiendra ainsi pour α au moins deux valeurs α_1, α_2 , qui correspondent la première au minimum, la seconde au maximum de la vitesse angulaire ω . L'équation (5) fera connaître ces valeurs limites, ω' et ω'' , qui correspondent aux angles α_1 et α_2 . Si l'on trouvait plus de deux valeurs de α , on aurait à associer le plus grand des maxima au plus petit des minima, de manière à réaliser le plus grand écart possible entre les vitesses angulaires.

Supposons qu'on ait trouvé les deux angles α_1 et α_2 , auxquels correspondent les valeurs extrêmes ω' et ω'' de la vitesse angulaire. On appliquera le théorème des forces vives, c'est-à-dire l'équation (5), entre les deux positions correspondantes, et retranchant, il viendra

$$(6) \quad \frac{1}{2} (\omega''^2 - \omega'^2) \sum l^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega''^2} \sum m \overline{f(\alpha_2)^2} - \frac{1}{2} \omega'^2 \sum m \overline{f(\alpha_1)^2} = T_2 - T_1,$$

T_2 et T_1 étant les valeurs de T correspondantes aux deux angles α_1 et α_2 . On fera ensuite, comme on l'a vu déjà,

$$\omega'' + \omega' = 2\Omega,$$

$$\omega'' - \omega' = \frac{\Omega}{n}.$$

On en déduit successivement, en multipliant, ajoutant et retranchant,

$$\omega''^2 - \omega'^2 = \frac{2\Omega^2}{n},$$

$$\omega'' = \Omega \left(1 + \frac{1}{2n} \right),$$

$$\omega' = \Omega \left(1 - \frac{1}{2n} \right),$$

et il vient, en substituant dans l'équation (6) l'équation définitive :

$$(7) \quad \frac{\Omega^2}{n} \sum l^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^2 \sum m \overline{f(\alpha_2)^2} - \frac{1}{2} \Omega^2 \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^2 \sum m \overline{f(\alpha_1)^2} = T_2 - T_1,$$

équation de laquelle on déduira le moment d'inertie du volant qu'il convient d'ajouter à l'arbre principal.

GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉGULATEURS.

224. Imaginons un système matériel contenu dans un plan vertical assujéti à tourner uniformément autour d'une verticale fixe; nous supposons en outre que le système soit mobile dans son plan autour d'un point donné. Cherchons la position d'équilibre relatif d'un tel système, sous l'action de la pesanteur et des forces centrifuges.

Soient ZZ' la verticale autour de laquelle s'effectue le mouvement, avec une vitesse angulaire ω ;

O le point autour duquel le système est assujéti à tourner dans son plan;

A un point du système; on connaît sa masse m , et sa position par rapport aux autres points.

Nous rapporterons les points A à deux axes rectangulaires menés par le point O , savoir OX et OY ; ces axes font corps avec le système matériel. On connaît les coordonnées $x = OB$, $y = BA$, du point A de masse m par rapport à ces axes. La distance AC du même point à l'axe de rotation s'exprimera par la fonction

$$a + x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

en appelant a la distance OO' du point O à l'axe ZZ' , et α l'angle XOZ_1 de l'axe OX avec la verticale.

Le point A est sollicité par deux forces, savoir : la pesanteur mg , qui agit parallèlement à la verticale, et la force centrifuge $m\omega^2 r$, suivant le prolongement de CA . Le système, ne pouvant que se déplacer dans son plan autour du point O , sera en équilibre si la somme des moments de ces forces par

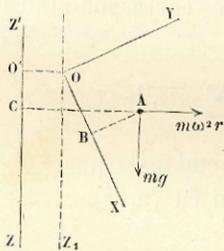


Fig. 122.

rappart au point O est nulle. La force mg a pour moment par rapport à ce point

$$mg \times (x \sin \alpha + y \cos \alpha)$$

et la force $m\omega^2 r$,

$$- m\omega^2 r (x \cos \alpha - y \sin \alpha),$$

expression où il faut remplacer r par $a + x \sin \alpha + y \cos \alpha$. La somme de ces deux moments est donc

$$mg(x \sin \alpha + y \cos \alpha) - m\omega^2(a + x \sin \alpha + y \cos \alpha)(x \cos \alpha - y \sin \alpha),$$

et cette somme, étendue à tous les points qui composent le système, donne pour le moment total

$$\begin{aligned} & g \sin \alpha \sum mx + g \cos \alpha \sum my - \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \left(\sum mx^2 - \sum my^2 \right) \\ & - \omega^2 a \cos \alpha \sum mx + \omega^2 a \sin \alpha \sum my - \omega^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sum mxy \\ & = (g \sin \alpha - \omega^2 a \cos \alpha) \sum mx + (g \cos \alpha + \omega^2 a \sin \alpha) \sum my \\ & - \frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\alpha \left(\sum mx^2 - \sum my^2 \right) - \omega^2 \cos 2\alpha \sum mxy. \end{aligned}$$

L'équilibre du système a lieu lorsque cette somme est nulle.

Les axes OX , OY ont jusqu'ici été pris arbitrairement. Nous pouvons les choisir de manière à annuler la somme $\sum mxy$. Il suffit pour cela de les diriger suivant les axes principaux de l'ellipse d'inertie du système plan qui a son centre au point O . On peut donc supposer $\sum mxy = 0$. Les sommes $\sum mx^2$, $\sum my^2$ sont les moments d'inertie du système matériel par rapport aux axes OY , OX ; nous les représenterons par Mp^2 , Mq^2 , en appelant p et q les rayons de giration du système par rapport aux axes, c'est-à-dire les quantités fournies par les équations

$$Mp^2 = \sum mx^2,$$

$$Mq^2 = \sum my^2,$$

avec la relation $M = \sum m$.

On aura aussi

$$\sum mx = Mx_1,$$

$$\sum my = My_1.$$

x_1 et y_1 étant les coordonnées du centre de gravité du système. Substituant dans l'équation d'équilibre, il vient, en supprimant le facteur commun M ,

$$(g \sin \alpha - \omega^2 a \cos \alpha) x_1 + (g \cos \alpha + \omega^2 a \sin \alpha) y_1 - \frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\alpha (p^2 - q^2) = 0,$$

qui lie ensemble l'angle α et la vitesse angulaire ω .

225. Le régulateur de Watt, tel qu'on le considère dans la théorie sommaire qui en a été donnée § 59, rentre dans le cas général en réduisant le système à un point unique, et en plaçant le point O sur l'axe ZZ' . On a alors $a = 0$, $y_1 = 0$, $q = 0$ et $p = x_1$, et l'on retrouve l'équation

$$g \sin \alpha = \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha x_1,$$

identique à l'équation obtenue § 59.

Si l'on voulait que le système fût en équilibre indifférent à toutes les vitesses, il suffirait de faire

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad p = q,$$

ce qui satisfait à l'équation quels que soient l'angle α et la vitesse ω . Il suffit donc pour cela que le système soit mobile dans son plan autour de son centre de gravité, et que son ellipse centrale d'inertie se réduise à un cercle. Il en est ainsi, par exemple, de tous les systèmes matériels formés de poids égaux placés aux sommets d'un polygone régulier.

Si le point O est le centre de gravité, on a $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, et l'équilibre est défini par l'équation $\sin 2\alpha = 0$. Il faut alors

que l'on ait soit $\alpha = 0$, soit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que les axes

principaux de l'ellipse centrale d'inertie soient l'un vertical, l'autre horizontal.

Proposons-nous de faire en sorte que le régulateur, sous une vitesse angulaire donnée ω , soit sensiblement en équilibre indifférent pour un léger déplacement angulaire du système autour de sa position moyenne. Pour y parvenir, résolvons l'équation d'équilibre par rapport à la quantité a , qui est une constante. Il vient

$$(1) \quad \omega^2 a = \frac{g(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) - \frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\alpha (p^2 - q^2)}{x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha}.$$

Le premier membre est constant, le second est variable en fonction de α ; mais l'équation sera sensiblement vérifiée avec des valeurs légèrement variables de α , si l'on prend pour valeur moyenne de cet angle celle qui rend le second membre maximum ou minimum, c'est-à-dire celle qui annule sa dérivée par rapport à α .

On obtient ainsi pour la meilleure détermination de l'angle α l'équation

$$(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha) [g(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha) - \omega^2 \cos 2\alpha (p^2 - q^2)] - \left[g(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) - \frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\alpha (p^2 - q^2) \right] (-x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha) = 0$$

Elle se réduit à

$$(2) \quad g(x_1^2 + y_1^2) = \omega^2 (p^2 - q^2) (x_1 \cos^5 \alpha + y_1 \sin^5 \alpha).$$

Cette équation fera connaître l'angle moyen α , de part et d'autre duquel les petites variations d'inclinaison du système plan n'altéreront pas sensiblement la condition d'équilibre, pour une vitesse angulaire ω donnée. Dans ces positions le régulateur fonctionnera comme s'il était tautochrone.

Si l'on fait $y_1 = 0$, $q = 0$, $x_1 = p$, on trouve l'équation

$$(3) \quad \cos^5 \alpha = \frac{g x_1}{\omega^2 p^2} = \frac{g}{\omega^2 p},$$

qui revient à celle du § 65, relative au régulateur à bras croisés de M. Farcot.

En effet l'équation d'équilibre (1) se réduit alors, en y faisant les mêmes simplifications, à

$$(4) \quad \omega^2 a = \frac{g \sin \alpha - \omega^2 \cos \alpha \sin \alpha p}{\cos \alpha} = \sin \alpha \left(\frac{g - p \omega^2 \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) \\ = \sin \alpha \left(\frac{g}{\cos \alpha} - p \omega^2 \right).$$

Mais $\frac{g}{\cos \alpha} = p \omega^2 \cos^2 \alpha$ en vertu de l'équation (5), et par suite l'équation (4) devient

$$(5) \quad \omega^2 a = \sin \alpha \times p \omega^2 (\cos^2 \alpha - 1) = -\sin^3 \alpha \times p \omega^2,$$

d'où l'on déduit

$$\sin^3 \alpha = -\frac{a}{p},$$

résultat identique à celui du § 65, en observant que ce qu'on appelle a dans ce paragraphe est la valeur absolue de la distance OO' , laquelle doit être comptée ici négativement pour le régulateur à bras croisés, et que la quantité p n'est autre chose que la longueur L .

226. On peut imaginer une foule de régulateurs dans lesquels la force centrifuge soit équilibrée par une autre force.

Voici un exemple de régulateur où cette force est fournie par un ressort, comme dans le régulateur de Foucault. Une boule B est assujettie à parcourir l'horizontale OX , mobile autour de l'axe OA . Elle est attachée par un fil élastique AB à un point fixe A de l'axe. La tension AB du fil

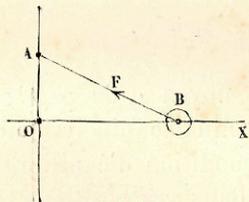


Fig. 124.

est supposée proportionnelle à sa longueur. La force F exercée par le fil peut être décomposée en deux forces, l'une dans le sens BO , l'autre parallèle à OA ; ces deux compo-

santes sont respectivement proportionnelles à BO , OA ; la force normale à OB n'a pas de travail. L'équilibre aura donc lieu entre la force BO et la force centrifuge $m\omega^2 r$, laquelle est aussi proportionnelle à OB pour une valeur donnée de la vitesse ω . L'équilibre établi pour une distance OB le sera donc aussi pour toute autre distance; en d'autres termes, l'équilibre sera indifférent pour une même valeur de ω , quelle que soit la position de B sur sa trajectoire OX .

227. D'autres régulateurs sont de simples régulateurs à boules, qui soulèvent un poids plus ou moins considérable par le fait de l'écartement des bras. Imaginons qu'un poids Q soit lié aux bras AB , AB' (fig. 125), de telle sorte qu'il parcoure le long de l'axe vertical AZ des espaces proportionnels au cosinus de l'angle d'écart $ZAB = \alpha$. Pour un accroissement $d\alpha$ de cet angle, le travail de la pesanteur sera

$$Q \times d(h \cos \alpha) = -Qh \sin \alpha d\alpha$$

pour le poids Q , en appelant h une longueur constante, et

$$-2PL \sin \alpha d\alpha$$

pour les deux poids P ; L désigne la longueur AB des tiges. Le travail de la force centrifuge sur les deux boules est

$$2 \frac{P}{g} \omega^2 L \sin \alpha d(L \sin \alpha) = \frac{2P}{g} \omega^2 L^2 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha.$$

L'équation d'équilibre est donc

$$\frac{2P}{g} \omega^2 L^2 \cos \alpha \sin \alpha = (Qh + 2Ph) \sin \alpha,$$

ou bien

$$\cos \alpha = \frac{Qh + 2PL}{2P \omega^2 L^2} = g \frac{1 + \frac{Qh}{2PL}}{\omega^2 L}.$$

L'addition du poids Q modifie donc l'angle d'équilibre,

mais ne change pas la forme de l'équation qui détermine cet angle. L'augmentation du poids Q , toutes choses égales d'ailleurs, entraîne l'augmentation du cosinus de l'angle α , et la diminution de cet angle.

Examinons encore le régulateur qui serait formé de deux boules égales B, B' , mobiles le long d'une horizontale BB' , et liées par deux tiges articulées à une troisième boule C , mobile le long de l'axe de rotation.

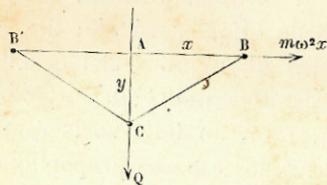


Fig. 125.

Le poids des boules B, B' ne figurera pas dans l'équation d'équilibre, puisque le travail de la pesanteur est nul. Si l'on appelle P les poids des boules B, B' , et Q le poids de la boule C , la force Q , dirigée

verticalement suivant AC , doit faire équilibre aux deux forces $\frac{P}{g} \omega^2 \times AB$, appliquées en B et B' dans le sens centrifuge. Si l'on appelle x et y les deux longueurs AB, AC , et L la longueur CB , on aura donc pour l'équilibre

$$Qdy + 2 \frac{P}{g} \omega^2 x dx = 0,$$

avec la relation

$$y^2 + x^2 = L^2.$$

On en déduit $ydy + xdx = 0$, et par suite la condition d'équilibre est simplement

$$Q - 2 \frac{P}{g} \omega^2 y = 0,$$

ou $y = \frac{Q}{2P} \frac{g}{\omega^2}$, équation qui définit la position d'équilibre; on peut remarquer que la valeur de y est indépendante de la longueur L .

Si, au lieu de rattacher les poids B, C, B' par des tiges rigides $BC, B'C$, on les rattachait par des fils inexten-

sibles $BAC, B'AC$, passant en A sur des poulies infiniment petites, de manière à conserver constantes les longueurs $BA + AC, B'A + AC$ des fils, la liaison s'exprimerait par l'équation

$$x + y = \text{constante},$$

qui donne $dx + dy = 0$, et l'équilibre serait défini par l'équation

$$x = \frac{Q}{2P} \frac{g}{\omega^2},$$

c'est-à-dire qu'il faudrait attribuer à x la valeur trouvée pour y dans le cas précédent.

228. La théorie des régulateurs a donné lieu à un grand nombre de travaux, parmi lesquels nous citerons seulement :

ROLLAND, *Journal de l'École polytechnique*, 1870;

LÉAUTÉ, sur un procédé permettant d'obtenir d'un régulateur à boules quelconque le degré d'isochronisme qu'on veut, et de maintenir ce degré d'isochronisme pour toutes les vitesses de régime (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 25 août et 1^{er} septembre 1879). — Sur un perfectionnement applicable à tous les régulateurs à boules (*Journal de l'École polytechnique*, XLVII^e cahier, 1880).

On peut trouver un résumé des divers travaux sur les régulateurs dans l'*Appendice* ajouté par M. Léauté à l'ouvrage de W. Cauthorne Unwin, intitulé : *Éléments de construction des machines* (traduit de l'anglais par G. A. Bocquet; Paris, 1882, Gauthier-Villars, *Appendice*, § III, p. 424).

229. Le régulateur à ailettes est un appareil au moyen duquel la résistance de l'air est utilisée pour produire un

travail négatif qui empêche la vitesse d'une machine de croître au delà de toute limite.

Les ailettes sont des portions de plan montées au bout des bras d'un croisillon, mobile autour d'un axe fixe. Dans certains appareils, les plans des ailes sont mobiles autour des bras qui les supportent, et peuvent prendre successivement toutes les positions entre le plan normal au plan du croisillon, et le plan du croisillon lui-même; dans le premier cas, l'ailette est choquée normalement par les filets fluides qu'elle rencontre: la résistance est maximum; dans le second elle se présente par la tranche, et passe dans l'air sans subir de résistance appréciable. Les positions intermédiaires correspondent à une réduction de la surface qui subit l'effort normal de l'air. Un petit régulateur à boules, monté sur l'axe du régulateur à ailettes, commande à la fois les plans des ailes, et les oriente par rapport au plan du croisillon d'après l'écartement des boules, c'est-à-dire d'après la vitesse angulaire de l'appareil. On voit que ce perfectionnement a pour effet de faire croître la surface choquée en même temps que la vitesse angulaire, ce qui contribue à augmenter plus rapidement la résistance, et à restreindre les variations de la vitesse entre des limites plus étroites.

Occupons-nous seulement du régulateur à ailettes ordinaires, où le croisillon porte 4 ailettes égales montées au bout de 4 bras égaux, normalement à son plan moyen.

Soient A la surface d'une ailette;

a la distance de son centre à l'axe du croisillon, ou plutôt la distance au même axe du point de passage de la résultante des actions du fluide; ce point est voisin du centre de gravité de l'ailette, si le bras est suffisamment long.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que le croisillon soit soumis à l'action de forces extérieures constantes, et nous représenterons par M le moment de ces forces par rapport à l'axe; nous supposerons M constant et positif, et nous allons montrer que l'emploi du régulateur conduit à une vitesse angulaire constante, quelque grand que soit le moment M .

La résistance de l'air sur une ailette, lorsque la vitesse angulaire est ω , s'exprime par le produit $K \frac{\Pi}{g} A a^2 \omega^2$, en appelant Π le poids du mètre cube d'air et K un coefficient constant. Le moment de cette résistance par rapport à l'axe est $K \frac{\Pi}{g} A a^5 \omega^2$; et si on appelle I le moment d'inertie du croisillon par rapport à l'axe, on aura pour équation du mouvement, en tenant compte du nombre des ailes,

$$I \frac{d\omega}{dt} = M - \frac{4K\Pi}{g} A a^5 \omega^2.$$

On en déduit

$$dt = \frac{I}{M - \frac{4K\Pi}{g} A a^5 \omega^2} d\omega = \frac{\left(\frac{I}{\frac{4K\Pi}{g} A a^5} \right) d\omega}{\frac{M}{\frac{4K\Pi}{g} A a^5} - \omega^2}.$$

Le coefficient $\frac{I}{\frac{4K\Pi}{g} A a^5}$ représente un nombre. En effet,

il est le produit $\frac{P}{g} \times \rho^2$ de la masse totale $\frac{P}{g}$ du croisillon par le carré du rayon de giration ρ ; $4K\Pi A a$ représente un certain poids Q ; de sorte qu'on a

$$\frac{I}{\frac{4K\Pi}{g} A a^5} = \frac{\frac{P}{g} \rho^2}{\frac{Q}{g} \times Q},$$

et l'on obtient un nombre, rapport de deux quantités de même nature. Soit b ce rapport. $\frac{M}{\frac{4K\Pi}{g} A a^5}$ est le carré d'une

vitesse angulaire ω_1^2 . En effet, M est le produit d'une force homogène à $4K\Pi A a$, et d'une longueur l . La fraction repré-

sente donc une quantité homogène à $\frac{l \times g}{a^2}$ ou à $\frac{g}{a}$. Or l'accélération g est le quotient d'une longueur par le carré d'un temps; $\frac{g}{a}$ est donc homogène à $\frac{1}{l^2}$, c'est-à-dire au carré ω_1^2 d'une certaine vitesse angulaire.

Posons donc

$$\frac{I}{\left(\frac{4K\Pi A a^3}{g}\right)} = b$$

et

$$\frac{M}{\left(\frac{4K\Pi A a^3}{g}\right)} = \omega_1^2.$$

L'équation à intégrer deviendra

$$dt = \frac{bd\omega}{\omega_1^2 - \omega^2} = \frac{1}{2} \frac{b}{\omega_1} \left(\frac{d\omega}{\omega_1 + \omega} + \frac{d\omega}{\omega_1 - \omega} \right);$$

on en déduit

$$t = \frac{b}{2\omega_1} [l(\omega_1 + \omega) - l(\omega_1 - \omega)] + C = \frac{b}{2\omega_1} l \frac{\omega_1 + \omega}{\omega_1 - \omega} + C.$$

Soit $\omega = 0$ pour $t = 0$. La constante sera nulle, et on aura, en résolvant par rapport à ω ,

$$\omega = \omega_1 \times \frac{e^{\frac{2\omega_1 t}{b}} - 1}{e^{\frac{2\omega_1 t}{b}} + 1},$$

Lorsque t augmente indéfiniment, ω augmente et tend vers la vitesse finie ω_1 , qui correspond à t infini. La vitesse ω de l'appareil est donc toujours inférieure à ω_1 .

On voit que la limite ω_1 est égale à $\sqrt{\frac{Mg}{4K\Pi A a^3}}$, et qu'on peut la rendre aussi petite qu'on voudra en prenant suffisamment grands les facteurs A et a^3 qui entrent au dénominateur.

