121 Rua de S José 121

LIVRARIA DE DEMOCRATICA

J. LOPES DE SOUZA

COMPRAM-SE E VENDEM-SE LIVROS

Encontra-se nesta casa por modicos preços grande sortimento de livros, tanto collegiaes como de litteratura, sciencias, etc., etc.

RIO DE JANEIRO

121 F
L
J.
COMP
Encontra-
sortimento

ÉLÉMENS
DE STATIQUE,

SUIVIS DE

TROIS MÉMOIRES

SUR LA COMPOSITION DES MOMENS ET DES AIRES; SUR LE PLAN INVARIABLE DU SYSTÈME DU MONDE, ET SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

PAR L. POINSOT,

Membre de l'Institut de France, Officier de l'Ordre royal de la Légion-d'Honneur, etc.

Ouvrage adopté pour l'Instruction publique.

SIXIÈME ÉDITION,

REVUE ET CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE.

F. N. FILOSOFIA
BIBLIOTECA
684/147
FAC. II

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1834.

I.F. U.F.R.J.
BIBLIOTECA
REGISTR. 151
DATA 1-4-69

TABLE

DES MATIÈRES.

N. B. On a marqué d'une étoile les principaux articles qui ne sont pas exigés pour l'admission à l'École Polytechnique.

PRÉLIMINAIRE, page 1

CHAPITRE Ier, SECT. Ire. *Composition et décomposition des forces*, 15

Composition des forces qui agissent suivant des directions parallèles, 21

Composition des forces dont les directions concourent en un même point, 35

SECT. II. *Composition et décomposition des Couples*, 47

Transformation des couples; leur mesure, 52

Composition des couples situés sur un même plan, ou dans des plans parallèles, 56

Composition des couples situés dans des plans quelconques, 58

Manière plus simple d'exprimer les théorèmes qui concernent la composition des couples, 65

Parallélogramme des couples, page 69

Conclusion générale de ce chapitre, 76

Composition des forces dirigées comme on voudra dans l'espace, *ibid.*

Corollaire qui contient les lois de l'équilibre de tout système libre invariable de figure, 78

Corollaire qui contient la condition nécessaire pour que des forces situées d'une manière quelconque dans l'espace aient une résultante unique; 80

Remarques, 83—89

CHAP. II. *Des Conditions de l'équilibre, exprimées par des équations*, 90

De l'Équilibre des forces parallèles qui sont situées dans un même plan, 91

De l'Équilibre des forces parallèles qui agissent sur différens points d'un corps dans l'espace, 97

Du centre des forces parallèles, 103

De l'Équilibre des forces qui agissent dans un même plan suivant des directions quelconques, 104

* Manière plus simple de présenter les conditions précédentes, 109

* Des Conditions de l'équilibre entre tant de forces que l'on voudra, dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, 118

* Recherche de la résultante de toutes ces forces, lorsqu'elles ne sont pas en équilibre, 131

* Équation de condition pour qu'elles soient susceptibles de se réduire à une seule, 133

* Dans le cas général, réduction de toutes les forces à une seule passant par un point donné, et à un

couple unique : détermination de cette résultante, et de ce couple résultant, page 136

* Expression directe de la condition nécessaire pour qu'il y ait une résultante unique, 137

* Nouvelles Remarques sur ce point de la composition des forces, 139

* Équations nécessaires pour que des forces aient une résultante unique qui passe par un point donné, 145

* Manière d'estimer des forces quelconques suivant une direction donnée, ou leurs momens par rapport à un axe donné, lorsqu'on connaît déjà ces forces et leurs momens estimés par rapport à trois axes rectangulaires, *ibid.*

Des Conditions de l'équilibre lorsque le corps ou système sur lequel les forces agissent n'est pas entièrement libre dans l'espace, mais se trouve gêné par des obstacles, 149

* De l'Équilibre d'un corps qui n'a que la liberté de tourner en tous sens autour d'un point fixe, 150

* De la Pression exercée par les forces sur le point fixe, 153

* De l'Équilibre d'un corps qui n'a que la liberté de tourner autour de la ligne qui joint deux points fixes, 154

* Des Pressions exercées sur les deux points fixes, 157

* De l'Équilibre d'un corps qui s'appuie contre un plan inébranlable, 160

* Des Pressions exercées sur les points d'appui, 165

* Solution du paradoxe relatif à ces pressions, 167

* D'un Corps appuyé sur plusieurs plans, 171

CHAP. III. *Des Centres de gravité*, 173

Définitions, théorèmes généraux sur la détermination du centre de gravité, page 173—188
Des Centres de gravité des figures, 188
Du Centre de gravité du triangle, du trapèze, etc., 192
Du Centre de gravité de la pyramide, du tronc, etc. 201
* Propriétés générales du centre de gravité, 215

CHAP. IV. *Des Machines.* 233

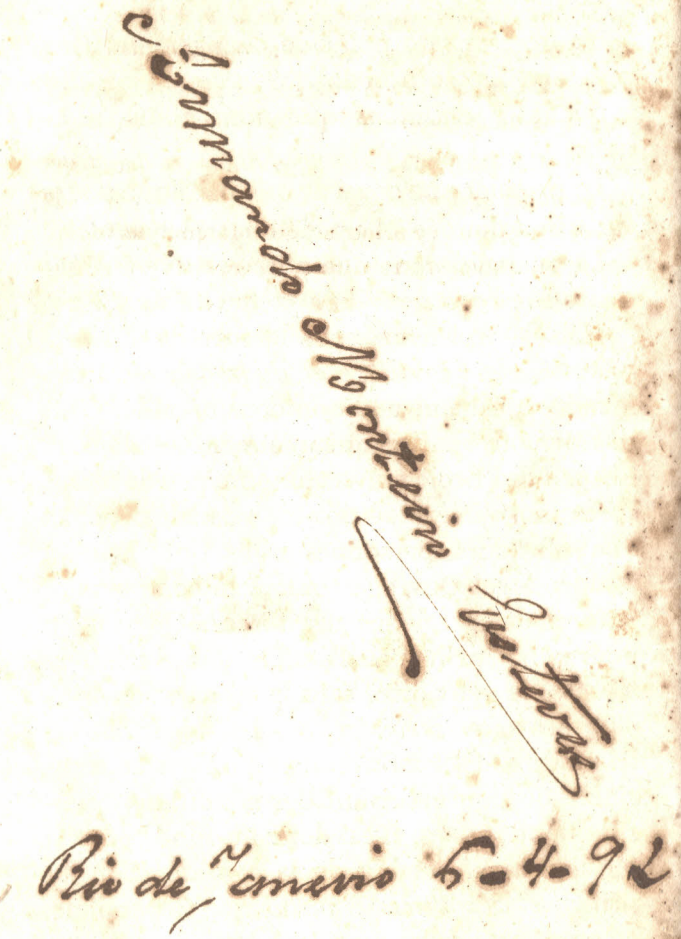
Définition générale des machines, *ibid.*
Du Levier, 238
De la Charge du point d'appui, 240
De la Balance, 248
De la Romaine, 251
Du Peson, 255
De la Poulie, 259
Du Tour, 261
Des Pressions exercées sur les appuis, 265
Du Plan incliné, 269
De la Pression exercée sur le plan, 272
Applications à quelques exemples, 277
De la Vis, 286
Du Coin, 292
De quelques Machines composées, 295
Des Cordes, 297
* De la Chaînette, 309
Des Poulies et des Mouffles, 314
Des Roues dentées, 319
Du Cric, 320
De la Vis sans fin, 321
* Du Genou, 322
* De la Balance de *Roberval.* 331

Mémoire *sur la composition des Momens et des Aires,* page 341
Note *sur le double mouvement de la Terre,* 379
Mémoire *sur la théorie et la détermination de l'équateur du système du monde,* 385
Addition au Mémoire qui précède, 419

THÉORIE GÉNÉRALE *de l'équilibre et du mouvement des systèmes.* 427
Note I. Sur un principe de la théorie précédente, 467
Note II. Démonstration du principe *des vitesses virtuelles,* 473

Note II. sur un point [illegible] de la théorie
de la page 427 de cette édition,
ou bien pag. 427, 2e édition, 1848.
Théorie nouvelle de la rotation des corps,
pag. 485, 2e édition, 1848.

FIN DE LA TABLE.



AVERTISSEMENT.

On ne trouvera point de changemens dans cette sixième édition de la *Statique* : mais il y a quelques *additions* que nous allons indiquer.

La première ne consiste que dans une petite extension donnée à l'article de la *chaînette ;*

La seconde, dans une note relative au Mémoire sur l'*équateur* du système du monde :

Mais la troisième, sous le titre de *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des Systèmes*, est une addition considérable. C'est un Mémoire entier qui a été inséré dans le Recueil de l'École polytechnique, peu de temps après la première édition de nos Élémens, et que plusieurs personnes nous ont invité à joindre à cet Ouvrage comme le complément naturel de la science des forces. On y a eu pour objet principal d'établir d'une manière *directe*, je veux dire, sans le secours du principe des *vitesses virtuelles*, les équations de l'équilibre et du mouvement d'un système variable de figure suivant des conditions quelconques données. C'est donc au fond toute la Mécanique affranchie de la considération du principe *des vitesses virtuelles*. Cependant, comme ce principe peut être utile dans les applications, on a cru devoir en donner (Note II),

une démonstration approfondie et qui met le Théorème dans un nouveau jour.

Cet écrit demande une lecture attentive : il est un peu serré ; mais aucune des idées essentielles n'y manque, et le lecteur n'aura pas de peine à les développer. Je n'ajouterai qu'un mot relatif à l'article III, où l'on démontre que les forces capables de l'équilibre, sur un système défini par plusieurs équations, ne sont que les composées de celles qui se feraient séparément équilibre en vertu de chacune de ces équations. Je ferai remarquer que la chose pourrait se voir encore d'une autre manière, en ne considérant d'abord que le cas de deux équations pour la liaison des points du système ; puis celui de trois équations, etc. : ou bien encore, qu'on pourrait tout d'un coup réduire le cas général à celui où les points ne sont liés que par une *seule équation*, mais avec des indéterminées λ, μ, ν, etc., comme on l'a fait dans la note II relative à la démonstration du principe *des vitesses virtuelles*.

ÉLÉMENS
DE STATIQUE.

PRÉLIMINAIRE.

I.

1. L'idée que nous avons des corps est telle, que nous ne supposons pas qu'ils aient besoin de mouvement pour exister. Ainsi, quoiqu'il n'y ait peut-être pas dans l'univers une seule molécule qui jouisse d'un repos absolu, même dans un temps limité très court, nous n'en concevons pas moins clairement qu'un corps peut exister en repos.

Mais si ce corps est une fois en repos, il y demeurera toujours, à moins qu'une cause étrangère ne vienne l'en tirer : car, comme le mouvement ne peut avoir lieu que dans une certaine direction, il n'y aura pas de raison pour que le corps se meuve d'un côté plutôt que de tout autre ; et par conséquent il ne se

mouvra point. Donc, si un corps en repos vient à se mouvoir, on peut être assuré que ce n'est qu'en vertu d'une cause étrangère qui agit sur lui. Cette cause, quelle qu'elle soit, qui ne nous est connue que par ses effets, nous l'appelons *force* ou *puissance*.

La force est donc une cause quelconque de mouvement.

II.

2. Sans connaître la force en elle-même, nous concevons encore très clairement qu'elle agit suivant une certaine direction, et avec une certaine intensité.

Nous acquérons presque en naissant l'idée de la direction de la force et de son intensité. Le sentiment de la pesanteur qui nous sollicite toujours du même côté, la vue d'un corps qui tombe ou qui reste suspendu au bout d'un fil, la différence des poids que la main éprouve, et une foule d'autres phénomènes aussi simples, nous donnent une idée de la direction et de l'intensité de la force, aussi incontestable que celle de notre existence.

Ainsi, nous regarderons comme évident que *toute force agit au point où elle est appliquée, suivant une certaine direction et avec une certaine intensité.*

III.

3. Maintenant, si nous représentons les directions des forces par des lignes droites, et leurs intensités par des longueurs proportionnelles prises sur ces lignes, ou par des nombres, il est clair que les forces pourront être soumises au calcul comme toutes les autres grandeurs; et de là résulte ce problème général dont la solution est l'objet de la Mécanique :

Un corps ou système quelconque de corps étant sollicité par de certaines forces données, trouver le mouvement que ce corps prendra dans l'espace.

Et réciproquement : *Quelles doivent être les relations des forces qui agissent sur un système, pour que ce système prenne dans l'espace un mouvement donné;* ce qui est au fond la même question que la précédente.

4. Pour résoudre ce problème général, on commence par résoudre ce cas particulier où l'on demanderait quelles doivent être les relations des forces, pour que le système auquel elles sont appliquées prenne un mouvement égal à zéro, c'est-à-dire demeure en équilibre. Ce problème une fois résolu, il est très facile d'y ramener l'autre; et voilà pourquoi l'on

commence ordinairement l'étude de la Mécanique par celle de la Statique, qu'on définit la *science de l'équilibre des forces*.

L'autre partie de la Mécanique traite ensuite de toutes les questions qui se rapportent au mouvement des corps; elle s'appelle *Dynamique*, ou science du mouvement. Mais nous ne nous occuperons ici que de la science de l'équilibre.

IV.

5. Remarquez d'abord que dans la Statique proprement dite, il n'est pas nécessaire de connaître l'effet actuel des forces sur la matière, c'est-à-dire les divers mouvemens qu'elles sont capables de lui imprimer, eu égard à leurs intensités et à leurs directions; mais qu'il suffit de considérer les forces comme de simples grandeurs homogènes, et par conséquent comparables, et d'assigner les rapports qui doivent exister entre elles pour qu'elles se détruisent mutuellement. Lorsque l'on passe de la théorie de l'équilibre à celle du mouvement, il faut de nouveaux principes sur l'évaluation des forces; car, ne calculant plus alors que leurs effets, il faut savoir les y rapporter : estimer, par exemple, si une force double produit sur le même corps une vitesse double, ou si la même force, appliquée à un corps de masse double, produit

une vitesse deux fois moindre; etc. Mais ici, quelle que soit l'action des forces sur les corps, que les forces soient proportionnelles ou non à leurs effets sensibles, les vérités que nous allons exposer n'en subsisteront pas moins, parce que ces vérités résultent de la seule présence actuelle de plusieurs forces qui n'obtiennent aucun effet, mais qui se détruisent avec évidence : de sorte que l'état d'équilibre des corps reste comme un moment singulier de l'état de mouvement, où la mesure des forces par leurs effets, et leurs effets mêmes ont disparu.

6. Rigoureusement parlant, un corps en équilibre est dans le même état que s'il était en repos; car l'effet des forces étant anéanti pour toujours, ou s'anéantissant à chaque instant, si les forces sont sans cesse renaissantes, tout corps en équilibre est actuellement capable de se mouvoir en vertu d'une certaine force donnée, absolument comme il se serait mu en vertu de la même force, s'il eût été en repos. Cependant on peut distinguer l'équilibre d'avec le repos, en ce que, dans le second cas, le corps n'est sollicité par aucune force, au lieu que, dans l'autre, il est sollicité par des forces qui s'entre-détruisent.

Cette distinction, qui est nulle dans l'état rigoureux des choses, devient sensible dans les équilibres que la nature nous offre : presque aucun corps n'est exactement en équilibre ; et lorsqu'il nous paraît dans cette situation, il existe néanmoins entre les forces qui le sollicitent une lutte perpétuelle qui le fait osciller infiniment peu, et le ramène continuellement à une position unique qu'il abandonne toujours. Mais, *dans la solution mathématique des problèmes, on doit regarder un corps en équilibre comme s'il était en repos ; et réciproquement, si un corps est en repos, ou sollicité par des forces quelconques, on peut lui supposer appliquées telles nouvelles forces qu'on voudra, qui soient en équilibre d'elles-mêmes, et l'état du corps ne sera point changé.*

On verra bientôt de nombreuses applications de cette remarque.

V.

7. Ces notions préliminaires étant posées, voyons comment on peut procéder à la recherche des conditions de l'équilibre pour un système quelconque de corps, de figure invariable, sollicité par des forces quelconques P, Q, R, S, etc., appliquées en des points donnés a, b, c, d, etc., du système.

On supposera d'abord que tous les corps sont sans pesanteur, c'est-à-dire tels qu'ils seraient s'ils existaient seuls dans l'espace ; de sorte qu'il n'y aura plus à considérer que les efforts des seules forces appliquées P, Q, R, S, etc., qui devront se contre-balancer mutuellement dans le cas de l'équilibre.

Ensuite il est facile de voir qu'il suffira de trouver les conditions de l'équilibre pour le simple système des points d'application a, b, c, d, etc., regardés comme un assemblage de points liés entre eux d'une manière invariable.

En effet, si l'on désigne par a', b', c', d', etc., les mêmes points a, b, c, d, etc., du système, mais considérés seulement comme des points unis par des lignes droites, rigides et inextensibles, et si l'on suppose que les forces P, Q, R, S, etc., les maintiennent en équilibre, il est évident que les mêmes forces P, Q, R, S, etc., maintiendront aussi le système en équilibre ; car on pourrait imaginer que le système a été placé sur les points a', b', c', d', etc., de manière que les points a, b, c, d, etc., coïncident actuellement avec eux. Le système étant laissé en repos dans cette situation, l'équilibre des points a', b', c', d', etc., ne sera point troublé. Mais il est clair que l'équilibre subsisterait en-

core, si, au lieu de supposer les points a et a', b et b', c et c', etc., coïncidens, on les supposait unis d'une manière invincible, de sorte que a ne pût se séparer de a', b de b', c de c', et ainsi des autres: d'où il résulte que les conditions de l'équilibre entre des forces P, Q, R, S, etc., appliquées à un système quelconque de corps, sont les mêmes conditions qui auraient lieu entre les mêmes forces P, Q, R, S, etc., appliquées au simple système des points d'application a, b, c, d, etc., liés entre eux d'une manière invariable.

Ainsi, lorsque l'on cherchera les relations de certaines forces qui se font équilibre autour d'un système quelconque solide, on pourra faire abstraction de tous les corps du système, et supposer qu'il ne reste plus que les points d'application a, b, c, d, etc., qu'on imaginera liés entre eux de manière à ne pouvoir changer leurs distances mutuelles.

D'après ces considérations, l'on dégage du problème et le poids et le volume des corps, et la question devient plus simple.

Par la suite, nous rendrons aux corps leur pesanteur, et nous aurons égard à leurs poids respectifs, comme à de nouvelles forces qu'il faudrait combiner avec les autres, pour avoir l'équilibre. Nous pourrons, de cette manière, appliquer les résultats de la Statique à l'équilibre des corps naturels qui sont tous pesans.

VI.

8. Maintenant, puisqu'il ne reste plus à considérer dans l'équilibre des forces que trois choses, savoir: leurs intensités, leurs directions et leurs points d'application, il est visible que les conditions de l'équilibre ne sont autre chose que les relations mutuelles qui doivent exister entre ces trois choses, pour que l'équilibre ait lieu dans le système. Or, on peut déjà comprendre, et l'on verra bientôt que ces relations peuvent être exprimées par des équations où l'on ferait entrer immédiatement les intensités des forces, leurs directions, au moyen des angles qu'elles forment avec des droites fixes dans l'espace, et leurs points d'application, au moyen des coordonnées qui en déterminent les positions respectives.

C'est ainsi qu'on peut se faire une idée du problème de la Statique, et se mettre au fait de l'état de la question.

Mais on pourra observer que, dans tout ce que nous venons de dire, il ne s'agit que d'un corps libre dans l'espace, tandis que l'on conçoit bien qu'un corps pourrait être assujetti à

de certaines conditions, comme, par exemple, de tourner autour d'un point ou d'un axe fixe, de s'appuyer constamment sur une surface impénétrable, etc. Mais on verra par la suite que les résistances qu'un corps éprouve à cause des conditions étrangères qui l'assujettissent, peuvent toujours être remplacées par des forces convenables, et qu'après cette substitution de forces à la place des résistances, le corps peut être regardé comme libre dans l'espace; ainsi il était inutile de compliquer au commencement la question.

VII.

9. Pour découvrir actuellement la route qui peut nous conduire aux conditions de l'équilibre, représentons-nous un corps ou système tenu en équilibre par des forces quelconques P, Q, R, S, etc., dirigées comme on voudra dans l'espace.

Puisque toutes ces forces se font équilibre, on voit que l'une quelconque d'entre elles, la force P, par exemple, s'oppose seule à l'action de toutes les autres Q, R, S, etc.; d'où il paraît que l'effet de ces dernières est de solliciter le système absolument comme une simple force égale et contraire à la force P.

C'est en effet ce qui a lieu, et ce qu'on peut porter à la dernière évidence au moyen de la remarque précédente (6), et de cet axiome, que deux forces égales et opposées se font nécessairement équilibre (12).

Car, supposons que l'on applique au système une force P′ parfaitement égale et contraire à la force P. Les forces P et P′ étant en équilibre, leur effet est nul de lui-même, et l'on peut regarder le corps comme n'étant plus soumis qu'à l'action des forces Q, R, S, etc. Mais, d'un autre côté, la force P faisant équilibre aux forces Q, R, S, etc., leur effet est aussi nul de lui-même, et l'on peut regarder le corps comme n'étant plus soumis qu'à l'action de la simple force P′. L'état du corps est donc identiquement le même, soit qu'on le suppose sollicité par les forces Q, R, S, etc., soit qu'on le suppose sollicité par la seule force P′ égale et contraire à celle qui leur ferait équilibre.

Donc, puisqu'il peut arriver qu'une seule force soit capable de produire sur un corps le même effet que plusieurs, et en tienne parfaitement lieu, notre premier soin doit être de chercher à réduire les forces appliquées au plus petit nombre possible, et d'observer surtout la loi de cette réduction. Alors les condi-

tions de l'équilibre entre toutes les forces se ramèneront aux conditions de l'équilibre entre ces forces finales équivalentes aux premières, et deviendront plus faciles à exprimer.

10. Cette force, qui est capable de produire sur un corps le même effet que plusieurs autres forces combinées, et qui peut à elle seule en tenir parfaitement lieu, se nomme *leur résultante*. D'où l'on voit, en rappelant ce qui a été dit plus haut, *que si plusieurs forces se font actuellement équilibre sur un corps, l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.*

Les autres forces, à l'égard de la résultante, se nomment les *composantes*. La loi d'après laquelle on trouve la résultante de plusieurs forces se nomme la *composition des forces*. La même loi (mais prise dans l'ordre inverse), d'après laquelle on substitue à une seule plusieurs forces capables du même effet, ou dont la première serait la résultante, se nomme la *décomposition des forces*.

Nous allons donc commencer par ces deux recherches, qui, au fond, n'en forment qu'une seule, celle de la loi qui lie la résultante à ses composantes.

11. Souvent, pour abréger le discours, nous appellerons forces parallèles, des forces dont les directions sont parallèles; forces concourantes, des forces dont les directions concourent, etc.

Nous désignerons ordinairement les forces par les lettres P, Q, R, S, etc., placées sur les lignes qui représentent leurs directions; et si une lettre, telle que A, indique le point d'application d'une force, telle que P, par exemple, nous supposerons toujours que l'action de cette force a lieu de A vers la lettre P, ou que la force tire de A en P.

Si, pour représenter la quantité de cette force, on prend, sur sa direction, et à partir du point A, une certaine ligne terminée AB, on supposera de même que cette ligne est portée du côté où le point d'application A tend à se mouvoir. Ainsi, quand on dira simplement d'une force, qu'elle est représentée en grandeur et en direction par une certaine ligne terminée qui part du point d'application, il faudra sous-entendre que la force *tire* ce point vers l'extrémité de la ligne qui la représente.

On pourrait adopter l'hypothèse contraire, c'est-à-dire supposer que la force représentée par la ligne AB *pousse* le point d'application A

pour l'éloigner de l'extrémité B de la ligne qui la représente : car il ne s'agit ici que d'une simple convention dont on est le maître, et l'on peut faire indifféremment l'une ou l'autre. Mais, une fois qu'elle est faite, il faut avoir soin de s'y conformer dans la figure, pour toutes les forces que l'on considère, afin de donner à chacune d'elles le sens qu'elle doit avoir, et à l'énoncé du théorème toute son exactitude.

CHAPITRE PREMIER.

DES PRINCIPES.

SECTION PREMIÈRE.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES.

Axiomes, lemmes préliminaires, etc.

12. Il est évident *que deux forces égales et contraires appliquées à un même point sont en équilibre.*

Il est encore évident *que deux forces égales et contraires appliquées aux extrémités d'une droite considérée comme une verge invariable de longueur, et agissantes dans la direction de cette droite, sont en équilibre;* car il n'y a pas de raison pour que le mouvement naisse d'un côté plutôt que de l'autre, comme dans le premier axiome.

Corollaire.

13. Il est facile de conclure de là que l'effet d'une force qui sollicite un corps ne peut être changé en quelque point de sa direction qu'on la suppose appliquée, pourvu que ce point soit un des points du corps lui-même, ou, s'il est au dehors, qu'il lui soit invariablement attaché.

Fig. 1. Car, soit une force quelconque P (fig. 1) appliquée au point A d'un corps ou système quelconque : si l'on prend, sur la direction de cette force, un autre point B invariablement lié au système, de manière que la longueur AB reste toujours constante, et si l'on applique au point B deux forces P′, — P′ égales entre elles et à la force P, et agissantes dans la direction de AB, le point A sera encore sollicité de la même manière qu'auparavant; car l'effet des deux forces P′ et — P′ est nul de lui-même. Mais en considérant la force P et son égale et contraire — P′ appliquée en B, il est manifeste que leur effet est aussi nul. On peut donc les supprimer, et il ne reste plus que la force P′, qui n'est autre chose que la force P, mais appliquée au point B de sa direction; et le point A n'a pas cessé d'être sollicité de la même manière.

On peut donc appliquer une force en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit lié au premier point d'application par une ligne droite rigide et inextensible.

Remarque.

Lorsque nous changerons ainsi les points d'application des forces, nous ne répéterons pas toujours que l'on doit supposer les nouveaux points invariablement attachés aux premiers, mais il faudra toujours le sous-entendre.

Lemme.

14. Lorsque deux forces P et Q (fig. 2) sont Fig. 2. appliquées à un même point A sous un angle quelconque, on conçoit bien qu'une troisième force R, appliquée convenablement au point A, pourrait faire équilibre aux deux forces P et Q; car, en vertu des efforts combinés des deux forces P et Q, le point A tend à quitter le lieu où il est : or, il ne peut s'échapper que d'un seul côté, et par conséquent, si l'on applique une force convenable en sens contraire, ce point demeurera en équilibre.

Les trois forces P, Q, R, étant en équilibre autour du point A, la force R est égale et directement opposée à la résultante des deux autres (10) : donc deux forces P et Q qui concourent ont une résultante.

En second lieu, il est visible que cette résultante doit être dans le plan de leurs directions
Fig. 3. AP, AQ (fig. 3); car il n'y a pas de raison pour qu'elle ait au-dessus du plan une certaine position, plutôt que la position parfaitement symétrique au-dessous.

De plus, elle doit être dirigée dans l'angle PAQ des deux forces; car il est clair que le point A ne peut se mouvoir dans la partie du plan qui est au-dessus de la ligne AQ, vers D; de même il ne peut se mouvoir au-dessus de la ligne AP, vers B; et par conséquent il ne pourra se mouvoir que dans l'angle PAQ, et la résultante R devra être dirigée dans l'intérieur de cet angle.

Remarque.

15. Il n'y a qu'un seul cas où l'on puisse voir *à priori* quelle sera la direction de la résultante; c'est celui où les deux forces P et Q sont égales: alors il est clair que la résultante divise en deux également l'angle qu'elles forment entre elles; car il n'y a pas de raison pour que cette résultante fasse, avec l'une des composantes, un angle plus petit qu'avec l'autre.

Axiome fondamental.

16. *Lorsque les deux forces* P *et* Q *agissent dans la même direction et dans le même sens,*

il est visible, et l'on doit accorder comme un axiome, que ces forces s'ajoutent et donnent une résultante égale à leur somme P + Q.

Remarque.

Cet axiome est le fondement de toute la science de l'équilibre. On peut le regarder, si l'on veut, comme une espèce de définition, ou de *demande*, qu'il ne faut pas essayer de démontrer, car elle est comprise dans l'idée même de la force, considérée comme *grandeur*, c'est-à-dire comme susceptible d'être augmentée ou diminuée. Et en effet, quelle idée pourrait-on se faire, par exemple, d'une force *double* ou *triple* d'une autre, si l'on ne regardait cette force comme la réunion actuelle de *deux* ou de *trois* forces égales qui tirent à la fois le même point dans le même sens? C'est ce qui a été naturellement sous-entendu dans tout ce qui précède. Au reste, ce *postulatum* est le seul que la science exige; après quoi tous les théorèmes de la Statique rationnelle ne sont plus au fond que des théorèmes de Géométrie.

Corollaire.

17. De l'axiome qui précède on peut conclure (en combinant successivement les forces deux à deux) que la résultante de tant de forces

que l'on voudra, qui agissent dans une même direction et dans le même sens, est égale à leur somme totale, et agit dans la même direction;

Que lorsque deux forces inégales P et Q agissent en sens contraires dans une même direction, leur résultante est égale à la différence P—Q des forces, et qu'elle agit dans le sens de la plus grande; car on peut concevoir dans la plus grande, que je suppose P, par exemple, une force égale et contraire à Q, et qui la détruit. On peut supprimer ces deux forces-là, et le point est actuellement tiré par la différence P—Q des deux forces P et Q.

D'où l'on voit qu'en général *la résultante de tant de forces que l'on voudra, agissantes dans la même direction, est égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens, sur la somme de celles qui tirent dans le sens contraire, et qu'elle agit dans le sens de la plus grande somme.*

Remarque.

18. Telles sont quelques-unes des propositions les plus élémentaires, dont on découvre la vérité *à priori*, et presqu'à la première inspection. Le cas le plus simple de la composition des forces, et en même temps celui où l'on connaît tout d'un coup la résultante, est évidemment le cas des forces qui agissent dans une même direction. Nous allons donc commencer la composition des forces par celles qui s'y ramènent immédiatement.

Composition des forces qui agissent suivant des directions parallèles.

Théorème I.

19. *Si deux forces quelconques* P *et* Q (fig. 4), *parallèles et de même sens, sont appliquées aux extrémités* A *et* B *d'une droite rigide* AB, *je dis :* Fig. 4.

1°. *Que ces deux forces ont une résultante, et que cette résultante doit être appliquée à la ligne* AB *entre les deux points* A *et* B;

2°. *Que cette force est parallèle aux composantes* P *et* Q, *et égale à leur somme.*

1°. Appliquez à volonté aux deux points A et B deux forces M et N, égales et contraires, et qui agissent dans la direction AB. L'effet de ces deux forces sera nul, et par conséquent l'effet des deux forces P et Q ne sera pas changé : mais les deux forces M et P appliquées en A ont une résultante S appliquée au point A, et dirigée dans l'angle MAP (14). De même les deux forces N et Q ont une résultante T, appliquée en B et dirigée dans l'angle NBQ. Conce-

vez qu'on ait pris ces deux résultantes, et qu'on les ait appliquées toutes deux au point D où leurs directions vont nécessairement se couper; la résultante des deux forces S et T sera absolument la même que celle des deux forces P et Q : or, étant appliquée en D, et devant être dirigée dans l'angle ADB, elle ira passer entre A et B, en un certain point C, où l'on pourra la supposer appliquée.

2°. Maintenant, pour démontrer que cette résultante est parallèle aux forces P et Q, et égale à leur somme, imaginons qu'au point D on redécompose la force S en deux composantes M′ et P′, parfaitement égales et parallèles aux premières M et P; de même, qu'on redécompose la force T en deux composantes N′ et Q′, parfaitement égales et parallèles aux premières N et Q. Les deux forces M′, N′ seront égales : de plus, elles seront directement opposées, puisque, appliquées à un même point D, elles sont parallèles à une même droite MN, et par conséquent leur effet sera absolument nul. Il ne restera donc que les deux forces P′ et Q′, respectivement égales et parallèles aux forces P et Q. Or, ces deux forces étant évidemment dans une même direction, se composeront en une seule R, égale à leur somme P′ + Q′ ou P + Q; *ce qu'il fallait démontrer.*

Corollaire I.

20. Si les deux forces P et Q (fig. 5) sont égales entre elles, le point C d'application de la résultante sera au milieu de la ligne AB. Prenons, en effet, les deux forces M et N dont on est maître, égales aux forces P et Q. La résultante S des deux forces égales M et P divisera en deux également l'angle MAP (15); et à cause de DC parallèle à la ligne AP, le triangle ACD sera isocèle. Par une raison toute semblable, le triangle BCD sera isocèle; et l'on aura d'une part, AC = CD, et de l'autre, CD = CB; d'où AC = CB. Fig. 5.

Corollaire II.

21. Il résulte de là que la résultante de tant de forces parallèles qu'on voudra, égales deux à deux, et appliquées symétriquement à des distances égales du milieu d'une même droite, est égale à la somme de toutes ces forces, leur est parallèle, et passe par le milieu de la droite d'application. Car, en combinant successivement deux à deux les forces égales placées de part et d'autre à des distances égales du milieu de la ligne droite, leurs résultantes successives passeront toutes par ce même point, et s'ajou-

teront ensuite, comme étant de même sens et de même direction.