PETITES OSCILLATIONS D'UN CORPS FLOTTANT (§ 119).

250. Nous supposons qu'un corps, symétrique par rapport à un plan vertical, flotte à la surface d'une eau tranquille, et qu'on l'ait déplacé, à partir de sa position d'équilibre, parallèlement à son plan de symétrie. Les déplacements initiaux sont très petits; nous avons à déterminer ce qu'ils deviennent dans la suite du mouvement, s'ils sont limités, ou bien s'ils peuvent croître indéfiniment; l'équilibre est stable dans le premier cas, instable dans le second.

Nous admettrons que le plan vertical moyen parallèlement auquel s'opère le mouvement est le plan du papier. Soient G le centre de gravité du corps flottant,

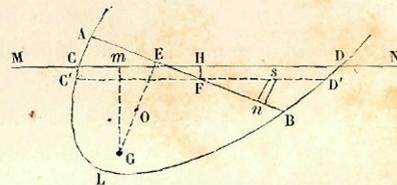


Fig. 126.

O le centre de carène de la partie ALB , qui plonge seule dans l'état d'équilibre, AB la ligne de flottaison correspondante, F le centre de gravité de la section AB , CD la nouvelle ligne de flottaison.

Le nouvel état d'immersion du corps sera défini par deux coordonnées, comme on l'a vu au § 119, savoir : la distance $FH = \zeta$ du centre de gravité de la section AB au plan d'eau MN , et l'angle $\theta = mGE$, inclinaison prise par la ligne GO , qui est verticale dans l'état d'équilibre, par rapport à la verticale Gm .

Nous désignerons par V le volume immergé ALB , par Ω la section AB , par a la distance GO du centre de gravité au centre de carène, comptée positivement si O est au-dessus de G , négativement s'il est au-dessous; par l la distance GE du centre de gravité à l'ancienne flottaison, par z la distance Gm du même point à la nouvelle, ou à la ligne d'eau MN , et

enfin par p la distance EF du centre de gravité de la section AB au pied E de la perpendiculaire GO.

Les forces qui agissent sur le système sont le poids du corps et la poussée du liquide.

Le poids du corps sera représenté par le produit Mg de sa masse par l'accélération g due à la pesanteur.

La poussée est le produit du poids spécifique Π du liquide par le volume immergé CLD. Or ce volume se déduit de l'ancien volume immergé ALB, en y ajoutant le volume du coin BFD', en retranchant le volume du coin opposé AFC', en y ajoutant enfin le volume de la tranche CDD'C', le plan CD' étant mené par le point F parallèlement au plan CD de la nouvelle flottaison. Le point F étant le centre de gravité de la section AB, les volumes des deux coins opposés par l'arête projetée en F sont sensiblement égaux (II, § 216), et ils se détruisent dans la somme; de sorte que le volume CLD est égal approximativement au volume V de l'ancienne carène, augmenté de la tranche CDC'D, c'est-à-dire à la somme $V + \Omega\zeta$. La poussée est donc $\Pi(V + \Omega\zeta)$.

On a d'ailleurs $Mg = \Pi V$, puisqu'il y a équilibre lorsque la carène AFB est seule immergée.

Cela posé, appliquons le théorème du mouvement du centre de gravité, et projetons le mouvement de ce point G sur la verticale. Nous aurons

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = Mg - \Pi(V + \Omega\zeta) = -\Pi\Omega\zeta.$$

La coordonnée z s'exprime en fonction des variables ζ et θ . En effet, projetons sur la verticale le contour GEFH, qui a pour projection $Gm = z$. Il viendra

$$Gm = GE \cos \theta - EF \sin \theta + FH,$$

ou bien

$$z = l \cos \theta - p \sin \theta + \zeta.$$

Comme on suppose θ très petit, on peut, sans erreur sen-

sible, remplacer $\cos \theta$ par l'unité et $\sin \theta$ par l'arc θ ; on a alors la formule simplifiée

$$z = l - p\theta + \zeta.$$

On en déduit

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -p \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d^2 \zeta}{dt^2},$$

de sorte que la première équation du mouvement est

$$M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - pM \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\Pi\Omega\zeta,$$

ou bien

$$(1) \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - p \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{\Pi\Omega}{M} \zeta = -\frac{g\Omega}{V} \zeta.$$

Nous joindrons à cette équation celle de la rotation du corps autour d'une horizontale menée par le centre de gravité G, perpendiculairement au plan de la figure; cet axe conserve son parallélisme dans toute la durée du mouvement, et l'on peut opérer comme si le point G restait fixe (III, § 311.) Nous aurons à déterminer la somme des moments des poussées; quant au poids Mg , son moment est nul, puisque l'axe contient le centre de gravité G.

Le moment de la poussée sur la carène ALB est égal au poids ΠV du liquide déplacé, multiplié par la distance au point G de la verticale du point O: ce qui donne $\Pi V \times GO \sin \theta$, ou $\Pi V a \theta$, en confondant encore le sinus avec l'arc.

Les poussées sur la tranche CDC'D' se composent en une force unique, verticale et appliquée suivant FH; le moment est donc égal au produit $\Pi \times \Omega \zeta \times m \Pi$, ou à

$$\Pi\Omega\zeta(l \sin \theta + p \cos \theta) = \Pi\Omega l \zeta \theta + \Pi\Omega p \zeta.$$

Le premier terme du résultat, renfermant le produit $\zeta \theta$ de deux variables infiniment petites, est infiniment petit du second ordre et peut être négligé. On ne conservera donc que le second terme $\Pi\Omega p \zeta$.

Pour évaluer les moments des poussées exercées sur les coins BFD', AFC', nous les décomposerons en prismes droits, que l'on peut prendre indifféremment verticaux ou normaux à l'ancienne flottaison AB. C'est la seconde décomposition que nous appliquerons ici. Soit $d\lambda$ la section infiniment petite d'un de ces prismes ns , normaux à AB. La hauteur ns de ce prisme s'obtiendra approximativement en multipliant la distance nF à l'horizontale projetée en F par l'angle θ des deux plans FB, FD'. Appelons x cette distance, en donnant à x le signe + s'il s'agit des éléments situés au-dessous de F, et le signe - s'il s'agit des éléments situés au-dessus. De cette manière, les deux coins BFD', AFC' seront compris dans une seule et même formule.

Or le volume du prisme est $d\lambda \times x\theta$; la poussée correspondante est $\Pi d\lambda \times x\theta$; et le moment de cette poussée par rapport à l'horizontale projetée en b sera le produit de $\Pi d\lambda \times x\theta$ par la distance du centre de gravité de ns à la verticale du point G, c'est-à-dire au point m . Ce bras de levier est donc égal à la somme

$$mE + En \cos \theta = l\theta + p + x.$$

Le produit est

$$\Pi d\lambda \times xl\theta^2 + \Pi d\lambda \times x\theta(p + x).$$

Le premier terme est infiniment petit par rapport aux suivants, et le moment élémentaire se réduit par conséquent à la somme

$$\Pi d\lambda \times px\theta + \Pi d\lambda \times x^2 \theta.$$

Pour avoir le moment total des poussées des deux coins, il suffit de faire la somme de ces deux termes, étendue à tous les éléments $d\lambda$ de la section AB; ce qui donne

$$\Pi \times p\theta \sum x d\lambda + \Pi \times \theta \sum x^2 d\lambda.$$

La somme $\sum x d\lambda$ est nulle, car elle représente la somme des

moments des aires élémentaires par rapport à la droite projetée en F, qui contient le centre de gravité de la section. La seconde somme $\sum x^2 d\lambda$ est le moment d'inertie I de la section AB par rapport à la droite F. Le moment des poussées sur les deux coins est donc égal simplement au produit

$$\Pi l\theta.$$

La somme des moments des poussées par rapport à la droite projetée en G est, en définitive,

$$\Pi Va\theta + \Pi \Omega p\zeta + \Pi l\theta,$$

et il faut observer que les poussées tendent à relever le corps flottant, c'est-à-dire à réduire l'angle θ . L'axe projeté en G est un axe principal d'inertie du corps, à cause de la symétrie admise par rapport à son plan moyen. Appelons K le rayon de giration correspondant à cet axe. On pourra poser l'équation des moments

$$MK^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\Pi Va\theta - \Pi \Omega p\zeta - \Pi l\theta,$$

ou bien

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g\alpha}{K^2} \theta - \frac{\Pi \Omega}{MK^2} p\zeta - \frac{\Pi l}{MK^2} \theta;$$

ou encore, en remplaçant $\frac{M}{\Pi}$ par $\frac{V}{g}$, et I par Ωc^2 , c étant le rayon de giration de la section AB par rapport à la droite projetée en F,

$$(2) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{VK^2} (aV + \Omega c^2) \theta - \frac{g\Omega p}{VK^2} \zeta.$$

251. Ces équations (1) et (2) définissent les variations simultanées des quantités ζ et θ . On commencera par remplacer

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ dans l'équation (1) par sa valeur tirée de (2). Alors les équations prennent la forme suivante :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + A\zeta + pB\theta = 0,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + C\zeta + B\theta = 0,$$

en posant

$$A = \frac{\Omega g(p^2 + K^2)}{VK^2},$$

$$B = \frac{g(\Omega c^2 + aV)}{VK^2},$$

$$C = \frac{g\Omega p}{VK^2}.$$

On peut les intégrer par la méthode de d'Alembert.

Multiplions la seconde équation par une indéterminée s , et ajoutons-la à la première. Il viendra

$$\frac{d^2(\zeta + s\theta)}{dt^2} + B(p + s)\theta + (A + sC)\zeta = 0.$$

On peut disposer de l'arbitraire s de telle sorte que l'ensemble des deux derniers termes devienne une fonction de la variable unique $\zeta + s\theta$. Il suffit, en effet, de poser

$$B(p + s) = s(A + sC),$$

ou bien

$$Cs^2 + (A - B)s - Bp = 0,$$

équation du second degré qui donnera en général pour s deux valeurs distinctes. Si on les appelle s' et s'' , et qu'on pose $\zeta + s'\theta = u$ et $\zeta + s''\theta = v$, on aura à intégrer les deux équations linéaires du second ordre

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (A + s'C)u = 0$$

et

$$\frac{d^2v}{dt^2} + (A + s''C)v = 0.$$

Pour que l'analyse que nous venons de présenter soit admissible, il faut et il suffit que $A + s'C$ et $A + s''C$ soient tous deux positifs. S'il en est ainsi, les intégrales générales qui donnent u et v en fonction de t renferment le temps sous les signes *sinus* et *cosinus*, par suite u et v ne peuvent croître indéfiniment; il en est de même des variables θ et ζ , qui s'expriment linéairement en fonction de u et de v . Les oscillations sont donc limitées, et la position d'équilibre est stable.

Si, au contraire, l'un des coefficients $A + s'C$, $A + s''C$, ou tous les deux, sont négatifs, la solution renferme des exponentielles qui peuvent croître de plus en plus avec le temps, et alors ζ et θ n'ont pas de limite. L'équilibre est instable, et les équations obtenues ne sont pas celles du mouvement, puisqu'elles supposent ζ et θ très petits.

Le cas de $p = 0$ doit être examiné à part. Dans ce cas, l'équation (1) ne renferme plus θ , et l'équation (2) ne contient plus ζ . Les deux équations s'intègrent donc séparément. L'équation (1) montre que ζ est toujours limité. Quant à θ , il est limité si le facteur $aV + \Omega c^2$ est positif, ce qui entraîne comme conséquence, ou bien a positif, c'est-à-dire le centre de carène O au-dessus du point G , ou bien a négatif et moindre en valeur absolue que $\frac{\Omega c^2}{V}$. C'est la condition que nous avons déduite (§ 119) de l'équation des forces vives. Si ζ_0 et θ_0 sont les valeurs initiales de ζ et θ , et que les vitesses initiales soient nulles, les équations du mouvement seront, dans l'hypothèse de $p = 0$,

$$\zeta = \zeta_0 \cos t \sqrt{\frac{g\Omega}{V}},$$

$$\theta = \theta_0 \cos t \sqrt{\frac{g(aV + \Omega c^2)}{VK^2}}.$$

Si p n'est pas nul, il est positif, car il mesure la distance absolue des deux points F et E , prise sans avoir égard au sens dans lequel cette distance serait comptée. Donc les coefficients A et C sont tous deux positifs. Si B est aussi positif, l'équation

en s a ses deux racines réelles, inégales, et de signes contraires; de plus, les deux coefficients $A + s'G$ et $A + s''C$ sont positifs; en effet, l'un, $A + Cs'$, est positif parce que s est positif ainsi que A et C . Pour l'autre, qui correspond à la racine négative s'' , observons que cette racine n'est pas comprise entre les limites 0 et $-p$. Car si l'on substitue 0 et $-p$ à s dans le trinôme

$$Cs^2 + (A - B)s - Bp,$$

il prend les valeurs $-Bp$ pour $s=0$, et pour $s=-p$

$$(Cp - A)p = -\frac{\Omega g K^2 p}{VK^2} = -\frac{\Omega g p}{V},$$

de sorte que le trinôme ne change pas de signe entre $s=0$ et $s=-p$; la racine négative s'' est donc en dehors de ces limites. Il en résulte que le produit $B(p + s'')$ a le signe de s'' . Comme ce produit est égal à $s''(A + s''C)$, il en résulte que $A + s''C$ est positif.

Donc les variables auxiliaires u et v sont exprimables aussi par des fonctions qui renferment le temps sous les signes *sinus* et *cosinus*, et il en est de même des variables définitives θ et ζ , dès que B est positif, ou dès que a est supérieur à $-\frac{\Omega c^2}{V}$.

On peut remarquer que, si l'on prend sur AB , à partir de F , deux distances FI , FK , l'une égale à s' dans le sens FB , l'autre égale à $-s''$ dans le sens FA , les deux points I et K auront en projection verticale des mouvements pendulaires. Car ces mouvements verticaux sont précisément définis, pour de petites valeurs de l'angle θ , par les valeurs des variables u et v en fonction du temps.

DÉFINITION DU MÉTACENTRE (§ 119).

253. On suppose qu'un corps flottant, en équilibre à la surface d'un liquide en repos, ait un plan de symétrie, ver-

tical dans l'état d'équilibre. On communique à ce corps un déplacement infiniment petit parallèlement au plan de symétrie, et sous la condition de ne pas changer le volume immergé. Dans ces conditions la résultante R des poussées du fluide, qui était appliquée au centre de carène O de la partie AB primitivement immergée, se transporte sans changer de valeur en un autre point O' ,

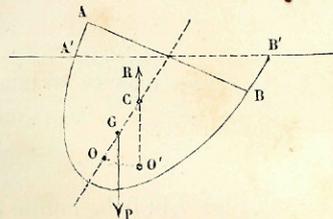


Fig. 127.

centre de carène de la nouvelle partie immergée $A'B'$. Elle agit de bas en haut suivant la droite $O'C$ devenue verticale, tandis que le poids du corps P est toujours appliqué en son centre de gravité G . Si donc la nouvelle verticale $O'R$ coupe l'ancienne OG en un point C situé au-dessus du point G , les deux forces égales P et R tendent à faire revenir le corps dans sa position primitive, et l'équilibre est stable. Le point C a reçu de Bouguer le nom de *Métacentre*, et l'on peut dire, en employant ce mot, que la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant est assurée si le *métacentre est plus haut que le centre de gravité*. Cette théorie montre comment la stabilité résulte du déplacement du centre de carène quand ce point est au-dessus du centre de gravité G . Mais elle est incomplète, en ce qu'elle suppose un déplacement particulier du corps, et qu'elle permettrait de douter de la stabilité relativement à des déplacements autres que celui-là. Le résultat est du reste plus général que la démonstration qui sert à l'établir. Si l'on cherche la distance OC pour un déplacement infiniment petit, on la trouve en effet

égale à $\frac{I}{V}$, I étant le moment d'inertie de la section de flottaison par rapport à la droite menée dans son plan par son centre de gravité perpendiculairement au plan moyen, et V le volume immergé. La condition revient donc à $OG < \frac{I}{V}$ ou à

$a' < \frac{I}{V}$, c'est-à-dire à la condition générale que fait connaître l'emploi du théorème des forces vives.

CONDITIONS DE STABILITÉ D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE
RECTANGLE FLOTTANT.

254. Soit ABCD la coupe transversale du parallélépipède; faisons $AB = c$, $BC = b$. Supposons que l'équilibre soit établi lorsque le corps est enfoncé dans l'eau de la quantité $FC = ED = h$.

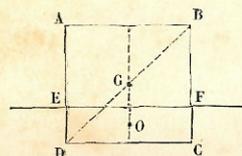


Fig. 128.

Le centre de gravité est au point G, et le centre de carène au point O. La distance GO est égale à $\frac{b-h}{2}$. Si on la

désigne par a , la stabilité exige qu'on ait $I > aV$, I étant le moment d'inertie de la section de flottaison EF par rapport à une droite menée dans son plan par son centre de gravité, et V le volume immergé EDCE.

I est égal à l'aire Ω de la section EF, multipliée par le carré ρ^2 du rayon de giration de cette aire.

V est le produit de l'aire Ω par la profondeur d'immersion h . La condition se réduit donc à vérifier l'inégalité

$$a < \frac{\Omega \rho^2}{\Omega h},$$

c'est-à-dire

$$a < \frac{\rho^2}{h}.$$

Le moment d'inertie I d'un rectangle de largeur c et de longueur l est, par rapport à la médiane parallèle à la longueur, $\frac{lc^3}{12} = lc \times \frac{c^2}{12}$.

Le produit lc étant l'aire Ω , on a $\rho^2 = \frac{c^2}{12}$, et par conséquent

$$a < \frac{c^2}{12h}.$$

Remplaçons a par $\frac{b-h}{2}$. Il viendra, pour déterminer la profondeur d'immersion h , l'inégalité

$$h(b-h) < \frac{c^2}{6}.$$

Le maximum de $h(b-h)$ a lieu par $h = b-h$, et est égal à $\frac{b^2}{4}$. Si donc $\frac{b^2}{4} < \frac{c^2}{6}$, ou si $b < c \sqrt{\frac{2}{3}}$, la stabilité est assurée à toute profondeur d'immersion.

Si, au contraire, $\frac{b^2}{4}$ est plus grand que $\frac{c^2}{6}$, il faut que le trinôme

$$bh - h^2 - \frac{c^2}{6}$$

reste toujours négatif, quel que soit h pris entre 0 et b , ou, ce qui revient au même, que

$$h^2 - bh + \frac{c^2}{6}$$

soit toujours positif. Or on a, ou bien

$$\begin{aligned} h^2 - bh + \frac{c^2}{6} &= \left(h - \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{6}\right) \\ &= \left(h - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{6}}\right) \left(h - \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{6}}\right), \end{aligned}$$

de sorte qu'il faut qu'on ait, ou bien

$$h < \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{6}},$$

ou bien

$$h > \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{6}};$$

la stabilité est assurée pour les petites valeurs de h et pour les grandes, et n'a pas lieu pour les valeurs moyennes.

Le rapport $\frac{h}{b}$ est égal au rapport inverse $\frac{\Pi'}{\Pi}$ des poids spécifiques du corps flottant et du liquide. Dans le premier cas, celui où $b < c \sqrt{\frac{2}{3}}$, la stabilité est indépendante de l'immersion, quel que soit le rapport $\frac{\Pi'}{\Pi}$, c'est-à-dire quels que soient les corps en présence; dans le second, $b > c \sqrt{\frac{2}{3}}$, h doit être compris entre certaines limites, et on voit alors que la stabilité peut être assurée en faisant flotter le corps à la surface d'un liquide, tandis qu'elle peut cesser de l'être avec un liquide d'autre densité. Un corps peut, par exemple, être stable sur le mercure sans être pour cela stable sur l'eau.

LIQUÉFACTION DES GAZ (§ 67).

255. Faraday a ouvert la voie pour la liquéfaction des gaz; il liquéfia le chlore (1825). La méthode qu'il employa, et qui consiste essentiellement à augmenter graduellement la pression du gaz en vase clos, réussit pour d'autres corps gazeux, tels que l'ammoniaque, l'acide carbonique, l'acide sulfureux, le protoxyde d'azote. Pour ce dernier gaz, il est nécessaire d'abaisser la température jusqu'à -40° environ, en même temps qu'on augmente la pression.

Si, après avoir réduit un de ces corps gazeux à l'état liquide, on ouvre brusquement le vase dans lequel il est contenu, il y a formation subite de vapeur, c'est-à-dire retour du corps à l'état gazeux. Mais cette transformation exige une grande quantité de chaleur, qui est fournie pour la plus grande partie par le liquide voisin, et le refroidissement qui en est la conséquence suffit en général pour faire passer

cette portion liquide à l'état solide. De là une méthode pratique pour produire des froids très intenses, méthode appliquée aujourd'hui en grand dans l'industrie.