22. Et réciproquement on pourra décomposer toute force P appliquée à une ligne, en tant d'autres forces parallèles qu'on voudra, appliquées à différens points de cette ligne, pourvu que ces forces, deux à deux, soient égales, à égales distances du point d'application de la force P, et que leur somme totale soit égale à cette même force.

Théorème II.

Fig. 6. 23. *Le point* C (fig. 6) *d'application de la résultante de deux forces parallèles* P *et* Q *qui agissent aux extrémités* A *et* B *d'une droite inflexible* AB, *partage cette droite dans la raison réciproque de* P *à* Q : *de sorte que l'on a,* P : Q :: BC : AC.

Supposons d'abord que les forces P et Q soient commensurables, c'est-à-dire soient entre elles comme deux nombres entiers m et n.

Divisons AB au point H en deux parties directement proportionnelles aux deux forces P et Q; de manière qu'on ait : AH : BH :: P : Q, et par conséquent, :: m : n. Sur le prolongement de la ligne inflexible AB, prenons AG = AH, et BK = BH. Le point A sera le milieu de GH, et le point B le milieu de HK.

Cela posé, puisque les forces P et Q sont entre elles comme les lignes AH et BH, elles seront aussi entre elles comme les mêmes lignes doublées, c'est-à-dire comme les lignes GH et HK. Et comme il y a, par hypothèse, dans la ligne AH, m mesures telles que BH en contient n, il y aura $2m$ mesures dans GH, et $2n$ mesures égales dans HK. Or, on peut décomposer la force P en $2m$ forces égales et parallèles, appliquées aux $2m$ points milieux des communes mesures de la ligne GH (22); et la force Q en $2n$ forces parallèles, égales entre elles et aux premières, appliquées aux $2n$ points milieux des communes mesures de la ligne HK. Maintenant toutes ces forces égales, étant équidistantes, se trouveront placées deux à deux à égales distances du milieu C de la ligne entière GK, et par conséquent leur résultante générale, qui est celle des deux forces P et Q, passera nécessairement par le milieu de la ligne GK.

Mais à cause de GC = AB, il vient, en retranchant la partie commune AC, BC = AG = AH; et en ajoutant de part et d'autre CH, AC = BH. Donc puisque l'on a P : Q :: AH : BH, on a aussi :

P : Q :: BC : AC.

Supposons en second lieu, que les deux forces P et Q ne soient pas commensurables.

Je remarque d'abord que si la résultante de
Fig. 7. deux forces quelconques P et Q (fig. 7) appliquées aux points A et B, tombe en C, la résultante de la force P et d'une force $Q+I>Q$ tombera entre le point C et le point B; c'est-à-dire que le point d'application de la résultante s'approchera du point d'application de la composante qui aura augmenté. En effet, pour trouver la résultante des deux composantes P et $Q+I$, on peut prendre d'abord la résultante R de P et Q, qui passe au point C, par hypothèse, et ensuite celle de R et de I, dont le point d'application sera entre C et B (19).

Maintenant, si la résultante des deux forces
Fig. 8. incommensurables P et Q (fig. 8) ne passe pas au point C, qui est tel qu'on a $P : Q :: BC : AC$, elle passera en un autre point situé entre A et C, ou entre C et B. Supposons que ce soit en G entre A et C. Partagez la ligne AB en parties égales toutes plus petites que GC, il y aura au moins un point de division entre C et G. Soit I ce point: les deux lignes AI et BI seront commensurables, et le point I pourra être considéré comme le point d'application de la résultante de deux forces P et Q′ qui seraient telles qu'on aurait $P : Q' :: BI : AI$, ce qui donne

$Q' < Q$ (puisqu'on a, par hypothèse, $P : Q :: BC : AC$). Mais la résultante des deux forces P et Q′ passant en I, celle des deux forces P et $Q > Q'$, passera entre I et B, et ne pourra tomber en G contre l'hypothèse.

On ferait voir absolument de la même manière qu'elle ne peut tomber entre C et B; et par conséquent elle passe nécessairement en C.

Corollaire I.

24. Lorsque trois forces parallèles P, Q, R (fig. 9) sont en équilibre sur une ligne AB, l'une Fig. 9.
d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Ainsi la force Q, par exemple, prise en sens contraire, est la résultante des deux forces P et R. Comme les deux forces P et Q tirent dans le même sens, la force R est égale à $P+Q$, et par conséquent $Q=R-P$; d'où il suit que la résultante de deux forces parallèles qui agissent en sens contraires est égale à leur différence, et tire du même côté que la plus grande.

25. Les deux forces P et R étant données, ainsi que la distance AC qui sépare leurs points d'application, si l'on demande le point d'application de la résultante Q, on fera cette proportion, $P : Q :: BC : AC$; d'où l'on tire $P+Q :$

Q :: BC + AC : AC, c'est-à-dire R : Q :: AB : AC, proportion qui fera connaître AB, et par conséquent le point B.

Corollaire II.

26. Supposons que les deux forces P et R soient égales, la résultante Q sera zéro, et la distance AB de son point d'application sera, par la proportion ci-dessus, $\frac{R \times AC}{0}$, c'est-à-dire infinie.

Si les deux forces P et R, au lieu d'être égales, différaient d'une quantité très petite, la résultante Q, qui est égale à cette différence serait très petite, et la distance $AB = \frac{R \times AC}{Q}$ serait très grande, à cause du dénominateur Q très petit : ainsi, plus les deux forces s'approchent de l'égalité, plus la résultante diminue, et plus la distance du point où elle est appliquée augmente. De sorte que, lorsque les deux forces deviennent parfaitement égales, la résultante est nulle, et la distance du point d'application, infinie ; ce qui paraît annoncer qu'il n'y a plus alors de résultante, ou, en termes plus clairs, qu'on ne peut pas trouver actuellement une force unique qui fasse équilibre à deux forces égales, parallèles et de sens opposés.

27. Mais, pour ne laisser aucun nuage sur cette dernière conséquence, imaginons, s'il est possible, qu'une force unique R fasse équilibre aux deux forces P et — P, parfaitement égales, parallèles et contraires.

D'abord, quelle que soit la position de cette force unique à l'égard des deux proposées, on lui trouvera sur-le-champ, dans un sens contraire, une autre position toute semblable à l'égard des mêmes forces ; car tout est égal de part et d'autre. Si donc une force R fait équilibre aux deux forces P et — P, il y a une autre force — R égale, parallèle et de sens opposé, qui leur ferait aussi équilibre. Ajoutez cette seconde force — R, et pour ne rien changer, détruisez-la immédiatement par une force R′ égale et contraire. Il y aura donc équilibre entre les cinq forces R, P, — P, — R et R′. Mais il y a équilibre entre les trois forces P, — P et — R : donc il y aurait équilibre entre les deux forces restantes R et R′ ; ce qui est impossible, puisque ces deux forces égales et parallèles agissent dans le même sens (19).

Ainsi les deux forces P et — P ne peuvent être tenues en équilibre par aucune simple force, et par conséquent elles n'ont point de résultante unique.

Nous reviendrons bientôt sur ces sortes de

INSTITUTO DE FISICA DA U... BIBLIOTECA

forces, dont la considération, qui n'avait paru jusqu'ici que comme un cas singulier, fera la seconde partie essentielle de nos Élémens.

Corollaire III.

28. De même que l'on compose en une seule deux forces parallèles qui agissent à des points donnés d'une ligne, on peut aussi décomposer une force quelconque R (fig. 6), appliquée à un point C d'une droite inflexible, en deux autres P et Q qui lui soient parallèles, et qui agissent en des points donnés A et B de cette droite. Il ne s'agit pour cela que de partager la force R en deux autres qui soient entre elles dans le rapport des distances BC et AC; et pour trouver la force Q, par exemple, on se servira de la proportion R:Q :: AB:AC, dans laquelle il n'y a que Q d'inconnue. La force P sera égale à R—Q.

Si le point C d'application de la force R (fig. 10) qu'on veut décomposer ne tombait pas entre A et B, points d'application donnés des composantes P et Q que l'on cherche, on aurait de même la proportion R : Q :: AB : AC, qui ferait connaître la force Q; mais la force P serait égale à R + Q.

Corollaire IV.

29. Quand on sait déterminer la résultante de deux forces parallèles, on peut facilement trouver celle de tant de forces parallèles qu'on voudra, appliquées aux différens points d'un système quelconque de figure invariable.

Soient, par exemple, les quatre forces parallèles P, P′, P″, P‴ (fig. 11), appliquées respectivement aux quatre points A, B, C, D, situés d'une manière quelconque dans l'espace, et liés entre eux d'une manière invariable. En considérant ces forces deux à deux, elles sont situées dans un même plan. Ainsi l'on peut prendre d'abord la résultante X des deux forces P et P′; elle sera égale à leur somme P + P′, et passera en un point I de la ligne AB, qu'on trouvera en divisant AB dans la raison inverse de P à P′. La résultante X étant ainsi déterminée, on joindra le point I où elle agit, au point C de la troisième force P″. Les deux forces X et P″ étant parallèles, on en prendra la résultante X′, comme nous avons fait tout à l'heure: cette résultante sera égale à leur somme X+P″, et le point F où elle devra être appliquée se trouvera en divisant la droite CI, dans la raison réciproque de X à P″. Joignant enfin le point F au point D d'application de la qua- Fig. 11.

trième force P''', et divisant la droite FD en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces X' et P''', on aura le point G d'application de la résultante générale R, qui sera parallèle aux deux forces X' et P''', et par conséquent à toutes les composantes; égale à leur somme $X'+P'''$, et par conséquent à la somme de toutes les composantes.

Le raisonnement que nous venons de faire s'étend manifestement à un nombre quelconque de forces parallèles.

Si parmi les forces P, P′, P″, etc., les unes agissaient dans un sens, et les autres, dans le sens contraire, on commencerait par prendre la résultante de toutes celles qui agissent dans le même sens; on chercherait ensuite la résultante de celles qui agissent dans le sens contraire; et toutes les forces étant alors réduites à deux forces parallèles et de sens contraires, on en trouverait la résultante par ce que nous avons dit plus haut.

30. On peut donc, en général, déterminer la position et la quantité de la résultante de tant de forces parallèles qu'on voudra; *cette résultante sera parallèle aux forces, et égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens, sur la somme de celles qui tirent dans le sens contraire.*

J'ai dit en général, parce qu'il peut arriver que la résultante des forces qui tirent dans un sens soit parfaitement égale à la résultante de celles qui tirent dans le sens contraire, sans lui être directement opposée; et alors il n'y a pas de résultante unique, comme nous l'avons vu plus haut.

Corollaire V.

31. Supposons que les quatre forces P, P′, P″, P‴, sans changer de grandeurs, sans cesser d'être parallèles et de passer aux mêmes points respectifs A, B, C, D, viennent à prendre les positions p, p', p'', p''', dans l'espace.

Si l'on en cherche la résultante, en suivant le même ordre que plus haut, on trouvera d'abord que la résultante x de p et p', passe au même point I que la résultante X de P et P′, et qu'elle lui est égale. Elle passera par le même point, parce que son point d'application doit diviser la même droite AB dans la raison réciproque de p à p', qui est la même que celle de P à P′. Elle lui sera égale, parce qu'on aura $P+P'=p+p'$. On trouvera de même que la résultante x' de x et p'', passera au même point F que la résultante X' de X et P'', et qu'elle lui sera égale, et ainsi de suite : de sorte que la résultante générale des quatre forces p, p',

p'', p''', passera au même point que la résultante des quatre forces P, P′, P″, P‴; et cela est général, quel que soit le nombre des forces; d'où l'on peut conclure ce théorème remarquable :

32. *Si l'on considère un système quelconque de forces parallèles, appliquées à un assemblage de points* A, B, C, D, *etc., et qu'on incline successivement tout le système de ces forces dans diverses situations, de manière que les mêmes forces passent toujours par les mêmes points et conservent leurs grandeurs et leur parallélisme, les résultantes générales qu'on trouvera successivement dans chacune de ces positions se croiseront toutes au même point.*

Ce point d'intersection des résultantes successives se nomme le *centre des forces parallèles*. Nous aurons occasion d'en parler plus loin, quand il sera question des centres de gravité.

On peut remarquer, au reste, que dans la démonstration précédente, il n'est pas nécessaire de supposer que les forces conservent toujours les mêmes grandeurs : il suffit que, dans les positions successives du groupe, elles demeurent proportionnelles.

Composition des forces dont les directions concourent en un même point.

Théorème III.

33. *La résultante de deux forces quelconques* P *et* Q (fig. 12) *appliquées à un même point* A *sous un angle quelconque, est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme* ABCD *construit sur les deux lignes* AB, AC, *qui représentent les forces* P *et* Q *en grandeur et en direction.* Fig. 12.

D'abord, nous avons vu (14) que cette résultante doit être dans le plan des deux forces P et Q; en second lieu, qu'elle doit être appliquée au point A, puisque cette résultante, par hypothèse, doit solliciter le point A absolument de la même manière que les deux forces P et Q.

Je dis maintenant qu'elle doit passer au point D, extrémité de la diagonale AD.

Prenons, en effet, sur le prolongement de la ligne BD la partie DG = DC, et achevons le losange CDGH. Appliquons aux points G et H, et dans la direction de GH, deux forces Q′ et Q″ contraires, égales entre elles et à la force Q. Il est facile de voir que la résultante des quatre forces P, Q, Q′ et Q″ doit passer au point D.

Car, 1°. à cause de $Q' = Q$, les deux forces parallèles P et Q′ sont entre elles comme les côtés AB, AC, ou comme DC et DB, ou bien, à cause de DC = DG, comme les lignes DG et DB, et par conséquent (23) leur résultante S passe en D; 2°. les deux forces Q et Q″ étant égales, leur résultante T, prolongée, divise en deux également l'angle CHG du losange CDGH, et va passer aussi par le point D, où l'on peut la supposer appliquée. Donc la résultante générale, qui est celle des deux forces S et T, passe au point D.

Mais les deux forces Q′ et Q″ appliquées sur GH étant parfaitement égales et contraires, leur effet est absolument nul, et la résultante des quatre forces P, Q, Q′ et Q″ est identiquement la même que celle des deux forces P et Q. Donc, puisque la première passe en D, celle des deux forces P et Q passe aussi au même point.

Puisque la résultante passe à la fois par les deux points A et D, elle est donc nécessairement dirigée suivant la diagonale AD.

Corollaire.

34. Concluons de là que si l'on connaissait seulement les directions des deux forces P et Q (fig. 13), et celle de leur résultante R, on pourrait déterminer le rapport de la force P à la force Q. Car, en prenant sur la direction de la résultante un point quelconque D, et menant de ce point deux parallèles DC et DB aux directions des composantes P et Q, et qui rencontrent ces directions en C et B, on aurait nécessairement P : Q :: AB : AC. Sans quoi l'on aurait P est à Q comme AB est à une ligne AO plus petite ou plus grande que AC; et alors la résultante des deux forces P et Q serait dirigée suivant la diagonale AI d'un parallélogramme AOIB différent du parallélogramme ABDC, ce qui est contre l'hypothèse.

Théorème IV.

35. *La résultante de deux forces quelconques* P *et* Q (fig. 14) *appliquées à un même point* A, *est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme* ABDC, *construit sur les deux lignes* AB, AC *qui représentent ces forces en grandeur et en direction.* Fig. 14.

Nous avons déjà vu que cette résultante est dirigée suivant la diagonale; reste à faire voir qu'elle est représentée en quantité par la diagonale elle-même.

Soit R cette résultante : supposez qu'elle soit appliquée au point A sur le prolongement de la diagonale DA, en sens contraire de son ac-

tion. Les trois forces P, Q, R seront en équilibre sur le point A. Donc l'une d'elles, la force Q, par exemple, sera égale et directement opposée à la résultante des deux autres P et R. Donc la direction de la force Q, prolongée, sera celle de la résultante des deux forces P et R. Donc si, du point B, vous menez à la direction AR, la parallèle BG qui rencontre en G le prolongement de QA, et du point G, à la diretion AP, la parallèle GH qui rencontre en H la direction de la force R, les deux forces P et R seront entre elles comme les côtés AB, AH du parallélogramme ABGH (34). Mais la ligne AB représente actuellement la force P; donc la ligne AH représente la force R. Or, par les parallèles, on a AH = BG = AD; donc, etc.

Corollaire.

36. Puisque les trois forces P, Q, R sont entre elles comme les trois lignes AB, AC, AD, et que dans le parallélogramme ABDC, on a AB=CD, on peut dire que ces trois forces sont entre elles comme les trois côtés CD, CA et AD du triangle ACD. Mais ces trois côtés sont entre eux comme les sinus des angles opposés CAD, CDA, ACD, et à cause des parallèles, l'angle CDA = l'angle BAD, l'angle ACD est supplément de l'angle BAC, et par conséquent

a le même sinus; on a donc

P : Q : R :: sin CAD : sin BAD : sin BAC.

D'où l'on peut conclure que la résultante de deux forces P et Q étant représentée par le sinus de l'angle formé par leurs directions, les deux forces P et Q sont représentées réciproquement par les sinus des deux angles adjacens à la direction de la résultante; ou, si l'on veut, *chacune des forces* P, Q, R *est comme le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

Remarque.

37. On peut voir par là, et mieux encore par la considération immédiate du parallélogramme des forces, que lorsque deux forces agissent sur un même point sous un angle qui n'est pas égal à deux droits, elles ne peuvent jamais donner une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles elles-mêmes chacune en particulier.

Car, si aucune des deux forces n'était nulle, on pourrait construire un parallélogramme sur les deux lignes qui les représentent en grandeur et en direction, et la diagonale de ce parallélogramme serait la résultante.

Si l'une d'elles seulement était nulle, la seconde serait la résultante, et par conséquent la résultante ne peut être nulle, à moins que les

composantes ne soient toutes deux nulles en même temps.

Lorsque les deux composantes agissent sous un angle égal à deux angles droits, elles sont alors contraires, et la résultante n'est pas nulle dans le seul cas où ces deux composantes sont nulles toutes deux, mais encore dans celui où elles sont égales.

Corollaire II.

38. On peut toujours décomposer une force donnée R en deux autres P et Q dirigées suivant des lignes données AP, AQ (fig. 15), pourvu que ces directions et celles de la force R soient comprises dans un même plan et concourent au même point A; car, prenant sur la direction de la force R une partie AD qui représente sa quantité, et par le point D menant les droites DC, DB parallèles aux directions données AP, AQ, on formera un parallélogramme ABDC, dont les côtés AB, AC représenteront les forces demandées P et Q.

Fig. 15.

Si l'on veut calculer immédiatement leurs grandeurs, on pourra faire ces deux proportions :

$$R : P :: \sin BAC : \sin CAD,$$
$$R : Q :: \sin BAC : \sin BAD,$$

dans lesquelles il n'y a que P et Q d'inconnues.

Remarque.

39. Si l'angle BAC était droit, on aurait, en supposant le rayon $=1$, $\sin BAC = 1$; $\sin CAD = \cos BAD$, et réciproquement, $\sin BAD = \cos CAD$; et les deux proportions ci-dessus deviendraient

$$R : P :: 1 : \cos BAD,$$
$$R : Q :: 1 : \cos CAD.$$

D'où $P = R \cdot \cos BAD$, et $Q = R \cdot \cos CAD$.

Il résulte de là que lorsqu'on décompose une force en deux autres qui agissent suivant des directions rectangulaires entre elles, on trouve chaque composante en multipliant la force proposée par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la direction de cette composante.

Chaque composante est représentée par la projection de la résultante sur sa direction, et c'est ce qu'on appelle souvent la force *estimée* suivant cette direction. Ainsi $R \cdot \cos BAD$, ou la composante P, est la force R *estimée* suivant la direction AP.

Corollaire III.

40. Quand on sait déterminer la résultante de deux forces appliquées à un point, on peut déterminer celle de tant de forces P, Q, R, S, etc.,

qu'on voudra, appliquées à un même point A, et dirigées d'une manière arbitraire dans l'espace; car, en considérant d'abord deux quelconques de ces forces, comme les forces P et Q, par exemple, ces deux forces seront dans un même plan, et l'on en déterminera la résultante comme nous l'avons fait tout à l'heure. Soit X cette résultante; on prendra semblablement la résultante de la force X et d'une autre telle que R. Combinant ensuite cette résultante, que je désigne par Y, avec un nouvelle force S, on aura leur résultante Z qui sera celle des quatre forces P, Q, R, S; et continuant ainsi, on arrivera nécessairement à la résultante générale.

Si toutes les forces P, Q, R, S, etc., sont dans un même plan, les résultantes successives X, Y, Z, etc., seront dans ce même plan, et par conséquent la résultante générale y sera aussi.

Si toutes les forces sont en équilibre, la résultante générale sera nulle.

Par cette composition successive de plusieurs forces autour d'un même point, on voit encore que, si l'on décrit dans l'espace un contour polygonal dont les côtés successifs soient parallèles et proportionnels à ces forces, la droite qui ferme ce contour et achève ainsi le polygone, est parallèle et proportionnelle à la résultante générale de toutes les forces; de sorte que si le polygone se trouve fermé de lui-même, la résultante est nulle, et toutes les forces sont en équilibre autour du point qu'elles sollicitent.

Le théorème suivant n'est au fond qu'un cas particulier de cette élégante proposition; mais, comme il est d'un fréquent usage en Mécanique, nous allons l'énoncer et le démontrer expressément.

Théorème V.

41. *Si trois forces* X, Y, Z *appliquées à un même point* A (fig. 16) *dans l'espace sont représentées par les trois lignes* AB, AC, AD, *et qu'on achève le parallélépipède* A . . . F, *la résultante* R *de ces trois forces sera représentée par la diagonale* AF *de ce parallélépipède.* Fig. 16.

En effet, les deux forces X et Y, qui sont représentées par les deux côtés du parallélogramme ABGC, donneront pour résultante une force P représentée par la diagonale AG de ce parallélogramme.

Ensuite, à cause de AD égal et parallèle à GF, la figure AGFD sera un parallélogramme, et par conséquent les deux forces P et Z donneront une résultante R représentée par la dia-

gonale AF, laquelle est en meme temps la diagonale du parallélépipède proposé.

Remarque.

42. Observons sur-le-champ, comme au n° 37, que tant que les trois forces X, Y, Z ne seront pas dans un même plan, elles ne pourront jamais donner une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles elles-mêmes en particulier.

Car, si aucune d'elles n'était nulle, on pourrait construire le parallélépipède sur les lignes qui les représentent en grandeur et en direction, et la diagonale serait la résultante.

Si l'une d'elles seulement était nulle, les deux autres qui, par hypothèse, ne sont pas en ligne droite, auraient une résultante.

Enfin, si deux d'entre elles seulement étaient nulles, la troisième serait la résultante, et par conséquent les composantes X, Y, Z doivent être nulles toutes trois, pour donner une résultante nulle.

Corollaire I.

43. On voit par le théorème précédent (qu'on pourrait nommer le *parallélépipède des forces*) qu'une force quelconque donnée R est toujours décomposable en trois autres X, Y, Z respectivement parallèles à trois lignes données dans l'espace, pourvu que deux de celles-ci ne soient pas parallèles.

Car, en prenant la partie AF pour représenter la quantité de la force R, et menant par le point A d'application trois lignes parallèles aux droites données chacune à chacune, on conduira par le point A trois plans indéfinis XY, XZ, YZ, et par le point F trois autres plans respectivement parallèles aux premiers; et ces six plans détermineront le parallélépipède dont les trois arêtes contiguës AB, AC, AD, représenteront les trois composantes X, Y, Z.

Corollaire II.

44. Si le parallélépipède est rectangulaire, on aura, dans le rectangle ADFG, $\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AG}^2$; mais, dans le rectangle ABGC, on a $\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$; donc en substituant cette valeur de $\overline{AG}^2$, on aura

$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2;$$

par conséquent,

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Ce qui donne $R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$ pour

la valeur de la résultante en fonction des trois composantes.

45. Si l'on veut avoir les trois composantes en fonction de la résultante et des angles qu'elles font avec elle, en nommant d'abord α l'angle que la résultante R fait avec la composante X, on aura visiblement AF : AB :: 1 : cos α, et par conséquent,

$$R : X :: 1 : \cos\alpha;$$

d'où l'on tire $X = R\cos\alpha$.

En nommant de même β et γ les angles que la résultante fait respectivement avec les composantes Y et Z, on trouvera $Y = R\cos\beta$, $Z = R\cos\gamma$; d'où il suit qu'on trouvera les valeurs des trois composantes respectives, en multipliant la résultante par les cosinus respectifs des trois angles que sa direction forme avec les directions de ces composantes.

Remarque.

46. Puisqu'on a trouvé $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, en substituant pour X, Y, Z leurs valeurs respectives $R\cos\alpha$, $R\cos\beta$, $R\cos\gamma$, on aura

$$R^2 = R^2\cos^2\alpha + R^2\cos^2\beta + R^2\cos^2\gamma;$$

ou bien

$$R^2 = R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

d'où, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

relation connue qui a toujours lieu entre les angles que fait une droite avec trois axes rectangulaires dans l'espace.

SECTION II.

COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES COUPLES.

47. Pour abréger le discours, nous appellerons *couple* l'ensemble de deux forces, telles que P et —P (fig. 17), égales, parallèles et contraires, mais non appliquées au même point. La perpendiculaire commune AB, menée entre les directions des deux forces, sera *le bras de levier* du couple, et le produit $P \times AB$ de l'une des forces par le bras du levier, en sera nommé *le moment*. Fig. 17.

Quelle que soit l'action de deux forces telles que P et —P, sur le corps auquel elles sont appliquées, nous avons vu (27) que cette action ne peut être contre-balancée par celle d'aucune simple force appliquée comme on voudra au même corps, et que par conséquent l'effort d'un couple ne peut être comparé d'aucune manière à une simple force. Pour distinguer cette nouvelle cause de mouvement, qui est en quelque sorte d'une nature particulière, on

pourrait lui donner un nom particulier : mais celui de *couple* nous suffit, et peut très bien désigner à la fois l'ensemble des deux forces contraires dont il s'agit, et le genre d'effort auquel ce couple donne naissance.

Au reste, comme on verra tout à l'heure que l'effort d'un couple est mesuré par son *moment*, on pourra souvent substituer ce second mot au premier, ou les prendre quelquefois l'un pour l'autre.

La composition des couples formera la seconde partie essentielle des principes de notre Statique, et se reproduira dans le cours de cet Ouvrage presque aussi souvent que la composition des forces. On en verra bientôt dériver les lois de l'équilibre d'une manière si naturelle et si simple, que l'on nous pardonnera d'avoir paru nous arrêter ici à l'examen d'un cas singulier, lorsque nous tendions peut-être le plus directement possible vers le but principal.

Ce que nous allons dire sur les couples est tout-à-fait indépendant de l'effet qu'ils produisent sur les corps ; mais lorsqu'on voudra se faire une idée des sens respectifs de différens couples situés dans le même plan, on pourra se représenter que les milieux de leurs bras de levier sont fixes : alors l'effet de chaque couple sera visiblement de faire tourner le corps autour du milieu de son bras de levier, et l'on distinguera facilement le sens des couples, en distinguant les couples qui tendent à faire tourner dans un sens, d'avec ceux qui tendent à faire tourner dans le sens contraire. Mais ne perdons pas de vue qu'il n'y aura réellement aucun point fixe (à moins que nous n'en avertissions expressément), et que l'idée de rotation, qui jusqu'ici est purement accessoire, ne servira qu'à faire image au besoin.

Translation des couples.

48. Nous avons vu plus haut qu'une force peut être transportée en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit lié au premier d'une manière invariable : voici une proposition analogue pour les couples, qui n'est pas moins remarquable que la première, et dont nous ferons le plus grand usage par la suite.

Lemme.

49. *Un couple quelconque peut être transporté partout où l'on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra dans ce plan, sans que son effet sur le corps auquel il est appliqué en soit changé, pourvu qu'on suppose le nouveau bras de levier invariablement attaché au premier.*

Pour démontrer plus facilement cette proposition, nous la décomposerons en deux autres.

Fig. 18. Soit d'abord le couple (P, —P) (fig. 18) appliqué perpendiculairement sur AB; prenons où l'on voudra, dans le plan de ce couple ou dans tout autre plan parallèle, la droite CD, égale et parallèle à AB : joignons AD et BC, qui seront dans un même plan et se couperont visiblement au milieu I de leurs longueurs respectives; et supposons enfin les droites AB et CD liées entre elles d'une manière invariable.

Si l'on applique sur la ligne CD, parallèlement aux forces P et — P, deux couples contraires (P′, —P′), (P″, —P″), égaux entre eux et au couple proposé (P, — P), il est évident que ces deux couples se détruiront d'eux-mêmes, et que par conséquent l'effet du couple (P, — P) ne sera pas changé. Mais, d'un autre côté, il est facile de voir que les deux couples (P, — P) et (P″, — P″) se détruisent aussi d'eux-mêmes; car le point I étant à la fois le milieu des deux lignes AD et BC, les deux forces égales et parallèles P et P″, appliquées sur AD, donnent une résultante parfaitement égale et opposée à la résultante des deux forces — P et — P″, appliquées sur BC. On peut

donc supprimer les deux couples (P, — P), (P″, — P″), et il ne reste plus que le couple (P′, —P′) appliqué sur CD, lequel n'est autre chose que le couple primitif qu'on aurait, pour ainsi dire, transporté parallèlement à lui-même, de manière que son bras de levier AB fût venu dans la position parallèle CD.

Soit, en second lieu, le couple (P, —P) (fig. 19) appliqué perpendiculairement sur AB. Fig. 19. Tirons dans le plan de ce couple, sous un angle quelconque avec AC, la droite CD = AB, et supposons que ces deux droites se coupent au milieu I de leurs longueurs respectives, et soient invariablement fixées entre elles.

Si l'on applique à angle droit sur CD deux couples contraires (P′, — P′), (P″, — P″) égaux entre eux et au couple proposé (P, — P), ces deux couples se détruiront d'eux-mêmes, et par conséquent l'effet du couple (P, — P) ne sera pas changé. Mais, d'un autre côté, les deux couples (P, — P), (P″, — P″), se détruisent aussi d'eux-mêmes : car, avec un peu d'attention, on voit que les deux forces égales P et — P″ qui se rencontrent en G, donnent une résultante égale et directement opposée à la résultante des deux forces — P et P″ qui se rencontrent en H. On peut donc supprimer les deux couples (P, — P), (P″, — P″), et il ne

reste plus que le couple $(P', -P')$ appliqué sur CD, lequel n'est, pour ainsi dire, que le couple primitif qu'on aurait tourné dans son plan, de manière que son bras de levier AB fût venu dans la position oblique CD.

De ces deux propositions réunies, on peut conclure qu'un couple quelconque, sans que son effet soit changé, peut être transporté dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, en telle position qu'on voudra : car on peut d'abord le transporter parallèlement à ses forces dans le plan donné, de manière que le milieu de son bras de levier tombe au point donné qu'on voudra, et l'on peut ensuite le tourner autour de ce point, de manière à l'amener dans la position donnée ; ou, réciproquement, on peut le tourner d'abord dans son plan, de manière que ses forces deviennent parallèles aux nouvelles directions qu'on veut leur donner, et ensuite le transporter immédiatement dans la position donnée.

Transformation des couples ; leur mesure.

Lemme.

Fig 20. 50. *Un couple quelconque* $(P,-P)$ (fig 20) *appliqué sur un bras de levier* AB, *peut être changé en un autre* $(Q,-Q)$ *de même sens, appliqué sur un bras de levier* BC *différent du premier, pourvu qu'on ait* $P : Q :: BC : AB$, *ou* $P \times AB = Q \times BC$, *c'est-à-dire pourvu que les momens de ces couples soient égaux.*

Prenons, en effet, sur le prolongement de AB une partie quelconque BC, et appliquons sur BC parallèlement aux forces P et $-P$, deux couples $(Q,-Q)$, $(Q',-Q')$ égaux et contraires : leur effet sera absolument nul, et par conséquent celui du couple $(P,-P)$ ne sera pas changé. Mais, d'un autre côté, si l'on suppose que les forces P et Q, et par conséquent P et Q', sont en raison inverse des lignes AB et BC, leur résultante, qui est égale à $P+Q'$, passe en B, et détruit évidemment les forces contraires $-P,-Q'$ qui s'y trouvent. On peut donc supprimer les quatre forces P, Q', $-P$, $-Q'$, et il ne reste plus que le couple $(Q,-Q)$ appliqué sur BC, lequel remplace le couple proposé $(P,-P)$ appliqué sur AB.

Corollaire.

51. Il n'est pas difficile de conclure de là que les efforts des couples sont proportionnels à leurs momens.

En effet, l'on peut voir d'abord que deux

Fig. 21. couples (P, —P), (Q, —Q) (fig. 21), qui agissent sur les bras de leviers égaux AB, CD, sont entre eux comme les forces P et Q de ces couples : car si l'on suppose les forces P et Q entre elles comme deux nombres entiers, comme 5 et 3 par exemple, en partageant chaque force P et —P en 5 forces égales, et chaque force Q et —Q en 3 forces égales entre elles et aux premières, on pourra considérer le couple (P, —P) comme la somme de 5 couples égaux et de même sens, appliqués parfaitement l'un sur l'autre, et le couple (Q, —Q) comme la somme de 3 couples égaux entre eux et aux premiers, aussi appliqués l'un sur l'autre. Les intensités des couples (P, —P), (Q, —Q), seront donc entre elles comme 5 à 3, ou comme P à Q. Si les forces P et Q sont incommensurables, on fera le raisonnement connu, etc.

Maintenant soient deux couples quelconques (P, —P), (Q, —Q); soient p le bras de levier du premier, et q le bras de levier du second : le couple (Q, —Q) agissant sur la ligne q, est équivalent au couple $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$, qui agirait sur la ligne p; car les momens sont égaux de part et d'autre, le premier étant Qq, et le second, $\frac{q}{p}Q.p = Qq$. Ainsi, au lieu des deux

couples proposés, on a ces deux-ci (P, —P), $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$ qui ont un même bras de levier p. Mais les intensités M et N de ces deux couples sont entre elles comme leurs forces, et par conséquent l'on a $M : N :: P : \frac{q}{p}Q$, ou bien $M : N :: Pp : Qq$.

52. Puisque deux couples sont entre eux dans le rapport de leurs momens, il s'ensuit que le moment d'un couple est la mesure de son effort ou de son intensité : car si l'on prend pour unité de couple, celui qui est composé de deux forces égales à l'unité de force, appliquées sur un bras de levier égal à l'unité de ligne, le couple (P, —P) au bras de levier p, contiendra autant de fois l'unité de couple, que le moment $P \times p$ contiendra le moment 1×1, c'est-à-dire contiendra l'unité.

Remarque.

53. Pour comparer entre elles les grandeurs ou les intensités des couples, on pourrait prendre aussi, au lieu des produits Pp, Qq des forces par leurs bras de levier rectangulaires, les produits de ces mêmes forces par des bras de levier obliques sur leurs directions. Mais il faudrait pour tous les couples que les bras

de levier fissent le même angle avec les forces. Il est clair qu'alors les bras de levier obliques seraient tous proportionnels au bras de levier rectangulaires, et que par conséquent les nouveaux momens seraient proportionnels aux premiers.

Nous emploierons quelquefois ces nouveaux momens dans la mesure relative de différens couples; mais nous regarderons toujours les autres comme la mesure absolue de leurs intensités.

Composition des couples situés dans un même plan, ou dans des plans parallèles.

Théorème I.

54. *Deux couples situés, comme on voudra, dans le même plan ou dans des plans parallèles, se composent toujours en un seul, qui est égal à leur somme, s'ils tendent à faire tourner dans le même sens, ou égal à leur différence s'ils tendent à faire tourner en sens contraires.*

En effet, on peut d'abord ramener ces deux couples dans un même plan, ensuite ramener leurs forces au parallélisme, enfin les changer en deux autres équivalens qui auraient un

même bras de levier, et alors les appliquer l'un sur l'autre.

Soient P et Q les forces composantes des deux couples; p et q, leurs bras de levier respectifs; et soit D la longueur du bras de levier commun aux deux couples transformés. Au lieu du couple $(P, -P)$ au moment Pp, on substituera le couple équivalent $(P', -P')$, dont le moment $P'D$ serait égal à Pp. On substituera de même, à la place du couple $(Q, -Q)$ au moment Qq, le couple $(Q', -Q')$ au moment $Q'D = Qq$; et ces deux couples transformés étant appliqués l'un sur l'autre, sur le même bras de levier D, on aura un couple unique résultant, $[(P'+Q'), -(P'+Q')]$, dont le moment sera

$$(P'+Q')D, \quad \text{ou} \quad P'D + Q'D = Pp + Qq.$$

Ainsi, le moment résultant sera égal à la somme des momens composans, ou bien à leur différence, selon que les forces P′ et Q′, qui agiront à la même extrémité du bras de levier D, seront de même sens, ou de sens contraires.

Corollaire.

On voit donc, en combinant ainsi les couples deux à deux, que tant de couples qu'on voudra, situés d'une manière quelconque dans

un même plan ou dans des plans parallèles, se réduiront toujours à un seul, égal à la somme de ceux qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la somme de ceux qui tendent à faire tourner dans le sens contraire.

Et réciproquement, on pourra décomposer un couple donné en autant d'autres qu'on voudra, situés dans le même plan ou dans des plans parallèles. On pourra même prendre à volonté tous ces couples, hors un seul; car il suffira que la somme de ceux qui agissent dans le même sens, moins la somme de ceux qu agissent en sens contraire, soit égale au couple proposé.

Composition des couples situés dans des plans quelconques.

Théorème II.

55. *Deux couples situés, comme on voudra, dans deux plans qui se coupent sous un angle quelconque, se composent toujours en un seul.*

Et si l'on représente les momens de ces couples par les longueurs respectives de deux droites tirées sous un angle égal à celui des deux plans, et qu'on achève le parallélogramme, le moment du couple résultant sera

représenté par la diagonale de ce parallélogramme, et le plan de ce couple partagera l'angle que font entre eux les plans des couples composans, comme la diagonale du parallélogramme partage l'angle que font les deux côtés adjacens.

Soient en effet les deux couples proposés, situés dans les deux plans AGM, AGN (fig. 22), qui se rencontrent suivant AG; et supposons qu'on ait d'abord changé ces deux couples en deux autres respectivement équivalens, qui auraient un même bras de levier. Fig. 22.

En quelque lieu que soit situé le couple (P, —P) dans le plan AGM, on pourra le ramener dans ce plan à angle droit sur l'intersection AG, de manière que son bras de levier AB tombe sur l'intersection AG (49). De même, en quelque lieu que soit situé le couple (Q,—Q) dans le plan AGN, on pourra le ramener aussi à angle droit sur la même intersection; et de manière que son bras de levier, égal au premier, coïncide avec lui en AB.

Alors les deux forces P et Q appliquées en A, se composeront en une seule R appliquée au même point A, et représentée par la diagonale AR du parallélogramme construit sur les deux lignes AP, AQ, qui représentent les forces P et Q. Les deux forces — P, — Q ap-

pliquées en B, se composeront aussi en une seule — R appliquée en B, parfaitement égale, parallèle et contraire à la première; et l'on aura, au lieu des deux couples (P, — P), (Q, — Q) le couple unique (R, — R) appliqué sur le même bras de levier AB.

Puisque ces trois couples ont un même bras de levier, leurs momens respectifs sont proportionnels aux valeurs des trois forces P, Q, R. Donc, si l'on représente les momens des deux couples composans par les deux lignes AP, AQ qui leur sont proportionnelles, le moment du couple résultant sera représenté par la diagonale AR du parallélogramme APRQ construit sur ces lignes. Or, il est visible que les angles formés par les trois lignes AP, AQ, AR, mesurent les angles que font les trois plans; donc le plan du couple résultant partage l'angle des deux autres plans, comme la diagonale AR partage l'angle PAQ des deux côtés adjacens AP, AQ. Donc, etc.

Corollaire.

56. On pourra donc toujours réduire à un seul tant de couples que l'on voudra, appliqués à un corps d'une manière quelconque dans l'espace : car, en les composant successivement deux à deux, comme nous venons de faire,

on arrivera nécessairement à un couple unique dont on connaîtra le plan et la grandeur, et qui sera équivalent à tous les autres.

Réciproquement, on peut toujours décomposer un couple en deux autres situés dans deux plans donnés, pourvu que ces plans et celui du couple proposé se rencontrent suivant une même droite (ou suivant des droites parallèles; car, en transportant le plan de l'un de ces couples parallèlement à lui-même, ce qui est permis (49), on rassemblerait leurs trois intersections parallèles en une seule).

Remarque I.

57. Pour opérer cette décomposition, on n'aura qu'à suivre dans l'ordre inverse le procédé que nous venons de donner pour la composition de deux couples; ou bien l'on emploiera la méthode suivante, qui est très simple, et dont nous nous servirons quelquefois.

Soit AZ (fig. 23) la commune intersection des trois plans : menons à volonté un plan YAX qui les coupe suivant les trois lignes respectives AY, AV, AX; et soit ZAV le plan du couple proposé. Fig. 23.

En quelque lieu que ce couple (P, — P) soit situé dans le plan ZAV, on peut le placer

de manière que ses forces soient parallèles à l'intersection AZ, et que la direction de l'une d'elles, comme de la force — P, coïncide avec cette même intersection. Alors la direction de l'autre force P rencontrera quelque part en B la droite AV, et l'on aura le couple (P, — P) appliqué d'une manière quelconque sur AB, comme on le voit dans la figure. Maintenant formons, suivant les directions AY, AX, avec AB comme diagonale, le parallélogramme BCAD; et à l'un des angles C ou D, en D par exemple, appliquons deux forces contraires P′, — P′, égales et parallèles aux forces P et — P du couple proposé. L'effet de ce couple ne sera pas changé. Mais actuellement, au lieu du couple (P, — P) appliqué sur la diagonale AB, on peut en considérer deux autres : l'un (P′, — P) appliqué sur le côté AD dans l'un des plans donnés ZAY; l'autre (P, — P′) appliqué sur BD parallèlement à l'autre plan ZAX. Or, ce couple peut être transporté parallèlement à lui-même dans ce plan ZAX, sur le côté AC = BD; et l'on aura alors, au lieu du couple (P, — P) appliqué sur la diagonale AB, deux couples (P′, — P), (P, — P′), composés de forces égales et parallèles aux premières, appliqués dans les deux plans donnés sur les côtés AD, AC.

Remarque II.

58. Si l'on supposait que le plan YAX fût mené perpendiculairement à la commune intersection AZ des plans des trois couples, les forces de ces couples seraient perpendiculaires aux lignes AY, AV, AX, et comme ces forces sont égales, les momens des couples seraient proportionnels à leurs bras de levier AD, AB, AC; et d'après ce que nous venons de dire, on retomberait sur le théorème précédent (55); ce qui fournit, comme on voit, une nouvelle démonstration de ce théorème.

Remarque III.

59. Cette double démonstration vient de la double manière dont on peut transformer les deux couples avant de les composer. Dans la première, on commence par leur donner un même bras de levier avec des forces différentes; dans la seconde, on leur donne les mêmes forces avec des bras différens.

Il y aurait une troisième démonstration qui se ferait sans rien changer aux deux couples proposés. Car soient (P, — P) et (Q, — Q), (fig. 23 *bis*), deux couples appliqués perpendiculairement au plan du triangle ABC, sur Fig. 23. *bis*.

les bras respectifs AB, AC; et supposons que les deux forces P et Q qui tirent en B et C soient de même sens. Il est clair que ces deux forces se composent en une seule P + Q de même sens, et appliquée au point *g* qui divise la base BC dans la raison réciproque de P à Q. Les deux forces — P et — Q qui tirent en A se composent de même en une seule — (P+Q) appliquée au point A; et si l'on fait, pour abréger, P + Q = R, on a le couple résultant (R, — R) appliqué sur Ag dans un plan perpendiculaire au triangle ABC.

Maintenant, que du point *g*, on mène deux parallèles aux côtés AB et AC, et qu'on achève ainsi le parallélogramme A*lgm*; il s'agirait de prouver que les momens de nos trois couples, savoir :

$$P \times AB, \quad Q \times AC, \quad R \times Ag,$$

sont entre eux comme les côtés A*l*, A*m* et la diagonale A*g* de ce parallélogramme. Or, c'est ce qui est facile; car en mettant, au lieu des forces P, Q, R, les trois lignes C*g*, B*g*, BC, qui leur sont proportionnelles, on voit que ces momens sont entre eux comme les trois produits

$$Cg \times AB, \quad Bg \times AC, \quad BC \times Ag.$$

Mais les triangles semblables donnent :

$Cg \times AB = BC \times Al$, et $Bg \times AC = BC \times Am$. Substituant ces deux nouveaux produits à la place des deux premiers, et supprimant partout le facteur commun BC, on a les trois momens dont il s'agit dans la proportion des simples lignes A*l*, A*m*, A*g*; ce qu'il fallait démontrer.

On peut varier encore ces démonstrations; mais il y a une manière bien plus simple de présenter la composition des couples, comme nous allons le voir dans l'article suivant.

Expression plus simple des théorèmes qui concernent la composition des couples.

60. Au lieu de déterminer la position d'un couple par celle de son plan, on peut la déterminer par la direction d'une droite quelconque perpendiculaire à ce plan, et que l'on pourra nommer l'*axe* du couple. Puisqu'un couple peut être supposé appliqué où l'on voudra dans son plan ou dans tout autre plan parallèle (49), il est visible que l'on connaîtra la position d'un couple dans l'espace, lorsque l'on connaîtra la direction de son axe : car, en élevant où l'on voudra sur cet axe un plan

perpendiculaire, on pourra prendre ce plan pour celui du couple proposé.

Ainsi la position de différens couples parallèles peut être donnée par une seule droite perpendiculaire à tous ces couples, et qui en sera, pour ainsi dire, l'axe commun.

Si les couples sont situés dans des plans quelconques, on supposera d'abord, pour plus de clarté, qu'ils soient transportés dans des plans respectivement parallèles, tous conduits par un seul et même point A, pris à volonté dans l'espace, et qui deviendra le commun centre de tous ces couples : et si l'on prend ce point pour l'origine des perpendiculaires qu'on élève à ces plans respectifs, la position des différens couples se trouvera donnée par celle d'autant de droites partant d'un seul point, et faisant entre elles les mêmes angles que les plans des couples proposés.

De plus, si, à partir de ce point A, on porte sur ces droites des longueurs AL, AM, AN, etc., proportionnelles aux momens respectifs de ces couples, que je désigne ici par les simples lettres L, M, N, etc., chacune de ces lignes terminées, telle que AL, suffira pour représenter à la fois l'axe et la grandeur du couple L qui lui correspond.

Enfin, si l'on veut que la même ligne AL

puisse encore indiquer le *sens* dans lequel ce couple agit (ce qui est nécessaire pour achever la détermination complète du couple), il n'y aura qu'à faire une convention toute semblable à celle qui regarde les simples forces. Or, pour une simple force P appliquée en A et qu'on représente par une certaine ligne AP, cette convention consiste, comme on l'a dit (11), en ce que l'action de cette force a toujours lieu de A vers P, ou que la force tire de A en P. Ici, pour un couple L appliqué autour du centre A, et dont je représente l'axe et la grandeur par la ligne terminée AL, je supposerai toujours que le sens du couple ou de la rotation qu'il tend à produire est tel que, si l'on se plaçait au point L, considéré comme le nord, pour regarder devant soi le point A, considéré comme le midi, on verrait la rotation se faire de l'orient à l'occident, ou de la gauche à la droite, comme se fait à nos yeux le mouvement du soleil. C'est d'ailleurs le sens ordinaire dont la main fait tourner la plupart des instrumens de rotation ; et c'est dans ce sens convenu qu'agira pour nous le couple représenté par la ligne AL.

On peut adopter, si l'on veut, la convention contraire, pourvu qu'on s'y conforme avec le même soin pour tous les couples dont il s'agit

dans une même figure, ou dans l'énoncé d'une même proposition.

Au reste, on voit qu'une des deux conventions, comme la première, nous suffit; car, s'il fallait indiquer dans la figure un couple L′ contraire à L, on le représenterait de même par une ligne AL′, mais portée de l'autre côté du point A sur le prolongement de la première. Il est clair, en effet, que ce second couple qui, vu du point L′, ferait tourner dans le sens convenu, c'est-à-dire de gauche à droite, étant vu du point L, ferait tourner de droite à gauche, et serait réellement contraire au premier.

Par cette manière de déterminer les couples et d'en indiquer les sens simultanés, on voit donc que la représentation géométrique de tant de couples qu'on voudra, appliqués sur un corps dans des plans quelconques, devient parfaitement la même que celle d'autant de simples forces appliquées sur un point; et l'on va prouver tout à l'heure que leur composition peut s'exprimer par des lois toutes semblables. Tout se réduit en effet à la démonstration du théorème suivant, qui remplace le théorème II, et qu'on peut nommer le *parallélogramme des couples*.

Théorème.

61. *Si deux couples* L *et* M *sont représentés, pour leurs axes et pour leurs grandeurs, par les deux côtés* AL *et* AM *d'un parallélogramme* ALGM, *ces deux couples se composent en un seul* G *représenté, pour son axe et pour sa grandeur, par la diagonale* AG *de ce parallélogramme.*

En effet, que du point A et dans le plan du parallélogramme ALGM (fig. 24), on mène deux lignes ll', mm' perpendiculaires et proportionnelles aux deux côtés respectifs AL et AM, et qui soient toutes deux coupées par leur milieu au point A. Si l'on achève les parallélogrammes $Algm$, $Al'g'm'$, il est clair que ces parallélogrammes seront égaux entre eux, et semblables au premier ALGM, et que par conséquent la ligne gg' sera aussi perpendiculaire et proportionnelle à la diagonale AG, et coupée en son milieu au point A. Fig. 24.

Maintenant, que sur ces lignes ll', mm', comme bras de levier, et dans des plans perpendiculaires à la figure, on applique deux couples composés de forces égales, le premier (P, —P) sur la ligne ll', et le second (P, —P) sur mm'; et supposons, pour nous conformer à la convention ci-dessus (60), que ces couples

tendent tous deux à faire tourner de gauche à droite quand on les regarde l'un après l'autre des points L et M. Il est évident que ces deux couples peuvent être pris pour ceux que les côtés AL et AM représentent : car 1°. ils sont situés dans des plans perpendiculaires à ces côtés; 2°. ils ont des momens proportionnels aux mêmes côtés; et 3°. leurs sens simultanés sont conformes à la convention établie. Or, il est aisé de voir que ces deux couples se composent en un seul, représenté de même par la diagonale AG. En effet, les deux forces P et P appliquées en l et m se composent en une seule 2P parallèle et de même sens, appliquée au point c, qui est le milieu de lm, et par conséquent, le milieu de Ag. De même les deux forces — P et — P en l' et m', se composent en une seule — 2P appliquée en c', milieu de Ag'; et l'on a le couple résultant (2P , — 2P) appliqué sur la ligne cc', ou simplement, le couple (P , — P) appliqué sur la ligne double gg'. Or ce couple est évidemment perpendiculaire et proportionnel à la diagonale AG, et fait aussi tourner de gauche à droite quand on le regarde du point G. Donc, etc.

Nous aurions pu tirer ce théorème de l'une des démonstrations qui précèdent, mais nous avons préféré d'en faire ici la démonstration

immédiate, et sur une nouvelle figure, où l'on vît très clairement les sens relatifs que doivent avoir ensemble les trois couples que l'on y considère.

Remarque I.

62. On voit ici, par un raisonnement tout-à-fait semblable à celui du n° 37, que si deux couples agissent dans des plans qui se coupent, ou qui ne sont point parallèles, ils ne peuvent jamais donner un couple résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls tous les deux à la fois.

Remarque II.

63. Lorsque les plans des couples composans sont rectangulaires entre eux, les deux axes AL et AM sont aussi rectangulaires, et dans le rectangle ALGM, on a $\overline{AG}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{AM}^2$; de plus, si l'on nomme α et β les angles que fait la diagonale AG avec les deux côtés adjacens AL, AM, on a

$$AL = AG.\cos\alpha,\quad AM = AG.\cos\beta.$$

Donc en désignant simplement les trois momens respectifs par les lettres L, M, G, on a, pour le moment G, $G^2 = L^2 + M^2$, d'où

$$G = \sqrt{L^2 + M^2},$$

et, pour les angles α et β que son axe fait avec les axes des deux autres, $L = G\cos\alpha$, $M = G\cos\beta$, d'où

$$\cos\alpha = \frac{L}{G}, \qquad \cos\beta = \frac{M}{G}.$$

Remarque III.

En général, si l'on nomme φ l'angle que font entre eux les deux couples composans, ou leurs axes AL et AM, on aura dans le parallélogramme ALGM,

$$\overline{AG}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{AM}^2 + 2\overline{AL} \times \overline{AM}.\cos\varphi,$$

et par conséquent

$$G^2 = L^2 + M^2 + 2LM\cos\varphi;$$

ce qui donne le couple résultant G par les couples composans L et M, et leur inclinaison mutuelle φ.

Si l'angle φ est nul, on a $\cos\varphi = 1$, et il vient

$$G = L + M;$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a déjà vu : car les deux couples sont alors dans le même plan et de même sens, et ils se composent en un seul égal à leur somme.

Si l'angle φ est égal à deux droits, on a

$\cos\varphi = -1$, et il vient $G = L - M$; ce qui doit être; car les deux couples sont alors de sens contraires, et ils se composent en un seul égal à leur différence.

Lorsque φ est un angle droit, $\cos\varphi = 0$, et l'on a $G = \sqrt{L^2 + M^2}$, comme ci-dessus.

Remarque IV.

De la composition de deux couples, il est bien facile de s'élever à la composition de tant de couples qu'on voudra, et il est évident qu'on aura des théorèmes tout semblables à ceux qui regardent les simples forces autour d'un point : cependant je crois devoir énoncer et démontrer comme théorème, le corollaire suivant, à cause du grand usage qu'on en peut faire en Mécanique.

Théorème.

64. *Trois couples représentés, pour leurs axes et pour leurs grandeurs, par les trois arêtes contiguës d'un parallélépipède, se composent toujours en un seul représenté, pour son axe et pour sa grandeur, par la diagonale de ce parallélépipède.*

Soit en effet A...G (fig. 25) le parallélépipède; AL, AM, AN, les côtés qui représen- Fig. 25.

tent a la fois les axes et les momens des trois couples.

Les deux couples représentés par les deux côtés AL, AM du parallélogramme ALOM, se composeront en un seul, représenté, pour son axe et pour sa grandeur, par la diagonale AO de ce parallélogramme. Maintenant ce couple, et le troisième représenté par AN, se composeront en un seul représenté par la diagonale AG du parallélogramme ANGO. Or, cette diagonale est en même temps celle du parallélépipède; donc, etc.

65. On voit encore ici, par le même raisonnement que celui du n° 42, que si trois couples agissent dans trois plans qui forment un angle solide ou qui se coupent en un point unique, ils ne peuvent jamais avoir un couple résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls en même temps tous les trois.

Remarque.

66. Lorsque le parallélépipède est rectangulaire, en nommant L, M, N les momens composans, et G le moment résultant, on a manifestement $G^2 = L^2 + M^2 + N^2$.

En désignant par λ, μ, ν, les trois angles que la diagonale, ou plutôt que l'axe du couple résultant fait avec les trois axes des couples composans, on a

$$L = G\cos\lambda,\quad M = G\cos\mu,\quad N = G\cos\nu;$$

d'où

$$\cos\lambda = \frac{L}{G},\qquad \cos\mu = \frac{M}{G},\qquad \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Donc, s'il s'agit de calculer le moment résultant G de trois momens L, M, N, dont les axes sont rectangulaires, on aura pour sa valeur, $G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$, et pour les angles λ, μ, ν, que son axe fait avec les trois axes des momens composans,

$$\cos\lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

S'il s'agit, au contraire, de décomposer un couple G en trois autres, situés dans trois plans rectangulaires entre eux, ou dont les trois axes soient rectangulaires, on aura, pour les valeurs respectives des momens composans, $L = G\cos\lambda$, $M = G\cos\mu$, $N = G\cos\nu$; λ, μ, ν étant les trois angles que l'axe du couple donné fait avec ceux des couples composans cherchés.

67. Au reste, nous ne nous arrêterons pas sur ces détails : nous remarquerons seulement qu'entre les sept quantités L, M, N, G, cos λ, cos μ, cos ν, on a quatre équations qui sont : $G^2 = L^2 + M^2 + N^2$, $L = G\cos\lambda$, $M = G\cos\mu$, $N = G\cos\nu$, au moyen desquelles, connaissant d'ailleurs trois de ces quantités, on pourra déterminer les quatre autres.

Il faut pourtant excepter le cas où l'on ne connaîtrait que les trois angles λ, μ, ν; alors on ne pourrait obtenir que les rapports des momens L, M, N, G.

CONCLUSION GÉNÉRALE DE CE CHAPITRE.

Composition des forces dirigées comme on voudra dans l'espace.

68. Soient tant de forces que l'on voudra, P, $P_{,}$, $P_{,,}$, etc., appliquées d'une manière quelconque dans l'espace, à un corps ou système libre.

Je considère d'abord l'une d'elles, la force P (fig. 26), par exemple, qui est appliquée au point B. Ensuite, au point A, arbitrairement pris dans ce corps, ou au dehors (pourvu qu'on l'y suppose invariablement fixé), j'applique deux forces contraires P′, — P′, égales et parallèles à la force P. Il est clair que je n'ai rien

Fig. 26.

changé à l'état du système. Mais je puis considérer maintenant, au lieu de la force P appliquée en B, la force P′ appliquée en A, et le couple (P, — P′) agissant sur la droite AB. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs, dans un plan quelconque parallèle au sien, il ne restera au point A que la force P′ égale et parallèle à la force P, et qui n'est en quelque sorte que cette même force P qu'on aurait transportée parallèlement à elle-même de B en A.

Si l'on fait la même transformation pour toutes les forces du système à l'égard du même point A, il est manifeste que toutes ces forces viendront s'y réunir parallèlement à elles-mêmes, mais qu'il y aura de plus dans le système autant de couples appliqués provenant de chaque transformation. Or, toutes les forces appliquées au point A se composeront en une seule R, et tous les couples en un seul couple (S, — S) (fig. 27) appliqué sur une certaine droite BC.

Fig. 27.

Ce qui nous apprend que *tant de forces que l'on voudra appliquées d'une manière quelconque à un corps, peuvent toujours se réduire à une seule force et à un couple unique, lesquels seront en général situés dans des plans différens.*

Observons, en passant, que la quantité, la direction et le sens de la résultante R seront toujours les mêmes, en quelque lieu qu'on ait pris le point A. En variant la position de ce point, la résultante R ne fera que se transporter parallèlement à elle-même en différens lieux de l'espace; mais le plan et la grandeur du couple résultant (S, — S) changeront nécessairement.

Corollaire I,

Qui contient les lois de l'équilibre de tout système libre.

69. Un couple ne pouvant jamais être tenu en équilibre par aucune simple force dirigée comme on voudra dans l'espace, il résulte de ce que nous venons de dire qu'il ne pourra jamais y avoir équilibre dans le système, à moins que la résultante R des forces ne soit nulle d'elle-même, et que le moment du couple résultant (S, — S) ne soit aussi nul de lui-même.

Ainsi, *toutes les forces appliquées au système étant transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque du système ou de l'espace, doivent s'y faire équilibre entre elles; et tous les couples qu'elles produisent en*

se transportant en ce point doivent aussi se faire équilibre entre eux.

Remarque.

70. Telles sont, pour un système libre quelconque, de forme invariable, les deux conditions d'équilibre nécessaires et suffisantes, c'est-à-dire sans lesquelles l'équilibre ne pourra subsister, et telles qu'il aura manifestement lieu, si elles sont remplies.

Pour développer ces deux conditions, il faudra remonter à la valeur de la résultante R, et à la valeur du couple résultant (S, — S), en conservant les lois qui lient la résultante à ses composantes, et le couple résultant aux couples composans, faire ensuite la force R et le couple (S, — S) tous deux nuls, et voir quelles relations cela établit entre les forces primitives appliquées au système. On obtiendra de cette manière les conditions de l'équilibre, exprimées au moyen des seules forces données immédiatement par l'état de la question; ce qui est la solution du problème que nous avions en en vue.

Mais tous ces développemens qui, d'après les principes posés ci-dessus, ne sont plus qu'une affaire de Géométrie et de calcul, feront l'objet du chapitre suivant.

Corollaire II,

Qui contient les conditions nécessaires pour que toutes les forces appliquées au système aient une résultante unique, lorsqu'elles ne se font pas équilibre.

71. Toutes les forces appliquées au système étant ramenées, ainsi que nous venons de le voir, à une seule force et à un couple, supposons que cette force R et le couple (S, —S) puissent se réduire à une seule force, ou, si l'on veut, qu'une force unique R′ fasse équilibre au couple (S, — S) et à la force R.

Puisqu'il y a équilibre entre les deux forces R, R′ et le couple (S, — S), je dis que les deux forces R et R′ doivent former un couple contraire et équivalent au couple (S, — S), et situé dans le même plan, ou dans un plan parallèle ce qui est ici la même chose.

Car il ne peut arriver que trois cas : ou les deux forces R et R′ seront susceptibles de se réduire à une seule, et alors cette force ne pourra faire équilibre au couple (S, — S); ou elles se réduiront à une seule avec un couple, et alors ce couple et le proposé (S, — S) se réduiront à un seul, qui ne pourra pas être en équilibre avec la force; ou bien enfin elles se

réduiront à un seul couple, et c'est le seul cas qui puisse arriver.

Il faut donc au moins que les deux forces R et R′ forment ensemble un couple. Mais pour que ce couple fasse équilibre au couple (S,—S), il est nécessaire qu'il soit situé dans le même plan ou dans un plan parallèle, sans quoi ces deux couples se composeraient toujours en un seul qui ne pourrait jamais être nul (62), et il n'y aurait pas équilibre. Donc la direction de la résultante R doit être parallèle au plan du couple résultant (S, — S); et par conséquent, *toutes les forces appliquées au système ne pourront jamais se réduire à une seule, à moins que la résultante de ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, n'ait une direction parallèle au plan du couple résultant; et cela, en quelque lieu de l'espace qu'on ait pris d'abord le point où l'on a transporté toutes les forces.*

Cette condition est nécessaire, et il est clair qu'elle suffit en général; car, à moins que la résultante R ne soit nulle, on sera toujours maître d'appliquer au système une force R′ qui soit égale, parallèle et opposée à la force R, et qui forme avec elle un couple (R, —R) de sens contraire à l'égard du couple (S, — S), et d'un moment équivalent. Cette force es-

timée en sens contraire sera la résultante générale.

Au reste, on pourra prendre immédiatement cette résultante; car si la force R appliquée en A est parallèle au plan du couple (S, — S), on pourra amener ce couple dans un même plan avec la force R, et alors les trois forces R, S et — S étant dans le même plan, se composeront toujours en une seule, égale et parallèle à R, et qui sera la résultante unique de toutes les forces.

72. Dans le cas où la force R est égale à zéro il n'y a point de résultante unique. Car toutes les forces du système sont réduites au seul couple (S, — S) qui ne peut jamais se réduire à une seule force. Ainsi, à la condition précédente qui exige que la force R soit parallèle au plan du couple (S, — S), il faut joindre encore celle-ci, comme condition particulière : *que la force* R *ne soit pas égale à zéro*. (A moins qu'il n'y ait équilibre, auquel cas la force résultante et le couple résultant étant tous deux nuls, on pourrait dire qu'il y a une résultante unique qui est zéro, et qui a d'ailleurs telle direction et telle position qu'on veut dans l'espace : mais nous avons exclu le cas de l'équilibre.)

Remarque I.

73. Lorsque le couple résultant (S, — S) (fig. 28) et la force R ne sont pas dans des plans parallèles, il n'y a jamais de résultante unique. Seulement en transportant le couple (S, — S) parallèlement à son plan, on peut amener l'extrémité B ou C de son bras de levier sur le point A, et alors les deux forces R et S appliquées en A se composent en une seule T; et toutes les forces du système sont réduites à deux autres T et — S non situées dans le même plan. Fig. 28.

Ce qui nous fait voir d'abord que *tant de forces que l'on voudra, dirigées arbitrairement dans l'espace, peuvent toujours se réduire à deux au plus, non situées dans le même plan.*

Mais il est clair que cette réduction peut avoir lieu d'une infinité de manières, même sans déplacer le point A où l'on rassemble toutes les forces; car le couple (S, — S) pourrait être changé en une infinité d'autres équivalens, et de plus tourné sur son axe dans une position quelconque, et l'on arriverait ainsi à une infinité de systèmes différens de deux réduites non situées dans le même plan.

A la vérité, on pourrait choisir, entre ces systèmes, celui où l'une des forces serait perpendiculaire au plan du couple, et l'autre

dirigée dans ce même plan ; car, imaginez la résultante R décomposée en deux forces, l'une V perpendiculaire, l'autre U parallèle au plan du couple (S, — S) : la force U et le couple parallèle (S, — S) se réduiront toujours à une seule U′ égale et parallèle à U ; et toutes les forces appliquées seront réduites à deux autres V et U′ de directions rectangulaires dans l'espace. Ainsi, *des forces quelconques peuvent se réduire à deux forces de directions perpendiculaires entre elles, et dont l'une passe en un point A donné à volonté.* Mais cette réduction elle-même, qui souffre d'ailleurs une exception, n'a guère plus d'utilité que la précédente, et nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Remarque II.

74. La seule conséquence qu'il soit bon de remarquer est cette autre proposition réciproque : que *deux forces non situées dans le même plan ne peuvent jamais avoir de résultante unique.*

Et en effet, on peut toujours supposer que ces deux forces proviennent d'une autre force, et d'un couple qui ne lui était pas parallèle.