La liquéfaction de l'oxygène, de l'hydrogène et de l'azote a été longtemps regardée comme impossible; on avait soumis ces gaz à d'énormes pressions sans obtenir de résultat apparent; cela tient sans doute à ce que, aux températures ordinaires, le gaz comprimé est ramené par la pression à cet état intermédiaire qu'on nomme *gazo-liquide*, dans lequel la vapeur et le liquide qui la produit ont des densités égales, et ne se séparent pas l'un de l'autre. C'est en abaissant la température au-dessous du degré qui correspond à ce point critique, que M. Cailletet à Paris, et M. Raoul Pictet à Genève, sont parvenus à liquéfier successivement l'oxygène, l'azote et enfin l'hydrogène. L'expérience décisive de M. Cailletet sur l'oxygène date du 2 décembre 1877; la pression avait été amenée à 500 atmosphères, et la température, d'abord fixée à une trentaine de degrés négatifs, avait été tout à coup abaissée de 200° environ par la détente du gaz. M. Pictet faisait de son côté la même expérience à Genève sur l'oxygène et l'hydrogène. Enfin, on doit signaler les résultats annoncés en avril 1885 par MM. Wroblewski et Olszewski, de Cracovie, qui paraissent être les premiers qui aient ramené l'oxygène et l'azote à l'état complètement liquide, par l'application des méthodes créées par M. Cailletet. On peut consulter sur l'historique de la question un article de M. Jamin dans la *Revue des Deux Mondes* du 1^{er} septembre 1884, intitulé: *Comment l'air a été liquéfié*.

SUR L'AVIATION ET LA DIRECTION DES AÉROSTATS (§ 181).

256. L'étude mécanique du vol des oiseaux et des insectes a été entreprise par M. Marey, non seulement au point de vue dynamique du travail dépensé et du travail produit, mais encore au point de vue cinématique des mouvements des ailes.

Nous ne pouvons que renvoyer aux publications du célèbre observateur. Dans un autre ordre d'idées, on a cherché et créé des appareils dont les uns réalisent le mouvement de l'aile de l'oiseau ou de l'insecte, dont les autres, connus sous le nom d'*hélicoptère*, se maintiennent un certain temps en l'air à l'aide de la rotation rapide d'un hélicoïde à axe vertical. Les actions dynamiques développées par le mouvement d'une surface solide dans l'air supposé immobile croissent au moins comme le carré des vitesses relatives; aussi l'équilibre du système dans l'air, malgré son poids qui le sollicite à tomber, suppose ou de grandes surfaces de contact, ou une vitesse angulaire très considérable.

Il semble qu'on soit aujourd'hui sur la voie de la solution du problème de la direction des aérostats, qui a défié si longtemps les efforts des inventeurs. Les premiers essais réellement pratiques sont dus à M. Dupuy de Lôme et remontent à l'année 1871. Le mouvement des hélices était produit par des hommes placés dans la nacelle. Depuis, l'emploi des moteurs électriques, qui possèdent une grande puissance sous un faible poids, a permis de mettre en mouvement les hélices propulsives sans surcharger sensiblement l'appareil. Le ballon lui-même reçoit la forme d'un fuseau pour faciliter son déplacement longitudinal et restreindre sa dérive latérale dans l'air environnant. Ce type de ballon dirigeable, récemment créé par MM. Renard et Krebs, paraît avoir bien réussi, au moins lorsque le vent est modéré.

SUR LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR.

257. La théorie mécanique de la chaleur date à proprement parler de l'année 1842 et de la publication du mémoire de Mayer. Mais l'idée mère de cette théorie, à savoir : l'identité de la chaleur et des mouvements insensibles des particules qui composent le corps chaud, avait été longtemps aupara-

vant soupçonnée par quelques philosophes. Huygens paraît être un des premiers qui aient fait ce rapprochement entre deux ordres de phénomènes jusqu'alors considérés comme distincts. Une expérience vulgaire lui en fournit l'occasion. Il observe qu'une masse de sable, versée en tas dans un vase, se tient en équilibre sous un talus incliné à l'horizon, mais que, si l'on agite légèrement le vase, en lui donnant de petits coups répétés, le tas de sable change graduellement de forme et finit par prendre une forme plane et horizontale. Qu'au lieu de sable, on verse dans le vase un liquide tel que l'eau, la surface libre s'établit immédiatement suivant un plan de niveau : cette propriété des liquides est, suivant Huygens, l'effet de la chaleur qu'ils contiennent, et qui communique à leurs molécules une agitation analogue à celle qu'on donne artificiellement au sable dans la première expérience.

D'après Locke, si la chaleur constitue pour nous une sensation particulière, celle du chaud ou du froid, elle n'est autre chose dans le corps chaud qu'une agitation très vive de ses particules infiniment petites.

On trouvera dans une lettre de M. Joule au *Philosophical Magazine*, reproduite dans l'ouvrage de John Tyndall sur *la chaleur considérée comme un mode de mouvement*, des extraits de Rumford (1798), de Davy (1812), de Marc Séguin (1839), où se trouve exprimée sous diverses formes l'identification de la chaleur avec le mouvement intime des dernières particules de la matière.

Sadi Carnot, le fils aîné du célèbre géomètre Carnot, essaya le premier d'appliquer la théorie de la chaleur, telle qu'on la connaissait de son temps, à l'étude du travail des machines thermiques, et ouvrit ainsi la voie à la thermodynamique moderne. C'est en 1824 qu'il fit paraître ses *Réflexions sur la puissance motrice du feu*¹, où la chaleur est encore considérée, suivant les anciennes idées, comme un fluide particulier dont les corps seraient dépositaires. L'auteur compare le travail

1. Réédité en 1878. Paris, Gauthier-Villars.

d'une machine thermique, ou, comme on disait alors, d'une *pompe à feu*, au travail d'un récepteur hydraulique. De même que, dans celui-ci, le travail est fourni par la chute d'un certain poids d'eau tombant d'une hauteur déterminée, le travail recueilli dans une machine à vapeur serait, d'après Sadi Carnot, le résultat de la chute d'une certaine quantité de fluide calorifique, tombant de la température de la chaudière à la température du condenseur. La température est, dans cette théorie, la *tension* du fluide calorifique assimilé à un gaz, ou sa *cote de niveau* si on l'assimile à un liquide pesant, et la quantité de fluide qui traverse la machine se conserve intégralement dans la chute. Les travaux de Sadi Carnot, peu compris par ses contemporains, ne furent développés que plus tard et mis en pleine lumière par les études de Clapeyron ¹.

Le *principe fondamental* de la théorie nouvelle, qui renverse l'hypothèse d'un fluide calorifique et consacre les idées des auteurs cités plus haut, est dû à un médecin allemand, Mayer, de Heilbronn. Il publia en 1842, dans les *Annales de Liebig*, le premier mémoire où se trouve posé le principe de l'équivalence entre la chaleur et le travail mécanique, qui fait la base de la doctrine. Presque à la même époque M. Joule, de Manchester, commençait les expériences qui l'ont conduit à la détermination effective de l'*équivalent mécanique*. Nous citerons entre autres l'expérience du tourniquet hydraulique, qui consiste essentiellement à agiter un liquide en lui communiquant une quantité de travail déterminée, et à comparer à cette quantité de travail la quantité de chaleur gagnée par le liquide lorsqu'il a perdu tout mouvement apparent. A partir de ces premières recherches de Mayer et de Joule, la nouvelle théorie fait de grands progrès par les travaux de MM. Thomson, Rankine, Clausius, Helmholtz, Hirn... ; les recherches expérimentales de Regnault lui fournissent des données positives. M. Clausius pose le *second principe* de la théorie méca-

1. *Journal de l'École polytechnique*, 1854.

nique ¹, et conserve les conclusions de Sadi Carnot, interprétées d'une manière différente depuis que l'hypothèse du fluide calorifique est abandonnée. Ce second principe, sur lequel reposent toute la théorie des vapeurs et l'application de la thermodynamique aux machines, ne paraît pas aussi général que le principe de l'équivalence ; la démonstration qu'on en donne est fondée sur un *postulatum* (§ 148), qui n'est pas évident *a priori* et qui, semble-t-il, peut dans certains cas devenir inexact. Il consiste à admettre que *la chaleur ne peut passer d'elle-même, sans dépense de travail, d'un corps plus froid à un corps plus chaud*. Cette proposition paraît en défaut dans les phénomènes de la chaleur rayonnante, les gains de chaleur des corps en présence dépendant, non seulement de leurs températures, mais encore d'autres éléments, tels que le pouvoir émissif et le pouvoir absorbant de chacun d'eux. Si les corps sont en mouvement, le *postulatum* ne semble admissible qu'en supposant au rayonnement calorifique une vitesse infinie ².

D'après Carnot, le travail produit par une machine thermique est entièrement défini quand on donne le *flux de chaleur*, ou la quantité de calorifique qui traverse la machine, et la *chute de température* que cette quantité subit ; il est indépendant de la nature du corps qui sert de substratum à la chaleur. Le principe de M. Clausius conserve la plus grande partie de cet énoncé ; on peut le formuler comme il suit : *Lorsqu'un corps suit un cycle de Carnot entre deux températures déterminées, le travail produit est une fraction de la quantité de chaleur empruntée à la source la plus chaude, et cette fraction dépend seulement des températures extrêmes, quelle que soit la nature du corps soumis à l'expérience*.

M. Maurice Lévy a montré récemment qu'on pouvait rattacher l'un à l'autre les deux principes, en les faisant dériver

1. *Annales de Poggendorf*, année 1850 et suivantes.

2. Voir sur ce sujet une note de M. H. T. Eddy, professeur à l'université de Cincinnati (Ohio) : « Radiant heat, an exception to the second law of thermodynamics. » (*Scientific proceedings of the Ohio Mechanic Institute*, July 1882)

d'un postulat plus général, qu'il énonce de la manière suivante : *Pour un corps quelconque, les lignes adiabatiques et les lignes isothermes sont susceptibles de diviser le plan en parallélogrammes infiniment petits équivalents, ou, ce qui revient au même, en quadrilatères curvilignes d'égale superficie. La démonstration de la proposition, considérée comme une conséquence des deux principes, résulte de l'équation de Clausius (§ 171),*

$$dQ = \theta dS,$$

dans laquelle dQ est la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer le corps de l'état thermique (p, V, τ) à l'état thermique infiniment voisin $(p + dp, V + dV, \tau + d\tau)$, θ la température absolue (§ 150), et dS la différentielle qui, égalée à zéro, définit les lignes adiabatiques. Nous renverrons pour cette démonstration et la démonstration de la réciproque, c'est-à-dire la démonstration des deux principes en prenant la nouvelle proposition comme base du raisonnement, aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 5 et du 12 mars 1877; on y trouvera les applications de la nouvelle loi, d'où l'on peut déduire les équations de la théorie de la chaleur et les *fonctions caractéristiques* de M. Massieu (§ 172).

La nouvelle proposition exprime sous forme géométrique et absolue une loi naturelle qui, comme toutes les lois connues, n'est probablement pas rigoureuse et comporte des exceptions. Aussi n'est-il pas surprenant que le théorème de M. Maurice Lévy ait soulevé des objections nombreuses, pour lesquelles nous renverrons également aux *Comptes rendus*.

Signalons pour finir deux *desiderata* de la théorie mécanique de la chaleur :

1° Elle laisse de côté tous les phénomènes de la chaleur rayonnante;

2° Elle n'a pas encore donné une définition bien claire de la température, en dehors des hypothèses ou des abstractions analytiques.

SUR LES PERFECTIONNEMENTS RÉCENTS DES MACHINES A VAPEUR.

258. Nous avons décrit, dans le chapitre III du VII^e livre, les principaux types de machines à vapeur, et exposé un certain nombre d'améliorations, dues en grande partie à James Watt, qui ont été apportées au type primitif. Nous donnerons dans cette note quelques aperçus des perfectionnements qui y ont été plus récemment introduits, en prenant pour guide le *Rapport* de M. Hirsch *sur les machines et les appareils de la Mécanique générale à l'Exposition universelle de 1878* (Groupe VI, classe 54).

La tendance générale des constructeurs de machines à vapeur est d'accroître la température et la pression de la vapeur dans la chaudière, et d'augmenter par là la chute de chaleur que subit le fluide entre l'admission et la condensation. Cette tendance est tout à fait justifiée par la théorie mécanique de la chaleur. Mais l'augmentation de la pression entraîne des difficultés et des inconvénients pratiques; elle compromet, par exemple, la résistance des enveloppes métalliques, qui perdent de leur ténacité à mesure que la température s'élève. Aussi, en pratique, ne dépasse-t-on pas ordinairement 8 à 10 atmosphères de pression dans les locomotives, 4 à 5 dans les machines fixes, 6 à 8 dans les machines locomobiles ou sans condensation. Les constructeurs américains vont au delà de ces limites.

En même temps qu'on a augmenté la meilleure utilisation de la chaleur produite en élevant la température de la chaudière, on a diminué la quantité de combustible nécessaire pour réaliser un travail déterminé. D'abord fixée à 4 ou 5 kilogrammes de houille par heure et par cheval, la consommation de charbon s'est abaissée à 2 kilos ou 2 kilos 1/2, dans les machines où l'on faisait usage d'une détente prolongée; de nouveaux perfectionnements de détail, imaginés par M. Farcot, ont réduit la consommation à 1 kilogramme de houille

par heure et par cheval ; on est descendu depuis à 900 grammes. Si l'on observe qu'un kilogramme de bonne houille dégage par une combustion complète environ 8000 calories, qui équivalent à 3 400 000 kilogrammètres, tandis que le travail d'un cheval-vapeur par heure représente 75 kilogrammètres multipliés par le nombre, 3600, des secondes contenues dans l'heure, c'est-à-dire 270 000 kilogrammètres, on voit que la machine à vapeur de nos jours n'utilise guère que la fraction $\frac{270\ 000}{3\ 400\ 000}$, soit les $\frac{8}{100}$ de la chaleur produite dans le foyer.

Il est permis d'espérer de nouveaux perfectionnements. On y arrivera en simplifiant l'accès de la vapeur de la chaudière au cylindre, par la suppression d'intermédiaires qui prélèvent inutilement une certaine quantité de chaleur, et en augmentant autant que possible la température du fluide moteur au moment où il pénètre dans le cylindre.

239. Les *chaudières* sont classées par M. Hirsch en cinq catégories :

1° Les chaudières à foyer extérieur ; ce sont celles qui comportent le plus grand volume du réservoir contenant l'eau à vaporiser ;

2° Les chaudières à foyer extérieur ;

3° Les chaudières tubulaires avec parcours de flammes dans l'intérieur des tubes ;

4° Les chaudières tubulaires avec parcours de flammes à l'extérieur des tubes ;

5° Chaudières mixtes et diverses.

Les chaudières des locomotives appartiennent à la 3^e classe. De la 1^{re} classe à la 4^e, le volume du réservoir d'eau à vaporiser va en décroissant. En même temps la rapidité de la vaporisation augmente. Les chaudières sont généralement formées d'un ou plusieurs cylindres horizontaux ; on en voit aussi quelques-unes qui sont verticales, et d'autres enfin qui sont inclinées : telle est la *chaudière de la maison Sulzer*, de Winterthur (Suisse), laquelle appartient à la 3^e catégorie. Parmi les chaudières de la 5^e classe on peut citer la *chaudière*

Belleville, où le réservoir est formé de la juxtaposition d'un certain nombre de tubes s'élevant en pente douce, à la façon d'une rampe en lacet, à travers la chambre où circulent librement les gaz produits par la combustion sur le foyer. Plusieurs chaudières sont à *foyer démontable*. Le cylindre du réservoir entoure alors un cylindre intérieur dans lequel se fait la combustion, et d'où la grille peut être retirée à volonté.

Dans les chaudières Field, qui appartiennent à la 4^e catégorie, les tubes sont verticaux, mais emboîtés deux par deux l'un dans l'autre ; le tube extérieur est fermé par le bas, de manière à forcer l'eau à circuler dans la couronne comprise entre les deux tubes concentriques : elle descend par le tube intérieur et remonte sous une faible épaisseur par la couronne annulaire, où elle subit l'action extérieure de la chaleur. La circulation rapide de l'eau accroît le pouvoir calorifique du foyer et prévient les dépôts dans les tubes ; enfin les tubes ne sont tenus que par leur extrémité supérieure et se dilatent librement sans fatiguer leurs assemblages.

Mentionnons en passant un problème intéressant, dont la solution complète dépendrait de la théorie des nombres, et qui se rattache à la question de l'établissement d'une chaudière tubulaire à contour circulaire extérieur : *Étant donné un cercle de rayon R et un autre cercle de rayon r plus petit, déterminer le nombre maximum de cercles de rayon r qu'on peut placer simultanément dans le cercle de rayon R, en laissant les petits cercles extérieurs les uns aux autres.*

240. Venons à l'examen sommaire de quelques types de machines modernes. Au point de vue de la distribution, les constructeurs ont cherché généralement à satisfaire à trois conditions qu'on peut formuler ainsi :

1° Réduire la période d'admission et prolonger la période de détente ;

2° Éviter les *étirages de vapeur*, en coupant brusquement l'arrivée du fluide à la fin de l'admission ;

3° Réduire au strict minimum les espaces nuisibles.

Dans la machine de Watt, la distribution est faite à l'aide

d'un tiroir, et généralement c'est un tiroir à coquille, qui découvre alternativement les deux lumières ouvertes à l'extrémité du cylindre, et les met en communication, soit avec la chaudière, soit avec l'échappement. Les recouvrements ajoutés au tiroir à coquille produisent la détente. Mais l'espace nuisible est accru de tout le volume des conduits qui aboutissent aux lumières, et la fermeture graduelle des lumières par le jeu du tiroir produit à chaque tour plusieurs étirages de vapeur. Les principaux perfectionnements proposés pour la distribution comprennent :

Les tiroirs superposés, dans les types déjà décrits de Mayer et de Farcot; ils permettent, comme on l'a vu, de faire varier la détente (§§ 207 et 208);

L'emploi de quatre lumières au lieu de deux, savoir : deux lumières, l'une pour l'admission, l'autre pour l'échappement, sur chaque face du piston;

La substitution au tiroir, doué d'un mouvement alternatif, de robinets tournants, ou de soupapes qui découvrent de larges orifices pour un faible déplacement; telles sont les soupapes des machines de Cornouailles.

La machine américaine de George Corliss est peut-être celle qui satisfait de la manière la plus remarquable aux conditions exposées plus haut. Le type résulte essentiellement de l'emploi des soupapes de Cornouailles, à raison de quatre par cylindre, du *distributeur ou robinet tournant* de Maudslay pour donner la vapeur à l'admission, et enfin de la liaison de l'appareil distributeur avec le régulateur à force centrifuge de la machine, de manière que la machine se règle d'elle-même à une allure uniforme.

Ce type de machine, qui a eu un très grand succès à l'exposition universelle de 1867, a été d'abord en France l'objet d'un certain engouement. Depuis on est revenu à des idées plus conformes aux traditions de Watt et de ses successeurs immédiats. La prolongation de la détente, quand on l'exagère, n'a pas l'influence heureuse qu'on lui attribuait, à cause du refroidissement subi par le fluide. Les étirages de

vapeur n'ont pas à beaucoup près l'importance que leur donne le programme indiqué tout à l'heure. Enfin les espaces dits *nuisibles* ne justifient pas toujours leur nom, et nous avons vu que, dans certains cas, ils sont tout à fait indifférents au travail recueilli par la machine (§ 212). En somme, si l'on compare les machines du type Corliss aux machines plus élémentaires où l'on fait usage du tiroir à coquille mené par un excentrique circulaire, on reconnaît sans peine que les secondes, bien que plus simples et plus rustiques, fournissent sensiblement le même travail que les premières. La comparaison est surtout concluante quand on y comprend les locomotives, où la distribution par tiroir et coulisse, tout irrégulière qu'elle soit, n'empêche pas la machine de fournir un rendement excellent, et n'a pu être remplacée par aucun autre système.

Aujourd'hui, en France, on est à peu près d'accord pour s'en tenir à la distribution par tiroir, et l'on cherche les améliorations de la machine, d'abord dans l'emploi de la *chemise de vapeur*, déjà imaginée par Watt, pour maintenir la température du fluide pendant qu'il se détend, puis dans l'adoption du système de *détente par échelons*, dont le système de Woolf, à deux cylindres, est le premier exemple pratique. Récemment on a créé un nouveau type, nommé *système Compound*, qui est surtout employé dans les machines de la marine, et qui permet de réaliser de notables économies de combustible. Le système Compound comprend, comme celui de Woolf, deux cylindres, un petit et un grand, que la vapeur traverse successivement. Mais entre le petit et le grand se trouve un réservoir intermédiaire, maintenu à une pression sensiblement constante, où se font l'échappement du petit cylindre et l'alimentation du grand. Des chemises de vapeur chaude enveloppent à la fois les deux cylindres et le réservoir intermédiaire. Les mouvements des deux pistons ne sont pas forcément communs, comme dans la machine de Woolf, et l'on peut s'arranger, par exemple, pour que, quand l'un des pistons arrive au bout de sa course et que la bielle correspondante

moyen de ce mécanisme la manivelle AB suivra toujours les mouvements de la tige FP, qui peut être déplacée sans effort sensible. Cette tige FP est appelée la *rêne* de l'appareil. On la fait tourner autour du point F, mais ce point est lui-même mobile, de sorte qu'en réalité, abstraction faite des petites oscillations dues à l'inertie des pièces, c'est autour du point A que la rêne paraît tourner, accompagnée dans son mouvement par la manivelle AB.

MACHINE OTTO (§ 214).