Mais si l'on veut voir la chose directement, soit AB (fig. 29) la commune perpendiculaire aux directions des deux forces P et Q non si-

Fig. 29.

tuées dans le même plan, et dont aucune n'est supposée nulle. Je transporte P parallèlement à elle-même de B en A, et j'ai deux forces P′ et Q appliquées au même point A, et un couple (P, — P′) appliqué sur AB. Or, au point A, les forces P′ et Q qui, par hypothèse, font entre elles un certain angle QAP′, se composent en une seule R dirigée dans l'intérieur de cet angle. Mais cette force R ne peut être parallèle au plan du couple (P, — P′), puisqu'elle fait avec ce plan un angle RAP′ qui ne peut jamais être nul, à moins que Q ne soit nulle, ce qui est contre la supposition : donc (71) les deux forces P et Q non situées dans le même plan ne peuvent jamais avoir de résultante unique; proposition qu'on regarde ordinairement comme évidente, mais qui avait besoin d'être démontrée.

Remarque III.

75. C'est, au reste, le seul cas général où l'on puisse assurer que des forces ne sont pas réductibles à une seule ; car, dès que l'on considère seulement trois forces, il résulte de notre théorie qu'elles peuvent avoir une résultante unique, quand bien même il n'y aurait aucune rencontre entre les directions de ces trois forces dans l'espace.

Soient, en effet, trois forces P, Q, R que je

suppose, deux à deux, non situées dans le même plan, ou même telles que, s'il y en avait deux dans le même plan, l'autre ne fût en même plan ni avec la première, ni avec la seconde.

Je choisis deux de ces forces P et Q qui ne soient pas situées dans un même plan; et je les imagine transportées en un même point A pris sur la direction de la troisième force R. Ces deux forces P et Q viennent s'y composer en une seule V, et donnent deux couples qui se composent en un seul (S, — S); et le plan de ce couple ne passe point par la direction AV de la force V (74).

Cela posé, si la résultante des deux forces V et R, appliquées en A, se trouvait dans le plan du couple (S, — S) qui passe au même point, les trois forces proposées P, Q, R seraient réductibles à une seule (71). Or, sans changer la direction de la force R, on peut disposer du sens et de la grandeur de cette force de manière que la résultante de V et R tourne autour du point A dans le plan de ces deux forces, et se dirige suivant l'intersection de ce plan avec celui du couple (S, — S), et tombe ainsi dans le plan même de ce couple. Donc, en prenant convenablement la grandeur et le sens de l'une des trois forces P, Q, R, sans rien changer à leurs positions mutuelles, on peut

en général rendre ces trois forces réductibles à une seule.

Je dis *en général*, parce qu'il y a un cas particulier où la chose ne pourrait avoir lieu en supposant qu'il y eût un certain rapport donné entre P et Q, et qu'on s'astreignît à ne faire varier que la quantité de la troisième force R: car, si, par ce rapport de P à Q, il arrivait que l'intersection du plan VAR avec le plan du couple fût la direction même AR de cette troisième force, on ne pourrait faire prendre à la résultante de V et R la direction AR, sans faire la composante R infinie, ce qui est impossible.

Mais, dans ce cas particulier, que l'on commence par changer le rapport des deux forces P et Q, ou simplement le sens de l'une d'elles, et le couple (S, — S) qui résultera de leur translation au point A, ne passera plus par la direction de la troisième force R; car, si le plan de ce couple passait encore par la même droite AR, il s'ensuivrait que AR est la commune section des deux plans où sont situés les couples qui composent (S, — S), et qu'ainsi la force R est à la fois dans un même plan avec P, et dans un même plan avec Q: ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi, *quand de trois forces* P, Q, R, *on n'en peut trouver tout au plus que deux qui*

soient situées en même plan, il est toujours possible de rendre ces trois forces réductibles à une seule, sans rien changer à leurs directions dans l'espace.

Le seul cas où l'on puisse dire de trois forces que leur position seule les rend toujours irréductibles, est celui où, en regardant ces forces deux à deux, on ne trouve qu'une combinaison qui présente deux forces non situées en même plan. Dans une telle position, quels que soient les rapports de grandeur qu'on veuille donner à ces forces, on ne les rendra jamais capables de se réduire à une seule.

Remarque IV.

76. Comme il paraît incontestable qu'un couple ne peut être en équilibre autour d'un point fixe, par exemple, autour du milieu de son bras de levier, remarquons cette différence entre l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un corps assujetti à tourner autour d'un point fixe, et l'équilibre de plusieurs couples qui seraient appliqués au même corps.

Dans le premier cas, il n'est pas nécessaire que les forces aient une résultante nulle d'elle-même; il suffit qu'elles aient une résultante qui passe par le point fixe où elle sera détruite.

Mais, dans le second, il faut nécessairement

que les couples appliqués au corps donnent un couple résultant nul de lui-même, comme s'il n'y avait pas de point fixe dans le corps; car, si ce couple n'est pas nul de lui-même, en le transportant, pour plus de clarté, de manière que le milieu de son bras de levier vienne tomber au point fixe, il est évident que ses deux forces ne pourront être en équilibre autour de ce point.

Et il est encore évident qu'elles ne seraient pas en équilibre, quand bien même il y aurait dans le corps un axe fixe, pourvu que le plan du couple ne passât point par cet axe, ou ne fût point parallèle à sa direction, ce qui reviendrait au même (49).

Ainsi, *lorsque différens couples, situés comme on voudra dans l'espace, sollicitent un corps ou système assujetti à tourner autour d'un point fixe, les conditions de l'équilibre sont absolument les mêmes que si le corps était parfaitement libre.*

Et la même chose a lieu dans le cas d'un axe fixe, si les couples appliqués sont tellement disposés qu'ils ne puissent jamais donner un couple résultant parallèle à cet axe; ce qu'on ne peut assurer d'une manière générale que lorsque tous les couples sont dans des plans parallèles qui rencontrent l'axe fixe en le coupant.

CHAPITRE II.

DES CONDITIONS DE L'ÉQUILIBRE.

77. Nous venons de voir (68) qu'on peut transformer chaque force P (fig. 26) qui agit sur un système en un certain point B, en une autre force P′ égale, parallèle et de même sens, appliquée en un autre point A pris à volonté dans l'espace, et en un couple (P, — P) appliqué sur AB, et dont l'énergie est mesurée par le moment P × AI, AI étant une perpendiculaire abaissée du point A sur la direction de la force P; que, de cette manière, le système peut être considéré comme sollicité par la résultante de toutes les forces qui se seraient en quelque sorte transportées parallèlement à elles-mêmes au point A, et par le couple résultant de tous les couples qui naissent de ces transformations. Nous avons vu que pour l'équilibre, cette résultante et le moment du couple résultant doivent être nuls tous les deux à la fois. Fig. 26.

Nous pourrions développer sur-le-champ ces

deux conditions dans le cas général d'un corps ou système sollicité par tant de forces que l'on voudra dans l'espace, et déduire de là les conditions de l'équilibre dans tous les cas particuliers qui peuvent se présenter : mais, comme notre marche doit toujours être uniforme dans le courant de ce chapitre, ou plutôt comme elle n'offrira qu'une même et continuelle application d'un même principe, nous aimons mieux passer en revue plusieurs questions simples, avant que de traiter la question générale. Cela nous fournira d'ailleurs l'occasion de répandre plusieurs propositions sur les momens, dont on fait beaucoup d'usage dans la Statique.

Une fois parvenu au théorème général de l'équilibre, on pourra s'y arrêter, et l'on y trouvera comprises toutes les propositions qui auront été précédemment expliquées.

I.

De l'équilibre des forces parallèles qui sont situées dans un même plan.

78. Soient P, P′, P″, P‴ (fig. 30), etc., les différentes forces parallèles. D'un point A pris où l'on voudra dans leur plan, abaissons une perpendiculaire commune sur leurs directions et qui les coupe aux points respectifs B, C, D, etc. Fig. 30.

Considérant d'abord la force P, j'applique au point A deux forces contraires P, — P, égales et parallèles à la première; ainsi, j'ai, au lieu de la simple force P appliquée en B, une force égale et parallèle appliquée en A, et un couple (P, —P) agissant sur AB et dont le moment est $P \times AB$. Je substitue de même, au lieu de la force P′ appliquée en C, une force égale et parallèle et de même sens appliquée en A, et un couple (P′, — P′) appliqué sur AC et dont le moment est $P \times AC$: de même pour la force P″, etc.

Si, pour plus de clarté, on transporte tous les couples ailleurs dans le même plan, il ne restera au point A que les forces P, P′, P″, etc., égales et parallèles aux forces primitives appliquées en B, C, D, etc., et de même sens.

Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut, 1°. que la résultante des forces appliquées en A soit nulle d'elle-même. Mais toutes ces forces agissant dans une même direction, leur résultante est égale à leur somme (*), et par conséquent, l'on aura

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0,$$

première équation de l'équilibre.

(*) Il faut prendre ce mot ici et ailleurs dans le sens de la remarque suivante (79).

2°. Il faut que le moment résultant de tous les momens des couples soit aussi nul de lui-même; mais ce moment résultant est égal à la somme des momens composans, puisque tous les couples sont dans un même plan. Donc, en nommant, pour abréger, p, p', p'', etc., les bras de levier respectifs AB, AC, AD, etc., on aura

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0,$$

seconde équation de l'équilibre.

Remarque.

79. Il est clair que dans la première équation, si l'on regarde les forces qui tirent dans un même sens comme positives, il faut regarder celles qui tirent dans le sens contraire comme négatives. Nous regarderons désormais comme positives les forces telles que P′ qui tirent au-dessus de la droite AD, et par conséquent comme négatives les forces telles que P, P″,.. qui tirent au-dessous; et de cette manière on pourra dire que la *somme* des forces doit être nulle pour l'équilibre.

Pour les signes des momens Pp, $P'p'$,...., de la seconde équation, il faut faire attention à deux choses; 1°. au signe de la force; 2°. au signe du bras de levier.

Supposons, en effet, que la force P, sans

cesser d'agir du même côté du point A, vienne à changer de signe; il est clair que le couple nouveau qu'elle produira à l'égard du point A sera d'un sens contraire à celui du premier: ainsi, le moment Pp change, de signe lorsque la force P en change.

Concevons maintenant que la force P, sans changer de signe, vienne à agir au point B′ de l'autre côté du point A. Il est visible que le couple nouveau qu'elle produira à l'égard du point A sera d'un sens contraire à celui du premier, et par conséquent le moment Pp change de signe lorsque le seul bras de levier p en change.

Donc, en prenant les bras de levier tels que AB qui sont à droite du point A comme positifs, par exemple, il faudra prendre les bras de levier tels que AB′ qui tomberaient à gauche comme négatifs; et l'on pourra toujours dire que la somme des momens doit être nulle en donnant des signes convenables aux forces et aux bras de levier.

Corollaire.

80. Supposons que les forces P, P′, P″, etc., ne soient pas en équilibre, mais qu'elles aient une résultante unique R, et que par conséquent —R soit une force capable de leur faire équilibre.

Les deux équations précédentes devront avoir lieu si l'on y fait entrer la force — R. On aura donc d'abord

$$P + P' + P'' + \text{etc.} - R = 0,$$

ou bien

$$R = P + P' + P'' + \text{etc.};$$

ce qui nous apprend que la résultante est égale à la somme des composantes; ce que nous savions déja.

En second lieu, si l'on nomme r la distance de la résultante au point A, on aura

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} - Rr = 0,$$

ou bien

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.}$$

Ce qui nous fait voir que le produit de la résultante, par sa distance r à un point quelconque A pris dans le plan des forces, est égal à la somme de tous les produits semblables des composantes par leurs distances respectives à ce même point.

En divisant cette équation par R, et mettant à la place de cette quantité sa valeur P + P′ + P″ + etc., on aura

$$r = \frac{Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}}.$$

Ce qui donnera la distance de la résultante au point A, et par conséquent fera connaître sa position, puisque l'on sait d'ailleurs qu'elle doit être parallèle aux composantes.

Remarque.

81. Les produits Pp, $P'p'$, etc., sont ce que l'on nomme ordinairement les momens des forces; mais on n'attache pas au mot de *moment* d'autre idée que celle d'un simple produit, qui résulte de deux nombres, dont l'un exprime la force et l'autre sa distance à un point : au lieu que le moment est pour nous la mesure d'une force particulière, c'est-à-dire de l'énergie du couple qui provient de la force, lorsqu'on la transporte parallèlement à elle-même au point que l'on considère. Mais comme ici, et dans la plupart des Ouvrages de Statique, le moment exprime une même quantité numérique, à la différence près de l'idée que nous y joignons, nous avons cru devoir conserver ce mot, qui est consacré par l'usage, et qui rend d'ailleurs assez bien notre idée, puisque le mot latin *momentum* d'ou vient *moment*, veut dire aussi *poids*, *force*; ou plus exactement, *ce que vaut une force à raison de sa grandeur et du bras de levier par lequel elle agit*.

Au reste, lorsque nous ne voudrons parler

que du simple produit numérique d'une force par sa distance à un point, à un axe perpendiculaire, ou à un plan parallèle à sa direction, nous dirons aussi le moment de la force par rapport au point, ou à l'axe, ou au plan parallèle : et cela n'introduira aucune équivoque dans le discours, puisque l'on pourra entendre si l'on veut, par ce produit, le moment du couple qui naîtrait de la force transportée parallèlement à elle-même au point, ou sur l'axe, ou dans le plan que l'on considère.

De cette manière, l'équation précédente

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.},$$

peut s'exprimer ainsi :

La somme des momens de tant de forces parallèles qu'on voudra, par rapport à un point quelconque de leur plan, est égale au moment de leur résultante par rapport au même point; ce qui est le théorème connu des momens, pour les forces parallèles qui sont situées dans un même plan.

II.

De l'équilibre des forces parallèles qui agissent sur différens points d'un corps dans l'espace.

82. Soient P, P', P'', etc. (fig. 31), les différentes forces parallèles. Je mène à volonté deux Fig. 31.

plans ZAY, ZAX parallèles aux directions des forces, et qui se coupent suivant AZ à angle droit l'un sur l'autre, pour plus de simplicité. Cela posé, considérant d'abord la force P appliquée en B, j'abaisse une perpendiculaire BH sur la commune intersection AZ, et appliquant en H deux forces contraires P, — P égales et parallèles à la première, je considère au lieu de la force P appliquée en B, une force égale et parallèle et de même sens appliquée en H, et un couple (P, — P) agissant sur BH. Si l'on fait la même transformation pour les autres forces P′, P″, etc., et que, pour plus de clarté, on conçoive tous les couples transportés ailleurs, chacun dans son plan, il ne restera dans l'axe AZ que les forces P, P′, P″, etc., respectivement égales et parallèles aux forces primitives, et de même sens.

Or, la première condition de l'équilibre est que la résultante de toutes ces forces soit nulle d'elle-même; et comme elles agissent dans une même droite, leur résultante est égale à leur somme; et par conséquent, il faut qu'on ait

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0.$$

La seconde condition de l'équilibre est que le moment résultant de tous les momens des couples soit aussi nul de lui-même. Mais ce moment résultant ne se trouve pas, comme tout à l'heure, en ajoutant les momens composans, car les couples ne sont pas dans un même plan ni dans des plans parallèles.

Pour l'obtenir, considérant d'abord le couple (P,—P), que je suppose ramené dans sa première position sur BH, j'abaisse du point B deux perpendiculaires BG, BI sur les deux plans ZAY, ZAX; et achevant le parallélogramme BGHI, je décompose le couple (P, — P) appliqué sur la diagonale BH, en deux autres, composés de forces égales, mais appliqués respectivement sur les deux côtés HI et GH (58); ainsi, en nommant x et y ces lignes, ou leurs égales BG et BI, le moment proposé P × BH, sera décomposé en deux autres Px, Py situés dans les plans respectifs ZAX, ZAY.

Si l'on nomme de même x' et y' les deux perpendiculaires abaissées du point d'application de la force P′ sur les deux plans, le moment du couple (P′, — P′) pourra se décomposer dans ces deux plans en deux momens P′x', P′y'; et ainsi de suite pour tous les couples.

Mais les momens qui sont dans le plan ZAX se réduiront à un seul L, égal à leur somme $Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}$; tous ceux qui seront dans le plan ZAY se réduiront de même à un seul M égal à leur somme $Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.}$,

et ces deux momens résultans L et M se composeront enfin en un seul G qui sera le moment total : donc il faudra, pour l'équilibre, qu'on ait G=o. Mais les deux momens L et M, étant situés dans des plans qui se coupent, ne peuvent jamais donner un moment résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls, chacun en particulier (62); et, partant, la seconde condition générale de l'équilibre G=o exige ces deux équations : L=o, M=o, c'est-à-dire,

$$Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.} = o,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.} = o.$$

Ce qui nous fait voir que *pour l'équilibre d'un groupe de forces parallèles, il faut ces trois conditions particulières : que la somme de toutes les forces soit nulle, et que la somme de leurs momens par rapport à deux plans parallèles à leurs directions soit nulle d'elle-même pour chacun de ces plans.*

Remarque.

83. Dans les équations précédentes, nous regarderons comme positives les forces qui tirent de bas en haut, et par conséquent comme négatives celles qui tirent dans le sens contraire.

Pour les signes des momens, il est clair qu'ils

changent en même temps que ceux des forces. Mais, d'un autre côté, si une force telle que P, sans changer de signe, vient à agir en B′ de l'autre côté du plan ZAX, elle produira un couple d'un sens contraire à celui du premier; et par conséquent, le moment change encore de signe lorsque le seul bras de levier en change. Donc si, par rapport à un plan, on regarde les bras de levier qui tombent d'un côté comme positifs, il faudra regarder ceux qui tombent de l'autre côté comme négatifs; et l'on pourra toujours dire que la somme des momens est nulle, en donnant des signes convenables aux forces et aux bras de levier.

Corollaire I.

84. Supposons que les forces P, P′, P″, etc., ne soient pas en équilibre, mais qu'elles aient une résultante unique R, et que par conséquent — R soit une force capable de leur faire équilibre. Les trois équations précédentes devront avoir lieu en y introduisant la force — R. On aura donc d'abord

$$R = P + P' + P'' + \text{etc.},$$

ce qui donne la valeur de la résultante.

Si l'on nomme ensuite p et q les distances

FAC. N. FILOSOFIA — BIBLIOTECA

respectives de cette résultante aux deux plans ZAY, ZAX, on aura

$$Rp = Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.},$$
$$Rq = Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.};$$

d'où, en mettant pour R sa valeur, on tire

$$p = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}},$$
$$q = \frac{Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}},$$

ce qui donnera les distances de la résultante à deux plans, et fera connaître sa position dans l'espace; car, si l'on mène au deux distances trouvées, deux plans respectivement parallèles aux premiers, la direction de la résultante, qui doit se trouver à la fois dans ces deux plans, ne sera autre chose que leur intersection même.

85. On voit que les équations précédentes nous fournissent ces deux conséquences, qu'on peut énoncer ainsi, conformément à l'usage :

La somme des momens de tant de forces parallèles que l'on voudra, par rapport à un plan quelconque parallèle à leurs directions, est égale au moment de leur résultante.

Et la distance de la résultante à ce plan est égale à la somme des momens des forces, divisée par la somme de toutes les forces.

Corollaire II.

Du centre des forces parallèles.

86. Puisque le centre des forces parallèles est situé sur la direction de la résultante, il est clair que la distance de ce centre à un plan quelconque parallèle aux forces se trouvera comme la distance de la résultante à ce plan, c'est-à-dire en divisant la somme des momens, par rapport au plan, par la somme de toutes les forces.

Si l'on veut avoir ensuite la distance de ce centre à un plan quelconque, on concevra que les forces, sans changer de grandeur, sans cesser d'être parallèles et de passer aux mêmes points, soient tournées toutes parallèlement à ce nouveau plan; et l'on aura pour cette seconde distance la somme des nouveaux momens divisée par la somme de toutes les forces.

On fera la même opération pour un troisième plan, et si l'on mène alors aux trois distances trouvées, trois plans respectivement parallèles aux trois premiers, le centre des forces devant se trouver à la fois dans ces trois plans, sera déterminé par leur intersection.

87. Si toutes les forces étaient égales et de

même sens, l'expression

$$\frac{Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}},$$

qui donne la distance du centre à un plan quelconque, deviendrait

$$\frac{Px + Px' + Px'' + \text{etc.}}{P + P + P + \text{etc.}} = \frac{x + x' + x'' + \text{etc.}}{n},$$

n étant le nombre des forces parallèles.

Ainsi la distance du centre au plan serait égale à la somme des distances de tous les points d'application, divisée par leur nombre, ou, si l'on veut, égale à la moyenne distance de tous les points d'application; d'où l'on voit que, dans le cas où les forces sont égales, le centre des forces est un point dont la position ne dépend plus que de la figure formée par les points d'application.

III.

De l'équilibre des forces qui agissent dans un même plan suivant des directions quelconques.

Fig. 32. 88. Soient P′, P″, P‴, etc. (fig. 32) les différentes forces situées d'une manière quelconque dans un même plan. D'un point quelconque A pris dans ce plan, abaissons sur leurs directions respectives des perpendiculaires AB, AC,

AD, etc., qui les rencontrent en B, C, D, etc., et nommons p', p'', p''', etc., ces perpendiculaires.

Il est clair que la force P′ pourra se décomposer en une autre égale, parallèle et de même sens appliquée en A, et en un couple dont le moment sera P′ × AB, ou P′p'. De même la force P″ se décomposera en une autre égale et parallèle et de même sens appliquée en A, et en un couple dont le moment sera P″ × AC, ou P″p''; et ainsi de suite pour toutes les autres forces P‴, etc.

Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut que la résultante de toutes les forces appliquées en A soit nulle d'elle-même, et que le moment résultant de tous les momens P′p', P″p'', P‴p''', etc., soit aussi nul de lui-même.

Cette dernière condition est très facile à exprimer, car tous les couples étant dans un même plan, le couple résultant est égal à la somme des couples composans, et l'on a sur-le-champ

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0.$$

Pour exprimer l'autre condition, imaginons qu'on décompose les forces P′, P″, P‴, etc., appliquées en A, chacune en deux autres suivant deux lignes quelconques AX, AY qui se cou-

pent en A dans le plan des forces. Nommons X' et Y' les deux composantes de P' suivant les axes respectifs AX, AY ; de même, X'', Y'', X''', Y''', etc., les composantes analogues des autres forces P'', P''', etc., suivant les mêmes axes. Toutes les forces X', X'', X''', etc., étant dans une même droite AX, se composeront en une seule $X = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$; de même les forces Y', Y'', Y''', etc., se composeront en une seule $Y = Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.}$, et ces deux résultantes partielles se composeront en une seule R qui sera la résultante générale. Il faudra donc pour l'équilibre qu'on ait $R = 0$. Mais les deux forces X et Y agissant suivant deux lignes qui se coupent, ne peuvent donner une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles elles-mêmes, chacune en particulier (37). Et par conséquent la condition $R = 0$ exige ces deux équations : $X = 0$, $Y = 0$, c'est-à-dire

$$X' + X'' + X''' + \text{etc.} = 0,$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = 0.$$

Les forces P', P'', P''', etc., appliquées au point A étant parfaitement égales et parallèles aux forces primitives appliquées dans le plan, il est clair que les composantes X', Y', X'', Y'', X''', Y''', etc., sont, pour la quantité, parfaitement les mêmes que si l'on avait décomposé les forces primitives P', P'', P''', etc., chacune en son lieu. Et par conséquent les conditions de l'équilibre entre tant de forces que l'on voudra, situées dans un même plan, sont :

1°. *Que la somme des forces décomposées parallèlement à deux axes qui se coupent dans le plan, soit nulle par rapport à chacun de ces axes ;*

2°. *Que la somme des momens des forces par rapport à un point quelconque du plan soit nulle d'elle-même.*

89. Si l'on trouvait que la dernière condition a lieu par rapport à un certain point connu, et que les deux autres ont aussi lieu par rapport aux directions de deux axes connus, qu'on peut toujours supposer menés par ce point, il y aurait équilibre dans le système ; et, puisqu'il y aurait équilibre, les mêmes conditions auraient lieu par rapport à tous les points et à tous les axes possibles, pris dans le plan des forces.

Corollaire.

90. Si les forces P', P'', P''', ne sont pas en équilibre entre elles, mais qu'elles soient susceptibles de se réduire à une seule R, de sorte

que — R soit une force capable de les tenir en équilibre, l'équation des momens aura lieu en y introduisant la force — R. Donc, en désignant par r la distance de cette force au point A, on aura l'équation

$$-Rr+P'p'+P''p''+P'''p'''+\text{etc.}=0,$$

ou

$$Rr=P'p'+P''p''+P'''p'''+\text{etc.};$$

c'est-à-dire que *le moment de la résultante, par rapport à un point quelconque du plan des forces, est égal à la somme des momens des composantes par rapport au même point.* Ce qui donne le théorème connu des momens.

Si le point par rapport auquel on prend les momens, et qu'on nomme ordinairement *le centre des momens*, tombait sur la direction même de la résultante R, la perpendiculaire r serait nulle; par conséquent le moment Rr serait nul aussi, et l'on aurait

$$0=P'p'+P''p''+P'''p'''+\text{etc.}$$

Ce qui nous fait voir que, *par rapport à un point quelconque de la direction de la résultante, la somme des momens de tant de forces que l'on voudra situées dans un même plan est toujours égale à zéro.*

Remarque.

91. Dans l'équation

$$P'p'+P''p''+P'''p'''+\text{etc.}=0,$$

qui exprime la seconde condition générale de l'équilibre, il faudra distinguer les momens des couples qui agissent dans un sens, d'avec les momens de ceux qui agissent dans le sens contraire, et leur donner des signes différens. Mais pour plus de clarté et de précision, nous allons reproduire cette équation sous une autre forme.

Manière plus simple de présenter les conditions précédentes.

92. Soient B′, B″, B‴, etc. (fig. 33), les points où les forces P′, P″, P‴, etc., sont immédiatement appliquées dans le plan. Soient x' et y' les deux coordonnées AG′ et G′B′ du point B′, par rapport aux deux axes quelconques AX, AY; x'' et y'' les deux coordonnées analogues du point B″, et ainsi de suite. Supposons que l'on décompose d'abord toutes les forces P′, P″, P‴, etc., parallèlement aux deux axes AX, AY; et nommant, comme plus haut, X′ et Y′ les deux composantes de P′; X″ et Y″ les deux composantes de P″, etc., ne considérons plus, Fig. 33.

au lieu des forces données P', P'', P''', etc., que les deux groupes X', X'', X''', etc., Y', Y'', Y''', etc.

D'abord, les forces parallèles, X', X'', X''', etc., étant transportées parallèlement à elles-mêmes dans l'axe AX, s'y composeront en une seule égale à leur somme. Les forces parallèles Y', Y'', Y''', etc., étant transportées de même dans l'axe AY, s'y composeront aussi en une seule égale à leur somme.

Ces deux résultantes partielles se composeront en une seule appliquée en A, et par la première condition générale de l'équilibre, qui veut que cette résultante soit nulle, on aura, comme ci-dessus, les deux équations

$$X' + X'' + X''' + \text{etc.} = 0,$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = 0.$$

Il faut exprimer ensuite que la somme des momens des couples formés par toutes ces forces à l'égard du point A est nulle d'elle-même. Mais en observant que l'axe AX fait avec les directions des forces Y', Y'', etc., des angles égaux entre eux et à ceux que l'axe AY forme avec les directions des forces X', X'', etc., on voit sur-le-champ qu'on peut prendre les produits $X'y'$, $X''y''$, etc., $Y'x'$, $Y''x''$, etc., pour momens, dans la mesure relative des différens

couples. Donc, puisque leur somme doit être nulle, on aura l'équation

$$X'y' + X''y'' + \text{etc.} + Y'x' + Y''x'' + \text{etc.} = 0.$$

Cette équation remplace la précédente (91)

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0;$$

mais au lieu des perpendiculaires p', p'', p''', etc., qu'il faut abaisser du point A sur les directions respectives des forces, elle contient les coordonnées des points où les forces sont immédiatement appliquées dans le plan. Elle a de plus cet avantage, que les termes $X'y'$, $X''y''$, $Y'x'$, etc., prendront d'eux-mêmes les signes qui conviennent aux sens respectifs des couples dont ils représentent les momens, si l'on a soin de donner aux forces et aux coordonnées des signes convenables.

On pourra prendre, comme en Géométrie, les abscisses x', x'', etc., positives à la droite de l'origine, et par conséquent négatives à la gauche, les ordonnées y', y'', etc., positives au-dessus de l'axe des abscisses, et par conséquent négatives au-dessous.

Quant aux forces, il est clair que, dans chaque groupe, il faudra donner des signes contraires à celles qui agissent en sens contraires.

Mais en considérant dans le premier groupe

une force telle que X'' qui tire à droite de l'axe AY, et dans le second, une force telle que Y', qui tire au-dessous de l'axe AX, il est facile de voir que ces deux forces donnent à l'égard du point A des couples de même sens, lorsque leurs coordonnées AH″ et AG′ ou y'' et x' sont de même signe. Donc, il faudra que les forces du premier groupe qui tirent à droite de l'axe des ordonnées, aient le même signe que les forces du second qui tirent au-dessous de l'axe des abscisses; donc, si l'on regarde les premières comme positives, on regardera aussi les secondes comme positives; et de cette manière, tous les momens écrits sous le même signe dans l'équation précédent eprendront des signes relatifs aux sens des couples.

93. Mais si dans le premier groupe X', X'', X''', etc., regardant toujours comme positives les forces qui tirent à droite de l'axe des ordonnées, ou qui tendent à augmenter les abscisses de leurs points d'application, on voulait, pour la symétrie, regarder aussi comme positives dans le second groupe Y', Y'', Y''', etc., les forces qui tirent au-dessus de l'axe des abscisses, ou qui tendent à augmenter les ordonnées de leurs points d'application, il faudrait alors donner un signe contraire à toute la partie

des momens relatifs à ce groupe. Et l'équation précédente se mettrait sous cette forme:

$$X'y' + X''y'' + \text{etc.} - Y'x' - Y''x'' - \text{etc.} = 0.$$

Nous retiendrons désormais cette expression, de préférence à la première, parce que dans les deux groupes, les forces positives seront celles qui tendent à augmenter les coordonnées de leurs points d'application, et les forces négatives, celles qui tendent à diminuer les mêmes coordonnées.

Corollaire I.

94. Si les deux axes AX, AY (fig. 34) étaient à angle droit, les abscisses et les ordonnées elles-mêmes deviendraient les bras de levier des couples, et les momens $X'y'$, etc., $Y'x'$, etc., donneraient la mesure absolue de leurs efforts. De plus, en nommant α' l'angle que fait la direction de la force P' avec l'axe des abscisses, on aurait, pour la composante X' parallèle à cet axe, $P' \cos \alpha'$. On aurait pour l'autre composante Y', $P' \sin \alpha'$. Fig. 34.

En nommant de même α'' l'angle de la direction de la force P'' avec l'axe des abscisses, on aurait $X' = P'' \cos \alpha''$, $Y'' = P'' \sin \alpha''$, et ainsi de suite; et les équations précédentes deviendraient

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.} = 0,$$
$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + \text{etc.} = 0,$$
$$P'(y' \cos \alpha' - x' \sin \alpha') + P''(y'' \cos \alpha'' - x'' \sin \alpha'') + P'''(y''' \cos \alpha''' - x''' \sin \alpha''') + \text{etc.} = 0.$$

Dans ces équations on n'aurait pas besoin de faire attention aux signes des forces, mais seulement à ceux des abscisses et des ordonnées. On regarderait toutes les forces P′, P″, P‴, etc. comme essentiellement positives : les signes des sinus et des cosinus donneraient les signes relatifs des composantes $P' \cos \alpha'$, etc., $P' \sin \alpha'$, etc.; comme cela est facile à observer, si l'on veut se donner la peine de faire parcourir une circonférence entière à la direction d'une force telle que P′, autour de son point d'application B′.

Remarque.

C'est de cette manière que l'on donne ordinairement les équations de l'équilibre pour des forces quelconques situées dans un même plan Ces équations renferment, sous l'expression la plus simple, les premières données de la question, savoir : les quantités des forces, leurs directions, par les angles qu'elles font avec une droite fixe de position, et leurs points immédiats d'application, par leurs coordonnées rectangles. Nous aurions donc pu les présenter les premières, et même nous abstenir de considérer les autres par rapport à des axes obliques; mais comme on les démontre quelquefois par cette considération, que les deux groupes de forces sont rectangulaires entre eux, nous avons été bien aise de faire voir qu'elles ne sont qu'un cas particulier de celles qu'on trouve par rapport à des axes obliques quelconques, et que la rectangularité des forces n'y entre pour rien. Nous reviendrons encore sur cette remarque.

Corollaire II.

95. Supposons qu'il n'y ait point équilibre entre les forces P′, P″, P‴, etc., et que ces forces soient susceptibles de se réduire à une seule R, qui sera leur résultante.

Alors les trois équations de l'équilibre auront lieu en y introduisant la force — R.