242. Nous avons décrit le *moteur Lenoir*, qui est une machine à gaz, où l'inflammation du mélange de gaz et d'air est obtenue à l'aide de l'étincelle électrique. M. Otto, de Deutz, a exposé en 1878 une nouvelle machine à gaz qui se distingue par le petit volume qu'elle occupe et le grand travail qu'elle permet de produire. Cette machine comprend un cylindre horizontal à simple effet; le piston qui y est contenu commande par une bielle un arbre tournant, marchant à grande vitesse, et portant un volant destiné à corriger l'irrégularité du travail moteur. Cette irrégularité est assez notable. En effet le cycle complet du jeu de la machine comprend, non pas un tour de l'arbre moteur, correspondant à une allée et une venue du piston, mais bien deux tours consécutifs, ou quatre excursions simples, sur lesquelles une seule produit le travail moteur. Dans une première excursion directe, le déplacement du piston n'a d'autre objet que d'aspirer dans le cylindre le mélange explosif formé d'air et de gaz d'éclairage; l'excursion rétrograde qui y succède comprime le mélange, et le rassemble dans le fond du cylindre; l'explosion est produite par un bec fixe d'inflammation, au moment où commence la seconde course directe du piston, et cette course s'accomplit sous la poussée des gaz de la combustion, portés à une haute température; enfin la quatrième excursion du

piston, ou la seconde course rétrograde, correspond à l'échappement de ces gaz brûlés, qui s'écoulent dans l'air extérieur. La distribution du mélange gazeux se fait par le fond du cylindre, sur lequel se meut un tiroir, commandé par la machine elle-même. La soupape d'échappement est sur le côté du cylindre; elle est soulevée au moment opportun par un excentrique à onde. La machine marche à 160 ou 180 tours par minute. Le régulateur à force centrifuge qu'elle commande agit sur la distribution du gaz, pour en diminuer l'admission lorsque la vitesse s'accélère. Une circulation d'eau froide autour du cylindre prépare le refroidissement des gaz échauffés par l'explosion, et facilite l'échappement. La consommation de gaz n'atteint pas 1 mètre cube par heure et par cheval pour les grands modèles, ce qui correspondrait à environ 660 grammes de bonne houille.

De son côté, M. Lenoir vient de créer un nouveau type de moteur, qu'il appelle *moteur agricole*, et dans lequel il enflamme, à l'aide de l'étincelle électrique, un mélange d'air et de carbure d'hydrogène. Ce mélange est préparé dans la machine elle-même, par le passage de l'air atmosphérique sur des éponges mouillées du liquide combustible. Le mélange gazeux s'enflamme dans une chambre spéciale, ouverte sur le cylindre, et non dans le cylindre lui-même, ce qui rend inutile de le refroidir par une circulation constante d'eau à basse température, qui a l'inconvénient de détruire une partie de la chaleur produite par l'inflammation. (Voir *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, séance du 27 mars 1885.)

CONTRE-VAPEUR.

243. La manœuvre de la *contre-vapeur* consiste essentiellement à renverser le jeu du tiroir d'une locomotive, en le faisant mener par l'excentrique de la marche en arrière, pen-

dant que la locomotive continue à marcher en avant. Les quatre périodes dans lesquelles se décompose le tour de roue subsistent encore pendant la contre-vapeur, mais l'effet produit est tout différent. A la période d'échappement de la marche directe correspond la période d'aspiration des gaz de la boîte à fumée; ces gaz, introduits dans le cylindre, sont comprimés par le mouvement du piston, et cette période de compression correspond à la période de détente; bientôt la lumière d'admission s'ouvre, mais, au lieu de l'admission de

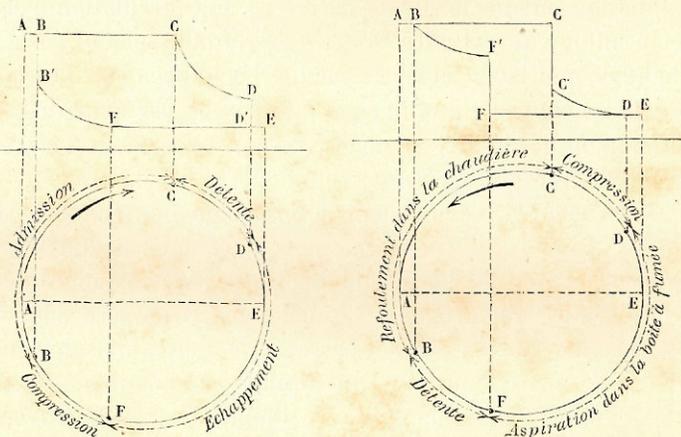


Fig. 150.

la vapeur, les gaz sont refoulés dans la chaudière; enfin à la période de compression dans les espaces libres de la marche directe correspond dans la contre-vapeur une période de détente.

Il résulte de là que la contre-vapeur produit un travail négatif, qui tend à ralentir la marche du train, ou à l'arrêter même si l'on en prolonge l'emploi. Ce travail négatif est toujours moindre en valeur absolue que le travail positif qui serait fourni par le jeu régulier de la machine, ainsi qu'il résulte des diagrammes ci-dessus (fig. 150), que nous empruntons au *Cours de machines à vapeur* de M. Hirsch.

La figure de gauche est le diagramme du travail moteur

fourni par la vapeur en un tour de roue, dans la *marche en arrière*. L'admission commence par anticipation en B et se prolonge jusqu'en C; la détente s'opère de C en D, l'échappement de D en F, avec anticipation de D en E; enfin FB représente la compression dans les espaces libres. Les variations brusques de pression figurées en B'B et en DD' résultent, l'une de l'ouverture de la lumière d'admission, l'autre de l'ouverture de l'échappement. L'aire BCDD'FB' mesure le travail produit.

Dans la *marche en avant à contre-vapeur*, le mouvement du piston et de l'arbre de la machine est inverse, mais le jeu des tiroirs est identique à celui de la *marche en arrière*. Seulement il y a échange entre les périodes. Ainsi la période FD correspond à l'aspiration dans la boîte à fumée; la période suivante DC est celle de la compression des gaz aspirés; puis vient la période CAB du refoulement dans la chaudière, et enfin la période BF de détente. Le diagramme comporte encore deux droites horizontales FE, AC, lorsque le cylindre communique librement avec la chaudière ou avec la condensation; deux courbes DC' et BF', qui correspondent, la première à la compression du mélange gazeux dans le cylindre, la seconde à la détente après refoulement dans la chaudière; et deux droites verticales C'C, F'F, qui représentent les variations brusques de la pression, lorsque le mélange gazeux vient à communiquer librement avec la chaudière et avec l'échappement. L'aire DC'CBF'FD mesure le travail négatif développé dans le tour de roue; or il est facile de voir que cette aire est beaucoup plus petite que l'aire correspondante du diagramme voisin, bien que les pressions soient les mêmes, et le jeu du tiroir identique.

La contre-vapeur a été longtemps une manœuvre dangereuse, que les mécaniciens ne tentaient qu'en cas de détresse, pour arrêter le plus vite possible un train menacé de collision. Il fallait, pour l'opérer, manœuvrer le levier de changement de marche en plein mouvement direct de la machine, opération très scabreuse; on y a remédié en substituant au levier

un appareil à vis, dont les déplacements ne menacent pas les mécaniciens, et s'effectuent d'une manière beaucoup plus douce. Le renversement de la vapeur avait de plus l'inconvénient d'introduire dans le cylindre des gaz brûlants et chargés de poussières de charbon, puisés dans la boîte à fumée; ces gaz brûlaient les garnitures et détérioraient les surfaces du piston et du cylindre. Le *tube d'inversion*, imaginé par Le Chatelier, et appliqué pour la première fois par M. Ricourt sur le chemin de fer du Nord de l'Espagne, a corrigé cet inconvénient d'une manière très heureuse. Ce tube prend à la chaudière un mélange d'eau chaude et de vapeur, dont le mécanicien règle à volonté la proportion, et l'amène au bas de la buse d'échappement; il en résulte que, quand on renverse la vapeur, l'aspiration se fait dans ce mélange de vapeur et d'eau, qui forme matelas entre le cylindre et la boîte à fumée, et qui empêche l'introduction des gaz; la vaporisation de l'eau liquide absorbe une grande quantité de chaleur, tend à réduire l'échauffement du cylindre et prévient la destruction des garnitures. Si l'apport de vapeur et d'eau est trop considérable, l'excès s'échappe sous forme de vapeur par la cheminée, et retombe en pluie sur la machine. On dit alors que la machine *prime*. En définitive, le tube d'inversion joint à l'appareil à vis a fait de la contre-vapeur une manœuvre tout à fait courante, sans danger, et dont on se sert à la descente des pentes et pour les ralentissements réguliers. La marche à contre-vapeur, produisant la compression d'un mélange de vapeur et d'eau finalement refoulé dans la chaudière, y emmagasine en réalité une nouvelle quantité de chaleur. Par contre, elle entraîne une certaine déperdition de vapeur par l'excès qui s'échappe librement par la cheminée. Si on la prolongeait indéfiniment, on arriverait à faire tourner les roues en sens inverse du mouvement du train, ce qui tend à accroître le travail du frottement sur les rails en augmentant l'arc de glissement, mais ce qui peut tendre en même temps à réduire le coefficient du frottement, qui est fonction de la vitesse de glissement, de sorte qu'on ne sait

pas bien, en définitive, dans quel sens varierait le travail négatif produit.

NOUVELLES EXPÉRIENCES SUR LE FROTTEMENT ¹.

244. Nous avons déjà indiqué (t. III, § 367) que le coefficient de frottement f n'est pas, comme on l'avait cru d'abord, indépendant de la vitesse de glissement v . De nouvelles expériences faites par M. Marcel Deprez mettent en évidence ces variations, et font pressentir la loi qui lie les deux variables f et v .

Un corps tournant, formé par l'anneau mobile de l'une des *machines réceptrices* construites pour l'expérience de Creil sur le transport de l'énergie, est lancé à une vitesse déterminée, de 600 tours par minute. Puis on laisse la vitesse décroître, sans intervention de travail moteur, le corps tournant ne subissant que le travail négatif du frottement des tourillons, abstraction faite de la résistance de l'air, qui est nécessairement très faible. De 30 en 30 secondes, on détermine le nombre des tours effectués par le corps depuis le départ. On procède ainsi jusqu'à l'arrêt, qui, dans la première expérience, s'est produit seulement au bout de 1154 secondes, ou de 19 minutes 14 secondes.

On dresse de cette manière un tableau qui donne les arcs décrits, exprimés par les nombres de tours, en regard des valeurs correspondantes du temps, de demi-minute en demi-minute. Si l'on forme les différences premières des nombres de tours, on aura une nouvelle série de nombres, qui exprimeront les espaces angulaires décrits en temps égaux; ces nombres sont donc sensiblement proportionnels aux valeurs successives de la vitesse angulaire; de même les différences secondes seront approximativement proportionnelles

1. *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 17 novembre 1884.

aux accélérations angulaires, lesquelles sont proportionnelles au moment de la résistance, et par suite au coefficient f du frottement.

En procédant ainsi, on voit décroître graduellement les accélérations, de 15 au commencement de l'expérience, à 5 au bout de 800 à 850 secondes; puis elles se remettent à augmenter, et passent successivement de 4 à 9 pendant la dernière période de l'expérience, c'est-à-dire de 900 secondes à 1154 secondes. Le coefficient f varie proportionnellement aux accélérations, et par conséquent il commence par décroître avec la vitesse; il atteint son minimum par une vitesse déterminée, puis croît à partir de ce minimum à mesure que la vitesse diminue.

Dans la première expérience de M. Marcel Deprez le coefficient f a été déterminé: il est égal à 0,025 lorsque la vitesse angulaire est de 550 tours par minute; il décroît jusqu'à 0,005 lorsque la vitesse angulaire s'abaisse à 145 tours: c'est sa valeur minimum. La valeur moyenne ressort à 0,015. Le rayon des tourillons était de 0^m,06, de sorte que les vitesses angulaires de 550 tours et de 145 tours correspondent à des vitesses linéaires de 172^m,79 et de 45^m,55 par seconde.

Cette dernière vitesse est déjà supérieure aux vitesses usuelles qui se rencontrent dans les applications de la mécanique, d'où l'on peut inférer qu'en général le coefficient de frottement va en diminuant à mesure que la vitesse augmente: en sous-entendant toutefois que cette diminution se change en augmentation, si l'on dépasse une limite de vitesse qui doit dépendre des corps en contact et des enduits interposés.

Dans une expérience de M. Deprez, la machine, lancée à 600 tours, a fait 4700 tours jusqu'à l'arrêt. Dans une autre, l'arrêt ne s'est produit qu'après 6000 tours, et les résultats ont été encore plus nets que dans la première.

SUR L'EXPÉRIENCE DE M. ATHANASE DUPRÉ
(§ 189).

245. On a obtenu pour la loi de répartition des pressions dans le tube OA, quand il tourne uniformément avec une vitesse angulaire ω autour du point O, l'équation

$$p = Ce^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}}.$$

La constante C est la pression de l'air dans le tube pour $r = 0$, c'est-à-dire au point O.

On peut remarquer l'analogie du problème avec celui de la répartition des pressions de l'air dans un puits vertical, ouvert jusqu'au centre de la terre, en supposant le globe terrestre sphérique et homogène, et par conséquent l'attraction proportionnelle à la distance au centre. L'équation différentielle de la distribution des pressions dans ce puits est en effet

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{ka} r dr;$$

elle a pour intégrale

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{2ka}(r^2 - a^2)},$$

équation où a est le rayon du globe, g la pesanteur à sa surface, p_0 la pression atmosphérique, et p la pression à la distance r du centre. On voit que les deux formules rentrent analytiquement l'une dans l'autre si l'on pose $a^2 - r^2 = r'^2$,

$\sqrt{\frac{g}{a}} = \omega$, et $p_0 = C$, la constante k étant conservée dans les deux problèmes.

Proposons-nous de déterminer la constante C par la condition que la masse d'air contenue dans le tube reste invariable.

Considérons un élément de masse dm compris dans le

tube entre les plans transversaux menés aux distances r et $r + dr$ du point O.

Il désignant le poids spécifique de l'air, sous la pression p qu'il subit dans cette région, et Ω étant la section du tube, on a

$$dm = \frac{\Pi}{g} \Omega dr.$$

Mais $p = k\rho = k \frac{\Pi}{g}$; donc $\frac{\Pi}{g} = \frac{p}{k}$ et l'on a

$$dm = \frac{p}{k} \Omega dr.$$

Remplaçons p par sa valeur en fonction de r , c'est-à-dire par $Ce^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}}$; il viendra

$$dm = \frac{C\Omega}{k} e^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}} dr,$$

et, par suite, la masse totale contenue dans le tube entre le point O et le fond A est l'intégrale

$$m = \frac{C\Omega}{k} \int_0^a e^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}} dr,$$

où a désigne la longueur OA.

Lorsque le tube était en repos, cette même masse occupait le même espace, mais sous une pression p_0 , partout la même, et que nous supposons donnée. La densité correspondante est $\frac{p_0}{k}$, et la masse totale est par conséquent

$$m = \frac{p_0}{k} \Omega a.$$

L'égalité de ces deux masses définit la constante C; on a en effet

$$\frac{p_0}{k} \Omega a = \frac{C\Omega}{k} \int_0^a e^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}} dr,$$

d'où l'on tire

$$C = p_0 \frac{a}{\int_0^a e^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}} dr}.$$

L'intégrale indiquée ne peut s'obtenir que par le développement en série. On a d'abord

$$e^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}} = 1 + \frac{\omega^2 r^2}{2k} + \frac{1}{1.2} \frac{\omega^4 r^4}{4k^2} + \frac{1}{1.2.3} \frac{\omega^6 r^6}{8k^3} + \dots,$$

et ensuite, en multipliant par dr , et intégrant

$$\int^r e^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}} dr = r + \frac{\omega^2 r^3}{2k \cdot 3} + \frac{1}{1.2} \frac{\omega^4 r^5}{4k^2 \cdot 5} + \frac{1}{1.2.3} \frac{\omega^6 r^7}{8k^3 \cdot 7} + \dots,$$

série qui s'annule pour $r=0$, et qui est convergente pour toute valeur de r ; car le rapport d'un terme au précédent,

$$\frac{1}{1.2.3 \dots n} \frac{\omega^{2n} r^{2n+1}}{2^n k^n (2n+1)} \div \frac{1}{1.2.3 \dots (n-1)} \frac{\omega^{2(n-1)} r^{2(n-1)}}{2^{n-1} k^{n-1} 2(n-1)} = \frac{2n-1}{(2n+1)n} \frac{\omega^2}{2k} r^2,$$

tend vers une limite moindre que l'unité, quelque grand que soit r , pour une valeur suffisamment grande de n .

On fera donc $r = a$ dans la série, et on pourra trouver la valeur de la constante C.

Il existe un point du tube, situé à la distance r_0 , pour lequel la pression est p_0 , comme lorsque le tube reste immobile. La distance r_0 est donnée par l'équation

$$p_0 = Ce^{\frac{\omega^2 r_0^2}{2k}},$$

et comme

$$C = p_0 \frac{a}{\int_0^a e^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}} dr},$$

il en résulte l'équation

$$e^{\frac{\omega^2 r_0^2}{2k}} = \frac{\int_0^a e^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}} dr}{a}$$

pour déterminer r_0 . Cette équation exprime simplement que le premier membre est l'ordonnée moyenne de la courbe $y = e^{\frac{\omega^2 r^2}{2k}}$ entre les limites $r=0$ et $r=a$; ce qui est évident

a priori, puisque p_0 reste la pression moyenne du gaz, dont la masse reste la même dans un même volume total.

SUR LA POUDRE ET LES CORPS EXPLOSIFS (§ 216 ET SUIVANTS).

246. Le dosage de la poudre varie notablement d'un type à l'autre, suivant l'usage auquel il est destiné. Ainsi la poudre de guerre exige un *potentiel* plus grand que la poudre de chasse, qui, de son côté, demande une inflammabilité plus rapide. De plus, la conservation de la poudre exige qu'on y emploie un léger excès de soufre, bien que cet excès nuise à la vivacité de la déflagration. Nous renverrons pour les divers dosages adoptés dans les différents pays au *Traité de la poudre, des explosifs et de la pyrotechnie*, de MM. J. Upmann et E. Van Meyer, traduit de l'allemand par M. E. Desortiaux, pages 207 et suiv. On trouvera dans le même ouvrage, section III, chap. III, l'exposé des propriétés mécaniques de la poudre, et section IV, la description des méthodes et des appareils qui servent à en mesurer les effets balistiques et les pressions. Une note insérée page 508, due à M. E. Saarru, résume les *formules pratiques des vitesses et des pressions dans les armes*, suivant les théories nouvelles du savant ingénieur.

Nous nous bornerons à reproduire ici la formule qui donne la vitesse initiale du projectile. Si l'on appelle

- c le calibre, ou diamètre de l'âme de la pièce,
- u la *longueur de parcours* du projectile, ou distance entre le culot du projectile dans la position de chargement et la bouche de la pièce,

p le poids du projectile,

ω le poids de la charge de poudre,

Δ la densité de chargement, ou rapport du poids de la charge au volume de la chambre à poudre,

α et β deux coefficients, dits *caractéristiques*, qui dépendent de la nature de la poudre employée,

A et B deux constantes indépendantes de toutes les conditions du tir, et qui ont pour valeur

$$\begin{aligned} A &= 2,064, \\ B &= 0,00765, \end{aligned}$$

les unités adoptées étant le décimètre, le kilogramme et la seconde, on aura pour la vitesse v du projectile

$$v = \Delta z (\pi u)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{\Delta}{\rho c} \right)^{\frac{1}{4}} \left[1 - B\beta \left(\frac{\rho u}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Les coefficients caractéristiques α et β sont déterminés expérimentalement, ou bien rattachés à d'autres éléments qui dépendent de la forme du grain, de la durée de sa combustion sous la pression atmosphérique normale, et de la *force* de la poudre; on appelle ainsi la pression, par unité de surface, des gaz produits par l'unité de poids de la substance explosive, ramenés à occuper l'unité de volume à la température de la combustion.

Le coefficient α varie de 886 à 1678.

Le coefficient β , de 0,976 à 5,592.

L'ouvrage de MM. Upmann et Meyer renferme aussi l'étude des autres corps explosifs, tels que le pyroxyle (coton-poudre), la nitroglycérine et la dynamite, les fulminates et picrates, etc.

On peut consulter sur le même sujet l'ouvrage suivant de M. Berthelot : *Sur la force des matières explosives d'après la thermochimie* (3^e édition, 1885; Paris, Gauthier-Villars).

247. L'électricité se manifeste à nous par deux ordres distincts de phénomènes.

Elle peut être en repos à la surface des corps, où elle s'amasse en quantité variable d'un point à l'autre, et d'où

elle s'échappe parfois sous forme d'étincelle. L'électricité est alors à l'état statique.

Elle peut aussi être à l'état dynamique, et parcourir le circuit formé par un fil conducteur, en constituant ce qu'on nomme un courant électrique. C'est sous cette dernière forme qu'aujourd'hui l'électricité est le plus souvent utilisée.

248. Les courants électriques sont ordinairement produits par les réactions chimiques qui s'opèrent dans une pile, c'est-à-dire dans un ensemble d'éléments semblables réunis méthodiquement. Il y a un très grand nombre de types de piles électriques¹; nous n'avons pas à les décrire ici. Il nous suffira de donner une description sommaire d'un des types les plus simples. L'élément de pile de Daniell consiste en un vase partagé en deux compartiments par un diaphragme poreux en porcelaine dégluée; on verse de l'acide sulfurique dans l'un de ces compartiments, du sulfate de cuivre dans l'autre. Puis on plonge dans le premier compartiment une lame de zinc, qui forme l'électrode négative, dans le second une lame de cuivre, qui devient l'électrode positive. Dans ces conditions le courant électrique se produit dès qu'on réunit par un fil conducteur les deux électrodes cuivre et zinc. Le zinc déplace l'hydrogène contenu dans l'acide sulfurique (H₂SO₄), et forme du sulfate de zinc. L'hydrogène mis en liberté agit, en traversant la cloison poreuse, sur le sulfate de cuivre, qui est décomposé; l'hydrogène se substitue au cuivre, et le cuivre est transporté à l'électrode positive. Le diaphragme a pour objet de prévenir le mélange des dissolutions en présence et d'assurer un sens précis à l'échange qui se fait entre leurs éléments. En somme, la lame de zinc se dissout au pôle négatif, et le cuivre se dépose au pôle positif. Le courant est censé s'opérer dans le sens de ces combinaisons, c'est-à-dire de l'électrode négative à l'électrode positive dans la pile, et par suite du pôle positif au pôle négatif dans le fil qui les réunit.