Soit donc α l'angle que fait la direction de cette force avec l'axe des abscisses : x et y les deux coordonnées d'un point quelconque de cette direction.

En faisant, pour abréger,

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.} = X,$$
$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + \text{etc.} = Y,$$

et $P'(y'\cos\alpha' - x'\sin\alpha') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\sin\alpha'')$
$+ P'''(y'''\cos\alpha''' - x'''\sin\alpha''') + \text{etc.} = G$,

on aura d'abord

$$X - R\cos\alpha = 0, \quad Y - R\sin\alpha = 0,$$

d'où l'on tirera, à cause de $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$$

ce qui fera connaître la quantité de la résultante, et l'angle α que sa direction fait avec l'axe des abscisses.

On aura ensuite

$$G - R(y\cos\alpha - x\sin\alpha) = 0;$$

ou bien, en mettant pour $R\cos\alpha$ et $R\sin\alpha$, leurs valeurs X et Y,

$$G - Xy + Yx = 0.$$

Comme on n'a qu'une équation pour déterminer les deux coordonnées x et y, on sera maître de prendre l'une ou l'autre à volonté. Supposant, par exemple, $x = 0$, auquel cas on demande le point où la résultante coupe l'axe des y, on aura

$$y = \frac{G}{X}.$$

Si l'on suppose $y = 0$, auquel cas on cherche la distance x du point où la direction de la résultante coupe l'axe des abscisses, on aura

$$x = -\frac{G}{Y}.$$

On aura donc tout ce qu'il faudra pour déterminer la quantité et la position de la résultante de tant de forces que l'on voudra, situées dans un même plan.

Si l'on n'a trouvé qu'une seule équation pour les deux coordonnées x et y du point d'application de la résultante, c'est que, cette résultante pouvant être appliquée à l'un quelconque des points de sa direction, il est impossible que le calcul donne l'un de ces points plutôt que l'autre. Il ne peut donc donner que leur lieu géométrique; et l'équation précédente

$$G - Xy + Yx = 0,$$

est, à proprement parler, l'équation de la direction de la résultante.

Remarque.

96. Dans les trois questions I, II, III, que nous venons de traiter ci-dessus, toutes les forces étant ramenées à une seule R et à un seul couple (S, — S), il y aura toujours une

résultante unique, si la force R n'est pas nulle. Car, la force R et le couple (S, — S) seront toujours dans un même plan ou dans des plans parallèles, et par conséquent (71) se composeront toujours en une seule force. Ainsi, la seule condition nécessaire pour que des forces parallèles ou des forces situées dans un même plan aient une résultante unique, est que la résultante de ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque ne soit pas nulle.

Si cette résultante est nulle, alors toutes les forces du système seront ramenées à un couple dont on connaîtra le plan et la grandeur, et l'on ne pourra leur faire équilibre qu'au moyen d'un couple équivalent et de sens inverse, situé dans le même plan ou dans tout autre plan parallèle.

Passons maintenant au cas le plus général.

IV.

Des conditions de l'équilibre entre tant de forces que l'on voudra, dirigées d'une manière quelconque dans l'espace.

Fig. 35. 97. Soient P', P'', P''', etc. (fig. 35), les différentes forces. D'un point A pris arbitrairement dans l'espace, menons trois axes quelconques

AX, AY, AZ qui ne soient pas dans un même plan, et décomposons chaque force en trois autres respectivement parallèles à ces axes.

Nommons X', Y', Z' les trois composantes de P'; X'', Y'', Z'' les trois composantes de P''; et ainsi de suite. Nous aurons alors, au lieu des forces P', P'', P''', etc. appliquées au système, trois groupes de forces parallèles : le premier, composé des forces X', X'', X''', etc., parallèles à l'axe AX; le second, composé des forces Y', Y'', Y''', etc., parallèles à l'axe AY; et le troisième, composé des forces Z', Z'', Z''', etc., parallèles à l'axe AZ.

Cela posé : si l'on transporte toutes ces forces parallèlement à elles-mêmes au point A, celles du premier groupe iront se réunir dans l'axe AX, et s'y composeront en une seule X égale à leur somme; celle du second iront de même se réunir dans l'axe AY, et s'y composeront en une seule Y égale à leur somme; enfin, celles du troisième se réuniront dans l'axe AZ, et s'y composeront en une seule Z égale à leur somme. Maintenant ces trois résultantes partielles X, Y, Z se composeront en une seule R appliquée en A, et représentée par la diagonale du parallélépipède construit sur les trois lignes qui représenteraient ces forces en grandeur et en direction.

Or, par la première condition générale de l'équilibre, il faut que cette résultante soit nulle d'elle-même. Mais les trois forces X, Y, Z, agissant suivant des lignes qui ne sont pas dans un même plan, ne peuvent jamais donner une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles chacune en particulier (42); et par conséquent la condition R=o exige ces trois équations particulières, X = o, Y = o, Z = o, c'est-à-dire

$$X' + X'' + X''' + \text{etc.} = o,$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = o,$$
$$Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.} = o.$$

Ce qui nous apprend que pour l'équilibre de tant de forces que l'on voudra, appliquées d'une manière quelconque à un corps ou système de figure invariable, il faut d'abord ces trois conditions particulières : que *la somme des forces décomposées parallèlement à trois axes quelconques soit nulle par rapport à chacun de ces axes.*

Par la seconde condition générale de l'équilibre, il faut que le couple résultant de tous les couples formés par les forces à l'égard du point A, soit aussi nul de lui-même. Développons maintenant cette seconde condition.

Soit B′ le point d'application de la force P′,

et par conséquent le point d'application des trois composantes X′, Y′, Z′; nommons x', y' z', ses trois coordonnées AC, CH, HB′, par rapport aux trois axes AX, AY, AZ. Nommons de même x'', y'', z'', les trois coordonnées du point d'application B″ des trois composantes X″, Y″, Z″; et ainsi de suite.

Considérant d'abord le groupe des forces Z′, Z″, Z‴, etc., je remarque que la force Z′ appliquée en B′, a produit un couple (Z′, — Z′) appliqué sur AB′, ou bien (en concevant la force Z′ appliquée au point H où sa direction rencontre le plan YAX) a produit un couple (Z′, — Z′) appliqué sur la diagonale AH d'un parallélogramme ACHD, dont les deux côtés AC, AD sont égaux aux coordonnées x' et y'. Or, ce couple peut se décomposer en deux autres composés de forces égales et parallèles aux premières, mais appliqués sur les deux côtés AC, AD ou x', y', dans les plans respectifs XAZ, YAZ (57).

Si l'on fait la même décomposition de tous les couples provenant du groupe Z′, Z″, Z‴, etc., dans les deux plans parallèles à ce groupe, et les décompositions semblables de tous ceux qui proviennent des deux autres groupes, par rapport aux deux plans analogues, il est manifeste que tous les couples du système seront réduits

à d'autres, situés dans les trois plans coordonnés.

Or, dans chaque plan, les couples se réduiront à un seul, égal à leur somme. Ces trois couples résultans partiels se composeront en un seul qui sera le couple résultant général, et qui devra être nul pour l'équilibre. Mais ces trois couples étant situés dans trois plans qui forment un angle solide, ne peuvent jamais donner un couple résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls chacun en particulier (65); donc, pour chacun des trois plans, la somme des momens des couples doit être nulle d'elle-même.

Mais dans le plan YAZ, on trouvera d'abord les couples

$$(Z', -Z'), (Z'', -Z''), Z''', -Z'''), \text{ etc.},$$

appliqués sur les lignes respectives

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad \text{etc.};$$

ensuite les couples

$$(Y' - Y'), (Y'', -Y''), (Y''', -Y'''), \text{ etc.},$$

appliqués sur les lignes respectives

$$z', \quad z'' \quad z''', \quad \text{etc.}$$

Et comme l'axe AY fait, avec les directions des forces Z', Z'', Z''', etc., des angles égaux entre eux et à ceux que forme l'axe AZ avec les

directions des forces Y', Y'', Y''', etc., on pourra prendre les produits $Z'y'$, etc., $Y'z'$, etc., pour momens, dans la mesure relative des couples situés dans le plan YAZ. Donc, puisque leur somme doit être nulle, on aura (93)

$$Y'z' + Y''z'' + \text{etc.} - Z'y' - Z''y'' - \text{etc.} = 0.$$

On trouvera de même, pour les deux autres plans,

$$Z'x' + Z''x'' + \text{etc.} - X'z' - X''z'' - \text{etc.} = 0,$$
$$X'y' + X''y'' + \text{etc.} - Y'x' - Y''x'' - \text{etc.} = 0;$$

ce qui nous fait voir que pour l'équilibre du système, outre les trois équations trouvées ci-dessus, il nous en faut encore trois autres qui expriment que *la somme des produits des composantes parallèles au plan de deux axes, par leurs coordonnées relatives au troisième axe, doit être nulle d'elle-même pour chacun des trois plans.*

98. Dans les équations précédentes, on prendra les signes des coordonnées, comme en Géométrie, positives dans un même coin XAYZ, et négatives dans le coin opposé.

Parmi les forces, on regardera, dans chaque groupe, comme positives celles qui tendent à augmenter les coordonnées de leur points d'ap-

plication, comme négatives, celles qui tendent à les diminuer (93).

Remarque.

99. Si l'on trouvait que les six équations précédentes ont lieu par rapport à trois axes particuliers non situés dans le même plan, il y aurait équilibre dans le système, et par conséquent les mêmes équations auraient lieu par rapport à tous les axes possibles.

Corollaire I.

100. Si les trois axes AX, AY, AZ étaient rectangulaires entre eux, les coordonnées deviendraient les bras de levier des couples, et les produits $Z'y'$, $Y'x'$, $X'z'$, etc., etc., les expressions absolues de leurs momens.

De plus, en nommant α', β', γ' les trois angles que la direction de la force P' fait avec les trois axes respectifs AX, AY, AZ, ou plutôt avec trois parallèles à ces axes, on aurait pour les trois composantes de P' (45),

$$X'=P'\cos\alpha',\quad Y'=P'\cos\beta',\quad Z'=P'\cos\gamma'.$$

En nommant de même α'', β'', γ'', etc., les angles analogues des directions des forces P'', etc.,

avec les mêmes axes, on aurait

$$X''=P''\cos\alpha'',\quad Y''=P''\cos\beta'',\quad Z''=P''\cos\gamma'',\text{ etc.,}$$

et les équations précédentes deviendraient

$$P'\cos\alpha'+P''\cos\alpha''+P'''\cos\alpha'''+\text{etc.}=0,$$
$$P'\cos\beta'+P''\cos\beta''+P'''\cos\beta'''+\text{etc.}=0,$$
$$P'\cos\gamma'+P''\cos\gamma''+P'''\cos\gamma'''+\text{etc.}=0,$$

$$P'(z'\cos\beta'-y'\cos\gamma')+P''(z''\cos\beta''-y''\cos\gamma'')+P'''(z'''\cos\beta'''-y'''\cos\gamma''')+\text{etc.}=0,$$

$$P'(x'\cos\gamma'-z'\cos\alpha')+P''(x''\cos\gamma''-z''\cos\alpha'')+P'''(x'''\cos\gamma'''-z'''\cos\alpha''')+\text{etc.}=0,$$

$$P'(y'\cos\alpha'-x'\cos\beta')+P''(y''\cos\alpha''-x''\cos\beta'')+P'''(y'''\cos\alpha'''-x'''\cos\beta''')+\text{etc.}=0.$$

Remarque.

101. C'est sous cette forme que l'on présente ordinairement les six équations de l'équilibre. Elles renferment d'une manière très simple les quantités des forces P', P'', P''', etc., leurs points d'application, au moyen de leur coordonnées rectangles par rapport à trois axes, et leurs directions, par les cosinus des angles qu'elles font avec ces axes.

Comme on a coutume d'attribuer aux forces rectangulaires une certaine indépendance d'effets, qui ne leur appartient pas plus qu'à celles

qui agissent sous un angle quelconque, pourvu qu'il ne soit pas nul, il est bon de remarquer que les équations d'équilibre par rapport à des axes rectangulaires, ne sont qu'une simple conséquence de celles qu'on trouve par rapport à des axes obliques quelconques, et que par conséquent le principe de l'indépendance entre les effets des forces rectangulaires ne doit entrer pour rien dans leur démonstration.

Observons d'ailleurs que d'après ce principe un peu vague, on pourrait être conduit par un raisonnement très simple à une erreur très grossière : car en considérant, par exemple, deux groupes de forces rectangulaires, situés dans un même plan, si l'on suppose qu'il y a indépendance entre les effets de ces deux groupes, on en conclura que lorsque leur système est en équilibre, chaque groupe doit être en équilibre de lui-même, ce qui n'est pas vrai.

Et il en est de même dans le cas de trois groupes de forces, rectangulaires dans l'espace, dont le système peut être en équilibre, sans qu'il y ait équilibre en particulier dans chaque groupe; et même dans aucun d'eux.

Il faudrait donc, dans ces deux cas, ne faire de ce principe qu'un usage restreint, et ne considérer l'indépendance des effets que relativement aux mouvemens de translation que les

forces peuvent donner au système; ou bien il faudra avoir soin de ne l'appliquer qu'au cas de deux groupes, l'un composé de forces perpendiculaires à un même plan, et l'autre de forces quelconques situées dans ce plan, auquel cas l'indépendance des effets a lieu d'une manière absolue. Mais comme cette indépendance aurait lieu tout de même, si le premier groupe tombait sur le plan du second sous un autre angle quelconque, pourvu qu'il ne fût pas nul, il s'ensuit qu'elle n'a pas lieu, parce que les groupes font un angle droit, mais seulement parce qu'ils font un angle. Ainsi, dans tous les cas, le raisonnement qui prouve le principe en question étant fondé sur ce que les forces font un angle droit, tombe de lui-même, parce qu'il n'est fondé sur rien.

Corollaire II.

102. On peut donner aux trois dernières équations de l'équilibre une forme plus simple, en y introduisant, à la place des coordonnées des points d'application, les plus courtes distances des directions des forces aux trois axes rectangulaires.

En effet, dans la première équation, à la place du terme $P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma')$, qui exprime la somme des momens des deux forces

$P'\cos\beta'$, $P'\cos\gamma'$, par rapport au point où leur plan irait couper l'axe des x, on peut en substituer un autre qui exprime le moment de leur résultante par rapport au même point (90).

Les deux forces $P'\cos\beta'$, $P'\cos\gamma'$, étant rectangulaires entre elles, on a pour le carré de leur résultante, $P'^2\cos^2\beta' + P'^2\cos^2\gamma'$, ou... $P'^2(\cos^2\beta' + \cos^2\gamma')$; ou bien (à cause de $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta + \cos^2\gamma' = 1$), $P'^2(1 - \cos^2\alpha')$, c'est-à-dire $P'^2\sin^2\alpha'$.

La résultante est donc $P'\sin\alpha'$. La distance de cette résultante à l'axe des x étant nommée p', on aura pour son moment, $P'p'\sin\alpha'$, qui remplace le terme $P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma')$; on aura de même $P''p''\sin\alpha''$, etc., à la place des termes suivans de la première équation, en désignant par p'', etc., les distances respectives des résultantes analogues à la première, par rapport à l'axe des x.

La première équation sera donc mise sous cette forme :

$$P'p'\sin\alpha' + P''p''\sin\alpha'' + P'''p'''\sin\alpha''' + \text{etc.} = 0.$$

Or, il est visible que p', p'', p''', etc., ne sont autre chose que les plus courtes distances des forces P', P'', P''', etc., à l'axe des x; car la force $P'\sin\alpha'$, qui est située dans un plan perpendiculaire à cet axe, étant composée avec la force

$P'\cos\alpha'$, perpendiculaire au même plan, devrait donner pour résultante la force P' qui est dans l'espace. La force $P'\sin\alpha'$, n'est donc autre chose que la projection de la force P' sur un plan perpendiculaire à l'axe des x, et par conséquent la plus courte distance p' de cette projection à l'axe des x n'est autre chose que la plus courte distance de la force P' au même axe.

Si l'on désigne par q', q'', q''', etc., et par r', r'', r''', etc., les plus courtes distances des forces P', P'', P''', etc., aux axes respectifs des y et des z, on trouvera de même pour les deux autres équations,

$$P'q'\sin\beta' + P''q''\sin\beta'' + P'''q'''\sin\beta''' + \text{etc.} = 0,$$
$$P'r'\sin\gamma' + P''r''\sin\gamma'' + P'''r'''\sin\gamma''' + \text{etc.} = 0.$$

103. La projection d'une force sur un plan, multipliée par sa distance à un axe perpendiculaire au plan, est ce que l'on nomme ordinairement *le moment* de la force par rapport à l'axe; et de cette manière on énonce ainsi les trois équations précédentes de l'équilibre :

La somme des momens des forces doit être nulle par rapport à chacun des trois axes, dans le cas de l'équilibre.

Corollaire III.

104. Si, dans les six équations de l'équilibre

on veut supposer que les forces P', P'', P''', etc. sont toutes parallèles, ou toutes situées dans un même plan, etc., etc., et qu'on mette à la place des coordonnées x', y', z', etc., et des angles α', β', γ', etc., les valeurs qui conviennent à ces suppositions, on retombera sur les équations d'équilibre précédemment trouvées pour ces différens cas, et l'on en tirera les mêmes conséquences.

105. Si l'on suppose, par exemple, que les directions des forces P', P'', P''', etc., concourent toutes au même point, et qu'on ait pris ce point pour l'origine des coordonnées, les cosinus des angles α', β', γ', etc., seront proportionnels aux coordonnées respectives x', y', z', etc., des points d'application ; de sorte que l'on aura :

$$x' : y' :: \cos\alpha' : \cos\beta', \quad x' : z' :: \cos\alpha' : \cos\gamma', \text{ etc.,}$$

ou

$$\begin{aligned} &y'\cos\alpha' - x'\cos\beta' = 0, \\ &x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha' = 0, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Les trois dernières équations de l'équilibre disparaîtront donc d'elles-mêmes, et l'on n'aura plus que les trois premières, qui nous font voir que *pour l'équilibre d'un système de forces dont les directions concourent toutes vers un même point, il est nécessaire et il suffit que la somme des forces décomposées suivant trois axes soit égale à zéro par rapport à chacun de ces axes ;* et c'est ce que l'on savait d'ailleurs immédiatement.

Si l'on suppose que les forces P', P'', P''', etc., ne forment ensemble que des couples ; comme alors chaque force P', inclinée sur l'axe des x d'un certain angle α', aura dans le système son égale, mais inclinée au même axe de l'angle $200° + \alpha'$, il n'y aura pas de terme $P'\cos\alpha'$ qui ne trouve son égal et contraire dans la première équation de l'équilibre : et la même chose aura lieu dans les deux autres. Ainsi les trois premières équations disparaîtront d'elles-mêmes, et l'on n'aura plus que les trois dernières, d'où il résulte que, *pour l'équilibre de tant de couples qu'on voudra appliqués sur un corps, il est nécessaire et il suffit que la somme de ces couples décomposés perpendiculairement à trois axes, soit égale à zéro par rapport à chacun de ces axes* : ce qui était d'ailleurs aussi clair que la proposition précédente.

Corollaire IV.

Recherche de la résultante de toutes les forces P', P'', P^{IV}, etc., lorsque ces forces ne sont pas en équilibre, et qu'elles sont susceptibles de se réduire à une seule.

106. Supposons qu'il n'y ait point équilibre entre les forces P′, P″, P‴, etc. ; et soit, s'il est possible, la force — R capable de leur faire équilibre, et par conséquent R leur résultante.

Les six équations précédentes devront avoir lieu en y faisant entrer la force —R.

Soient donc α, β, γ les trois angles que forme la direction de la résultante avec les trois axes coordonnés. En faisant pour abréger,

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \text{etc.} = X,$$
$$P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \text{etc.} = Y,$$
$$P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + P'''\cos\gamma''' + \text{etc.} = Z,$$

on aura d'abord ces trois équations :

$$X - R\cos\alpha = 0,\quad Y - R\cos\beta = 0,\quad Z - R\cos\gamma = 0;$$

d'où l'on tire (en observant qu'on a $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$)

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

pour la quantité de la résultante. On aura ensuite, pour les angles α, β, γ, que sa direction fait avec les trois axes,

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

En second lieu, nommant x, y, z les trois coordonnées de l'un quelconque des points de cette direction, et faisant, pour abréger,

$$P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + P''(z''\cos\beta'' - y''\cos\gamma'') + P'''(z'''\cos\beta''' - y'''\cos\gamma''') + \text{etc.} = L,$$
$$P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P''(x''\cos\gamma'' - z''\cos\alpha'') + P'''(x'''\cos\gamma''' - z'''\cos\alpha''') + \text{etc.} = M,$$
$$P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\cos\beta'') + P'''(y'''\cos\alpha''' - x'''\cos\beta''') + \text{etc.} = N,$$

on aura

$$L - R(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0,$$
$$M - R(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0,$$
$$N - R(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0,$$

ou bien,

$$L - Yy + Zz = 0,$$
$$M - Zx + Xz = 0,$$
$$N - Xy + Yx = 0.$$

Or, si l'on élimine, entre ces trois équations, deux des inconnues x, y, z, on arrivera à cette équation

$$XL + YM + ZN = 0,$$

qui ne contient plus d'inconnue, et qui exprime la relation qui doit avoir lieu entre les résultantes partielles X, Y, Z, et les trois momens

résultans partiels L, M, N, pour que les trois équations précédentes puissent subsister à la fois, et par conséquent pour que toutes les forces du système puissent avoir une résultante.

107. Si cette équation de condition a lieu, les valeurs des trois coordonnées x, y, z se présenteront sous la forme de $\frac{0}{0}$, parce que la résultante pouvant être appliquée à tel point de sa direction qu'on voudra, il est impossible que le calcul détermine l'un de ces points plutôt que tout autre. Il ne peut donc donner que leur lieu géométrique, et les trois équations précédentes ne sont autre chose que les équations des trois projections de la résultante sur les plans coordonnés. Par conséquent, l'une de ces équations est une suite nécessaire des deux autres, et l'on n'a, à proprement parler, que deux équations entre les trois indéterminées x, y, z; d'où il suit qu'elles doivent se présenter sous la forme de $\frac{0}{0}$.

108. On se donnera donc à volonté l'une de ces trois quantités, et l'on déterminera alors les deux autres au moyen des équations précédentes.

Si l'on suppose, par exemple, $x=0$, auquel cas on demande le point où la direction de la résultante traverse le plan vertical YAZ, on

aura pour les deux coordonnées de ce point,

$$y=\frac{N}{X}, \quad z=\frac{-M}{X}.$$

Si l'on suppose $y=0$, on aura

$$x=\frac{-N}{Y}, \quad z=\frac{L}{Y}.$$

Si l'on suppose $z=0$, on aura

$$x=\frac{M}{Z}, \quad y=\frac{-L}{Z}.$$

C'est-à-dire qu'en considérant le point où la direction de la résultante coupe le plan de deux axes, les distances respectives de ce point à ces deux axes se trouvent en divisant les sommes respectives des momens des forces par rapport à ces axes, par la somme des forces estimées suivant le troisième.

On aura donc, d'après ce que nous venons de dire, tout ce qu'il faudra pour déterminer la quantité de la résultante et sa position dans l'espace, si toutes les forces appliquées au système sont susceptibles de se réduire à une seule; et cela aura toujours lieu, si l'équation de condition, $XL+YM+ZN=0$, est satisfaite, pourvu que les trois résultantes X, Y, Z, ne soient pas nulles à la fois; car, si ces trois forces sont nulles, il est clair que les

forces P', P'', P''', etc., seront réduites aux trois couples représentés en grandeur par L, M, N, lesquels ne peuvent jamais se réduire qu'à un autre couple.

C'est ce que le calcul précédent aurait pu aussi nous indiquer, quoique d'une manière un peu obscure : et en effet, dans le cas de X, Y, Z nulles à la fois, on trouverait, par les équations ci-dessus, que les points de rencontre de la résultante avec les plans coordonnés sont tous trois à une distance infinie de l'origine. Or c'est ce qui ne peut plus s'expliquer en Géométrie; car, pour imaginer une droite qui rencontre à l'infini les trois plans coordonnés, il faudrait imaginer une droite qui fût à la fois parallèle à trois plans qui ne se coupent qu'en un point, ce qui est absurde : d'où l'on voit que l'hypothèse d'une résultante unique est alors impossible.

Corollaire V.

Réduction générale des forces.

109. Mais dans tous les cas, on peut réduire toutes les forces appliquées au système à une seule passant par l'origine, et à un couple dont il est facile de déterminer le plan et la quantité : réduction qui ne laisse de nuage dans aucun cas.

En effet, on aura pour la résultante R des forces transportées à l'origine

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

et pour les trois angles α, β, γ, que sa direction forme avec les trois axes,

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

En second lieu, L, M, N représentant respectivement les trois couples résultans, situés dans les trois plans perpendiculaires aux axes des x, y, z, si l'on nomme G le moment du couple résultant, on aura pour sa quantité,

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

et pour les angles λ, μ, ν, qu'une perpendiculaire au plan de ce couple, ou que *l'axe* du couple forme avec les trois axes respectifs des x, y, z,

$$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos\mu = \frac{G}{M}, \quad \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Corollaire VI.

110. Si l'on voulait exprimer directement que toutes les forces P', P'', P''', etc., ont une résultante unique; d'après ce que nous avons vu dans le premier chapitre (n° 71), il faudrait

exprimer que la résultante R et le couple résultant sont dans des plans parallèles, ou, ce qui est la même chose, que l'axe du couple est perpendiculaire à la direction de la résultante.

Or, α, β, γ étant les trois angles de la direction de la force R, avec les trois axes des x, y, z, et λ, μ, ν, les angles analogues que l'axe du couple fait avec les mêmes lignes, on sait par la Géométrie (*) que ces deux droites seront rectangulaires dans l'espace, si l'on a

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0.$$

Donc, en mettant à la place des cosinus leurs valeurs trouvées ci-dessus, et multipliant toute l'équation par RG, on aura

$$XL + YM + ZN = 0,$$

comme nous l'avons trouvé plus haut.

Il faut toujours sous-entendre que la force R n'est pas nulle, ou qu'on a

$$\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} > 0,$$

inégalité qui exige simplement que les trois forces X, Y, Z ne soient pas nulles à la fois.

Ainsi, cette condition, que le calcul nous avait offerte dans la recherche de la résultante

(*) *Voyez* ci-après, n° 113.

générale, n'est autre chose que l'expression de celle que nous avions trouvée directement dans le premier chapitre, pour que des forces qui ne se font pas équilibre puissent toujours se composer en une seule.

Remarque.

111. Pour exprimer que des forces quelconques sont susceptibles de se réduire à une seule, on avait donné ces trois équations *déterminées*,

$$\left.\begin{aligned} X(Y'z' + \ldots) - Y(X'z' + \ldots) &= 0, \\ Y(Z'x' + \ldots) - Z(X'z' + \ldots) &= 0, \\ Z(X'y' + \ldots) - X(Z'z' + \ldots) &= 0, \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

qui ne sont pas, comme on voit, celles de la direction de la résultante (106), mais où X, Y, Z ont les mêmes valeurs, et où je désigne, pour abréger, la somme des produits $Y'z'$, $Y''z''$, etc. par $(Y'z' + \ldots)$; et ainsi des autres.

Mais ces trois équations sont à la fois insuffisantes et trop nombreuses; elles peuvent avoir lieu toutes trois, sans qu'il y ait une résultante unique, et il peut y avoir une résultante unique, sans qu'elles aient lieu toutes trois, ni même aucune d'elles.

Cela paraît assez clairement à l'inspection même de ces équations comparées à l'équation unique que nous venons de donner; mais on

peut encore s'en rendre compte en suivant le raisonnement d'après lequel on les trouve, et en examinant ce qu'elles signifient.

En effet, après avoir réduit toutes les forces appliquées au système à trois groupes de forces parallèles aux trois axes coordonnés, et ces trois groupes à trois résultantes partielles X, Y, Z, parallèles aux mêmes axes, on suppose que ces trois forces doivent se rencontrer en un même point, pour qu'elles puissent se composer en une seule; et pour cela, on exprime que les résultantes partielles prises deux à deux sont à égales distances du plan qui leur est parallèle; ce qui donne les trois équations (A), au moyen desquelles les trois forces doivent en effet concourir au même point, et par conséquent se composer en une seule.

Mais, d'abord, on omet le cas où les trois groupes ne pourraient pas se réduire respectivement à de simples forces, mais se réduiraient à des couples : alors les trois résultantes partielles étant nulles, les trois équations de condition seraient satisfaites, et pourtant il n'y aurait pas de résultante unique, mais bien un couple résultant. Ainsi ces trois équations sont insuffisantes.

D'un autre côté, elles exigent trop; car, en supposant que les trois groupes se réduisent à

trois simples forces, on voit qu'il n'est pas nécessaire, pour qu'elles puissent se composer en une seule, qu'elles se rencontrent toutes trois en un même point : il suffirait simplement que deux d'entre elles se rencontrassent, et que la troisième allât rencontrer quelque part la direction de leur résultante. Mais, ce qui est plus remarquable, cela même n'est pas nécessaire; car les trois forces X, Y, Z peuvent se réduire à une seule, sans qu'il y ait aucune rencontre entre leurs directions dans l'espace : c'est ce qu'on a vu directement au n° 75.

Si l'on veut voir la même chose par notre analyse, soit a la plus courte distance de Y à Z, b celle de Z à X, et c celle de X à Y; et pour simplifier, prenons l'axe des x suivant la droite a, et celui des z, suivant la force Z; on trouvera dans cette hypothèse, $L=0$, $M=-Xc$, et $N=Xb-Ya$; et l'équation de condition $XL+YM+ZN=0$ deviendra

$$XYc-XZb+YZa=0.$$

Or, il est évident qu'on peut trouver trois forces X, Y, Z dans une infinité de proportions différentes, qui satisfassent à cette équation, et qui, par conséquent aient une résultante unique, quelles que soient les distances mutuelles a, b, c de leurs directions dans l'espace.

Et comme on n'a qu'une seule équation, on voit même qu'on peut se donner à volonté deux de ces forces, et déterminer ensuite la troisième en conséquence de cette équation.

Qu'on suppose, par exemple, les deux forces X et Z représentées par les lignes a et c; on trouvera que la troisième force Y doit être représentée par la moitié de b. Ainsi, voilà trois forces, entre autres, qui sont situées en trois arêtes, deux à deux non parallèles et non contiguës, d'un même rhomboïde rectangle, et qui pourtant ont une résultante unique: et il est même aisé de voir que cette résultante passe au milieu de la plus courte distance b qui sépare les forces X et Z proportionnelles aux lignes a et c.

On peut faire une foule d'autres exemples; il suffit de ne pas se donner deux forces dans le rapport particulier qui, d'après l'équation précédente, rendrait la troisième force infinie.

Au reste, ce qu'on vient de dire pour trois forces rectangulaires dans l'espace, s'appliquerait de même à trois forces parallèles à trois axes obliques quelconques; car, relativement à ces axes obliques, si l'on cherchait par la même analyse qu'au n° 106, la condition générale d'une résultante unique, on trouverait une équation toute semblable à la précédente, et

qui, pour le cas de nos trois forces, donnerait également $XYc - XZb + YZa = 0$; d'où l'on tirerait les mêmes conséquences, en observant que, dans cette équation, a, b, c ne représentent plus les distances mutuelles des trois forces obliques X, Y, Z, mais trois lignes dont chacune va de l'une à l'autre force parallèlement à la troisième.

Si des trois lignes a, b, c, il y en avait deux nulles, sans que la troisième le fût, l'équation précédente serait réduite à un seul terme, qu'on ne pourrait rendre nul, sans faire quelqu'une des trois forces égale à zéro : d'où il résulte que, si trois forces finies sont situées de manière que la direction de l'une d'elles rencontre les directions des deux autres qui ne sont point en même plan, ces trois forces ne sont jamais réductibles à une seule; résultat qui s'acorde avec ce qu'on a dit à la fin du n° 75.

On voit donc, pour revenir à notre objet, que des trois équations (A) qu'on avait données avant notre théorie, il n'y en a aucune qui soit nécessaire pour la condition qu'on avait en vue, et qu'elles sont tout-à-fait étrangères à la question dont il s'agit. Mais il y a encore une autre remarque assez curieuse à faire sur ces équations.

Si on les ajoute ensemble, ce qui est assez

naturel à cause de leur symétrie, et ce que l'auteur même avait fait, il arrive que la somme de ces trois équations revient précisément à la nôtre $XL + YM + ZN = 0$. Ainsi, l'on avait rencontré par hasard la véritable équation du problème, et il est clair qu'on ne s'en était point aperçu; car on aurait vu sans doute que, la somme de trois quantités pouvant être nulle d'une infinité de manières, sans qu'aucune d'elles le soit en particulier, il pouvait y avoir une résultante unique, sans qu'aucune des trois équations regardées comme nécessaires, fût satisfaite; d'où l'on aurait conclu qu'elles n'étaient pas nécessaires, et qu'il fallait les supprimer avec l'analyse défectueuse qui y avait conduit. Mais, avant notre théorie, on ne savait pas précisément en quoi consistait la condition générale d'une résultante unique.

Quoiqu'on ait depuis rectifié cette analyse par celle que j'ai donnée au n° 106, je n'ai pas cru cette petite discussion inutile, non-seulement parce qu'elle éclaire un point important de la composition des forces, et qu'elle fait voir la fausse supposition sur laquelle on s'appuyait, mais parce que ce paralogisme subsiste encore, et s'est reproduit jusqu'ici dans un ouvrage célèbre où l'auteur des équations (A) paraît l'avoir emprunté.

Corollaire VII.

112. Lorsqu'on a les trois équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, le moment G du couple résultant est nul, et les forces appliquées au système se réduisent à une seule R dont la direction passe par l'origine.

Et comme le moment G ne peut être nul, à moins que les trois momens résultans partiels L, M, N ne soient nuls à la fois, il s'ensuit que si l'on voulait exprimer que des forces quelconques se réduisent à une seule qui passe en un point donné, il faudrait, en supposant qu'on ait pris ce point pour origine, poser les trois équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$.

Remarque.

113. Nous terminerons cet article général par un théorème important sur la manière d'estimer les forces suivant une direction donnée, et leurs momens, par rapport à un axe donné, lorsque l'on connaît déjà ces forces et leurs momens estimés par rapport à trois axes rectangulaires.

Mais démontrons d'abord la proposition sur

laquelle on s'appuie au n° 110, et dont nous nous servirons encore ici.

Soient deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace. Nommons α, β, γ les trois angles que fait la première avec les trois axes coordonnés; λ, μ, ν, les angles analogues de la seconde avec les mêmes axes : je dis qu'on aura pour l'angle θ que ces deux droites forment entre elles,

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$$

En effet, transportons, pour plus de simplicité, nos deux droites parallèlement à elles-mêmes jusqu'à l'origine : les angles α, β, γ, λ, μ, ν et l'angle θ ne changeront pas. Prenons sur la première, à partir de l'origine, une longueur arbitraire d, dont l'extrémité aura pour coordonnées x, y, z. Prenons de même sur la seconde une autre longueur quelconque D, dont l'extrémité aura pour coordonnées X, Y, Z. Si l'on joint ces deux extrémités par une droite H, on aura un triangle dont les trois côtés seront d, D et H; et puisque θ est l'angle compris entre les deux premiers, on aura, comme on le sait,

$$H^2 = d^2 + D^2 - 2dD\cos\theta;$$

mais on a

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$
$$D^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

et $$H^2 = (x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2;$$

substituant dans la première équation, réduisant, et dégageant $\cos\theta$, il vient

$$\cos\theta = \frac{xX + yY + zZ}{d.D},$$

ou bien

$$\cos\theta = \frac{x}{d}\cdot\frac{X}{D} + \frac{y}{d}\cdot\frac{Y}{D} + \frac{z}{d}\cdot\frac{Z}{D};$$

mais on a évidemment

$$\frac{x}{d} = \cos\alpha,\ \frac{y}{d} = \cos\beta,\ \frac{z}{d} = \cos\gamma,$$

et de même

$$\frac{X}{D} = \cos\lambda,\ \frac{Y}{D} = \cos\mu;\ \frac{Z}{D} = \cos\nu;$$

donc

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$$

Si l'on veut exprimer que les deux droites d et D sont rectangulaires entre elles, il faut poser $\cos\theta = 0$; et par conséquent

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

ce que nous avions supposé au n° 110.

114. Actuellement changeons les lettres λ, μ, ν en α', β', γ', et considérons une force R

dirigée suivant la première droite. Cette force estimée suivant la seconde, ou projetée sur elle, donnera pour sa projection, que je nomme R', $R' = R \cos \theta$, et par conséquent

$$R' = R\cos\alpha\cos\alpha' + R\cos\beta\cos\beta' + R\cos\gamma\cos\gamma'.$$

Mais $R\cos\alpha$, $R\cos\beta$, $R\cos\gamma$ expriment les trois composantes de la force R suivant les trois axes; donc si l'on nomme X, Y, Z ces composantes, on aura plus simplement

$$R' = X\cos\alpha' + Y\cos\beta' + Z\cos\gamma'.$$

Ce qui nous fait voir que, *pour estimer suivant une direction différente de la sienne, une force dont on connaît déjà les composantes suivant trois axes rectangulaires, on n'a qu'à prendre la somme de ces composantes multipliées respectivement par les cosinus des angles qu'elles forment avec la direction nouvelle.*

C'est ainsi qu'en Géométrie, pour projeter une ligne sur un axe quelconque, on peut d'abord projeter cette ligne sur trois axes rectangulaires; projeter ensuite ces trois projections sur l'axe donné, et ajouter ensemble ces projections de projections.

115. Pareillement, si l'on considère un couple dont le moment soit représenté par une partie

G prise sur son axe, et que ce moment décomposé par rapport à trois axes rectangulaires donne les momens respectifs L, M, N, on voit, comme ci-dessus, que pour estimer le moment G par rapport à un axe nouveau qui forme, avec les trois premiers, des angles λ', μ', ν', il n'y aura qu'à prendre la somme des momens composans L, M, N multipliés par les cosinus respectifs de ces angles, de sorte qu'en nommant G' la valeur relative du moment G, on aura

$$G' = L\cos\lambda' + M\cos\mu' + N\cos\nu',$$

d'où il résulte que *la somme des momens de tant de forces que l'on voudra, par rapport à un axe quelconque, est égale aux sommes de leurs momens, par rapport à trois axes rectangulaires, multipliées respectivement par les cosinus des angles que ces trois axes font avec le nouvel axe donné;* ce qui est un théorème tout semblable au précédent.

DES CONDITIONS DE L'ÉQUILIBRE

Lorsque le corps ou système sur lequel les forces agissent n'est pas entièrement libre dans l'espace, mais se trouve gêné par des obstacles.

Nous allons examiner trois cas principaux

auxquels il est facile de ramener tous les autres, comme on pourra le voir par la suite.

I.

De l'équilibre d'un corps qui n'a que la liberté de tourner en tous sens autour d'un point fixe.

Les six équations de l'équilibre d'un corps ou système libre sont, comme nous l'avons trouvé ci-dessus,

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0,$$
$$L=0,\ M=0,\ N=0.$$

116. Supposons maintenant qu'il y ait un point fixe dans le système, et qu'on l'ait pris pour l'origine des coordonnées. Il est clair qu'il pourrait alors y avoir équilibre sans que ces six équations fussent satisfaites; car, quoique le point fixe soit par lui-même incapable de produire le moindre effort, il peut néanmoins anéantir ceux des puissances dont la résultante irait y aboutir, et par là tenir lieu de nouvelles forces dans le système.

Mais, quelles que soient les forces dont un point fixe puisse tenir lieu par sa résistance, il est bien manifeste qu'elles doivent toutes passer par ce même point; que, par conséquent, on peut toujours les y concevoir comme composées en une seule, et imaginer ainsi, à la place du point fixe, une force unique r qui remplace sa résistance, et considérer alors le système comme parfaitement libre dans l'espace.

Les six équations précédentes devront donc avoir lieu si l'on y introduit la nouvelle force r.

Or, cette force étant immédiatement appliquée à l'origine, fournira trois nouvelles composantes, x, y, z, dans les trois axes, et ne fournira aucun couple nouveau dans les trois plans. Les six équations de l'équilibre seront donc

$$X+x=0,\ Y+y=0,\ Z+z=0,$$
$$L=0,\ M=0,\ N=0.$$

Les trois résultantes partielles X, Y, Z pourront donc avoir telles valeurs qu'on voudra. Car, en supposant la résistance du point fixe indéfinie dans tous les sens, les trois forces x, y, z prendront telles valeurs et tels signes qu'on voudra, et, s'égalant toujours, en quelque sorte, aux trois forces contraires X, Y, Z, appliquées au même point, rendront toujours les trois premières équations satisfaites.

Mais il faudra que les trois momens résultans partiels L, M, N soient toujours nuls

d'eux-mêmes, ce qui nous fait voir que, *pour l'équilibre d'un corps qui n'a que la liberté de tourner autour d'un point fixe, il est nécessaire et il suffit que la somme des momens des forces par rapport à trois axes rectangulaires menés par ce point, soit nulle d'elle-même relativement à chacun de ces trois axes.*

117. Lorsque toutes les forces appliquées au corps sont parallèles, on peut mener par le point fixe deux plans parallèles à leurs directions, et décomposer tous les couples dans ces deux plans. Il suffit donc alors pour l'équilibre du système, que la somme des momens soit nulle par rapport à deux axes perpendiculaires à ces plans.

Lorsque toutes les forces sont dans un même plan avec le point fixe, tous les couples à l'égard de ce point sont aussi dans ce plan; et il suffit alors que la somme des momens soit nulle par rapport à un seul axe perpendiculaire à ce plan.

Remarque.

118. Nous savons que les trois équations $L=0$, $M=0$, $N=0$, qui assurent, dans le cas général, l'équilibre du système, expriment d'une autre manière (112) que les forces appliquées doivent avoir une résultante unique qui

passe par le point fixe. Donc, si l'on avait voulu partir de cette conséquence comme principe, c'est-à-dire regarder d'abord comme évident que les forces appliquées ne peuvent se faire équilibre autour du point fixe, à moins qu'elles n'aient une résultante unique dirigée vers ce point, on en aurait conclu réciproquement que l'on doit avoir pour l'équilibre les trois équations $L=0$, $M=0$, $N=0$; ce qui nous aurait conduits au même résultat.

Corollaire.

De la pression exercée par les forces sur le point fixe.

119. Quoique nous ayons supposé le point fixe susceptible d'une résistance indéfinie en tous sens, cependant, lorsque des forces données se font actuellement équilibre sur cet appui, il n'a besoin que d'une certaine résistance déterminée. Cette résistance actuelle, prise en sens contraire, est ce que l'on nomme *la pression* qu'il éprouve de la part des forces du système.

Ainsi, pour calculer cette pression, on n'aura qu'à déterminer la force $-r$. Mais l'on a, par les équations ci-dessus, pour ses trois composantes $-x$, $-y$, $-z$ dans les trois axes,

$$-x = X, \quad -y = Y, \quad -z = Z.$$

D'où il suit que *la pression est égale à la résultante de toutes les forces du système, transportées parallèlement à elle-mêmes au point fixe.*

Et c'est ce qu'il était facile de reconnaître d'abord; car le point fixe ne peut être pressé que par les forces qui s'y sont transportées parallèlement à elles-mêmes, et par les couples qu'elles ont formés à l'égard de ce point; mais puisque ces couples doivent être en équilibre d'eux-mêmes, c'est-à-dire seraient en équilibre quand bien même le corps serait entièrement libre, il s'ensuit qu'ils ne peuvent nullement charger le point fixe, et que par conséquent ce point n'est pressé que par la résultante des premières forces.

II.

De l'équilibre d'un corps qui n'a que la liberté de tourner autour de la ligne qui joint deux point fixes.

Fig. 36. 120. Soient A et B (fig. 36) les deux points fixes. Prenons AB pour l'un des trois axes, pour celui des abscisses, par exemple; et le point fixe A pour l'origine.

Quelles que soient les forces dont chacun des points fixes puisse tenir lieu par sa résistance,

on peut toujours les concevoir comme réduites à deux forces r et r' immédiatement appliquées à ces points, et substituant ainsi, à la place des deux points A et B, les deux forces respectives r et r' qui remplacent leurs résistances actuelles, considérer le système comme parfaitement libre dans l'espace.

Les six équations de l'équilibre doivent donc avoir lieu en y introduisant les deux nouvelles forces r et r'.

Or, la force r immédiatement appliquée à l'origine A, donnera trois composantes x, y, z, dans les axes, et ne donnera aucun couple dans les plans.

La force r' appliquée en B donnera trois composantes x', y', z', la première dans l'axe des abscisses, les deux autres dans les plans respectifs XY, XZ. La force x' qui tombe dans l'axe des abscisses, étant transportée à l'origine, donnera un couple nul; mais les deux forces y' et z' transportées à l'origine donneront deux couples, dans les plans respectifs XY, XZ adjacens à l'axe de rotation; et les momens de ces couples seront (en faisant $AB = a$) $y'a, z'a$.

Les équations de l'équilibre seront donc

$$X + x + x' = 0, \quad Y + y + y' = 0, \quad Z + z + z' = 0,$$
$$L = 0, \quad M + z'a = 0, \quad N - y'a = 0.$$

Les cinq quantités X, Y, Z, M, N pourront donc avoir telles valeurs qu'on voudra ; car, en supposant la résistance des deux points fixes indéfinie en tous sens, les quantités x, y, z, x', y', z' auront telles valeurs et tels signes qu'on voudra, et les trois premières équations, ainsi que les deux dernières, seront toujours satisfaites.

Mais il faudra qu'on ait toujours pour les seules forces appliquées au système, l'équation $L=0$; ce qui nous apprend que *les conditions de l'équilibre d'un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe se réduisent à ce que la somme des momens des forces estimés par rapport à cet axe soit nulle d'elle-même.*

Remarque.

121. Si les deux points A et B n'étaient pas arrêtés en tous sens, mais pouvaient couler ensemble dans la direction AB, comme si on les supposait unis entre eux, et renfermés dans un canal infiniment étroit AB, leurs résistances x et x' dans le sens de l'axe des abscisses seraient nulles d'elles-mêmes, et l'on aurait encore l'équation $X=0$; de manière que, lorsque le corps a la liberté de se mouvoir dans le sens de l'axe de rotation, outre la première condition énoncée ci-dessus, il faut encore que la somme des forces décomposées parallèlement à cet axe soit nulle d'elle-même.

Corollaire.

Des pressions exercées par les forces sur les deux points fixes.

122. Ces pressions n'étant autre chose que les deux résistances actuelles r et r' des deux points fixes, estimées en sens contraires, on aura pour déterminer leurs composantes $-x$, $-y$, $-z$; $-x'$, $-y'$, $-z'$ parallèles aux trois axes, les cinq équations

$$X+x+x'=0,\quad Y+y+y'=0,\quad Z+z+z'=0,$$
$$M+z'a=0,\quad N-y'a=0.$$

Mais comme il y a six inconnues, il paraît d'abord que les deux pressions $-r$ et $-r'$ seront indéterminées, ou du moins que l'on pourra disposer à volonté de l'une de leurs six composantes. Cependant, si l'on observe que les deux inconnues $-x$, $-x'$ n'entrent que dans la première équation, on voit que les quatre autres seront déterminées par les équations restantes. En effet, l'on aura sur-le-champ par les deux dernières équations,

$$-Y' = \frac{-N}{a}, \quad -z' = \frac{M}{a};$$

et substituant dans les deux précédentes, on aura

$$-Y = \frac{Ya+N}{a}, \quad -Z = \frac{Za-M}{a}.$$

Ainsi l'indétermination ne portera que sur les deux composantes $-x$, $-x'$, dont la somme seulement sera déterminée par la première équation $X+x+x'=0$.

Les deux forces $-Y$, $-Z$ perpendiculaires à l'axe de rotation au point A, se composeront en une seule $\sqrt{Y^2+Z^2}$ perpendiculaire au même axe, et qui fera avec les axes des y, z des angles dont les cosinus respectifs seront

$$\frac{-Y}{\sqrt{Y^2+Z^2}}, \qquad \frac{-Z}{\sqrt{Y^2+Z^2}}.$$

Les deux forces $-Y'$, $-Z'$ perpendiculaires à l'axe de rotation au point B, se composeront de même en une seule $\sqrt{Y'^2+Z'^2}$ perpendiculaire au même axe, et qui fera avec les axes des y et z des angles dont les cosinus respectifs seront

$$\frac{-Y'}{\sqrt{Y'^2+Z'^2}}, \qquad \frac{-Z'}{\sqrt{Y'^2+Z'^2}}.$$

Ainsi les deux pressions normales à l'axe, aux points respectifs A et B, seront nécessairement déterminées de grandeur et de direction; et par conséquent les pressions absolues $-r$ et $-r'$ n'auront que cette indétermination particulière, savoir, qu'il faudra les choisir de telle sorte qu'étant décomposées chacune en deux autres, l'une dans l'axe, et l'autre perpendiculaire à cet axe, les deux forces normales aient les valeurs et les directions que nous venons de donner, et les deux forces situées dans l'axe fassent une somme constante égale à X.

123. Pour voir à quoi tient cette indétermination, qui dépend de celle des deux résistances actuelles x, x' que les points fixes A et B doivent opposer dans le sens de la ligne qui les joint, on peut remarquer que ces deux points, qu'on peut supposer unis par une verge inflexible, se prêtent un appui réciproque; de manière que chacun d'eux a toujours, ou par lui-même, ou par le secours de l'autre, la résistance actuelle dont il a besoin pour l'équilibre, pourvu que la somme de ces résistances soit suffisante. On ne peut donc pas demander, et il est impossible que le calcul détermine des valeurs particulières, pour deux résistances qui, passant tacitement, en tout ou en partie, de l'un

à l'autre point, se confondent en une seule et même résistance.

III.

De l'équilibre d'un corps qui s'appuie contre un plan inébranlable.

124. Prenons ce plan pour celui des x, y, que l'on nomme le plan horizontal; et supposant d'abord que le corps ne s'appuie contre ce plan que par un seul point A, regardons ce point d'appui comme l'origine des coordonnées.

Il est facile de voir que lorsqu'une force presse un point contre un plan, cette force peut toujours se concevoir comme décomposée en deux autres, l'une perpendiculaire au plan, et l'autre située dans ce plan. La première est nécessairement détruite par la résistance du plan; car il n'y a pas de raison pour qu'elle meuve le point d'un côté plutôt que d'un autre dans le plan, et d'ailleurs elle ne peut le mouvoir à travers; mais la seconde obtient tout son effet, parce que son action ne peut être altérée par la présence d'un plan le long duquel elle s'exerce. Le plan résistant ne peut donc détruire que des forces dont les directions lui sont normales, et par conséquent sa résistance ne peut faire naître que de telles forces dans le système.

Soit donc z la résistance actuelle du point d'appui dans l'axe des z. Les équations de l'équilibre deviendront :

$$X=0,\ Y=0,\ Z+z=0,$$
$$L=0,\ M=0,\ N=0.$$

Les trois dernières nous font voir (n° 112) que les forces appliquées au corps doivent se réduire à une seule qui passe par l'origine, c'est-à-dire par le point d'appui;

Les deux premières, que cette résultante doit être verticale, c'est-à-dire perpendiculaire au plan fixe;

Et la troisième, $Z+z=0$, que cette résultante Z peut avoir une valeur quelconque, pourvu qu'elle soit de signe contraire à la résistance z du plan; c'est-à-dire qu'en supposant, comme nous le ferons désormais, que le corps soit placé au-dessus du plan des x, y, il faut que la force z ne soit pas positive : sans quoi, tendant à soulever le corps au-dessus du plan, elle n'y ferait naître aucune résistance, et le plan ne servirait à rien pour l'équilibre; de manière qu'il faudrait les mêmes conditions que si le système était parfaitement libre.

125. Supposons actuellement que le corps s'appuie par un second point B. Prenons AB

pour l'axe des x, et le point A pour l'origine.

Le point A fait naître une résistance z dans l'axe même des z. Le point B fera naître une résistance z′ dans le plan xz, et donnera dans ce plan un couple dont le moment sera $z'a'$, en faisant $AB=a'$.

Les équations de l'équilibre seront donc

$$X=0,\ Y=0,\ Z+z+z'=0,$$
$$L=0,\ M+z'a'=0,\ N=0.$$

Ces équations nous font voir que l'équation de condition $XL+YM+ZN=0$ est satisfaite, ainsi que l'inégalité $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}>0$ (puisque les deux résistances z et z′ ne pouvant être supposées toutes deux nulles, et étant de même signe, la force Z ne peut être nulle). Les forces appliquées au système doivent donc avoir une résultante unique.

Les deux premières équations montrent que cette résultante doit être verticale, c'est-à-dire perpendiculaire au plan fixe; et la troisième, $Z+z+z'=0$, qu'elle peut avoir telle valeur qu'on voudra, pourvu qu'elle ne soit pas positive.

Enfin, si l'on cherche les valeurs des deux coordonnées p et q du point O où sa direction doit rencontrer le plan horizontal, comme on a (108)

$$p=\frac{M}{Z},\qquad q=\frac{-L}{Z},$$

en mettant à la place des quantités L, M, Z, leurs valeurs tirées des équations précédentes, on aura

$$p=a'\frac{z'}{z+z'},\quad q=0.$$

Donc, puisque l'on a $q=0$, il faut que le point où elle rencontre le plan horizontal tombe sur la ligne des abscisses, c'est-à-dire sur la ligne qui joint les deux points d'appui; et puisque l'on a $p=a'\frac{z'}{z+z'}$ à cause de $\frac{z'}{z+z'}$ toujours <1, on a p toujours $<a'$, et par conséquent la direction de la résultante doit toujours tomber entre les deux points d'appui A et B.

126. Supposons enfin que le corps s'appuie contre le plan par tant de nouveaux points qu'on voudra, C, D, etc., qui soient tous placés d'un même côté à l'égard de la droite AB, qui est toujours regardée comme l'axe des abscisses x. Conservant pour les deux points A et B les dénominations précédentes, nommons a'' et b'' les deux coordonnées du point C; a''' et b''' celles du point D, et ainsi de suite. La résistance z'' du point C, étant transportée à

l'origine, donnera deux couples dans les plans verticaux XZ, YZ, dont les momens seront $z''a''$, $z''b''$; la résistance z''' du point D donnera de même deux couples dans les mêmes plans, et dont les momens seront $z'''a'''$, $z'''b'''$, et ainsi de suite. Les équations de l'équilibre seront donc

$$X=0,\ Y=0,\ Z+z+z'+y''+z'''+\text{etc.}=0,$$
$$L-z''b''-z'''b'''-\text{etc.}=0,$$
$$M+z'a'+z''a''+z'''a'''+\text{etc.}=0,\ N=0.$$

Ces équations nous font voir d'abord, comme dans l'article précédent, que toutes les forces appliquées au système doivent se réduire à une seule, perpendiculaire au plan fixe, et dont la valeur ne soit pas positive.

En second lieu, je dis que sa direction doit rencontrer ce plan dans l'intérieur du polygone formé par les points d'appui A, B, C, D, etc.

En effet, si l'on nomme, comme ci-dessus, q l'ordonnée du point O, où cette résultante rencontre le plan horizontal; comme on a $q=\frac{-L}{Z}$, en mettant pour L et Z leurs valeurs tirées des équations précédentes, on aura

$$q=\frac{z''b''+z'''b'''+\text{etc.}}{z+z'+z''+z'''+\text{etc.}}$$

Or, les résistances z, z', z'', z''', etc., étant toutes positives, et les ordonnées b'', b''', etc., toutes de même signe, puisque les points C, D, etc., sont, par hypothèse, tous placés du même côté de l'axe des abscisses, il s'ensuit que l'ordonnée q sera de même signe que ces ordonnées, et que par conséquent le point O sera, à l'égard de la ligne AB qui joint les deux points d'appui A et B, du même côté que les autres C, D, etc. Donc, puisqu'on aurait pu prendre pour l'axe des abscisses toute autre droite AC, BD, etc., qui, joignant deux points d'appui, laisse tous les autres d'un même côté, on peut conclure que le point O doit se trouver, à l'égard de chacune de ces lignes, du même côté que les autres points d'appui, et par conséquent doit tomber nécessairement dans l'intérieur du polygone formé par tous les points d'appui.

Corollaire.

Des pressions exercées par la résultante des forces du système sur les différens points d'appui.

127. Ces pressions, estimées en sens contraire, ne sont autre chose que les résistances z, z', z'', z''', etc., dont les points d'appui A,

B, C, D, etc., ont actuellement besoin pour l'équilibre. On aura donc, pour les déterminer, les trois équations :

$$Z+z+z'+z''+z'''+\text{etc.}=0,$$
$$L-b''z''-b'''z'''-\text{etc.}=0,$$
$$M+a'z'+a''z''+a'''z'''+\text{etc.}=0.$$

Mais comme on n'a que ces trois équations, avec cette seule condition que les inconnues z, z', z'', z''', etc., doivent être toutes positives, il s'ensuit que les diverses pressions exercées sur le plan demeurent indéterminées lorsqu'il y a plus de trois appuis, et même lorsqu'il n'y en a que trois, s'ils tombent en ligne droite. Car, en supposant que le troisième point C tombe avec les deux autres A et B sur l'axe des abscisses, l'ordonnée b'' devient nulle, et l'inconnue z'' disparaissant d'elle-même dans l'équation $L-b''z''=0$, il ne reste plus que deux équations pour calculer les trois inconnues z, z', z'', qui sont encore indéterminées.

On pourra donc, dans ce cas, se donner à volonté l'une des pressions, et, dans le cas général, se donner les pressions de tous les points d'appui, hors trois. On calculera ensuite ces dernières pressions par les équations précédentes; et pourvu que, dans les différentes hypothèses que l'on fera, le calcul ne mène à

aucune pression positive, le problème sera toujours bien résolu.

Remarque.

128. Mais si nous trouvons, d'après les principes établis ci-dessus, que les pressions sont indéterminées lorsqu'il y a plus de trois points d'appui, d'un autre côté, en considérant *à priori* un corps appuyé contre un plan, par un nombre quelconque de points, et tenu en équilibre par une force normale à ce plan, il nous paraît évident que chaque point de contact doit être actuellement pressé, et que, s'il est pressé, c'est avec une certaine force tout-à-fait déterminée, ce qui serait absurde autrement: et de là résulte une espèce de paradoxe qui ne paraît pas facile à expliquer.

Gardons-nous d'abord d'en conclure, avec d'Alembert, que la théorie connue jusqu'ici est insuffisante pour résoudre le problème en question; car nous allons voir que ce problème est indéterminé par l'hypothèse même que l'on a faite, et que la théorie donne tout ce qu'on peut demander sans se contredire soi-même.

En effet, si l'on fait attention qu'il s'agit, par hypothèse, d'un corps dont la figure est parfaitement invariable, on peut concevoir les points de contact de ce corps, comme unis entre eux

par un plan parfaitement inflexible, lequel repose sur les points fixes A, B, C, D, etc. Or, lorsqu'il y a plus de trois points d'appui, ou seulement trois quand ils tombent en ligne droite, il n'est pas difficile de voir que certaines parties des pressions qu'on supposerait exercées par le plan sur ces points, peuvent être imaginées comme se reportant indifféremment des uns aux autres, de manière qu'on ne puisse demander, ni ce qu'elles sont en elles-mêmes, ni sur quels points d'appui elles s'exercent de préférence, à moins de détruire l'hypothèse de l'inflexibilité parfaite du plan qui unit les points du corps.

Fig. 37. Ainsi (fig. 37), pour nous faire mieux comprendre par un exemple, supposons qu'il s'agisse d'un corps appuyé par trois points en ligne droite, et considérons ces points comme liés entre eux par une verge inflexible qui repose sur les trois points fixes A, B, C. Quand bien même on saurait que cette verge est actuellement poussée aux trois points respectifs A, B, C, par trois forces normales P, Q, R, parallèles entre elles, on ne serait pas en droit d'en conclure que les pressions exercées sur les points d'appui sont respectivement égales aux forces P, Q, R: car il serait toujours permis de concevoir dans les deux forces extrêmes P

et R, deux parties u et u' qui ne pressent point du tout sur les appuis A et C. Si l'on prend en effet ces deux parties dans la raison inverse de leurs distances AB et CB au point B, à cause de la raideur parfaite de la verge, on peut concevoir que ces deux forces vont presser actuellement le point d'appui B, conjointement avec la force Q; de sorte qu'il y a ici une pression indéterminée $u+u'$, qu'on peut supposer exister indifféremment, ou, tout entière en B, ou, en deux parties u et u', sur les points A et C, sans qu'on puisse dire ni ce qu'elle est, ni où elle se trouve de préférence, à moins de détruire l'hypothèse de l'inflexibilité parfaite de la verge qui joint les points de contact du corps.

129. Au reste, cette indétermination singulière est du même genre que celle que nous avons observée et expliquée au n° 123. Les pressions ou résistances actuelles dont les différens points d'appui ont besoin pour l'équilibre, ne sont indéterminées, dans le cas où il y a plus de trois points d'appui, ou seulement trois, quand ils tombent en ligne droite, que parce qu'il y a alors des appuis intermédiaires qui peuvent prêter aux appuis placés de part et d'autre certaines parties de leurs résistances; de manière que, par la liaison parfaite de ces

appuis, on ne peut plus distinguer leurs résistances individuelles d'avec celles qu'ils pourraient emprunter mutuellement les uns des autres.

Et la théorie nous fait voir que, pourvu que ces points aient des résistances individuelles qui satisfassent ensemble aux trois équations données ci-dessus, de quelque autre manière permise par les mêmes équations, que l'on veuille répartir les forces de pression sur ces différens points, chacun d'eux trouvera toujours, ou dans sa résistance propre, ou dans cette résistance unie avec celle qu'il empruntera des autres points d'appui, la résistance actuelle dont il aura besoin pour détruire la pression qu'on lui suppose.

Il n'en est pas de même dans le cas de deux points d'appui, et dans celui de trois non en ligne droite: les résistances actuelles sont déterminées, et doivent l'être; car chaque point d'appui se trouvant seul à côté de l'autre, ou, dans le second cas, à côté de la ligne qui joint les deux autres, il est visible qu'il ne peut avoir que sa résistance propre, et ne pourrait pas en emprunter des appuis voisins, si elle n'était pas suffisante.

130. Le paradoxe que nous venons de résoudre est d'autant plus frappant, que dans la nature, les pressions exercées par les corps aux différens points de contact sont nécessairement déterminées dans tous les cas, ce qui serait absurde autrement.

Mais tous les corps sont plus ou moins flexibles et élastiques; et lorsqu'ils sont pressés les uns contre les autres par différens points situés dans le même plan, la pression totale se distribue d'une manière particulière en vertu de ces propriétés physiques, et des trois équations données ci-dessus (127), auxquelles les pressions individuelles doivent toujours satisfaire : or, il faudrait savoir tenir compte de ces propriétés, pour trouver en tout autant d'équations qu'il y a de points de contact, et connaître par là les diverses pressions; et c'est une question très délicate de Physique, que nous ne chercherons pas à discuter ici.

131. Ce que nous avons dit sur l'équilibre d'un corps qui s'appuie contre un seul plan peut aisément s'appliquer à un corps qui s'appuierait contre plusieurs plans à la fois. Chacun de ces plans fera naître aux différens points de contact des résistances normales à sa surface; et en introduisant dans les six équations de l'équilibre ces nouvelles forces indétermi-

nées, on parviendra facilement aux conditions que doivent remplir les forces immédiatement appliquées.

132. Si le corps s'appuie en différens points contre une ou plusieurs surfaces courbes quelconques, on pourra supposer qu'il s'appuie sur les plans tangens menés aux surfaces en ces points. Ainsi, connaissant les équations de ces surfaces, on cherchera celle des plans tangens ou des normales aux divers points de contact : on introduira dans les équations de l'équilibre autant de forces indéterminées, dirigées suivant ces normales, et le problème reviendra au précédent.

CHAPITRE III.

DES CENTRES DE GRAVITÉ.

Jusqu'à présent nous avons fait abstraction de la pesanteur des corps; nous allons voir ici comment on peut avoir égard à cette propriété générale de la matière, afin d'appliquer les principes établis ci-dessus, à l'équilibre des corps, tels qu'ils sont dans la nature.

I.

133. On nomme *pesanteur* ou *gravité* cette cause inconnue qui fait descendre les corps vers la terre, lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes.

La pesanteur étant une cause de mouvement, on peut la considérer comme une force.

Cette force pénètre les parties les plus intimes des corps, et agit également sur toutes leurs molécules; car l'expérience prouve que, dans le vide, des corps quelconques de masses

inégales, une balle de plomb, par exemple, et le duvet le plus léger, tombent de la même hauteur avec la même vitesse; d'où l'on doit conclure que les molécules d'un corps qui tombe descendent toutes de la même manière que si elles étaient simplement contiguës, sans être liées les unes aux autres. Ainsi l'action de la pesanteur s'exerce sur toutes les molécules d'un corps, et se fait sentir également à chacune d'elles.

Cependant l'intensité de la pesanteur n'est pas rigoureusement la même pour une même molécule placée dans des lieux différens par rapport au globe terrestre: elle varie à la surface de la terre, depuis l'équateur où elle est la plus petite, jusqu'au pôle où elle est la plus grande: de plus, elle diminue à la même distance de l'équateur, à mesure que la molécule s'éloigne davantage du centre de la terre; et l'on sait qu'elle décroît toujours dans le même rapport que le carré de cet éloignement augmente. Mais pour les molécules des corps que l'on considère ordinairement en Statique, il n'y a pas assez de différence entre leurs distances à l'équateur, ou au centre de la terre, pour que les variations de la pesanteur y soient sensibles. Ainsi l'on est autorisé à regarder la pesanteur comme une force constante.

La direction de la pesanteur est fort bien représentée par celle d'un fil-à-plomb en équilibre, ou par la perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles.

Cette direction dans le lieu que l'on considère se nomme la *verticale*, et tout plan perpendiculaire à la verticale se nomme le plan *horizontal*.