1. On peut consulter sur ce sujet le *Traité élémentaire de la pile électrique* d'Alfred Niaudet, 5^e édition, Baudry, 1884.

Lorsqu'on place divers éléments de pile les uns à la suite des autres, en unissant les pôles de noms contraires, le pôle positif de la pile n° k étant réuni par un fil conducteur au pôle négatif de la pile n° $k + 1$, on constitue une pile unique, et l'on dit que les éléments sont réunis en tension.

Si, au contraire, on réunit ensemble par un fil conducteur tous les pôles positifs des éléments juxtaposés, et par un autre fil tous les pôles négatifs, on dit que les éléments sont réunis en batterie. L'intensité du courant produit dans le circuit n'est pas la même suivant que les éléments sont montés en tension ou en batterie.

249. Il y a lieu de considérer dans un courant électrique plusieurs quantités susceptibles de mesure; les principales sont la force électromotrice qui le produit, la résistance qu'il a à vaincre, et l'intensité qu'il possède.

La force électromotrice réside dans la pile qui produit le courant; elle est proportionnelle au nombre d'éléments, supposés tous égaux entre eux, qui s'y trouvent réunis. On convient ordinairement de ramener à un élément Daniell bien défini tous les autres éléments de pile, sous une condition d'équivalence que nous supposerons toujours remplie.

La résistance que rencontre un courant électrique comprend deux parties distinctes, dont l'une est la résistance propre des éléments de la pile, et l'autre la résistance du circuit. La première partie est proportionnelle au nombre des éléments égaux qui sont réunis dans la pile; la seconde est proportionnelle à la longueur du fil dont le circuit est composé, et en raison inverse de sa section. On mesure les résistances en ramenant le fil du circuit et les éléments de la pile aux longueurs équivalentes d'un fil, ou de tout autre corps conducteur, de nature et de section définies, que l'on prend pour étalon.

L'intensité du courant est, à proprement parler, le débit électrique qui s'y opère par unité de temps, ou la quantité d'électricité qui s'écoule par seconde en un point quelconque du circuit. Assimilons, pour fixer les idées, le courant élec-

trique à un courant liquide, qui irait du pôle positif au pôle négatif en suivant le fil. De même que le débit d'un canal est le même dans toutes les sections quand le canal ne reçoit aucun affluent, ni ne subit aucune dérivation, la quantité d'électricité qui traverse une section transversale quelconque pendant l'unité de temps est constante en tous les points du parcours.

250. On conçoit que l'intensité du courant soit proportionnelle à la somme des forces électromotrices qui le produisent, et inversement proportionnelle à la somme des résistances qu'il a à surmonter. C'est en cela que consiste la *loi d'Ohm*, qui se résume dans l'équation

$$I = \frac{E}{R},$$

où E représente la somme des forces électromotrices, R la somme des résistances du circuit et de la pile, et I l'intensité du courant.

Cette équation, mise sous la forme $E = RI$, a avec la formule fondamentale de la dynamique, $F = mj$, une analogie qu'il est bon de faire ressortir. L'équation $F = mj$ exprime que la force F communiquée à un point matériel de masse m une accélération déterminée j . La masse m est là une sorte de coefficient de résistance au mouvement, qui appartient au point, et l'accélération j est l'effet cinématique que la force produit sur ce point. De même la force électromotrice produite par la pile détermine un courant dans un circuit qui lui oppose une certaine résistance; l'effet produit se mesure par l'intensité I de ce courant. La résistance appartient au circuit, comme la masse au point mobile. L'intensité du courant produit est le débit électrique par unité de temps, comme l'accélération j est l'accroissement géométrique de la vitesse, rapporté à l'unité de temps, qui est dû à l'action de la force F sur la masse m .

251. Nous verrons plus loin la définition des unités qui servent à la mesure de ces quantités E , R , I .

Fixons sans plus tarder l'homogénéité de ces quantités, qui se rencontrent à chaque instant dans la théorie électrodynamique.

L'intensité I représente une quantité d'électricité rapportée à l'unité de temps.

La résistance R d'un circuit homogène est proportionnelle à sa longueur L , et inversement proportionnelle à sa section Ω . Elle s'exprime par l'équation

$$R = \frac{\lambda L}{\Omega},$$

λ étant un coefficient constant qui dépend de la nature du circuit.

L'équation $E = RI$ exprime ensuite la force électromotrice au moyen de R et I .

A vrai dire, il n'y a qu'une nouvelle classe de quantités *sui generis* à considérer dans cette théorie : ce sont les quantités d'électricité, analogues aux quantités de chaleur de la thermodynamique. L'intensité I d'un courant est déjà une quantité complexe, puisque c'est la quantité qui s'écoule dans l'unité de temps par une section quelconque du fil conducteur. Si l'on appelle Q la quantité d'électricité qui s'écoule pendant un temps T , l'intensité I correspondante s'exprimera par la formule

$$I = \frac{Q}{T},$$

ou plus généralement par la formule

$$(1) \quad I = \alpha \frac{Q}{T}$$

si l'on veut choisir l'unité d'intensité, comme on a choisi arbitrairement l'unité de quantité qui sert à mesurer Q .

Deux quantités d'électricité Q et Q' , situées à la distance r l'une de l'autre, agissent l'une sur l'autre en développant une force F , attractive ou répulsive suivant les signes des électri-

cités en présence, et dont la grandeur est donnée par la *loi de Coulomb* :

$$(2) \quad F = f \frac{Q Q'}{r^2}.$$

Le coefficient constant f est mis là pour rendre la formule homogène. Il dépend du choix de l'unité de quantité d'électricité, et représente la forme attractive ou répulsive qui résulte de l'action de deux quantités électriques, égales chacune à l'unité, situées à l'unité de distance.

Deux éléments ds et ds' de courants électriques, d'intensité I et I' , situés à la distance r , exercent l'un sur l'autre une action, attractive ou répulsive, dont la grandeur est exprimée par la *formule d'Ampère*, qu'on peut réduire à l'expression

$$(5) \quad F' = K \frac{I I' ds ds'}{r^2} \cos \varphi.$$

Dans cette équation, $\cos \varphi$ tient lieu d'une fonction d'angles, c'est-à-dire d'un coefficient numérique qui dépend de l'orientation relative des deux éléments, mais qui ne change pas l'homogénéité de la formule. Le coefficient K est une constante dont la détermination dépend du choix de l'unité qu'on a adoptée pour mesurer les intensités I et I' .

Les facteurs $\frac{ds ds'}{r^2}$ et $\cos \varphi$ sont des nombres; on voit donc que F' est homogène au produit $K I I'$, c'est-à-dire au produit $K \times \alpha^2 \frac{Q Q'}{T^2}$, en remplaçant I et I' par $\alpha \frac{Q}{T}$ et à $\alpha \frac{Q'}{T}$. Rapprochant ce résultat de l'équation (2), on voit que les deux produits

$$f \frac{Q Q'}{r^2} \text{ et } K \alpha^2 \frac{Q Q'}{T^2}$$

représentent à la fois des forces.

Il en résulte que leur rapport

$$\frac{f}{K \alpha^2} \frac{T^2}{r^2}$$

est un *nombre*, indépendant du choix des unités qui servent à évaluer les quantités r , T , Q , Q' Or $\frac{r}{T}$ est une longueur rapportée à un temps, et représente une vitesse linéaire; le produit de $\frac{f}{K \alpha^2}$ par $\left(\frac{T}{r}\right)^2$ devant donner un nombre, il faut que $\frac{f}{K \alpha^2}$ soit homogène au carré d'une vitesse linéaire, et par suite les coefficients α , K et f des formules (1), (2) et (5) sont tels, que le produit

$$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{f}{K}}$$

est une vitesse parfaitement déterminée; on l'a trouvée sensiblement égale à la vitesse de la lumière dans le vide, 300 000 kilomètres environ par seconde. Ce rapprochement inattendu, observé pour la première fois par M. Clerk Maxwell, fait prévoir qu'il existe un lien entre des théories en apparence distinctes, d'un côté l'optique, de l'autre les théories du magnétisme et de l'électricité.

252. Quand un courant électrique passe dans un fil conducteur, il y produit une certaine quantité de chaleur, qui se traduit par une élévation de la température du fil. La quantité de chaleur produite est d'autant plus grande que la résistance R du fil est plus grande, et que le courant possède une plus grande intensité I . Lorsqu'on fait passer un courant très intense dans un fil métallique fin, qui offre une très grande résistance parce que sa section est petite, le fil s'échauffe, rougit et peut même être brûlé : alors le courant cesse, par suite de l'interruption de la continuité du circuit. L'identité que l'on admet aujourd'hui entre la chaleur et le travail mécanique conduit à reconnaître dans les courants électriques

une source de travail, puisqu'ils produisent de la chaleur. La loi de Joule établit la proportionnalité entre la quantité de travail ou de chaleur produite par unité de temps et le produit EI de l'intensité du courant par la force électromotrice. Si l'on appelle T le travail développé dans l'unité de temps par un courant d'intensité I , produit par une force électromotrice E dans un circuit de résistance totale R , on aura, moyennant qu'on fasse choix d'une unité convenable pour évaluer le travail T , la série d'égalités

$$T = EI = RI^2 = \frac{E^2}{R}.$$

253. L'analogie du courant électrique avec un courant liquide a conduit à admettre dans l'électricité une nouvelle quantité, à laquelle on donne le nom de *potentiel*, et qui joue dans la théorie électrique le rôle de la *cote de niveau* dans le mouvement et l'équilibre des liquides, ou de la *température* dans la théorie de la chaleur. De même que l'eau d'un réservoir élevé s'écoule par un tuyau dans un réservoir plus bas, en produisant un travail mécanique proportionnel à la hauteur de la chute; de même que la chaleur, en passant d'un corps chaud à un corps froid dans les machines thermiques, produit un travail proportionnel à la *chute de chaleur* qui existe entre ces deux corps: de même l'électricité qui s'écoule dans un circuit d'un pôle à l'autre de la pile, en vertu de la différence de potentiel entre les deux pôles, produit un travail mécanique proportionnel à cette différence. Ce sont les différences de potentiel entre deux points d'un même circuit, ou entre un point du circuit et un corps étranger, qui déterminent l'écoulement de l'électricité le long du circuit dans un sens déterminé, ou en dehors du circuit pour foudroyer un corps placé dans le voisinage. Cette tendance de l'électricité à couler, à s'échapper au dehors, à la façon de l'eau qui coule dans un tuyau et tend en même temps à fuir par les joints, a reçu le nom de *tension électrique*.

La *tension* de l'électricité statique est l'effort que fait l'élec-

tricité répandue à la surface d'un corps pour se répandre au dehors; cet effort doit être contre-balancé par un effort égal et contraire, sans quoi l'écoulement électrique aurait effectivement lieu. Dans un courant électrique, la tension est de même l'effort que fait l'électricité en mouvement pour s'échapper du fil qui la dirige, pour se répandre au dehors, pour alimenter d'autres circuits en créant des dérivations du courant principal. C'est aussi par le jeu des tensions électriques que le courant naît et se propage. La pile produit une différence de tensions électriques entre ses deux pôles: de là l'écoulement qui se manifeste dans le circuit. On voit par ces considérations l'identité de la tension avec le potentiel électrique.

UNITÉS ÉLECTRIQUES

254. Toutes les quantités ci-dessus définies, résistance, force électromotrice, intensité, sont susceptibles de mesure, moyennant la définition des diverses unités auxquelles on doit les rapporter. Sans nous arrêter aux diverses recherches théoriques faites sur ce sujet¹ pour rattacher les unités électriques au système des unités fondamentales de la mécanique², dit système C. G. S., nous définirons comme il suit les diverses unités pratiques qui ont été adoptées en 1881 par le Congrès des électriciens.

L'unité de résistance est appelée *Ohm*; c'est la résistance que possède une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section, et ayant, à la température 0° centigrade, une longueur déterminée, d'environ 1^m,0635, d'après les expériences de MM. Mascart, F. de Neville et R. Benoist³. Cette définition diffère très peu de celle de l'*Étalon Siemens*, usité en Alle-

1. On les trouvera résumées dans une conférence faite à la *Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, le 4 mars 1882, par M. Maurice Lévy. Voir aussi l'*Électricien* du 15 mars 1882, article de M. Hospitalier.

2. Tome III, § 357, note de la page 602.

3. *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 28 avril 1884.

magne, et qui représente la résistance d'une colonne de mercure de 1 millimètre carré de section et de 1 mètre de hauteur. La petite variation qu'on fait subir à la hauteur a pour objet de ramener l'Ohm au système des unités fondamentales. On estime que le nombre $1^m,0655$, déterminé par la moyenne d'un grand nombre d'expériences, est un peu trop fort¹.

L'unité d'intensité a reçu le nom d'*Ampère*. Pour la définir, il faut se reporter à la loi de Joule que nous avons rappelée tout à l'heure. Un courant d'intensité I , qui passe dans un circuit présentant une résistance R , pile comprise, produit par unité de temps un travail T proportionnel à RI^2 . Supposons la résistance égale à l'unité. L'intensité I du courant sera aussi égale à l'unité, si le travail T est égal à l'unité de travail, que l'on prend égale à $\frac{1}{g}$ kilogrammètre. On pourra dire par conséquent : *l'Ampère est l'intensité du courant qui produit par unité de temps un travail égal à $\frac{1}{g}$ kilogrammètre, dans un circuit dont la résistance totale est un Ohm.*

L'unité de force électromotrice est le *Volt*. La loi d'Ohm rattache cette unité aux précédentes, en montrant que *le Volt est la force électromotrice nécessaire pour produire un courant ayant pour intensité un Ampère dans un circuit ayant pour résistance un Ohm.*

On a donné le nom de *Coulomb* à l'unité de quantité électrique; c'est *la quantité d'électricité qui s'écoule en une seconde dans un courant qui a pour intensité un Ampère.*

ACTIONS MUTUELLES DES COURANTS

255. Les lois des actions mutuelles des courants électriques

1. La commission des électriciens avait proposé $1^m,06$. M. J.-B. Baille a trouvé $1^m,0566$. Voir son *Étude de la méthode de l'amortissement des aimants pour la détermination de l'Ohm*, dans les Annales télégraphiques, mai-juin 1885 et mars-avril 1884.

ont été découvertes par Ampère. On peut les résumer dans la formule

$$F = \frac{II' ds ds'}{r^2} \cos \varphi,$$

où ds est la longueur d'un élément de courant d'intensité I , ds' la longueur d'un second élément d'intensité I' , r la distance de ces deux éléments et φ l'angle qu'ils font entre eux, en les prenant chacun suivant la direction propre du courant qui le parcourt. F est l'action mutuelle des deux éléments, attractive si elle positive, répulsive si elle est négative, nulle si l'angle φ est droit ou si les deux éléments sont rectangulaires; elle est positive ou négative suivant que φ est aigu ou obtus.

La formule doit être complétée par l'adjonction d'un coefficient K si l'on veut rapporter la force F à l'unité ordinaire des forces.

Cette expression n'est pas celle qu'Ampère a établie, et qui a la forme plus compliquée

$$F = \frac{II' ds ds'}{r^2} \left(\cos \theta \sin \alpha \sin \alpha' - \frac{1}{2} \cos \alpha \cos \alpha' \right);$$

α et α' sont les angles que font les deux éléments ds et ds' avec la droite qui les réunit, et θ l'angle dièdre formé par les plans conduits suivant cette droite de jonction et les deux éléments. Les deux formules ne sont pas identiques élément à élément; mais les résultats des intégrations étendues à deux circuits fermés quelconques sont les mêmes, qu'on emploie l'une ou l'autre.

256. On appelle *solénoïde* une forme particulière de circuit, réductible par la pensée à un certain nombre de circonférences égales, empilées jointivement, et parcourues à la fois par un même courant électrique. En pratique, le solénoïde s'obtient en enroulant autour d'un cylindre droit à base circulaire un fil conducteur garni d'une enveloppe isolante, de manière à y dessiner les spires d'une hélice de faible pas. Le prolongement du fil est ensuite replié le long d'une génératrice

du cylindre, pour détruire les effets d'attraction ou de répulsion dus à l'obliquité des spires par rapport aux cercles de section droite, que la définition du solénoïde suppose dessinés par les anneaux du circuit. Un tel système, parcouru par un courant, se comporte à la façon d'un barreau aimanté. Il a deux pôles à ses deux extrémités. Le *pôle boréal* est situé à l'extrémité où l'on verrait le courant marcher dans le sens des aiguilles d'une montre; le *pôle austral* à l'extrémité opposée. Deux solénoïdes mis en présence s'attirent, comme deux aimants, par les pôles de noms contraires, et se repoussent par les pôles de même nom. Chacun d'eux est soumis à une action directrice de la part du globe terrestre, comme l'aiguille aimantée.

257. On peut reconnaître qu'un courant suit un fil conducteur, en observant la déviation que ce courant produit sur une aiguille aimantée placée à proximité de son parcours. Si l'on imagine qu'un observateur soit couché le long du fil, de manière que le sens du courant soit celui des pieds à la tête, cet observateur, faisant face à l'aiguille aimantée, verra le pôle boréal de l'aiguille se porter vers la droite, le pôle austral vers la gauche. L'aiguille, primitivement dirigée du sud au nord, a son pôle austral tourné vers le nord, et son pôle boréal vers le sud. Si le courant parcourt le fil, situé au-dessous de l'aiguille, dans le sens sud-nord, le pôle austral se jettera à gauche de l'observateur, c'est-à-dire que la déviation de la pointe bleue aura lieu vers l'est. Elle aurait lieu vers l'ouest si le courant, marchant dans le même sens, passait au-dessus de l'aiguille au lieu de passer au-dessous.

Les mêmes phénomènes s'observent relativement aux actions mutuelles des courants rectilignes et des solénoïdes. Quand l'axe du solénoïde est parallèle au circuit rectiligne, le passage du courant à travers tout le circuit tend à amener l'axe du solénoïde en croix sur la direction du fil droit.

L'aiguille aimantée fournit le moyen, non seulement de constater la présence d'un courant dans un fil conducteur,

mais encore de mesurer son intensité, en comparant les angles de déviation produits par divers courants sur une même aiguille. La déviation produite peut être augmentée par l'enroulement d'un certain nombre de spires du fil conducteur autour de l'aiguille, de manière à lui former une sorte de cadre vertical. Tel est le principe du *galvanomètre multiplicateur*.

INDUCTION

258. Longtemps on n'a eu que la pile pour produire l'électricité dynamique. La découverte de l'*induction* par Faraday, en 1831, a ouvert de nouveaux horizons à l'emploi de l'électricité et des machines électriques. Le principe de l'induction peut être formulé comme il suit, conformément à la *loi de Lenz* :

Toutes les fois qu'un courant se meut par rapport à un autre courant ou à un aimant, il se développe une résistance mécanique analogue à un frein, et qui agit pour empêcher ou pour retarder le mouvement du courant mobile.

Supposons qu'on déplace un circuit A parcouru par un courant, en présence d'un autre circuit B, indépendant du premier, et dans lequel nous supposerons qu'il n'y ait aucun courant. Si l'on rapproche le circuit A du circuit B, il se produira dans B un courant *inverse* du courant de A, de telle sorte que le *rapprochement* opéré fasse naître une *répulsion* entre les deux circuits. Si, au contraire, on éloigne A de B, on constatera qu'il se produit en B un courant *direct*, c'est-à-dire de même sens que le courant A, de telle sorte que l'*éloignement* produise une *attraction*. Dans les deux cas, l'effort développé tend à la conservation des situations relatives.

On observe les mêmes effets en faisant mouvoir le circuit B en présence du circuit A restant fixe, et plus généralement en faisant mouvoir à la fois les circuits A et B.

Des phénomènes analogues se manifestent lorsque, au lieu de rapprocher un courant d'intensité constante, on fait passer dans le circuit mobile A un courant initial. Ce courant, au moment où il se produit, peut être assimilé à un courant constant qui se rapprocherait subitement du circuit B. Aussi constate-t-on dans le circuit B un courant inverse qui ne dure qu'un instant, et qui cesse si le courant persiste dans A sans variation nouvelle. Quand on interrompt le courant A, cela revient à éloigner subitement ce courant de B, et il se produit dans B un courant instantané direct. Il en est encore de même lorsque le courant A change d'intensité : *le courant induit qui se produit dans B est tel, qu'il semble s'opposer au mouvement, réel ou fictif, du fil inducteur A.* On a rattaché ces phénomènes au principe général de la *conservation de l'énergie*¹.

259. L'induction fournit un nouveau moyen de produire l'électricité, et puisque les aimants se comportent comme des solénoïdes, c'est-à-dire comme des courants électriques, on peut, par une disposition convenable des circuits mobiles, arriver à produire des courants sans pile, par le simple effet des mouvements relatifs : grande découverte, qui est le germe d'une transformation radicale des moteurs électriques. La machine de Froment, décrite au § 215, donne une idée des anciens moteurs. Elle comprenait comme partie mobile un *électro-aimant*, c'est-à-dire un ensemble de barreaux en fer doux entourés d'une bobine. Les courants, lancés dans la bobine par une pile, puis interrompus alternativement, produisaient l'aimantation et la désaimantation successives du fer doux, et par suite l'attraction et la répulsion alternatives de l'électro-aimant mobile de la part d'un électro-aimant fixe. L'électricité produisait ainsi le travail moteur de la machine. Mais le fer doux ne s'aimante pas et ne perd pas son aimantation instantanément. Ces changements continuels de son état

1. Par ce mot un peu vague, qui est à la mode aujourd'hui, on entend le *travail mécanique*, ou ses équivalents habituels de *force vive*, de puissance motrice, de chaleur, etc.

magnétique représentent un travail perdu pour la puissance du moteur. On s'est heurté à cette difficulté tant qu'on a cherché à utiliser la force attractive des électro-aimants. Signalons toutefois dans cet ordre d'idées l'essai fait à Pétersbourg, en 1840, par Jacobi, d'une petite chaloupe dont le moteur était fourni par une pile de Grove de 128 éléments. Le travail produit, employé à la propulsion de la chaloupe, ne s'élevait pas à plus de $5/4$ de cheval.

MOTEURS ÉLECTRIQUES

260. L'*appareil de Ricci* a été un premier perfectionnement de ces machines mises en mouvement par la pile. Il comprend un aimant permanent, qui demeure immobile, et entre les pôles duquel on dispose une bobine de fil conducteur enroulé autour d'un fer doux. Un commutateur fait communiquer le fil de la bobine avec un circuit dans lequel est comprise une pile électrique. La bobine et le fer doux qui lui sert de noyau sont mobiles autour d'un axe parallèle aux branches de l'aimant. Si l'on fait passer le courant dans la bobine, elle subit l'attraction et la répulsion des pôles de l'aimant fixe, qui déterminent et entretiennent son mouvement continu.

L'appareil Ricci, développé et transformé, est devenu, il y a quelques années, le *moteur Marcel Deprez*. Le principal perfectionnement réalisé par M. Deprez consiste dans l'allongement de la bobine de Ricci. Le magnétisme d'un aimant en fer à cheval n'est pas, comme on le croit communément, concentré uniquement vers les pôles. Il est réparti au contraire dans toute la longueur du barreau. M. Deprez, en plaçant entre les branches du fer à cheval une longue *bobine Siemens*, recueille tout le travail que peut fournir le magnétisme de l'aimant fixe. L'appareil adopté par lui, et essayé à l'Exposition de Paris en 1881, comprenait un aimant à 8 lames, pesant 1700 grammes, et une bobine Siemens de 500 grammes. Le

mouvement était entretenu au moyen d'une pile contenant 6 éléments de Bunsen. Le travail recueilli, mesuré au frein funiculaire de M. Carpentier, s'élevait à $\frac{5}{4}$ de kilogrammètre par seconde, soit $\frac{1}{60}$ de cheval-vapeur. C'est un moteur de petit atelier. L'appareil est du reste réversible et, si l'on fait

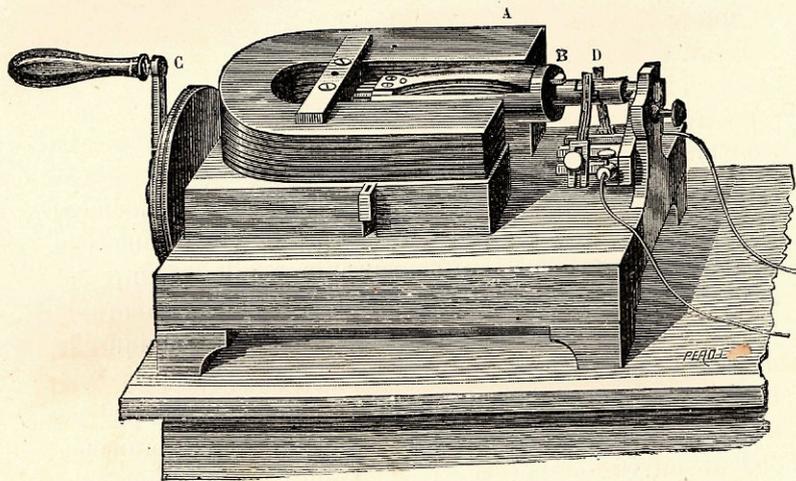


Fig. 151. Moteur Marcel Deprez.

A aimant en fer à cheval; — B bobine Siemens; — C manivelle pour mettre en mouvement la bobine; — D balais pour recueillir le produit.

tourner la bobine entre les branches de l'aimant, un courant se produit dans le circuit auquel elle appartient.

261. Pour nous rendre compte sommairement de ce qui se passe dans un circuit enroulé en bobine, qu'on fait tourner entre les pôles d'un aimant, représentons en AA' et BB' les deux pôles, l'un positif, l'autre négatif, d'un aimant fixe. Entre ces deux pôles plaçons un circuit formé d'un certain nombre de contours rectangulaires, tels que $mnpq$, tous égaux, et montés tous sur un même axe OO' qui joint les milieux de leurs petits côtés. On fait tourner le système de ces

rectangles autour de OO' dans le sens des flèches F . Nous ne représentons sur la figure qu'un seul rectangle pour la clarté du dessin.

Le passage du rectangle $mnpq$ dans le *champ magnétique* du pôle AA' fait naître dans le circuit un courant d'induction, et à un instant donné on constate dans le côté mn un courant d'une certaine intensité, dirigé suivant la flèche f par exemple. Au même instant le côté opposé pq est le siège d'un courant d'induction de la même intensité, dirigé dans le sens

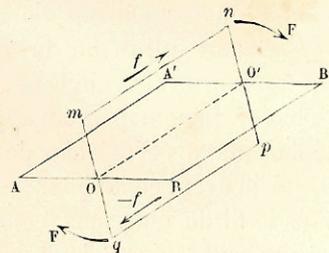


Fig. 152.

→ f . Ce côté se trouve en effet, relativement au pôle BB' , dans la même situation que le côté mn par rapport au pôle contraire AA' . Mais ces deux courants, de sens opposés dans deux côtés opposés du rectangle, reviennent à un seul et même courant qui suivrait tout le périmètre $mnpq$ de la figure. Le mouvement de la bobine dans le champ magnétique des deux pôles fait ainsi naître des courants d'induction dans chaque circuit rectangulaire dont elle est formée, et il n'y a plus qu'à les recueillir pour les lancer dans le circuit général. L'induction est maximum quand le rectangle traverse le plan mené par l'axe OO' et les deux pôles; elle est nulle et change de sens quand le rectangle traverse le plan perpendiculaire au plan du maximum; on appelle *plan de commutation* le plan où les courants changent ainsi de signe en passant par zéro.

Le phénomène se complique lorsque le fil conducteur est enroulé autour d'un noyau en fer doux, plein ou creux, qui devient aussi le siège de courants induits, lesquels contribuent à leur tour à développer de nouveaux courants dans les bobines qui les entourent. Souvent le fil est enroulé autour d'un cylindre creux, à l'extérieur et à l'intérieur duquel il dessine des génératrices rectilignes, distribuées en paquets

égaux séparés par des intervalles libres. On a remarqué que la présence de cette paroi en fer doux, qui sépare les brins intérieurs des brins extérieurs, rend l'induction plus forte et donne lieu à des courants plus énergiques. Le fer doux se comporte là à la façon d'un écran qui empêcherait le rayonnement du magnétisme de l'aimant : il empêche l'induction de s'étendre jusqu'aux brins intérieurs du fil, sur lesquels elle produirait des courants inverses. En outre, l'anneau est à chaque instant parcouru par des courants induits, qui se déplacent dans l'intérieur de sa masse à mesure qu'il tourne, et qui peuvent contribuer pour une certaine part à produire dans le fil de nouveaux courants, lesquels s'ajoutent ou se retranchent, suivant leur sens, au courant principal que l'induction y produit directement.

262. Les divers types de machines *magnéto-électriques* ou *dynamo-électriques* dérivent de ces premiers aperçus. Tantôt le fil conducteur est enroulé autour d'un anneau plat, que l'on fait tourner autour de son axe entre les pôles d'un *aimant* ou d'un *électro-aimant*; dans ce dernier cas, le fer doux de l'électro-aimant est entouré d'un circuit en bobine, dans lequel on fait passer le courant. Tantôt le fil conducteur est enroulé autour d'un noyau muni de prolongements divergents suivant les rayons d'un cercle. On peut imaginer d'autres dispositions. Dans tous les cas le courant électrique produit par l'induction est recueilli au centre de la partie mobile, d'où il s'écoule dans le circuit extérieur au moyen de deux *balais* ou frotteurs métalliques convenablement placés. Dans un tel système, l'anneau mobile est partagé à chaque instant par un plan diamétral en deux moitiés, dans chacune desquelles les circuits partiels, enroulés en hélices jointives, sont parcourus par des courants égaux et de sens contraires; le sens du courant change dans un *plan de commutation*, où les actions inductives s'équilibrent. On réunit ces circuits partiels *en tension*, en joignant le fil de sortie du premier au fil d'entrée du second, le fil de sortie du second au fil d'entrée du troisième, etc., et l'on constitue ainsi, pour ainsi dire,

deux piles distinctes, séparées par le plan de commutation et réunies par leurs pôles de même nom. Il suffit de mettre les pôles de ces deux piles en communication avec le circuit extérieur, pour recueillir les courants électriques produits dans chaque moitié de l'anneau.

Le plan de commutation, dont la situation varie d'une machine à l'autre suivant la manière dont elle est construite, ne reste pas fixe lorsque la machine est en mouvement. Il est déplacé par le mouvement de l'anneau mobile, dans le sens du mouvement pour les *machines génératrices*, c'est-à-dire celles où le mouvement de l'anneau produit de l'électricité, et en sens contraire du mouvement pour les *machines réceptrices*, dans lesquelles le courant électrique produit le mouvement de l'anneau. On conçoit par conséquent que, suivant l'allure de la machine, il convient de modifier la position des balais qui livrent passage aux courants à recueillir.

MACHINE GRAMME

263. L'invention des machines qui produisent l'électricité à l'aide du mouvement remonte à l'année 1852, et à la machine de Pixii, dans laquelle l'aimant inducteur était mobile devant un électro-aimant fixe. Dans la machine de Clarke, qui vient ensuite, l'aimant inducteur est ramené au repos, tandis que la partie mobile comprend les bobines induites. Ces deux machines sont les premiers types des appareils dits *magnéto-électriques*, où l'on emploie un aimant naturel pour la production du courant.

Les machines *dynamo-électriques* ne font pas usage d'aimant permanent. Après les premiers essais de Wheatstone, de Siemens et Halske, de Wilde, ces machines ont pris un vrai caractère industriel dans la machine Gramme, qui date de 1872. Ici l'aimant naturel a disparu et est remplacé par un électro-aimant, c'est-à-dire par un assemblage de barreaux

en fer doux, entourés par une bobine où l'on a commencé par faire passer un courant spécial, destiné à développer l'aimantation. Depuis on a été encore plus loin, et on a réussi à se passer de ce courant étranger. La bobine de l'électro-aimant inducteur et la bobine de l'anneau induit sont traversées par un seul et même courant, celui que produit la machine en

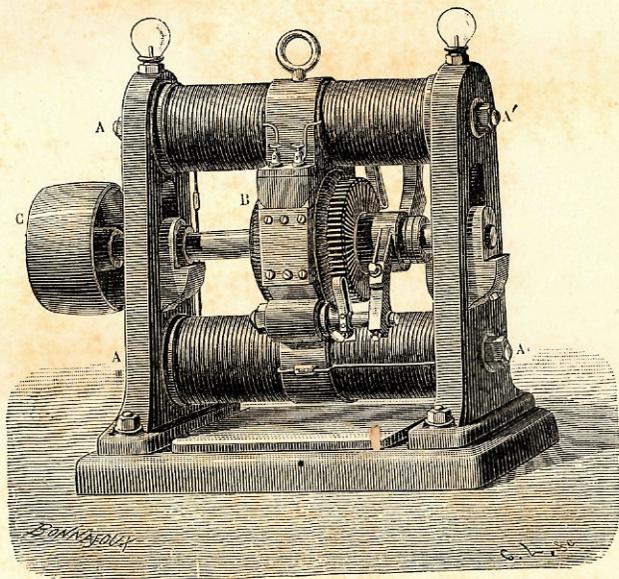


Fig. 154. Machine Gramme.

A, A' inducteur fixe; — B anneau induit mobile;
C poulie pour la transmission du mouvement.

mouvement. Quand l'anneau est au repos, et que le courant cesse, il reste dans le fer doux des électro-aimants une trace d'aimantation, connue sous le nom de *magnétisme rémanent*, qui suffit à provoquer la production des courants d'induction dès que le mouvement de l'anneau reprend. Ces courants développent l'aimantation, qui à son tour réagit, par l'intensité croissante de l'induction produite, sur le courant lui-même. La machine s'*excite* ainsi graduellement, jusqu'à une certaine

limite, qui correspond à la saturation du champ magnétique, et à la vitesse de régime de la partie mobile. Les vitesses de 1000, de 1500, de 2000 tours à la minute sont parfois réalisées pour les anneaux de la machine Gramme.

264. L'étude expérimentale de la machine Gramme a montré que l'appareil est *réversible*; on y développe un courant électrique en communiquant à l'anneau une grande vitesse de rotation, et inversement on produit le mouvement de rotation de l'anneau en faisant passer un courant dans les bobines qui le composent. De là la distinction, que nous avons déjà indiquée plus haut, entre les machines *génératrices* et les machines *réceptrices*; elles ne diffèrent pas essentiellement les unes des autres, bien qu'elles soient par le fait appelées à jouer des rôles tout à fait distincts. Les génératrices s'emploient pour transformer le mouvement en électricité; les réceptrices pour opérer la transformation inverse. Dans les deux cas il y a échange entre des quantités équivalentes de travail, de force vive, de chaleur, etc., et, suivant le langage du jour, *conservation d'énergie*.

TRANSMISSION DU TRAVAIL A DISTANCE

265. On voit que la machine Gramme, et toutes les machines qui en sont dérivées, fournit une solution élégante du problème de la transmission du travail à distance. Supposons qu'en un point A nous ayons un travail moteur disponible, une chute d'eau par exemple. Employons cette puissance motrice à faire tourner l'anneau induit d'une machine Gramme G, qui sera pour nous la machine génératrice. Nous produirons ainsi un courant électrique dans le circuit *mnpq* établi entre les deux bornes de la machine G, et tout se passera dans ce circuit comme si nous avions installé une pile électrique produisant entre les mêmes points *m* et *q* la même *différence de potentiel*. Qu'en un point B du circuit on interrompe le fil,

et qu'on y insère une seconde machine Gramme G' , le courant passera dans l'anneau de cette seconde machine, qui devient la *réceptrice*, ainsi que dans tout l'appareil inducteur de la partie fixe; l'anneau se mettra à tourner, mais en sens contraire, par rapport au sens du courant, du mouvement de l'anneau de la génératrice. On constatera encore entre les bornes n et p de la machine G' une différence de potentiel, qui sera une fraction de la différence analogue constatée en G . Le mouvement de l'anneau de la seconde machine

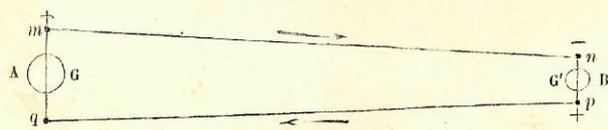


Fig. 153.

pourra être utilisé au dehors pour effectuer un certain travail, et une partie de la puissance motrice aura été ainsi transportée par le fil électrique du point A au point B, en franchissant une distance qui peut être très considérable.

Le courant électrique qui parcourt le circuit $mnpq$ est assimilable à un cours d'eau dont la source serait placée à la borne m , qui constitue pour ainsi dire le pôle positif de la génératrice G , et l'embouchure à la borne qui forme son pôle négatif q . Le courant va dans le sens mn et pq , en suivant la pente du lit. Au point B il y a une chute brusque entre les deux niveaux n et p ; on y insère un *récepteur* pour utiliser cette chute. La machine génératrice G , ou la pile qu'on pourrait lui substituer, remonte l'électricité du niveau inférieur q au niveau supérieur m , et remplit le rôle que la chaleur solaire joue à l'égard des cours d'eau, quand elle élève, sous forme de nuages et de vapeurs, les eaux de l'Océan qui assurent l'alimentation des sources.

266. Le *rendement électrique* du système formé par les deux machines et le circuit qui les réunit, est le rapport $\frac{np}{mq}$

des deux chutes de potentiel, l'une qui produit le travail de la réceptrice, l'autre qui résulte du travail communiqué à la génératrice. L'expérience a montré que ce rapport est, toutes choses égales d'ailleurs, à peu près indépendant de la distance AB. Le courant électrique qui se développe dépend de la force électromotrice produite en A et des résistances que le courant rencontre sur tout son parcours; parmi ces résistances, la principale est la *force contre-électromotrice* que produit le mouvement de la réceptrice au point B, et à laquelle correspond un courant inverse, qui se retranche du courant principal. On admet que les quantités de travail produites dans un même temps par les deux machines G et G' sont proportionnelles aux vitesses linéaires des deux anneaux induits. Si l'on appelle v la vitesse de l'anneau de la génératrice, prise à sa circonférence extérieure, et v' la vitesse de l'anneau de la réceptrice, le rapport $\frac{v'}{v}$ mesurera le rendement électrique du système. Or l'expérience démontre que la différence $v - v'$ est sensiblement constante, quelle que soit la distance AB. On conclut de ce rapprochement que le rendement électrique $\frac{v'}{v}$ est d'autant plus voisin de l'unité que les vitesses v et v' sont plus grandes.

Le *rendement mécanique* est moindre que le rendement électrique; car il s'établit en tenant compte de toutes les pertes de travail qui ont lieu pour la transmission entre la puissance motrice et la machine G , de toutes celles qui se produisent entre la machine G' et les machines qui lui empruntent le mouvement, et enfin de toutes les pertes accessoires que le calcul du rendement électrique laisse de côté.

EXPÉRIENCES SUR LA TRANSMISSION DU TRAVAIL A DISTANCE.

Le premier essai de transmission du travail à grande distance par l'électricité remonte à l'année 1882 et a été réalisé

par M. Marcel Deprez à l'exposition de Munich. Les deux machines G et G' étaient des machines Gramme identiques, du modèle dit *type d'atelier*; la réceptrice G', placée à Munich, mettait en mouvement une pompe centrifuge destinée à l'alimentation d'une cascade. La génératrice G avait été installée à Miesbach, à 57 kilomètres de Munich. La communication entre les deux machines se faisait par un fil télégraphique ordinaire, de 4^{mm} 1/2 de diamètre, en fer galvanisé, avec fil pareil pour le retour du courant. Le circuit présentait un développement de 114 kilomètres, offrant au courant une résistance de 950 ohms. Chaque machine représentait en outre une résistance de 470 ohms, ce qui faisait monter la résistance totale à 1890 ohms, soit 1900 ohms en nombre rond. Dans l'expérience qui a eu lieu en octobre 1882, la machine de Miesbach a été lancée à la vitesse de 2200 tours par minute; on a constaté pour la machine de Munich une vitesse de 1500 tours, et le travail transmis, mesuré au frein, s'est élevé à 58 kilogrammètres par seconde, environ 1/2 cheval-vapeur. Le rendement électrique est approximativement le rapport des vitesses, $\frac{1500}{2200} = 0,60$. On a reconnu que les

machines ne s'échauffaient pas sensiblement, même au bout de 2 heures de marche; que les collecteurs des induits présentaient des étincelles à peine visibles; qu'enfin la pluie, qui est tombée presque continuellement pendant les expériences, n'a pas influé d'une manière appréciable sur le rendement¹.

268. L'expérience de Munich fut renouvelée en 1883 à Paris, par M. Marcel Deprez, dans les ateliers du chemin de fer du Nord. La machine génératrice était reliée à la réceptrice, d'un côté par un fil court et de résistance à peu près négligeable, de l'autre par un fil télégraphique en fer galvanisé, de 4 millimètres de diamètre, offrant un développement de 17 kilomètres.

1. *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 9 octobre 1882.

La génératrice et la réceptrice n'étaient pas identiques. La première appartenait au *type M. Deprez n° 20*, la seconde était une machine Gramme transformée. On trouvera dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences du 9 avril 1883 le rapport d'une commission de l'Académie sur une série d'expériences qui avaient eu lieu devant elle le 4 mars précédent. La vitesse communiquée à la génératrice a varié de 580 tours à la minute à 1024; la vitesse de la réceptrice, de 104 tours à 799. Le maximum du rendement mécanique ne correspond pas aux vitesses les plus grandes, mais bien à une vitesse d'environ 850 tours pour la génératrice. On l'a évalué à 0,48, en faisant abstraction des pertes de travail entre le moteur et la génératrice, et à 0,575 en comparant le travail communiqué à la réceptrice au travail total du moteur. Sur 12 chevaux environ fournis par une machine à vapeur, le travail transporté électriquement à la réceptrice, malgré une résistance de 160 ohms, s'est élevé à 4 chevaux 1/2. C'est un résultat pratique qu'il est important de noter. Le rendement électrique, mesuré par le rapport des forces électromotrices développées dans les deux machines, croît avec les vitesses et ressort au maximum à 0,717. L'observation a montré que l'intensité du courant produit, malgré les variations des vitesses, reste sensiblement constante.