La surface de la terre, ou plutôt celle des mers, étant à peu près sphérique, les directions de la pesanteur vont à peu près concourir au centre du globe. Ainsi, à mesure que l'on chemine sur la terre, la verticale change aussi bien que le plan horizontal: mais comme les distances dont il s'agit ordinairement dans la Statique sont très petites à l'égard du rayon de la terre, qui a près de 1500 lieues, les directions de deux verticales peu éloignées, qui vont à peu près concourir à cette distance, peuvent être regardées comme parallèles, sans erreur sensible.

Nous considérons donc toutes les molécules égales d'un corps pesant, comme sollicitées par de petites forces égales, parallèles et de même sens, et nous pourrons appliquer aux forces qui proviennent de la gravité, tout ce que nous avons dit des forces parallèles appliquées à un assemblage de points liés entre eux d'une manière invariable.

134. Et d'abord, nous en conclurons que *la résultante de toutes les forces parallèles de la pesanteur leur est parallèle, c'est-à-dire est verticale ;*

En second lieu, qu'*elle est égale à leur somme.*

La quantité de cette résultante est ce que l'on nomme *le poids* du corps ; d'où l'on voit que le poids d'un corps est proportionnel au nombre des molécules qui le composent, ou à la quantité de matière qu'il renferme, et que l'on nomme sa *masse*. Ainsi, l'on distinguera le mot de *pesanteur* ou *gravité*, d'avec celui de *poids*. La pesanteur désigne, comme nous l'avons dit, la cause qui attire les corps vers la terre ; mais le poids désigne la force particulière qui en résulte pour chacun d'eux ; force qui est proportionnelle à leur masse, et égale à l'effort qu'il faudrait employer pour les soutenir.

135. En troisième lieu, comme nous avons vu que pour les forces parallèles, appliquées à différens points, il y a un *centre*, c'est-à-dire un point unique par lequel passent continuellement leurs résultantes successives, lorsque l'on incline successivement tout le groupe de ces forces dans diverses positions, il s'ensuit qu'il

existe toujours, pour un corps pesant, un point unique par lequel passe continuellement la direction du poids, lorsque l'on tourne successivement le corps dans diverses positions à l'égard du plan horizontal. En effet, dans les diverses situations qu'on lui donne, les forces de la pesanteur qui animent toutes les molécules ne cessent pas d'être les mêmes, d'agir aux mêmes points, et d'être parallèles, et par conséquent, leurs résultantes successives ne cessent pas de se couper en un même point.

Ce point unique par lequel passe toujours la direction du poids, quelle que soit la position du corps à l'égard du plan horizontal, se nomme *le centre de gravité.*

136. Si le centre de gravité d'un corps est fixe, il est clair que ce corps sera en équilibre autour de lui dans toutes les situations ; c'est-à-dire que si, le faisant tourner autour de ce point, on l'amène dans une situation quelconque, et qu'on l'y laisse, le corps y demeurera : car, dans toutes ces positions, la résultante des forces de la pesanteur passera toujours par le même point fixe, et son effet sera détruit. C'est pour cela que plusieurs auteurs ont défini le centre de gravité un point tel, que, s'il était fixé, le corps demeurerait en

équilibre dans toutes les positions possibles autour de ce point; mais il est plus convenable de faire voir *à priori* qu'il y a toujours pour chaque corps un tel point, et par conséquent de montrer qu'il y a un centre de gravité, avant de définir le centre de gravité lui-même.

137. Puisque le centre de gravité d'un corps n'est autre chose que le centre des forces parallèles de la pesanteur, appliquées à toutes les molécules de ce corps; comme toutes ces forces sont supposées égales, il suit de l'article 87 que *la distance du centre de gravité à un plan quelconque est égale à la moyenne distance de toutes les molécules du corps au même plan.* Par conséquent la position de ce centre dans les corps ne dépend nullement de la gravité, mais seulement de la manière dont toutes les molécules sont disposées les unes à l'égard des autres.

Aussi quelques géomètres ont-ils cru plus convenable de nommer le centre de gravité, le *centre de masse*, ou le *centre de figure*: mais nous conserverons ici l'autre dénomination, comme étant plus usitée, et comme rappelant mieux l'usage que l'on fait de ce point dans la Statique.

138. Comme on peut toujours concevoir

qu'à toutes les forces de la pesanteur qui animent les molécules d'un corps, on ait substitué leur résultante générale, qui produit absolument le même effet, on peut considérer le centre de gravité d'un corps comme un point où toute la masse de ce corps est réunie et concentrée. Ainsi, dans la solution des problèmes, si l'on veut avoir égard à la pesanteur, on pourra regarder chaque corps comme réduit à son centre de gravité, qu'on supposera sollicité par une force égale et parallèle à son poids; et combinant ensuite ces nouvelles forces avec celles qui sont immédiatement appliquées au système, on trouvera les conditions de l'équilibre d'après les principes donnés dans les chapitres précédens, comme si tous les corps du système étaient dépourvus de pesanteur.

Il ne s'agit donc plus actuellement que de savoir déterminer les centres de gravité des différens corps ou assemblages de corps qui peuvent se présenter.

139. Lorsqu'on peut considérer le corps ou le système comme composé de parties dont on connaît en particulier les centres de gravité et les poids respectifs, il est très facile de déterminer le centre de gravité de ce corps ou système.

Car ce centre n'étant autre chose que le point d'application de la résultante générale des forces de la pesanteur appliquées à toutes les molécules, on peut concevoir que, pour le déterminer, on a d'abord cherché les points respectifs où sont appliquées les résultantes partielles des forces qui agissent sur chaque corps, et qu'ensuite on a cherché le point d'application de la résultante générale de ces diverses résultantes.

Donc, si l'on connaît déjà les centres de gravité respectifs des différens corps, on n'aura qu'à supposer appliquées à ces points des forces parallèles et respectivement égales aux poids de ces corps, et l'on trouvera le centre de gravité du système absolument de la même manière que l'on trouverait le centre de ces forces parallèles.

On pourra donc employer dans cette recherche, ou la composition successive des forces, comme au n° 29, ou la théorie des momens, comme au n° 86.

Et, puisque la distance du centre des forces parallèles à un plan se trouve en divisant la somme des momens des forces, pris par rapport au plan, par la somme de toutes les forces, il s'ensuit :

Que *la distance du centre de gravité d'un*

système quelconque de corps, à un plan, est égale à la somme des momens de leurs poids, par rapport au plan, divisée par la somme de tous les poids : ou (comme les masses sont proportionnelles aux poids), *égale à la somme des momens des masses, divisée par la somme de toutes les masses ;* en entendant par le moment d'une masse, le produit de cette masse par la distance de son centre de gravité au plan que l'on considère.

En calculant ainsi les distances du centre de gravité à trois plans quelconques, qu'on pourra supposer rectangulaires entre eux pour plus de simplicité, on trouvera facilement la position de ce point dans l'espace.

140. Dans le cas où toutes les masses du système sont égales, on trouve sur-le-champ la distance du centre de gravité à un plan quelconque, en prenant la moyenne distance des centres de gravité de tous les corps à ce plan.

141. Lorsque le plan par rapport auquel on estime les momens passe par le centre de gravité du système, la distance de ce centre au plan est nulle ; et par conséquent *la somme des momens des masses, pris par rapport à un plan qui passe par le centre de gravité du système, est toujours égale à zéro.*

C'est-à-dire que la somme des momens des masses qui sont d'un même côté du plan est égale à la somme des momens des masses qui sont de l'autre côté.

Et réciproquement, *lorsque la somme des momens des masses, par rapport à un plan, est égale à zéro, le centre de gravité du système est dans ce plan.*

Car la distance de ce centre au plan est nulle.

142. Il résulte de là que si les centres de gravité de tous les corps que l'on considère sont dans un même plan, le centre de gravité du système sera aussi dans ce plan; et que si les centres de gravité des corps sont sur une même ligne droite, le centre de gravité sera aussi sur cette droite.

Car dans le premier cas, tous les corps ayant leurs centres de gravité dans un même plan, les momens de leurs masses par rapport à ce plan sont tous nuls; la distance du centre de gravité du système à ce plan est donc nulle aussi, et par conséquent ce centre est dans le plan même.

Dans le second cas, tous les centres de gravité étant en ligne droite, si l'on fait passer deux plans quelconques par cette droite, les

centres de gravité des différens corps seront à la fois dans ces deux plans. Le centre de gravité du système y sera donc aussi, et par conséquent ne pourra se trouver que dans leur intersection, qui est la droite proposée.

Au reste, les deux dernières conséquences que nous venons d'énoncer paraîtront évidentes d'elles-mêmes, en se représentant que l'on cherche le centre de gravité du système par la composition successive des forces ou poids appliqués aux centres de gravité respectifs des différens corps.

143. Lorsque tous les centres de gravité des corps sont dans un même plan, comme le centre de gravité du système se trouve déjà dans un plan connu, il suffit, pour déterminer sa position, de chercher ses distances à deux autres plans. Or, si on les prend, pour plus de simplicité, tous deux perpendiculaires sur le premier, les distances des différens centres de gravité à ces deux plans seront les mêmes que leurs distances aux traces de ces plans sur le premier.

Donc, *si dans le plan qui contient les centres de gravité de différens corps, on tire deux droites ou axes quelconques non parallèles, on aura les distances respectives du centre de gra-*

vité du système à ces deux droites, en prenant les sommes respectives des momens de toutes les masses, par rapport à ces droites, et divisant par la somme de toutes les masses.

(Ayant soin de regarder pour chaque droite, comme positifs, tous les momens des masses qui sont d'un même côté de cette ligne, et comme négatifs les momens de celles qui sont de l'autre côté.)

On trouvera de cette manière à quelle distance, et de quel côté, le centre de gravité du système est placé à l'égard de ces deux axes; et menant alors, aux deux distances trouvées, deux parallèles à ces axes, le centre de gravité sera à leur intersection même.

144. Lorsque les centres de gravité de tous les corps sont en ligne droite, comme le centre de gravité du système se trouve déjà sur une ligne connue, il suffit, pour le déterminer, de chercher sa distance à un seul plan. Or, si on le prend, pour plus de simplicité, perpendiculaire sur la ligne des centres, les distances des centres de gravité respectifs à ce plan seront les mêmes que leurs distances au point où le plan coupe la ligne.

Donc, *lorsque plusieurs corps ont leurs centres de gravité respectifs sur une même droite,*

la distance du centre de gravité du système, à un point quelconque pris sur cette droite, est égale à la somme des momens des masses, par rapport à ce point, divisée par la somme de toutes les masses.

(En prenant avec un même signe tous les momens des masses qui sont d'un même côté à l'égard du point, et avec le signe contraire, les momens de celles qui se trouvent de l'autre côté.)

On saura alors à quelle distance et de quel côté le centre de gravité du système est placé à l'égard du point que l'on a choisi; et si l'on porte ensuite de ce côté, et à partir du point, une longueur égale à la distance trouvée, l'extrémité de cette longueur marquera sur la ligne le centre de gravité lui-même.

145. On voit donc combien il est facile de trouver le centre de gravité d'un corps ou système, lorsqu'on connaît ceux des différens corps qui le composent; il nous reste à voir comment on obtiendrait les centres de gravité des corps qui ne seraient pas susceptibles d'une pareille décomposition.

A la vérité, comme on peut toujours regarder un corps comme un assemblage de points matériels qui sont eux-mêmes leurs propres

centres de gravité, il s'ensuit qu'on peut leur appliquer la méthode précédente, et qu'on aura généralement la distance du centre de gravité d'un corps quelconque à un plan, en prenant la somme des momens de toutes les particules de ce corps, par rapport au plan, et divisant par la somme de ces particules, ou, ce qui est la même chose, en divisant par la masse totale du corps. Mais la solution générale de cette question dépend du calcul intégral; et l'on en peut voir, dans presque tous les traités de Mécanique, des applications très simples, et qui n'ont d'autres difficultés que celles du calcul intégral lui-même.

Cependant, comme il existe des considérations élémentaires très élégantes qui conduisent à la détermination des centres de gravité pour la plupart des corps dont il est question dans la Géométrie, nous nous bornerons à cette recherche, qui remplit l'objet que nous avons en vue, et qui ne nous écarte point des élémens.

146. D'après ce que nous avons dit (137), la position du centre de gravité dans un corps ne dépend que de la manière dont toutes les molécules de ce corps sont disposées les unes à l'égard des autres. Elle dépend donc de deux choses : 1°. de la figure du corps ou de celle

de l'espace qu'il occupe; 2°. de la densité relative de ses différentes parties. On voit bien, en effet, que si la figure et le volume restant les mêmes, les molécules viennent à s'écarter les unes des autres dans une certaine partie du corps, de manière qu'elles se rapprochent davantage dans une autre, les forces qui agissent sur elles n'étant plus réparties de la même manière, la position de la résultante générale changera, et par conséquent celle du centre de gravité du corps. Ainsi, dans la détermination de ce point, il faudrait avoir égard, non-seulement à la figure du corps, mais encore à la loi suivant laquelle la densité varie dans toute son étendue.

Mais si, pour résoudre plus simplement la question, on suppose d'abord les corps parfaitement homogènes, ou uniformément denses en tous leurs points, la position du centre de gravité ne dépendra plus que de la figure, et la recherche des centres de gravité deviendra un simple problème de Géométrie.

C'est dans cette hypothèse de corps parfaitement homogènes, que l'on détermine ordinairement les centres de gravité des lignes, des surfaces et des solides qui sont soumis à une description rigoureuse, et que l'on regarde comme doués d'une pesanteur uniforme en tous leurs points; et quoique ce problème puisse

paraître, au premier coup d'œil, de pure spéculation, il est facile de voir qu'il est, en Statique, ce que la quadrature des aires, ou la cubature des solides est en Géométrie. Comme les résultats que la Géométrie nous donne sont d'autant plus exacts dans l'application, que les figures sont plus semblables à celles que la Géométrie suppose, ainsi dans la détermination des centres de gravité, on trouvera ces points d'autant plus près des lieux que la théorie leur assigne, que les corps seront d'une substance plus homogène, plus uniformément répandue, et terminés par des surfaces plus parfaites.

II.

DES CENTRES DE GRAVITÉ DES FIGURES.

Lemme.

147. *Toute figure dans laquelle il se trouve un point tel, qu'un plan quelconque mené par ce point coupe la figure en deux parties parfaitement symétriques, a son centre de gravité en ce point, que l'on nomme ordinairement* le centre de la figure.

En effet, si l'on fait passer un plan quelconque par le centre de la figure, comme ce plan la coupe en deux parties parfaitement symétriques, il n'y a pas de raison pour que le centre de gravité, qui est un point unique, et dont la position ne dépend que de la figure, se trouve d'un côté de ce plan plutôt que de l'autre; donc il sera dans ce plan : le centre de gravité devant donc se trouver à la fois dans tous les plans que l'on pourrait conduire par le centre de figure, sera en ce point même, qui est la commune intersection de tous ces plans.

148. Il résulte de là, 1°. que le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de sa longueur;

2°. Que le centre de gravité de l'aire d'un parallélogramme quelconque est à l'intersection de ses deux diagonales, ou au milieu de l'une d'elles;

3°. Que le centre de gravité de la solidité d'un parallélépipède est à l'intersection de ses quatre diagonales, ou au milieu de l'une d'elles.

On pourrait encore en conclure que le centre de gravité du contour ou de l'aire d'un cercle est au centre de ce cercle; que le centre de gravité de la surface on de la solidité d'une sphère est au centre de cette sphère; que celui de la surface ou de la solidité d'un cylindre à bases parallèles est au milieu de son axe; etc.

Mais on remarquera surtout les trois premiers corollaires sur les centres de gravité de la ligne droite, du parallélogramme et du parallélépipède, parce que l'on peut regarder ces figures comme les élémens de toutes les autres.

Problème I.

149. *Trouver le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque, et en général d'un assemblage de droites disposées comme on voudra dans l'espace.*

On regardera chaque droite comme concentrée en son centre de gravité, lequel est au milieu de sa longueur ; et l'on n'aura plus à considérer qu'un assemblage de points représentés, pour leurs poids respectifs, par les longueurs des lignes dont ils sont les centres de gravité.

On trouvera donc le centre de gravité du système par la composition successive de ces poids, ou par la théorie des momens, comme il a été dit plus haut.

150. On pourra souvent, par des considérations particulières, déterminer les centres de gravité plus facilement que par la méthode générale.

S'il s'agit, par exemple, de trouver le centre de gravité du contour d'un triangle, on n'aura qu'à joindre les milieux des trois côtés par trois lignes, ce qui formera un triangle semblable au triangle proposé; et partageant les angles de ce triangle en deux parties égales par des droites, ces droites se couperont au centre de gravité cherché.

C'est-à-dire que le centre de gravité du contour d'un triangle n'est autre chose que le centre du cercle inscrit au triangle formé par les lignes qui joignent les milieux des trois côtés.

Problème II.

151. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque, et en général d'un assemblage de figures planes et rectilignes disposées comme on voudra dans l'espace.*

Tous les polygones pouvant se décomposer en triangles, nous allons voir d'abord comment on trouve le centre de gravité d'un triangle quelconque. Après quoi, prenant les centres de gravité de tous les triangles qui composent le système proposé, nous n'aurons plus à considérer qu'un assemblage de points donnés de position, et dont les poids respectifs seront représentés par les aires des triangles dont ils

sont les centres de gravité ; et le problème se résoudra comme le précédent.

Du centre de gravité du triangle.

Fig. 38. 152. Soit ABC (fig. 38) le triangle proposé : considérons sa surface comme composée d'une infinité de tranches parallèles à la base BC. Il est visible que la ligne droite AD menée du sommet A au milieu D de la base, divisera toutes ces tranches en deux parties égales. Leurs centres de gravité respectifs seront donc tous sur la droite AD, et par conséquent celui de leur système, c'est-à-dire celui du triangle, y sera aussi.

Par un raisonnement tout-à-fait semblable, on ferait voir que le centre de gravité du triangle doit aussi se trouver sur la ligne BE qui serait menée du sommet de l'angle B au milieu E du côté opposé AC.

Le centre de gravité devant donc se trouver à la fois sur les deux lignes AD, BE, sera nécessairement à leur intersection G.

Mais si l'on joint DE, puisque les points D et E sont les milieux respectifs des côtés CB, CA, la droite DE sera parallèle à AB et en sera la moitié. Or, si DE est moitié de AB, à cause des triangles semblables DGE, AGB, le côté DG sera aussi moitié de son homologue AG.

Donc, DG sera le tiers de AD, et AG en sera les deux tiers.

Donc, *le centre de gravité de l'aire d'un triangle quelconque est situé sur une ligne menée de l'un quelconque des trois angles au milieu de la base opposée, et se trouve au tiers de cette ligne à partir de la base, ou aux deux tiers à partir du sommet de l'angle.*

La démonstration précédente est si naturelle et si simple, que nous n'avons pas cru devoir l'omettre ici. On pourrait lui donner toute la rigueur possible, au moyen de cette méthode connue, dont les exemples sont si multipliés dans les élémens de Géométrie; mais le lecteur peut y suppléer.

Au reste, voici une démonstration nouvelle qui ne laisse rien à désirer du côté de l'exactitude.

153. Par le milieu D de la base BC du triangle ABC (fig. 39), menez aux deux autres côtés les Fig. 39.
parallèles DE, DF, qui les rencontrent en E et F : le triangle proposé sera décomposé en un parallélogramme AEDF, et deux triangles DEC, DFB, parfaitement égaux entre eux, et semblables au premier.

Le moment du triangle ABC, par rapport à une ligne quelconque menée dans son plan,

sera donc égal à la somme des momens du parallélogramme et des deux triangles.

Soit a l'aire d'un de ces triangles, $4a$ sera celle du triangle proposé. Donc, si l'on nomme x la distance du centre de gravité de ce triangle à la base BC, on aura $4ax$ pour son moment par rapport à cette ligne.

Soit h la hauteur du triangle; $\frac{h}{2}$ sera la distance du centre de gravité du parallélogramme à la base; et comme son aire est $2a$, son moment sera $2a \times \frac{h}{2}$, c'est-à-dire ah.

Ensuite, les deux triangles BFD, DEC ont visiblement leurs centres de gravité à même distance de la base BC; donc, si l'on nomme x' cette distance, la somme de leurs momens sera $2ax'$.

On aura donc $4ax = ah + 2ax'$, ou bien, en divisant par $4a$,

$$x = \frac{1}{4}.h + \frac{x'}{2}.$$

Si l'on supposait, avec Archimède, que, dans les triangles semblables, les centres de gravité sont des points semblablement placés; alors, comme les dimensions du triangle BFD ou DEC sont moitiés de celles du triangle ABC, on aurait $x' = \frac{x}{2}$; et substituant dans l'équation précédente, on trouverait sur-le-champ

$$x = \frac{h}{3}.$$

Ce qui ferait voir que le centre de gravité d'un triangle se trouve placé au-dessus de chaque côté, à une distance égale au tiers de la hauteur de l'angle opposé, et que par conséquent il est au point déterminé ci-dessus.

Mais on peut parvenir à cette conclusion sans aucune hypothèse : car, puisque l'on a trouvé pour le triangle ABC.

$$x = \frac{1}{4}.h + \frac{x'}{2},$$

x étant la distance de son centre de gravité à la base BC, et x' la distance du centre de gravité du triangle BFD à sa base BD; en imaginant que l'on fasse, dans le triangle BFD la même construction que l'on a faite dans le triangle ABC, si l'on nomme x'' la distance analogue à celle qu'on a nommée x', et si l'on observe que la hauteur du nouveau triangle, est deux fois plus petite que celle du premier, on aura

$$x' = \frac{1}{4}.\frac{h}{2} + \frac{1}{4}.$$

Et continuant la même construction, on

trouvera

$$x'' = \frac{1}{4}\cdot\frac{h}{4} + \frac{x'''}{2},$$

$$x''' = \frac{1}{4}\cdot\frac{h}{8} + \frac{x^{IV}}{2},$$

etc., etc.,

x''', x^{IV}, etc., désignant les distances des centres de gravité à la base dans les triangles successifs, distances qui diminuent sans cesse, et dont la dernière peut être rendue moindre que toute grandeur donnée, puisqu'elle est toujours plus petite que la hauteur du triangle dans lequel on la considère.

On aura donc, en substituant successivement dans la première équation, à la place de x', x'', x''', etc., leurs valeurs,

$$x = \frac{h}{4} + \frac{h}{4.4} + \frac{h}{4.4.4} + \text{etc., à l'infini;}$$

d'où $x = \frac{h}{3}$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque.

154. Soient trois masses égales ayant leurs centres de gravité situés aux trois angles respectifs du triangle ABC (fig. 38). Le centre de gravité de ces trois corps sera le même que celui du triangle.

Fig. 38.

Car, pour trouver celui des trois corps, il n'y a qu'à prendre d'abord le centre de gravité de deux quelconques d'entre eux, celui des deux corps B et C, par exemple, lequel est au point D, milieu de BC; ensuite joignant DA, on n'a qu'à diviser cette droite au point G dans la raison réciproque de 2 à 1.

Or, cette construction donne aussi le centre de gravité du triangle ABC.

Il résulte de là et du n° 140, que la distance du centre de gravité d'un triangle à un plan situé d'une manière quelconque dans l'espace, est égale à la moyenne distance de ses trois angles au même plan.

Centre de gravité du trapèze.

155. Si l'on prolonge jusqu'à leur rencontre les deux côtés du trapèze, on forme deux triangles semblables de même sommet, et qui ont pour bases les deux bases du trapèze : et comme la ligne qui va du sommet commun au milieu de la base inférieure passe au milieu de la base supérieure, il s'ensuit que cette ligne passe à la fois par les centres de gravité des deux triangles, et par conséquent par celui du trapèze qui en est la différence. Le centre de gravité du trapèze est donc sur la ligne qui joint les milieux de ses deux bases parallèles : ainsi

il ne reste qu'à trouver sa distance à l'une ou à l'autre de ces bases, ou, si l'on veut, le rapport de ces deux distances.

Nommons x la distance inconnue de ce point à la base inférieure, et H et h les hauteurs des deux triangles semblables. Si l'on représente par H^2 l'aire, ou le poids du grand triangle, h^2 sera le poids du petit, et H^2-h^2 celui du trapèze. Le moment du premier de ces poids, par rapport à la base inférieure, sera donc $H^2.\frac{H}{3}$; le moment du second sera $h^2\left(\frac{h}{3}+H-h\right)$, et le moment du troisième, $(H^2-h^2)x$. Ainsi, en égalant le premier de ces momens à la somme des deux autres, on aura, pour déterminer x, l'équation :

$$3(H^2-h^2)x=H^3-3h^2H+2h^3.$$

Si l'on cherche de même la distance y du centre de gravité à la base supérieure, ou si l'on observe simplement que cette distance y est formée de $(H-h)$ diminuée de x, on trouvera

$$3(H^2-h^2)y=h^3-3H^2h+2H^3.$$

Comparant ces deux équations, membre à membre, et ôtant, d'une part, le facteur commun $3(H^2-h^2)$, et, de l'autre le facteur commun $(H-h)^2$, on trouvera, pour le rapport cherché,

$$x:y::H+2h:h+2H;$$

ou bien, mettant à la place des hauteurs H et h des deux triangles, leurs bases B et b qui sont dans le même rapport, on aura la proportion

$$x:y::B+2b:b+2B,$$

d'où résulte ce théorème :

Le centre de gravité d'un trapèze est sur la ligne qui va du milieu de l'une de ses bases au milieu de l'autre, et il coupe cette ligne dans le rapport des deux sommes qu'on trouve, en ajoutant d'un côté, à la première base deux fois la seconde, et d'un autre côté, à la seconde base, deux fois la première.

On peut tirer de là cette construction très simple : prolongez, vers la droite, l'une des deux bases, d'une longueur égale à l'autre; et celle-ci, vers la gauche, d'une longueur égale à la première; et menez la ligne qui joint les extrémités de ces deux prolongemens; elle coupera celle qui joint les milieux des deux bases au centre de gravité du trapèze.

On peut remarquer que la proportion précédente ne dépend point de la hauteur du trapèze, mais uniquement du rapport des deux

bases : de sorte qu'elle est la même pour tous les trapèzes possibles de bases proportionnelles.

Si les bases sont égales, on a $x=y$; ce qui doit être; car le trapèze est alors un parallélogramme dont le centre est également éloigné de ces deux bases opposées.

Si l'une des bases b devient nulle, on a $y=2x$; et en effet le trapèze devient un triangle dont la base est B, et dont le centre est deux fois plus près de la base que du sommet.

Problème III.

156. *Trouver le centre de gravité de la solidité d'un polyèdre quelconque, et en général, d'un assemblage de polyèdres disposés comme on voudra dans l'espace.*

Tous les polyèdres pouvant se décomposer en pyramides triangulaires, nous allons voir d'abord comment on trouve le centre de gravité d'une pyramide triangulaire. Après quoi, prenant les centres de gravité de toutes les pyramides qui composent le système proposé, l'on n'aura plus qu'à chercher le centre de gravité d'un assemblage de points, représentés pour leurs poids par les volumes des pyramides respectives dont ils sont les centres de gravité; et le problème se résoudra comme il a été dit ci-dessus.

Du centre de gravité de la pyramide.

157. Soit ABCD (fig. 40) une pyramide triangulaire quelconque. Si nous considérons cette pyramide comme composée d'une infinité de tranches parallèles à la base BCD, il est visible qu'une droite menée de l'angle A en un point quelconque de la base, couperait toutes ces tranches et la base elle-même, en des points semblablement placés : donc, si cette droite est menée au centre de gravité I de la base, elle passera par tous les centres de gravité des tranches parallèles. Le centre de gravité du système de ces tranches, et par conséquent celui de la pyramide, devra donc se trouver sur la droite AI. Fig. 40.

Mais, par un raisonnement tout-à-fait semblable, on voit que le centre de gravité de la pyramide doit aussi se trouver sur la ligne CH qui serait menée de l'angle C au centre de gravité H de la face opposée : donc il sera nécessairement à l'intersection G de ces deux droites.

Ainsi les deux lignes AI et CH doivent nécessairement se rencontrer : et c'est ce que l'on voit d'ailleurs indépendamment de la considération du centre de gravité; car si l'on tire CI, cette droite ira couper le côté BD en son milieu E, puisque le point I est le centre de gravité

du triangle BCD; par la même raison, si l'on tire AH, cette droite ira rencontrer BD au même point E, et par conséquent les deux droites AI, CH seront dans un même plan, qui est celui du triangle AEC, et elles se couperont nécessairement.

Actuellement, si l'on remarque que le point I est au tiers de EC, et le point H au tiers de EA (152), il est clair qu'en joignant IH, cette droite sera parallèle à AC, et en sera le tiers. Mais si la droite IH est le tiers de AC, à cause des triangles semblables IGH, AGC, le côté IG sera le tiers de son homologue GA, ou bien sera le quart de IA, et AG en sera les trois quarts.

Donc, *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est situé sur une ligne menée de l'un quelconque des trois angles au centre de gravité de la base opposée; il est au quart de cette ligne, à partir de la base, ou aux trois quarts, à partir du sommet de l'angle.*

Remarque.

158. On peut aussi appliquer à la pyramide triangulaire une démonstration analogue à celle que l'on a donnée pour le triangle.

Mais pour cela considérons d'abord le prisme
Fig. 41. triangulaire : soit ABC*abc* (fig. 41) le prisme.

Par le milieu E du côté AB de sa base ABC, conduisons deux plans EF*f*, ED*d* parallèles aux faces respectives BC*cb*, AC*ca*. Nous décomposerons ce prisme en deux autres, et un parallélépipède.

Si l'on nomme a la solidité de l'un de ces deux prismes, lesquels sont parfaitement égaux, on aura $4a$ pour celle du prisme proposé, et $2a$ pour celle du parallélépipède.

Cela posé, soit x la distance du centre de gravité du prisme total à la face BA*ab*; on aura $4ax$ pour son moment par rapport à cette face. Soit de même, pour les deux prismes partiels, x' les distances de leurs centres de gravité au même plan, distances qui sont parfaitement égales entre elles; on aura $2ax'$ pour la somme de leurs momens. Enfin, nommant h la hauteur de l'arête C*c* au-dessus du plan parallèle BA*ab*, le moment du parallélépipède sera évidemment $2a\frac{h}{2}$, ou simplement ah. On aura donc $4ax = ah + 2ax'$, et par conséquent $x = \frac{h}{4} + \frac{x'}{2}$; et si l'on applique mot à mot tout ce qu'on a dit (153), on trouvera $x = \frac{h}{3}$.

Ce qui fait voir que le centre de gravité d'un prisme triangulaire est, à l'égard de chaque

face, au tiers de la hauteur de l'arête parallèle à cette face; d'où il est facile de conclure qu'il est sur la ligne Gg qui joint les centres de gravité des deux bases. Et d'ailleurs il est aisé de voir que ce point tombe au milieu I de cette droite Gg, que je nommerai pour un moment l'axe du prisme. En effet, imaginez le prisme partagé en un nombre quelconque de prismes égaux par des plans parallèles à la base, et soit δ la distance du centre de gravité de l'un de ces petits prismes au milieu de son axe. Il est clair que le centre de gravité O de leur système, et par conséquent celui du prisme total, se trouvera aussi à la même distance δ du milieu I de son axe Gg. Or, quelque petite que soit la longueur d'un prisme, il est évident que le centre de gravité est toujours dans l'intérieur du solide : donc, puisque la longueur de chaque prisme partiel peut être rendue moindre que toute grandeur donnée, la distance $OI = \delta$ est moindre que tout ce qu'on voudra, et par conséquent nulle.

159. Actuellement, soit une pyramide triangulaire ABCD (fig. 42). Par le point L, milieu de AC, faites passer la section LMK parallèle à la base BCD, et la section LEF parallèle à la face ABD. Menez KH parallèle à LE, et joignez EH.

Fig. 42.

La pyramide proposée sera décomposée en deux prismes équivalens, l'un dont la base est EDH, l'autre dont la base est LEF, et en deux pyramides triangulaires ALMK, LCEF parfaitement égales entre elles, et semblables à la pyramide proposée.

Cela posé, égalons le moment de la pyramide totale, par rapport à la base BCD, à la somme des momens des deux prismes et des deux pyramides partielles, par rapport au même plan.

Soit a la solidité de l'une de ces deux pyramides, $8a$ sera celle de la pyramide entière, et si l'on nomme x la distance de son centre de gravité à la base, on aura $8ax$ pour son moment.

Soit h la hauteur de la pyramide entière ; le prisme dont la base est EDH aura son centre de gravité élevé, au-dessus de la base, de $\frac{1}{2}\frac{h}{2}$; et comme sa solidité est $3a$, son moment sera $3a\frac{h}{4}$. Le second prisme, dont la base est LEF, aura son centre de gravité élevé au-dessus du plan BCD de $\frac{1}{3}.\frac{h}{2}$ (158); et comme sa solidité est $3a$, son moment sera $3a\,\frac{h}{6}$.