269. La même année 1883, l'expérience du transport de l'énergie au moyen de l'électricité a été reprise entre Vizille et Grenoble. La distance des deux points est de 14 kilomètres. Deux machines, réunies par un double fil en bronze silicieux, de 2 millimètres de diamètre, fonctionnaient l'une à Vizille comme génératrice, l'autre à Grenoble comme réceptrice. Une turbine, alimentée par une chute d'eau, mettait la génératrice en mouvement. Les expériences ont eu lieu les 22, 28 et 29 août et le 1^{er} septembre 1883; on a mesuré avec soin le travail communiqué aux machines, le travail recueilli et l'intensité des courants produits. Le rendement électrique a varié de 52,5 à 70,8, le rendement mécanique de 41,1 à 62,5. La moyenne ressort à 65,1 pour le rende-

ment électrique, à 51,5 pour le rendement mécanique. On a reconnu que la machine génératrice restituait sensiblement tout le travail qui lui était transmis par le moteur, tandis que le travail mécanique produit par la réceptrice était toujours notablement moindre que le travail reçu par la même machine. Il est vrai que, dans l'expérience de Grenoble, les deux machines n'étaient pas identiques : la génératrice était une *machine Deprez type n° 10*, la réceptrice une *machine Gramme type D* transformée. On pense que le rendement aurait été amélioré si les deux machines avaient été du même type.

270. Enfin, au moment où nous écrivons, une expérience conçue dans de grandes proportions, et établie dans des conditions tout à fait industrielles, est en préparation à Creil et à Paris. A Creil, deux machines locomotives, montées comme machines fixes, fourniront le travail moteur, qui s'élèvera à 200 chevaux. Des dynamomètres et des freins de Prony donnent la mesure exacte du travail produit. La machine génératrice installée à Creil a des dimensions et un poids beaucoup plus forts que les machines essayées jusqu'ici. Un dynamomètre particulier constate et enregistre le travail mécanique reçu par l'anneau mobile. De Creil à Paris et de Paris à Creil, un fil spécial, en bronze silicieux, de cinq millimètres de diamètre, et offrant un développement total de 412 kilomètres, porté sur des poteaux spéciaux et revêtu sur toute sa longueur d'une enveloppe isolante, également imperméable à l'électricité et à l'eau des pluies, conduit le courant aux machines réceptrices et le ramène aux génératrices en fermant le circuit. Les réceptrices, au nombre de deux, installées à Paris, ont la même disposition que la génératrice, sauf les dimensions, qui sont un peu moindres. Elles sont destinées à opérer divers travaux : 1° produire l'éclairage électrique de la gare du Nord; 2° donner le mouvement à une série de machines-outils dans les ateliers du chemin de fer; 3° enfin alimenter le réservoir à accumulateur du système hydraulique installé à la gare des mar-

chandises. Ces divers travaux réunissent à peu près les conditions les plus variables du travail industriel, qui exige tantôt une dépense continue et constante de puissance motrice, tantôt une dépense intermittente, procédant par à-coup, et comprenant des efforts très énergiques, avec des intervalles de repos irrégulièrement distribués. Cette grande expérience, quel qu'en soit le résultat définitif, fournira assurément de précieux renseignements, non seulement au point de vue spécial du transport électrique de la puissance motrice, mais aussi à un point de vue scientifique plus général, par l'étude des phénomènes d'une grandeur exceptionnelle qu'elle conduira à observer.

271. On constate dès à présent, par exemple, que le passage du courant à travers une moitié seulement de l'appareil inducteur d'une des machines dynamo-électriques y développe un champ magnétique qui s'étend à une grande distance des armatures métalliques entrant dans la composition de cet appareil. Les objets en fer ou en acier, placés dans ce champ magnétique, s'aimantent aussitôt; on éprouve à les mouvoir une résistance analogue à celle que présenterait un milieu épais et visqueux. Si on les abandonne, et qu'ils ne soient pas trop lourds, ils sont projetés violemment contre l'armature, où ils adhèrent en donnant par leur orientation une idée de la direction des lignes de force. Un ressort d'acier introduit dans le champ magnétique s'aimante; le mouvement d'une montre s'arrête aussitôt. Il est remarquable que l'étendue du champ magnétique soit considérablement restreinte quand on entoure de toute part l'appareil inducteur d'une chemise en fer doux, qui semble jouer le rôle d'un écran pour arrêter la propagation de l'action attractive.

272. Parmi les nombreuses expériences imaginées par M. Marcel Deprez pour montrer tout le parti qu'on peut tirer des courants électriques, nous citerons celle qui consiste à faire mouvoir à volonté, dans un cylindre creux placé verticalement, un cylindre plein, en fer, du poids d'environ 50 kilogrammes.

Le cylindre creux constitue un électro-aimant ; il est entouré de fils métalliques jointifs, isolés les uns des autres, et communiquant tous à un commutateur tellement disposé, qu'on peut amener le courant à la fois dans un certain nombre de fils consécutifs, à l'exclusion de tous ceux qui sont au-dessous ou au-dessus. De cette manière un fragment seul de la hauteur du cylindre est à un instant particulier le siège de courants électriques, et l'on peut, en agissant sur le commutateur, faire varier la situation de ce tronçon électrisé. Le noyau mobile en fer doux, attiré par l'aimantation, suit les déplacements de la région magnétique. Il monte et descend suivant que l'opérateur tourne dans un sens ou dans l'autre la manette du commutateur ; c'est un *servo-moteur électrique*¹. Supprime-t-on brusquement le courant, l'aimantation cesse et le cylindre mobile retombe à la façon d'un marteau-pilon². On le relève ensuite graduellement par le jeu des courants, on modère ou on accélère sa vitesse ; il fonctionne comme un véritable ascenseur.

275. Lorsqu'on fait tourner rapidement une masse métallique dans un champ magnétique d'une grande intensité, il se produit dans cette masse des courants dont la route n'est pas encore bien connue, mais qui tendent à ralentir le mouvement, et auxquels correspond un travail négatif, qui croît proportionnellement au carré de la vitesse. On les appelle *courants de Foucault*. Ils sont négligeables quand la masse mobile est peu considérable, ou que les vitesses sont faibles. Ils augmentent de plus en plus à mesure que ces deux éléments, masse et vitesse, augmentent eux-mêmes. On les a constatés avec une grande intensité dans les premiers essais d'anneau induit des machines dynamo-électriques de Creil. Pour les éviter, ou du moins les réduire au

1. Cf. §§ 211 et 241.

2. Si l'on voulait se servir de cet appareil comme marteau-pilon pour forger des pièces métalliques, il faudrait éviter l'emploi des enclumes en fer ou en fonte, qui pourraient être arrachées par l'aimantation du marteau, ou du moins qui développeraient une résistance lorsque le marteau commencerait à se relever pour frapper un nouveau coup.

point qu'ils puissent passer inaperçus et qu'ils n'absorbent plus en pure perte une fraction appréciable du travail moteur, il a fallu sectionner l'anneau en fer doux de l'induit en fragments très minces, suivant des plans normaux à l'axe de rotation, et séparer les unes des autres les tranches formées par ces sections, en interposant entre deux tranches consécutives un diaphragme isolant.

COMPARAISON DES DIVERS MODES DE TRANSMISSION DU TRAVAIL.

274. Si l'on compare la transmission électrique du travail aux autres procédés qu'on peut employer pour résoudre le problème, on reconnaît que l'électricité permet de franchir des distances beaucoup plus grandes que les autres procédés. On transmet l'énergie au moyen de l'eau sous pression dans le système hydraulique d'Armstrong, qui n'est qu'une extension de la presse hydraulique de Pascal ; la transmission est limitée à l'enceinte d'un dock, d'une gare, d'une petite ville. Le gaz d'éclairage, distribué presque partout aujourd'hui dans les centres de population, donne un autre mode de transport de l'énergie, car il fournit en chaque point où s'ouvre la conduite le combustible nécessaire à la mise en mouvement d'une machine thermique. L'air atmosphérique, comprimé ou dilaté, sert également à transmettre au loin les pressions et le travail. Le réseau pneumatique établi maintenant à Paris permet le transport rapide des dépêches. Toutes ces transmissions sont limitées à un périmètre plus ou moins étendu ; elles supposent une canalisation essentiellement limitée, et le rendement qu'elles assurent décroît très rapidement à mesure que les distances s'allongent. Comme moyen mécanique de transmettre le travail, on possède le câble télodynamique de M. Hirn ; c'est la solution la plus fréquemment employée, principalement dans les montagnes, pour transmettre à des usines plus ou moins éloignées le travail moteur d'une chute

d'eau ; parfois la distance est assez grande pour exiger qu'on la fractionne en plusieurs relais. Le câble télodynamique exige une installation mécanique complète d'un bout à l'autre du parcours, et la masse à mettre en mouvement, les frottements et les autres résistances accessoires grandissent de plus en plus à mesure que la portée de la transmission augmente. Le *transport électrique*, bien qu'il soit certainement influencé dans une certaine mesure par la distance à franchir, bien qu'il exige tout le long du parcours des installations particulières comme fil et comme supports, permet de franchir des distances de 50 kilomètres et au delà, en laissant comme travail disponible le tiers au moins du travail moteur.

APPAREIL RÉGULATEUR DE LA TRANSMISSION ÉLECTRIQUE

275. Il se prête facilement à la division du travail moteur entre divers ateliers alimentés par la même machine dynamo-électrique. Nous signalerons à ce propos un dispositif ingénieux, dû à M. Marcel Deprez, qui permet d'atteindre à une grande uniformité de régime pour les diverses machines-outils qui continuent à fonctionner, malgré l'interruption brusque du travail pour les autres du même groupe. En toute rigueur, la solution adoptée par M. Marcel Deprez suppose chaque machine-outil en communication, par un fil spécial, avec la machine génératrice. Mais elle s'applique encore à titre d'approximation lorsque les machines-outils sont toutes montées sur le même fil, pourvu que la résistance propre du fil soit négligeable par rapport à la résistance des machines réceptrices qui y empruntent leur force motrice.

Le dispositif de M. Marcel Deprez consiste essentiellement à placer sur les inducteurs de la génératrice, à côté du fil que doit suivre le courant, un second fil distinct du premier, enroulé de la même manière, mais parcouru par un courant

constant. Pour se rendre compte de l'effet produit par ce courant additionnel, qui contribue comme le courant principal à l'excitation magnétique de l'appareil inducteur, il est utile de recourir au tracé de la ligne que M. Deprez appelle *caractéristique*, et que l'on obtient en prenant, à des échelles arbitraires, pour abscisses les valeurs de l'intensité I du courant, et pour ordonnées correspondantes les valeurs de la force électromotrice E ; cela suppose que l'on fasse tourner l'anneau à une vitesse V déterminée, pendant que les inducteurs deviennent le siège d'un courant d'intensité I , fourni par une source d'électricité étrangère au jeu de la machine. Si l'on conserve la vitesse V , et qu'on fasse varier I , la force électromotrice E variera, et l'on pourra construire par points la caractéristique, en déterminant par une série d'expériences les valeurs correspondantes de I et de E . Si ensuite on change la vitesse et qu'on lui donne une nouvelle valeur V' , il suffira, pour avoir la nouvelle caractéristique, d'amplifier les ordonnées dans le rapport des vitesses $\frac{V'}{V}$, puisque à intensité égale il y

a proportionnalité entre la vitesse de l'anneau et le travail produit, qui est lui-même proportionnel à la force électromotrice.

Lorsqu'on étudie expérimentalement cette ligne des forces électromotrices en fonction des intensités, on reconnaît qu'elle commence par présenter une forme sensiblement rectiligne ; plus loin elle se courbe, et se rapproche indéfiniment d'une droite horizontale, qui est son asymptote ; de telle sorte que, la vitesse restant la même, la force électromotrice ne croît pas indéfiniment avec l'intensité, et tend vers une limite finie, qui correspond à une sorte d'état de saturation magnétique des inducteurs. Dans la portion utile de l'épure, la caractéristique est sensiblement droite.

La résistance R du circuit est égale à $\frac{E}{I}$ d'après la loi d'Ohm ; elle est donnée sur la figure par le rapport de l'ordonnée à l'abscisse.

276. Appliquons la construction de la caractéristique AB à une machine dont les inducteurs soient formés de deux fils distincts, dont l'un soit parcouru par un courant constant. Soit OO' l'intensité de ce courant. S'il existait seul, il en résulterait dans le circuit principal une force électromotrice $O'D$. Nous supposons que la caractéristique de la machine soit, à partir de ce point D , sensiblement rectiligne. Pour une autre intensité $O'H$, somme de l'intensité OO' du courant accessoire et de l'intensité propre $O'H$ du courant principal, la force électromotrice correspondante sera l'ordonnée HK de la caractéristique. Mais la résistance totale du circuit principal n'est pas ici déterminée par le rapport $\frac{HK}{OH}$ de la force électromotrice totale à l'intensité totale, mais bien par le rapport $\frac{HK}{O'H}$ de la force électromotrice totale à l'intensité $O'H$, telle qu'elle existe dans le courant principal seul. Cette résistance se décompose d'ailleurs en deux parties : l'une est la résistance propre r de la machine dynamo-électrique; on peut la représenter par le rapport $\frac{LH}{O'H}$ d'une certaine force électromotrice LH à l'intensité $O'H$ du courant qui parcourt le fil enroulé sur les inducteurs. Le reste LK de la force électromotrice représente le travail disponible pour le reste du circuit, et est proportionnel à la chute de potentiel entre les bornes de la machine. Le travail transmis sera donc constant, malgré les variations de l'intensité $O'H$, si les deux droites AB et $O'L$ sont parallèles. De ces deux droites, la première représente par ses ordonnées les forces électromotrices totales, la seconde la partie de ces forces qui est consommée par la résistance propre de la machine. Or on a vu qu'un changement

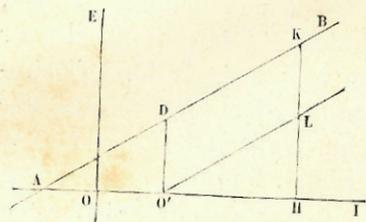


Fig. 155.

soire et de l'intensité propre $O'H$ du courant principal, la force électromotrice correspondante sera l'ordonnée HK de la caractéristique. Mais la résistance totale du circuit principal n'est pas ici déterminée par le rapport $\frac{HK}{OH}$ de la force électromotrice totale à l'intensité totale, mais bien par le rapport $\frac{HK}{O'H}$ de la force électromotrice totale à l'intensité $O'H$, telle qu'elle existe dans le courant principal seul. Cette résistance se décompose d'ailleurs en deux parties : l'une est la résistance propre r de la machine dynamo-électrique; on peut la représenter par le rapport $\frac{LH}{O'H}$ d'une certaine force électromotrice LH à l'intensité $O'H$ du courant qui parcourt le fil enroulé sur les inducteurs. Le reste LK de la force électromotrice représente le travail disponible pour le reste du circuit, et est proportionnel à la chute de potentiel entre les bornes de la machine. Le travail transmis sera donc constant, malgré les variations de l'intensité $O'H$, si les deux droites AB et $O'L$ sont parallèles. De ces deux droites, la première représente par ses ordonnées les forces électromotrices totales, la seconde la partie de ces forces qui est consommée par la résistance propre de la machine. Or on a vu qu'un changement

de vitesse se traduit sur l'épure par une amplification proportionnelle des ordonnées de la caractéristique. Dans cette amplification une droite telle que AB se change en une autre droite, comme si elle basculait autour du point A où elle coupe l'axe des abscisses, tandis que la résistance r de la machine reste la même. Appelons a le coefficient d'inclinaison de la droite AB , et V la vitesse de l'anneau qui correspond à ce coefficient; r désignant la résistance propre de la machine, on choisira une autre vitesse V' telle, que l'on ait

$$a \frac{V'}{V} = r,$$

et alors la nouvelle caractéristique aura l'inclinaison de la droite OL ; le parallélisme sera donc établi, et le problème résolu. A cette vitesse $V' = V \frac{r}{a}$, la différence de potentiel

restera constante dans le circuit extérieur, malgré les variations subies par les résistances que le courant rencontre dans ce circuit. Le choix de l'intensité $O O'$ du courant accessoire dépend au surplus de la différence de potentiel qu'on se propose de réaliser.

277. Des expériences faites en 1881 à l'exposition d'électricité de Paris, renouvelées depuis, notamment à Vizille en 1885, ont justifié très sensiblement cette disposition et cette théorie. Il faut, comme nous l'avons dit en commençant, que la résistance propre du fil soit négligeable vis-à-vis des résistances des machines-outils, sans quoi la constance du travail total n'impliquerait pas nécessairement la constance de chaque travail partiel recueilli par les diverses réceptrices. On lit dans le *Rapport de la commission de Grenoble* (Grenoble, Gabriel Dupont, 1885), à propos des inconvénients de la solidarité des machines montées sur un même circuit :

« Il faut remarquer que cet inconvénient existe pour tout mode de transport de travail, eau, gaz, etc. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de distribuer la force à un certain

nombre de récepteurs hydrauliques, au moyen d'un réservoir d'eau unique. Il est évident que les récepteurs sont indépendants les uns des autres, si l'on maintient le niveau constant dans le réservoir¹, à la condition que chaque récepteur soit alimenté par une conduite spéciale partant du réservoir commun. Mais si, par raison d'économie, on établit une conduite maîtresse sur laquelle viennent s'embrancher les conduites secondaires, il se produira le long de cette conduite des pertes de charge qui varieront avec le nombre des récepteurs mis en action, de telle sorte que les récepteurs ne seront pas absolument indépendants les uns des autres. »

EXTRA-COURANT.

278. Il est rare que les courants produits par une pile électrique soient dangereux. On ne peut pas en dire autant des courants qui sont fournis par une machine dynamo-électrique ou magnéto-électrique, non pas que ces courants soient bien dangereux en eux-mêmes, quand ils suivent régulièrement le circuit qui leur est ouvert. Mais ces machines comportent toujours un grand nombre de spires jointives, formées par le fil replié sur lui-même, et il s'y manifeste, quand on vient à interrompre le courant principal, un *extra-courant* instantané, dû à l'induction exercée par les spires du fil agissant les unes sur les autres, ou à ce qu'on appelle la *self-induction* de la machine. On a proposé divers moyens pour mettre les observateurs à l'abri de cet extra-courant, qui est beaucoup plus dangereux que le courant principal. Nous nous bornerons à mentionner le procédé indiqué récemment par M. d'Arsonval². Il consiste à installer entre les bornes de la machine génératrice une dérivation accessoire, formée par une série de voltamètres à lames de plomb et à eau acidulée,

1. C'est à proprement parler ce que fait le dispositif de M. Marcel Deprez, en maintenant constante la chute de potentiel entre les deux bornes de la génératrice.

2. *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 16 janvier 1885.

en nombre tel que leur *force électromotrice de polarisation*¹ soit toujours supérieure au maximum de la force électromotrice de la machine. Cette dérivation ne détourne aucune fraction du courant principal ; au contraire elle donne passage à l'extra-courant, qu'elle détourne en grande partie du circuit principal. On a comparé avec justesse cette dérivation accessoire, qui appelle une partie de l'extra-courant, aux *matelas d'air* des conduites d'eau : ils ont, comme on sait, pour effet d'atténuer les *coups de bélier* qui tendent à se produire, lorsque la fermeture subite d'un robinet interrompt brusquement le mouvement de la colonne liquide.

279. La transmission du travail à distance n'est pas le seul emploi industriel qu'on fasse aujourd'hui de l'électricité. Les courants électriques trouvent de nombreuses applications, parmi lesquelles nous nous bornerons ici à signaler quelques-unes des plus importantes : production de la lumière électrique, soit par l'arc voltaïque jaillissant librement entre deux charbons, soit à l'aide d'un corps particulier que le courant traverse et porte à l'incandescence ; transmission des signaux et des dépêches, télégraphie ; application aux appareils enregistreurs ; transmission des sons, du chant, de la parole, par le téléphone et les appareils qui en sont dérivés ; allumage à distance des mines et des explosifs ; emploi des courants pour opérer des réactions chimiques, dorure, argenture, galvanoplastie ; applications de l'électricité à la thérapeutique ; application aux chemins de fer, soit pour la traction des wagons, soit pour le serrage des freins (système Achard), etc. Ajoutons que l'électricité paraît jouer un rôle considérable dans la plupart des phénomènes naturels, aussi bien dans les réactions chimiques que dans les phénomènes physiologiques, et dans ceux qu'a en vue la physique du globe.

1. L'action chimique exercée par un courant passant dans un liquide tend à créer une pile électrique, qui produit un courant en sens inverse du premier quand celui-ci cesse d'agir. C'est le phénomène connu sous le nom de *polarisation des électrodes*, et que l'on utilise dans les *appareils accumulateurs*.

INDEX ALPHABÉTIQUE

A

- Accélération angulaire* (théorème de l'— généralisé), p. 28.
Acide carbonique, 160.
Action directe (machine à), 552.
Actions mutuelles des corps tournants, 18 et suiv.; — des courants électriques, 458.
Adiabatique (ligne), 257.
Admission, 275; — anticipée, 542.
Aiguille aimantée, 440.
Aimentation à distance par les machines dynamo-électriques, 445.
 D'ALEMBERT, 598.
Alimentation des moteurs animés, 292.
Aliments plastiques, — respiratoires, 295.
 AMPÈRE, 459.
Ampère (unité), 458.
Ane (travail de l'), 299.
Appareil Ricci, 445; — régulateur de la transmission électrique, 458.
 ARCHIMÈDE, 177.
Arrêt d'une machine, 9.
 D'ARSONVAL, 462.
Attraction, 204.
Aviation, 294, 405.

B

- BAILLE, 458.
Balancier d'un danseur de corde, 65; machine à vapeur à —, 52, 524.
Balistique intérieure, 565.
Ballon dirigeable, 406.
Barométrique (nivellement), 145.

- Battage* des pieux, 512.
Batterie (éléments réunis en), 431.
Belleville (chaudières), 415.
 BENOIST, 457.
 BERNOULLI (Daniel), 205, 208.
Bielle renversée (machine à), 555.
Bobine Siemens, 445.
Boite à étoupes, 515; — de distribution, 520.
 BOUGUER, 192, 401.

C

- CALLETET, 405.
Calorie, 222.
Canon sans recul de Harding, 570.
Capillarité, 124.
Capital, 4.
Caractéristiques de la poudre, 428.
 CARNOT, 14; — (Sadi), 257, 407.
Cataracte, 550.
 CAYÉ, 555.
 CAUCHY, 159.
Cause d'un phénomène, à distinguer de l'occasion, 575.
 CAUTHORNE UNWIN, 589.
Centre de pression, 167; — d'une aire plane, 170; — de percussion, 172; — de poussée, 184; — de carène, 187.
Chaleur, 221 et suiv.; — latente, 221; — spécifique, 222, 261; — de vaporisation, 262; — et travail, 294; — produite par un courant, 455.
Champ magnétique, 445.
Chaudière, 515, 412; — tubulaire, 555; — Field. — Sulzer, 412; — Belleville, 415.

Chemise de vapeur, 519, 415.
Cheval (travail du), 290; — va-
 peur, 4.
 CLAPEYRON, 538, 408.
 CLARKE (machine), 447.
 CLAUDIUS, 240, 278, 408.
 CLÉMENT ET DESORMES, 258.
 CLERK MAXWELL, 455.
Coefficient de contraction, 212.
 COMBES, 277, 552, 554.
Comparaison des modes de transmis-
 sion du travail, 457.
Compressibilité des liquides, 418.
Condenseur, 515.
Conditions relatives aux limites, 465.
Conjonction, 153.
Contrepoids, 66 et suiv.; — pour une
 manivelle à simple effet, 68, 82; —
 pour une manivelle à double effet,
 71; — pour une manivelle double à
 double effet, 75.
Contre-vapeur, 98, 419.
 CORLISS (machine), 414.
 CORNOUILLES (machine de), 528.
 COUCHE, 88.
Coulisse de Stephenson, 545.
 COULOMB (unité), 458.
Coups de collier, 259.
Courants électriques, 450; — de Fou-
 cault, 456.
Création de valeur, 15.
 CYCLES, 228; — directs, inverses, 228;
 — de Carnot, 257, 240, 258.

D

DANIEL (pile de), 450.
 DAVY, 407.
Densité des vapeurs, 265.
 DEPREZ (Marcel), 423, 445; distribu-
 tion de M. —, 548; théorème de
 M. —, 552.
Dépense de combustible par heure et
 par cheval, 411.
Désembrayage partiel d'un groupe de
 corps tournants, 375.
Desiderata de la théorie de la chaleur,
 410.
 DESORTIAUX, 428.
Détente, 275; — dans les machines à
 vapeur, 517; — variable, 544; —
 Meyer, 544; — Farcot, 545; — Mar-
 cel Deprez, 548; — Clapeyron, 538;
 — par échelons, 415.

Détermination d'un volant, 578; —
 d'un contrepoids, 84.
Développement d'une fonction en série
 de sinus et cosinus, 79.
Direction des aérostats, 294.
Discussion de l'équation de l'hydrosta-
 tique, 137, 140.
Distributeur à robinet tournant, ou
 Maudslay, 414.
Distribution à détente fixe, 558; — à
 détente variable, 544 et suiv.; —
 Marcel Deprez, 548.
Double effet (machine à), 515.
 DROUETS, 75.
 DUPRÉ (Athanasie), 507, 425.
 DUPUY DE LÔME, 406.

E

Échappement, 276.
Écoulement en mince paroi, 210; —
 par filets parallèles, 212; — perman-
 ent des gaz, 250; — des vapeurs,
 271.
 EDDY, 409.
Efforts intérieurs auxquels un volant
 est soumis, 59.
Egalité entre le travail moteur et le
 travail résistant, 14; — de pression
 en tous sens dans les fluides par-
 faits, 124.
Électricité, 562, 429 et suiv.
Electro-aimant, 562.
Électrodes, 450; polarisation des —,
 465.
Embrayage alternatif mis en mouve-
 ment par un régulateur, 110.
Emplois divers de l'électricité, 465.
Energie, 442, 449; — potentielle, 572.
Engrenage planétaire, 524.
Entropie, 280.
Épure Fauveau, 542.
Equation des forces vives, 2, 4; dis-
 cussion de l'— des forces vives, 7,
 15; usage de l'— des forces vives
 pour la recherche de la tension des
 liens, 26; — de l'hydrostatique, 156;
 — de l'hydrodynamique, 195, 197;
 — de continuité, 196; — simplifiée
 de l'hydrodynamique, 200; — fon-
 damentales de la théorie de la cha-
 leur, 227; — de Poisson ou de La-
 place, 249; — de Weisbach, 257.
Équilibre de l'atmosphère terrestre;

151; — du prisme droit flottant, 179;
 — relatif d'un liquide pesant tour-
 nant autour de la verticale, 155.
Équivalent mécanique de la cha-
 leur, 225, 226, 251, 252; — calori-
 fique du travail, 226.
Espace mort, ou nuisible, 318.
Établissement du volant dans le cas
 général, 578.
État gazo-liquide, 405; état de satu-
 ration (vapeurs), 120.
Étirage de vapeurs, 415.
 EUDIOMÈTRE, 562.
 EULER (turbine d') 296.
Expérience d'Athanasie Dupré 507; —
 de Vincennes, 291; — de M. Hirn,
 416; — sur le frottement, 425;
 — sur la transmission du travail à
 distance, 452 et suiv.
Extra-courant, 462.

F

Facteurs du travail journalier, 288.
 FARADAY, 404, 441.
 FARCOT, 115, 411, 416.
 FARCOT (détente), 545.
 FAUVEAU, 542.
 FIXES (machines), 7.
Flottant (oscillations d'un corps), 393.
Fluides, 117 et suiv.; — natu-
 rels, 126.
Fonction des vitesses, 198; — carac-
 téristique d'un fluide, 280.
Force en action, force en puissance ou
 potentielle, 288; — électromotrice,
 451; — contre-électromotrice, 451,
Forme de la surface de la mer, 150;
 — de l'eau dans les augets d'une
 roue en dessus, 299.
Formule de M. Gérardin, 218.
 FOUCAULT (courants de), 114.
Fouettement de la bielle, 54.
 FOURNEYRON (turbine), 296, 299.
 FOYER, 516.
 FRANCHOT (machine), 554.
 FREIN, 95 et suiv.; — à bande, 95;
 — de chemin de fer, 94; — Achard,
 — Guérin, — Lefebvre et Doré, —
 Molinos, 98; — à contre-vapeur, 98;
 Westinghouse, — à vide, 99.
 FROMENT, 562.
 FROTTEMENT, 425.

G

Galvanomètre, 440.
 GAY-LUSSAC, 119, 258.
 GAZ, 117 et suiv., 282, 404; — perma-
 nents 118, 150, 247; — pesants,
 150, 144.
Généralités sur les contrepoids, 77;
 — sur les régulateurs, 582.
 GÉRARDIN, 218.
 GOUIN, 87.
 GRAMME (machine), 447.

H

HALSKE, 447.
 HARDING, 370.
Hélice propulsive, 352.
Hélicoptère, 406.
 HELMHOLTZ, 408.
 HIRN, 252, 408.
 HIRSCH, 411, 416, 420.
Homme (travail journalier de l'), 290.
Homogénéité des formules des volants,
 47; — des formules électriques, 453.
 HOSPITALIER, 457.
 HUYGENS, 407.
Hydraulique, 206.
Hydrauliques (moteurs), 295.
Hydrodynamique, 195 et suiv.
Hydrostatique, 127 et suiv.
Hypothèses particulières introduites
 dans les équations de l'hydrodyna-
 mique, 198.

I

Imperfection des régulateurs, 412;
 — du régulateur de Watt, 109, 116.
Impossibilité du mouvement perpé-
 tuel, 10.
Induction, 441.
Influence des masses, 64.
Instinctifs (mouvements), 287.
Intégrabilité de la fonction des forces
 (hydrostatique), 164.
Intégration d'une équation aux déri-
 vées partielles relative au mouvement
 des fluides, 202; — d'une fonction
 de trois variables indépendantes, 157.
Intensité d'un courant électrique, 451.
 ISOTHERME (ligne), 237.
 IVON VILLARCEAU, 88.

- J
- JACOB, 445.
JAMES, 405.
JOULE, 252, 407, 408, 456.
- K
- Kilogrammètre*, 4.
KREBS, 406.
- L
- LAGRANGE, 198.
LAPLACE, 149.
LÉAUTÉ, 589.
LE CHÂTELIER, 88.
Lenoir (moteur), 559, 419.
LÉVY (Maurice), 409, 457.
Liaisons complètes (système à), 1.
Ligne isotherme, — adiabatique, de détente naturelle, de nulle transmission, 237.
Liquéfaction des gaz, 404.
Liquides, 117 et suiv.; — pesants, 129, 142; — superposés, 142.
LOCKE, 407.
Locomotive, 554 et suiv.
Loi de Mariotte, 118; — de Gay-Lussac, 119, 247; — de Meyer ou de Joule, 252; — de Clausius, 240, 242; — d'Ohm, 452; — de Joule (électricité), 456; — de Lenz, 441.
- M
- Machines* (du mouvement dans les), 1 et suiv.; — hydrauliques, 215; — thermiques, — à vapeur, 511; — de Papin, 511; — de Newcomen, 515; — de Watt, 514 et suiv.; — atmosphérique, 515; — de Froment, 562; — Corliss, 414; — de Woolf à deux cylindres, 525; — de Cornouailles, 528; — à air chaud, 554; — Otto, 418; — à action directe, 552; — de navigation, 552; — oscillante de Cavé, 535; — à fourreau, 554; — Gramme, 447; — magnéto ou dynamo-électriques, 446; — génératrices, — réceptrices, 447.
Magnétisme rémanent, 448.
Manivelle simple à simple effet (volant pour une), 57; — simple à dou-
- ble effet, 41; — double à double effet, 45.
Marée, 152.
MAREY, 405.
MARIOTTE, 118.
MASCART, 437.
MASSIEU, 280, 410.
MASSON, 258.
MAVER ou Meyer, 252, 406, 408.
Mélange de gaz pesant, 158; — de vapeur et d'eau liquide, 266.
Métacentre, 192, 400.
Méthode de Bezout, 81; — générale pour l'établissement d'un volant, 48; — pour la solution du problème de l'hydrostatique, 155.
MEYER ou Mayer, 252, 406, 408.
Meyer (détente), 544.
MEYER (Van), 428.
Mise en train d'une machine, 8.
Mobile (machine), 7.
Monte-charge, 291.
Morte-eau, 155.
Moteur hydraulique, 295; — animé, 287; — Lenoir, 559, 419; — Hugon, 562; — Marcel Deprez, 445.
Moulin à vent, 506.
Mouvement du système planétaire, 10; — perpétuel, 11 et suiv.; — instinctif, — volontaire, 287.
Mulet (travail du), 290.
- N
- NAVIER, 289.
Navigation (machines de), 552.
DE NERVILLE, 457.
NEWTON, 204.
NIAUDET, 450.
Nivellement barométrique, 145.
NOLLAU, 88.
- O
- Obliquité de la bielle* (influence de l').
Occasion d'un phénomène, 575.
Ohm (loi d'), 457; —, unité électrique, 457.
Oiseau (vol de l'), 294.
OLSZEWSKI, 405.
On perd en force ce qu'on gagne en vitesse, 15.
Opposition, 153.

CHAPITRE III.

<i>Des machines à vapeur et autres machines thermiques</i>	511
Machine de Papin	511
— de Newcomen	515
— de Watt	514
— de Cornouailles	528
Machines de navigation	552
Locomotive	554
Mécanisme de la distribution	558
Machine à air chaud	554
Moteur Lenoir	559
Machine de Froment	562
Poudre à canon	564

ADDITIONS.

Effet du désembrayage partiel d'un groupe de corps tournants	575
Calcul de l'établissement d'un volant dans le cas général	578
Généralités sur les régulateurs	582
Régulateur à ailettes	589
Petites oscillations d'un corps flottant	595
Définition du métacentre	400
Condition de stabilité d'un parallépipède rectangle flottant	402
Liquéfaction des gaz	404
Sur l'aviation et la direction des aérostats	405
Sur la théorie mécanique de la chaleur	406
Sur les perfectionnements récents de la machine à vapeur	411
Machine Otto	418
Contre-vapeur	419
Nouvelles expériences sur le frottement	425
Sur l'expérience de M. Athanase Dupré	425
Sur la poudre et les corps explosifs	428
De l'électricité et de ses applications mécaniques	429
Unités électriques	457
Actions mutuelles des courants	438
Induction	441
Moteurs électriques	443
Machine Gramme	447
Transmission du travail à distance	449
Appareil régulateur de la transmission électrique	458
Extra-courant	462
Index alphabétique	465

Orifice suivi d'un coursier, 215; — noyé, 214.
Oscillations d'un corps flottant, 593.
Otto (machine), 418.

P

PAPIN, 511.
Parallélogramme articulé, 524.
Parfait (liquide, solide, gaz), 121, 124.
Paroi rectangulaire, 168.
 PAVEN, 295
Perfectionnements de la machine à vapeur, 411.
Périodes dans la distribution de la machine à vapeur, 559.
Perte de poids, 178; — de charge, 207.
Petit tiroir, 522.
Petites oscillations des fluides, 201; — d'un corps flottant, 593.
Phases du mouvement d'une machine, 8.
 PICTET, 405.
Pile électrique, 450; — de Daniell, 450.
Pixii (machine), 447.
Plan de charge, 207; — de commutation, 445.
Polarisation des électrodes, 465.
Pôles d'une pile, 450.
Pompe à feu, 313; — alimentaire, — aspirante ou à air, — à eau, dans les machines à vapeur, 516.
 PONCELET, 103.
Postulatum sur lequel repose le second principe de la théorie mécanique de la chaleur, 409.
Potentiel, 204; — électrique, 456.
Potentielle (force), 288.
Poudre à canon, 564, 428.
Poussée d'un fluide, 178.
Pression dans un fluide, 121, 123; — sur une paroi, 166; — d'une veine fluide contre un plan indéfini, 504; — de la vapeur dans les machines, 411.
Principe de la paroi froide, 514.
Problème de l'établissement d'une machine, 5; — de l'hydrostatique, 127 et suiv.; — auquel donne lieu l'établissement d'une chaudière tubulaire à profil circulaire, 415.

Q

Quantité de chaleur, 222; — d'électricité, 455.

R

RAMOND, 149.
 RANKINE, 408.
Rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz, 257.
Ration d'entretien, — de travail, 295.
Recouvrements (tiroir à), 538.
Régime d'une machine, 7, 8; — permanent des fluides, 205.
 REGNAULT, 258.
Régulateur, 582; — à boules ou de Watt, 99, 524, 584; — astatique, 116; — Farcot, à bras croisés, 115; — Foucault, 114; — parabolique, 111; — à ailettes, 589.
 RENARD, 406.
Rendement d'une machine, 10; — des machines thermiques, 258; — électrique, mécanique des transmissions électriques, 450.
Représentation des pressions par une colonne de liquide, 145.
 RESAL, 88.
Résistance d'un circuit, 451; — des milieux, 571.
Résistances passives, 6.
Réversible (cycle), 250, 278; la machine Gramme est —, 449.
 ROLLAND, 589.
Roue hydraulique, 295; — en dessous, 296; — en dessus ou à augets, 298; — à aubes (navigation), 552.
 RUMFORD, 407.
 S
 SADI-CARNOT, 237, 407.
 SARRAU, 428.
Section contractée, 210.
 SEGUN, 407.
Self-induction, 462.
Servo-moteur de Farcot, 416; — électrique, 456.
Siemens (étalon), 457; — (machine), 447.
Solénoïde, 459.

Soupage d'admission, — d'équilibre, — d'échappement, 529.
Stabilité des machines obtenue à l'aide de contrepoids, 87; — des locomotives, 88; — des machines marines, 92; — de l'équilibre des liquides superposés, 182; — des corps plongés, 183; — des corps flottants, 184; — d'un parallépipède rectangle flottant, 402.
Stephenson (coulisse de), 545.
Sulzer (chaudière), 412.
Surface de niveau, 151, 141; — fermée, pressée uniformément en tous ses points, 176.
Système à liaisons complètes, 1; — Compound, 415.

T

Température, 221, 246, 410.
Tension des liens dans les machines, 2, 16 et suiv.; — d'une bielle à action directe, 28, 50; éléments de pile réunis en —, 451; — électrique, 456.
Terre, 4.
Théorème de d'Alembert, 5; — de l'accélération angulaire généralisée, 28; — d'Archimède, 177; — de Clausius, 278; — de Daniel Bernoulli, 205, 208; — de Torricelli, 210.
Théorie du régulateur à force centrifuge, 105; — mécanique de la chaleur, 222 et suiv., 406 et suiv.
Thomson, 408.
Tiroir, 519; — en D, 520; petit —, 522; — superposés, 414.
Toricelli, 211.
Tranche immobile, 566.
Transmission des pressions dans les fluides, 128; — du travail dans les machines hydrauliques, 215, 218; — du travail à distance, 449, 457.
Transport horizontal des fardeaux, 292.
Travail (notion du), 4; — moteur, — utile, — des résistances passives, — de la pesanteur, 6; — des pressions exercées par une masse gazeuse qui

se déforme, 174; — dans la machine à vapeur, 274; — journalier d'un moteur animé, 290.
Triangle (centre de pression du), 169.
Tube d'inversion, 99.
Turbine, 295 et suiv.

U

Unité de travail, 5; — électriques, 437.
 UPMANN, 428.
Utile (travail), 15.

V

Vapeurs, 119, 261, 285; — saturées, 265.
Vases communicants, 165.
Viscosité, 121, 125.
Vitesse initiale du boulet sortant de la pièce, 569; — de la lumière, 435.
Vive eau, 155.
Vires in actu, vires in posse, 288.
Volant, 55 et suiv.; — d'outil, 57, 62; — pour une machine à balancier, 52; établissement d'un — dans le cas général, 48, 578.
Volontaires (mouvements), 287.
Volt (unité), 458.
Volume spécifique, 227.

W

WATT, 99, 411.
Weyer et Richmond (machine de MM.), 416.
 WHEATSTONE, 447.
Wheelock (machine), 416.
 WILDE, 447.
Woolf (machine de), 525, 415.
 WROBLEWSKI, 405.

Z

Zéro absolu des températures, 226.
 ZEUNER, 265, 272.

TABLE DES MATIÈRES

SUITE DE LA DYNAMIQUE

LIVRE V.

Du mouvement dans les machines.

CHAPITRE PREMIER.

<i>Discussion de l'équation des forces vives</i>	1
Impossibilité du mouvement perpétuel	11

CHAPITRE II.

<i>Recherche des tensions des liens dans les machines en mouvement</i>	16
Actions mutuelles des corps tournants	18
Tension de la bielle d'une machine à action directe	28

CHAPITRE III.

<i>Des volants</i>	55
Méthode générale pour l'établissement d'un volant	48
Volants d'outils	62

CHAPITRE IV.

<i>Des contrepoids</i>	66
Généralités sur les contrepoids	77
Détermination pratique d'un contrepoids pour une machine quelconque	84
Stabilité des locomotives	87

CHAPITRE V

<i>Des freins et des régulateurs.</i>	95
Régulateur de Watt.	99
Régulateurs à équilibre indifférent.	111

LIVRE VI.

Mécanique des fluides.

<i>Introduction.</i>	117
------------------------------	-----

CHAPITRE PREMIER.

<i>Hydrostatique.</i>	127
Méthode directe.	155
Nivellement barométrique	145
Marées.	152
Pression sur une paroi.	166
Théorème d'Archimède	177
Stabilité de l'équilibre des corps flottants.	184

CHAPITRE II.

<i>Hydrodynamique.</i>	195
Régime permanent. Théorème de Daniel Bernoulli	205
Travail dans les machines hydrauliques.	215

CHAPITRE III.

<i>Principes de la théorie mécanique de la chaleur.</i>	221
Représentation des cycles	228
Loi de Meyer ou de Joule.	252
Cycle de Carnot.	257
Loi de Clausius.	240
Application aux gaz.	247
Rendement des machines thermiques	258
Application aux vapeurs.	261
Travail dans les machines à vapeur.	274
<i>Note.</i> Théorème de Clausius.	278
Fonction caractéristique d'un fluide	280

LIVRE VII.

Des moteurs.

CHAPITRE PREMIER.

<i>Des moteurs animés.</i>	287
------------------------------------	-----

CHAPITRE II.

<i>Des moteurs hydrauliques.</i>	295
Pression d'une veine fluide sur un plan.	304

12 090. — PARIS. — IMPRIMERIE A. LAHURE

9, Rue de Fleurus, 9