Enfin, si l'on nomme x' la hauteur du centre

de gravité de la pyramide LCEF au-dessus de la base BCD, la hauteur du centre de gravité de la seconde pyramide ALMK sera évidemment $x' + \frac{h}{2}$, et l'on aura, pour la somme des momens de ces pyramides,

$$ax' + a\left(x' - \frac{h}{2}\right), \text{ ou } \frac{ah}{2} + 2ax'.$$

On aura donc en réunissant,

$$8ax = \frac{3ah}{4} + \frac{3ah}{6} + \frac{ah}{2} + 2ax';$$

réduisant, et divisant par $8a$,

$$x = \frac{7}{32} \cdot h + \frac{x'}{4}.$$

Si l'on supposait que, dans les pyramides semblables, les centres de gravité sont des points semblablement placés, comme les dimensions de la pyramide LCEF sont deux fois plus petites que celles de la pyramide proposée ABCD, on aurait

$$x' = \frac{x}{2};$$

et substituant dans l'équation précédente, on trouverait

$$x = \frac{1}{4} \cdot h.$$

Ce qui nous ferait voir que, dans toute pyramide triangulaire, le centre de gravité est élevé

au-dessus de chaque face au quart de la hauteur de l'angle opposé; d'où il est facile de conclure qu'il est au point déterminé ci-dessus. Mais on peut parvenir à l'équation précédente sans aucune hypothèse.

En effet, si l'on imagine que l'on ait fait dans la petite pyramide LCEF la même construction que l'on a faite dans la pyramide ABCD, en nommant x'' la distance analogue à celle qu'on a nommée x', et observant que la hauteur de la nouvelle pyramide n'est que la moitié de la hauteur h de la première, on aura, comme ci-dessus,

$$x' = \frac{7}{32} \cdot \frac{h}{2} + \frac{x''}{4},$$

et continuant la même construction dans les pyramides successives, on trouvera

$$x'' = \frac{7}{32} \cdot \frac{h}{2^2} + \frac{x'''}{4},$$

$$x''' = \frac{7}{32} \cdot \frac{h}{2^3} + \frac{x^{\text{IV}}}{4},$$

etc., etc.,

x''', x^{IV}, etc., désignant les distances successives des centres de gravité des pyramides à la base. Or, ces distances diminuent sans cesse, et deviennent plus petites que toute grandeur donnée, puisqu'elles sont toujours moindres

que les hauteurs des pyramides dans lesquelles on les considère. On aura donc en substituant successivement dans la première équation, à la place de x', x'', x''', etc., leurs valeurs,

$$x=\frac{7}{32}h\left(1+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{2^2.4^2}+\frac{1}{2^3.4^3}+\text{etc.}\right),$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{1}{4}h;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque.

Soient quatre masses égales dont les centres de gravité soient placés aux quatre angles d'une pyramide triangulaire : le centre de gravité de ces quatre corps est le même que celui de la pyramide.

Car, pour trouver celui des quatre corps, il n'y aurait qu'à prendre d'abord le centre de gravité de trois quelconques d'entre eux, lequel est au centre de gravité de la face même aux angles de laquelle ils sont placés (154), et joignant ensuite le centre de gravité du quatrième corps à ce point, il faudrait diviser cette droite à partir de la face, en raison réciproque de 3 à 1 : or, cette construction donne aussi le centre de gravité de la pyramide.

Il résulte de là que la distance du centre de gravité d'une pyramide triangulaire à un plan situé d'une manière quelconque dans l'espace, est égale à la moyenne distance de ses quatre angles au même plan.

La même propriété appartient aussi au prisme triangulaire.

Remarque générale.

160. Pour déterminer le centre de gravité d'un polyèdre, il n'est pas toujours nécessaire de le décomposer en pyramides triangulaires ; il se présente souvent des simplifications dont il faut profiter.

Par exemple, on trouvera le centre de gravité d'un prisme quelconque à bases parallèles, en prenant le centre de gravité de la section parallèle aux bases, menée entre elles à égales distances; ou bien, en prenant le milieu de la ligne qui joint les centres de gravité de ces deux bases.

Cette proposition est si facile à démontrer directement, ou à déduire de ce que nous avons dit sur le prisme triangulaire, qu'il est inutile de s'y arrêter.

161. Si l'on considère un cylindre quelconque à bases parallèles comme un prisme

dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, il résulte de ce que nous venons de dire que le centre de gravité de ce cylindre est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité de ses deux bases.

162. On a pu voir précédemment que le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, est le même que le centre de gravité de la section parallèle à la base, menée au quart de la hauteur du sommet.

Cette propriété s'étend à une pyramide quelconque; car si l'on partage la base en triangles par des diagonales, et que l'on conduise des plans par ces lignes et par le sommet, on décomposera la pyramide proposée en autant de pyramides triangulaires qu'il y a de triangles dans la base. Toutes ces pyramides auront une même hauteur, qui est celle de la proposée, et par conséquent leurs solidités respectives seront proportionnelles à leurs bases ou à des sections parallèles faites à même hauteur. Donc, si l'on coupe toutes ces pyramides par un plan parallèle au plan de leurs bases, mené au quart de la hauteur du sommet commun, puisque leurs centres de gravité respectifs sont les mêmes que ceux des sections triangulaires correspondantes, et que leurs solidités (ou leurs poids)

sont proportionnels à ces sections, il s'ensuit que le centre de gravité du système de ces pyramides est le même que celui de tous les triangles, ou du polygone qui résulte de leur assemblage.

Mais, si l'on tire une ligne droite du sommet au centre de gravité de ce polygone, cette droite ira passer au centre de gravité de la base, et sera coupée par le plan du polygone aux trois quarts de sa longueur en partant du sommet, ou au quart, en partant de la base.

163. Donc, *le centre de gravité d'une pyramide à base quelconque*, est *sur la ligne menée du sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette ligne en partant de la base, ou aux trois quarts en partant du sommet.*

164. En considérant le cône comme une pyramide dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, on voit que le centre de gravité d'un cône à base quelconque est sur la ligne qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette ligne à partir de la base, ou au trois quarts à partir du sommet du cône.

Centre de gravité du tronc de pyramide.

165. On voit d'abord que le centre de gra-

vité d'un tronc de pyramide est sur la ligne qui joint les centres de gravité de ses deux bases : car supposez rétablie la pyramide entière dont on a retranché une pyramide semblable, par une section parallèle à la base, pour former le tronc dont il s'agit. Comme la ligne qui va du sommet au centre de gravité de l'une des bases passe au centre de gravité de l'autre, il s'ensuit que cette ligne passe à la fois par les centres de gravité des deux pyramides semblables, et par conséquent par celui du tronc qui en est la différence. Ainsi il ne reste qu'à trouver la distance de ce point à l'une ou à l'autre base, ou, si l'on veut, le rapport de ces deux distances.

Or, soit x la distance de ce centre à la base inférieure, et nommons H et h les hauteurs des deux pyramides semblables. Si l'on représente par H^3 le volume ou le poids de la grande pyramide, h^3 sera le poids de la petite, et $H^3 - h^3$ celui du tronc : et les trois momens de ces poids par rapport à la base inférieure seront $H^3 . \frac{H}{4}$, $H^3\left(\frac{h}{4} + H - h\right)$ et $(H^3 - h^3)\,x$. Donc, en égalant le premier de ces momens à la somme des deux autres, on aura, pour déterminer x, l'équation

$$4(H^3 - h^3)x = H^4 - 4h^3 H + 3h^4,$$

dont le premier membre est divisible une fois, et le second deux fois, par $(H - h)$, qui est la hauteur du tronc.

Si l'on cherche de même la distance y du centre de gravité à la base supérieure, ou si l'on observe simplement que y est composée de $H - h$ diminuée de x, on trouvera l'équation :

$$4(H^3 - h^3)y = h^4 - 4H^3 h + 3H^4,$$

dont le premier membre est divisible de même par $H - h$, et le second par $(H - h)^2$.

Comparant donc ces deux équations, et supprimant les facteurs communs, on aura, pour le rapport cherché, $x : y :: H^2 + 2Hh + 3h^2 : h^2 + 2hH + 3H^2$: ou bien, comme dans les pyramides ou les cônes semblables, les bases sont proportionnelles aux carrés des hauteurs ; si l'on met pour H^2 et h^2 les deux bases B et b du tronc, et par conséquent pour Hh une base $\sqrt{Bb}$ moyenne géométrique entre les deux, on aura la proportion :

$$x : y :: B + 2\sqrt{Bb} + 3b : b + 2\sqrt{Bb} + 3B ;$$

d'où résulte ce théorème :

Le centre de gravité d'un tronc de cône ou de pyramide est sur la ligne qui va du centre de gravité de l'une des bases au centre de gra-

vité de l'autre; et il coupe cette ligne dans le rapport des deux sommes qu'on trouve, en prenant d'un côté: une fois la première base, deux fois la moyenne géométrique entre celle-ci et la seconde, et trois fois la seconde; et d'un autre côté, dans l'ordre inverse, une fois la seconde base, deux fois la moyenne, et trois fois la première.

Au reste, on voit qu'il n'est pas nécessaire ici de mesurer ces bases (dont la quadrature pourrait être longue, ou même assez difficile dans le cas d'une base courbe), mais qu'il suffit d'avoir trois quantités qui leur soient proportionnelles, et par conséquent de prendre dans les deux bases semblables du tronc proposé, deux lignes homologues A et a, de faire les carrés A^2 et a^2, et le rectangle A a qui sera moyen géométrique entre eux.

On peut remarquer que, dans la proportion précédente, le rapport de x à y ne dépend point de la hauteur du tronc, mais uniquement du rapport des bases, et que, par conséquent, il est le même pour tous les troncs possibles de bases proportionnelles.

Si les deux bases du tronc sont égales, la proportion donne $x=y$; et en effet le solide devient alors un prisme ou un cylindre dont le centre est également éloigné des deux bases.

Si l'une des bases b est nulle, on a pour la distance x du centre à l'autre base B, $3x=y$: et en effet le tronc dont il s'agit devient alors une pyramide ou un cône, dont le centre est trois fois plus près de la base que du sommet.

On pourrait multiplier les exemples, mais ce que nous avons dit suffit pour l'objet que nous nous sommes proposé. Nous terminerons ce chapitre par quelques propriétés remarquables des centres de gravité.

Propriétés générales du centre de gravité.

I.

166. Lorsque des forces P, Q, R, S, etc. (fig. 43), dirigées comme on voudra dans l'espace, se font équilibre autour d'un même point A, on sait que ces forces, estimées suivant une droite quelconque AX passant par ce point, doivent aussi se faire équilibre. Fig. 43.

Donc, si ces forces sont représentées par les parties AP, AQ, AR, AS, etc., de leurs directions, la somme de leurs projections Ap, Aq, Ar, As, etc., sur l'axe AX, doit être égale à zéro, en comptant comme positives les projections qui tombent d'un même côté du point A, et

comme négatives celles qui tombent de l'autre côté. Mais, si l'on menait par le point A un plan MN perpendiculaire à AX, les projections Ap, Aq, Ar, etc., exprimeraient les distances des extrémités des forces au plan MN; donc, puisque leur somme est nulle, la moyenne distance de ces points au plan MN est aussi nulle.

Donc, *lorsque tant de forces que l'on voudra sont en équilibre sur un point, ce point est le centre de gravité de corps ou points massifs égaux qui seraient placés aux extrémités des lignes qui représentent les forces en grandeurs et en directions.*

Et réciproquement, *si l'on considère un assemblage quelconque de masses égales, et qu'on mène de leurs différens centres, des lignes au centre de gravité du système, il est visible que des forces représentées en grandeurs et en directions par ces lignes, se feraient équilibre entre elles.*

Car la moyenne distance des extrémités de ces forces à un plan quelconque passant par le centre de gravité, serait nulle; la somme de ces forces estimées suivant un axe quelconque passant par ce point serait donc nulle aussi, et par conséquent il y aurait équilibre.

On voit par là que si trois forces sont en équilibre sur un point, ce point est le centre de gravité du triangle formé par les droites qui joindraient les extrémités des lignes qui représentent ces forces en grandeurs et en directions; car le centre de gravité du triangle est le même que celui de trois corps égaux dont les centres seraient placés aux trois angles.

Et de même, si quatre forces sont en équilibre autour d'un point, ce point est le centre de gravité de la pyramide triangulaire formée par les six droites qui joignent les extrémités des lignes qui représentent les quatre forces en grandeurs et en directions.

Et réciproquement, il y a équilibre entre trois forces exprimées par les distances des trois angles d'un triangle quelconque, au centre de gravité de ce triangle; et de même, entre quatre forces représentées par les distances des quatre coins d'une pyramide triangulaire quelconque, au centre de gravité de cette pyramide.

Mais voici une conséquence plus générale: si l'on suppose que toutes les molécules égales d'un corps de figure quelconque soient attirées vers un même point par des forces proportionnelles à leurs distances à ce point, et qu'il y ait équilibre, ce point sera nécessairement le centre de gravité du corps.

Et réciproquement, si le point vers lequel toutes les molécules sont attirées proportionnellement à leurs distances, est le centre de gravité du corps, il y aura équilibre, et le corps ne pourra prendre aucun mouvement en vertu de ces attractions.

C'est le cas de la terre supposée sphérique et homogène : car, dans la loi de Newton, si une molécule située au dehors du globe est attirée en raison inverse du carrée de sa distance au centre, on trouve que, dans l'intérieur, chaque molécule pèse vers le centre en raison de la simple distance. Ainsi toutes les forces de la gravité se font équilibre autour du centre de la terre.

Au reste, je ne donne ce corollaire que comme le résultat mathématique d'une simple hypothèse, et non pas comme une preuve de l'équilibre de la terre en vertu des différens poids de toutes ses parties ; car il est manifeste que cet équilibre a lieu dans la nature, mais par une autre raison générale qui ne dépend ni de la proportion ni de la direction des forces de la gravité. Et en effet, si le poids de chaque particule de la terre vient de l'attraction que toutes les autres exercent sur elle ; comme, entre deux particules égales, l'action est nécessairement égale et réciproque, il s'ensuit que le poids de

chaque particule est la résultante d'une infinité de forces dont chacune a son égale et contraire dans le système, et que par conséquent toutes ces résultantes ou tous ces poids doivent se faire équilibre entre eux, quelles que soient d'ailleurs et la forme et la constitution de notre globe, et même la loi d'attraction qui pourrait exister entre les parties de la matière.

II.

Désignons par M + 1 le nombre des forces P, Q, R, S, etc., qui se font équilibre autour du point A, et considérons toujours les M + 1 corps ou points massifs égaux placés aux extrémités des lignes qui représentent ces forces.

Le point A étant le centre de gravité de tous ces corps, il est clair que si la ligne PA, qui va de l'un d'eux au point A est prolongée d'une quantité AG égale à la M^e partie de sa longueur, le point G sera le centre de gravité des M autres corps. Mais toutes les forces P, Q, R, S, etc., étant en équilibre, l'une d'elles P est égale et directement opposée à la résultante des M autres Q, R, S, etc. Donc on a ces théorèmes :

1°. *La résultante de* M *forces représentées par autant de lignes qui partent d'un même point* A *est dirigée de ce point vers le centre de gravité* G *de* M *corps égaux qu'on supposerait*

placés aux extrémités de ces lignes; et la grandeur de cette résultante est représentée par M *fois la distance* AG *du point d'application de ces forces à ce commun centre de gravité.*

On peut conclure de là que, si les molécules égales d'un corps ou système de figure quelconque s'attirent en raison de leurs distances mutuelles, chaque molécule du corps pèse vers le centre de gravité en raison de sa distance à ce centre. Car, en représentant les forces d'attraction par les distances mêmes qui séparent les M points égaux du système, il en résulte pour chacun d'eux une attraction totale, représentée par M—1 fois sa distance au centre de gravité des M—1 autres, ou, ce qui est la même chose, par M fois sa distance au centre de gravité des M points qui composent le système entier.

On voit encore que, dans cette loi d'attraction, des corps de figure quelconque agiraient exactement les uns sur les autres comme si leurs masses étaient réduites à des points, et se trouvaient, pour ainsi dire, concentrées dans leurs propres centres de gravité; ce qui, dans la loi de Newton, ne peut avoir lieu que pour des sphères homogènes, ou pour des corps composés de différentes couches sphériques dont chacune serait d'une densité uniforme.

2°. *Si l'on considère* M *corps égaux disposés entre eux comme on voudra, leur centre de gravité* G *peut se trouver en menant de ces corps autant de lignes à un point quelconque* A *de l'espace, composant entre elles toutes ces lignes à la manière des forces, et prenant, à partir du point* A, *la* M^e *partie de la ligne résultante.*

Si l'on suppose que le point A change de position dans l'espace, les forces représentées par les lignes qui vont des corps à ce point changeront de grandeurs et de directions; mais les résultantes de ces divers groupes de forces concourantes ne cesseront pas de passer par le même point G : et il est évident que la même chose aurait lieu si, le point A restant fixe, on faisait varier d'une manière quelconque la position du système.

Donc ce point G, qui dans les corps pesans est le centre des forces *égales et parallèles* que l'on suppose venir de la gravité, est aussi le centre de forces qui seraient *convergentes* vers un point quelconque A de l'espace, et proportionnelles aux distances des molécules à ce point.

Si donc le centre de gravité d'un corps est fixe, le corps soumis à de telles forces convergentes sera en équilibre dans toutes les situa-

tions qu'on voudra lui donner autour de ce point fixe. Ainsi, comme au dedans de la terre supposée sphérique et homogène, les molécules pèsent vers le centre en raison des simples distances, il s'ensuit que, dans l'intérieur du globe, si un corps est soutenu par son centre de gravité, il restera en équilibre autour de ce point dans toutes les situations. Mais il n'en sera plus de même au-dessus du globe, où l'attraction devient réciproque au carré de la distance; et si le corps, par exemple, est un cylindre droit soutenu par le milieu de son axe, il ne pourra être en équilibre que dans la position où cet axe est horizontal, ou perpendiculaire à l'horizon.

Comme, dans la nature, les forces de la gravité ne sont, ni exactement parallèles, ni exactement convergentes, ni dans les rapports précis qu'on vient de dire, on voit qu'à la rigueur il n'y a point dans un corps pesant de vrai centre de *gravité*, je veux dire, de point unique autour duquel les forces de la gravité se contre-balancent pour toutes les situations possibles du corps. Mais dans les corps de peu d'étendue que nous considérons sur la terre, le point que nous avons déterminé jouit à très peu près de cette propriété, et l'erreur est insensible.

III.

Tout ce qu'on vient de dire de plusieurs points massifs égaux et des forces représentées par leurs distances à un même point de l'espace, s'applique naturellement à un système de points ou corps inégaux, dont les masses seraient m, m', m'', etc.; car il suffit de considérer chacun de ces corps, tel que m, comme un groupe de m points égaux, et de prendre pour la force appliquée à ce corps, m fois la distance de son centre au point dont il s'agit.

Ainsi, en nommant r, r', r'', etc., les distances des centres des corps m, m', m'', etc., à ce point ou foyer commun A, et faisant $m+m'+m''+$ etc. $=$ M, on peut dire que le centre de gravité G de tous ces corps se trouve sur la direction de la résultante des forces $m'r$, $m'r'$, $m''r''$, etc., et à la M^e partie de la ligne qui la représente.

Nommons R cette distance du centre G au point A : X, Y, Z les trois coordonnées rectangles de G par rapport au même point; et soient de même x, y, z; x', y', z'; etc., les coordonnées de m, m', etc. Les forces mx, my, mz; $m'x'$, $m'y'$, $m'z'$; etc., seront les composantes des forces mr, $m'r'$, etc.; et MX, MY, MZ celles de

la résultante M_R. On aura donc

$$M_X = mx + m'x' + m''x'' + \text{etc.},$$
$$M_Y = my + m'y' + m''y'' + \text{etc.},$$
$$M_Z = mz + m'z' + m''z'' + \text{etc.}$$

Faisant les carrés, ajoutant, et observant qu'on a $X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,$$
$$\text{etc.},$$

on trouvera

$$M^2R^2 = m^2r^2 + m'^2r'^2 + m''^2r''^2 + \text{etc.}$$
$$+ 2mm'(xx' + yy' + zz') + \text{etc.}$$
$$+ 2mx^2(xx'' + yy'' + zz'') + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Au lieu du terme $2mm'(xx' + yy' + zz')$, on pourrait mettre, comme on l'a vu n° 113, le terme $2mr.m'r'.\cos\varphi$; φ étant l'inclinaison mutuelle des deux lignes r et r' : et ainsi des autres; d'où l'on tire en passant ce théorème connu :

Le carré de la résultante de tant de forces qu'on voudra appliquées sur un point est égale à la somme des carrés de ces forces, et des doubles produits qu'on peut faire en les multipliant, deux à deux, l'une par l'autre et par le cosinus de leur inclinaison mutuelle.

On peut encore transformer chaque terme

$2mm'(xx' + yy' + zz')$ d'une autre manière. Car si l'on désigne par α la distance de m à m', on a

$$\alpha^2 = (x - x')^2 - (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

et par conséquent,

$$2(xx' + yy' + zz') = r^2 + r'^2 - \alpha^2;$$

on a de même, en nommant β la distance de m à m'',

$$2(xx'' + yy'' + zz'') = r^2 + r''^2 - \beta^2,$$

et ainsi des autres. En substituant ces valeurs, on aura cette nouvelle expression de la résultante M_R,

$$M^2R^2 = m^2r^2 + m'^2r'^2 + m''^2r''^2 + \text{etc.}$$
$$+ mm'(r^2 + r'^2 - \alpha^2) + \text{etc.}$$
$$+ mm''(r^2 + r''^2 - \beta^2) + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Or, dans le second membre de cette équation, r^2 est multiplié par $m^2 + mm' + mm'' + \text{etc.} = m(m + m' + m'' + \text{etc.}) = mM$; le carré r'^2 est multiplié de même par $m'M$, etc.; donc enfin, en réduisant, on aura cette équation remarquable :

$$M.R^2 = M\int(mr^2) - \int(\alpha mm'^2),$$

où le signe $\int(mr^2)$ indique la somme des produits des masses par les carrés des distances de leurs centres au point A ; et le signe $\int(mm'\alpha^2)$

la somme de leurs produits deux à deux par les carrés des distances mutuelles de ces centres.

Par cette formule, qui ne contient plus que les distances mutuelles des corps, et leurs distances à un point quelconque A de l'espace, on peut trouver à quelle distance R de ce point A est situé le centre de gravité G du système; de sorte qu'en cherchant ainsi cette distance par rapport à trois points donnés, on aurait la position du point G dans l'espace.

Si le point A change de position, les distances R et r, r', r'', etc., varient; mais les distances mutuelles α, β, γ, etc., des différens corps ne changent point par hypothèse, et le terme $\int(mm'\alpha^2)$ est constant: donc, puisque l'équation précédente nous donne

$$M\int(mr^2) = \int(mm'\alpha^2) + M^2R^2,$$

il s'ensuit que le point A de l'espace pour lequel $\int(mr^2)$ a la plus petite valeur, est celui pour lequel on a $R = 0$, et que par conséquent ce point est le centre de gravité G du système.

Ainsi *le centre de gravité d'un système de corps jouit de cette propriété, que la somme des produits des masses par les carrés des distances de leurs centres respectifs à ce point, est un* minimum, *c'est-à-dire est plus petite que pour tout autre point de l'espace.*

Quant à cette valeur *minimum* de $\int(mr^2)$, on voit, par l'équation ci-dessus où l'on fait $R = 0$, qu'elle est égale à la somme des produits qu'on peut faire en prenant les masses deux à deux, les multipliant l'une par l'autre et par le carré de leur distance mutuelle, et divisant le tout par la masse entière du système; ce qui donne un second théorème qui peut être utile dans plusieurs occasions.

Si le point A, en variant de position, reste toujours sur une sphère décrite autour du centre de gravité du système, R est constante, et par conséquent $\int(mr^2)$ ne change point, quoique les distances individuelles r, r', r'', etc., varient par ce déplacement du point A; et il en serait de même si le point A restant fixe, le système tournait d'une manière quelconque autour de son centre G.

Le centre de gravité d'un système jouit donc encore de cette propriété, que si l'on fait tourner comme on voudra le système autour de ce centre, la somme des produits des masses par les carrés de leurs distances à un point fixe quelconque reste toujours la même.

Si l'on suppose, comme nous l'avions fait d'abord, que toutes les masses m, m', m'', etc., soient égales entre elles et à l'unité, M en marque le nombre, et l'équation précédente

devient

$$M\int(r^2)=\int(\alpha^2)+M^2R^2,$$

formule plus simple, et qu'on appliquerait également à tous les systèmes possibles, en imaginant que les différens corps y soient tous divisés en parties égales.

Dans le cas de $R=0$, on a $M\int(r^2)=\int\alpha^2)$, d'où l'on tire ce théorème de Géométrie :

La somme des carrés des distances mutuelles de M *points égaux, est égale à* M *fois la somme des carrés de leurs distances à leur commun centre de gravité.*

On voit par là que la somme des carrés des six arètes d'une pyramide triangulaire est égale à quatre fois la somme des carrés des distances des sommets au centre de gravité de la pyramide; car ce centre est le même que celui de quatre corps égaux placés à ces sommets; etc., etc.

Dans ce qui précède, on n'a considéré qu'un système invariable de figure, c'est-à-dire dont les points sont liés de manière qu'aucune de leurs distances mutuelles ne puisse changer. Mais on voit encore ici que, *si la figure du système était variable suivant cette condition que la somme des carrés des distances mutuelles des différens points fût constante, la somme des carrés de leurs distances au centre de gravité demeurerait aussi constante, et réciproquement.*

Mais je passe à d'autres propriétés des centres de gravité.

IV.

167. Soit une courbe plane quelconque ABC (fig. 44), qui tourne autour d'un axe PZ situé dans son plan, de manière que tous les points de la courbe demeurent toujours aux mêmes distances de cet axe; cette courbe engendre une surface que l'on nomme *surface de révolution.* Fig. 44.

Pour en déterminer l'aire, on peut remarquer que chaque élément *ds* de la courbe génératrice produit une surface de cône tronqué dont l'aire est égale au côté *ds* multiplié par la circonférence du cercle que décrit son milieu, ou son centre de gravité *i*, autour de l'axe PZ.

Donc, si l'on suppose tous ces élémens égaux, la surface entière sera égale à leur somme multipliée par la circonférence moyenne entre celles que décrivent tous leurs centres de gravité.

Mais cette moyenne circonférence a pour rayon la moyenne distance de tous ces points à l'axe de révolution, ou bien (140) la distance

INSTITUTO DE FISICA DA U.F.S. BIBLIOTECA

du centre de gravité de la courbe au même axe; donc on peut dire :

Que l'aire d'une surface de révolution est égale à la longueur de la génératrice, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité autour de l'axe de révolution.

On voit de la même manière que si plusieurs courbes situées dans le même plan tournent autour d'un axe situé dans ce plan, la somme des surfaces engendrées est égale à la somme des génératrices, multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de leur système.

Mais il faut observer que, lorsque la génératrice ou les génératrices ne sont pas situées en entier d'un même côté de l'axe, l'expression précédente ne donne plus que la somme des aires engendrées par les parties qui sont d'un côté de cet axe, moins la somme des aires engendrées par les parties qui sont de l'autre côté.

On peut appliquer aussi la théorie des centres de gravité à la cubature des solides de révolution. Et il n'est pas difficile de voir que *le volume d'un solide de révolution est égal à l'aire de la section génératrice, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité autour de l'axe fixe.*

En effet, si l'on considère un rectangle *bcde* (fig. 45) qui tourne autour de l'axe PZ parallèle à l'un de ses côtés *be*, il est clair que le solide engendré par ce rectangle est égal à la différence de deux cylindres de même hauteur *cd*, et dont l'un a pour rayon la distance *ca* du côté *cd*, à l'axe fixe; et l'autre, la distance *ba* du côté *be*, au même axe. Ce solide est donc exprimé par $(\varpi\overline{ac}^2 - \varpi\overline{ab}^2)cd$, en nommant ϖ le rapport de la circonférence au diamètre. Si l'on met $ca - cb$, à la place de ab, l'expression précédente devient $\varpi(2ac \times bc - \overline{bc}^2)cd$, ou $bc \times cd \times 2\varpi\left(ac - \frac{bc}{2}\right)$, c'est-à-dire égale au rectangle *bcde*, multiplié par la circonférence décrite d'un rayon moyen entre les rayons *ca* et *ba*, ou bien égale à la distance du centre de gravité du parallélogramme à l'axe de révolution. Fig. 45.

Donc, si l'on conçoit la section génératrice ZMN comme partagée en une infinité de petits regtancles égaux, on pourra dire que le solide total engendré est égal à la somme de tous ces rectangles, ou à l'aire de la section ZMN, multipliée par la circonférence moyenne entre toutes celles que décrivent leurs centres de gravité autour de l'axe. Mais cette moyenne circonférence a pour rayon la moyenne distance

de tous ces points au même axe, ou la distance du centre de gravité à cet axe; donc, etc.

On pourrait voir encore, par un raisonnement à peu près semblable au précédent, que, si une surface plane terminée par une courbe quelconque, se meut dans l'espace, de manière que son plan soit toujours (au même point) perpendiculaire à une courbe quelconque à double courbure, le solide engendré est égal à l'aire de la surface génératrice multipliée par la longueur de la courbe que parcourt son centre de gravité.

Mais nous ne nous arrêterons pas à démontrer cette proposition, que l'on pourrait déduire aussi bien que les précédentes des formules connues pour les centres de gravité. Nous ne ferons même aucune application particulière de cette théorie aux surfaces et aux solides dont on a immédiatement la mesure en Géométrie. Notre seul but était de montrer ce rapprochement remarquable de considérations qui paraissent d'abord étrangères entre elles, mais qui s'enchaînent comme toutes les questions soumises aux Mathématiques, et se fondent, pour ainsi dire, les unes dans les autres, lorsqu'on écarte un instant et les idées et les noms que l'objet particulier de chaque question nous rappelle.

CHAPITRE IV.

DES MACHINES.

168. On définit ordinairement les machines, des instrumens destinés à transmettre l'action des forces.

Sous ce point de vue général, tous les corps de la nature sont des machines, parce qu'ils sont propres à transmettre l'action des forces qui leur sont appliquées. Mais lorsque des forces réagissent les unes sur les autres par l'intermède d'un corps ou système parfaitement libre, il est impossible qu'elles se fassent équilibre, à moins qu'elles ne remplissent les conditions que nous avons établies précédemment : or, au moyen des machines proprement dites, on peut mettre en équilibre des forces quelconques qui ne satisfont pas à ces conditions; et par conséquent, pour mieux caractériser les machines, et les distinguer des autres corps, on pourrait les définir des instrumens propres à mettre en équilibre des forces de grandeurs et de directions quelconques.

Mais, en suivant cette idée, si des forces inca-

pables de se faire équilibre sur un corps entièrement libre, peuvent néanmoins se faire équilibre sur une machine, il faut donc en conclure que les corps qui forment les machines ne sont pas entièrement libres, mais sont gênés par des obstacles qui les empêchent d'obéir au mouvement que les forces tendent à leur imprimer, et leur imprimeraient réellement, s'ils étaient libres. Ainsi l'on est conduit naturellement à cette définition générale des machines, savoir, que *les machines ne sont autre chose que des corps ou systèmes gênés dans leurs mouvemens par des obstacles quelconques*.

Il n'est pas difficile de comprendre, d'après cela, comment des forces de grandeurs quelconques peuvent se faire équilibre sur de tels corps; car il n'est plus nécessaire que les forces résultantes soient nulles d'elles-mêmes, mais il suffit qu'elles se dirigent vers les obstacles qui les détruisent par leurs résistances. Ainsi, à l'aide d'un corps solide qui s'appuierait, par exemple, contre un point fixe, une force médiocre ferait équilibre à une très grande force, si elle était disposée à l'égard de celle-ci de manière que leur résultante commune fût dirigée vers le point fixe : d'où l'on voit que la plus petite force seule ne fait pas équilibre à la plus grande, ce qui serait impossible, mais

qu'elle ne sert, en quelque sorte, qu'à détourner l'effort de la plus grande, et à le faire passer avec le sien propre combiné, vers un obstacle invincible.

Au fond, lorsqu'on fait équilibre à une puissance quelconque, à l'aide d'une machine, on emploie réellement plus de force qu'en appliquant directement une force égale et contraire à celle qu'on veut détruire, si l'on compte la résistance de l'obstacle pour une force. Mais comme ces résistances qui proviennent des obstacles sont par elles-mêmes incapables de produire du mouvement, et ne peuvent servir qu'à le détruire, nous n'en tenons pas compte, parce que nous ne dépensons réellement que la force appliquée. Au reste, dans la théorie de l'équilibre des machines, rien n'empêche de considérer les obstacles comme tenant lieu de forces égales et contraires à celles qu'ils détruisent actuellement; et si l'on conçoit qu'on ait ainsi substitué à la place de ces obstacles des forces qui représentent leurs résistances actuelles, ce n'est plus entre les seules forces appliquées qu'il y a équilibre, mais entre les forces appliquées et les résistances; de manière que les lois de l'équilibre des machines deviennent les mêmes que celles de l'équilibre des corps parfaitement libres.

C'est d'après cette considération que nous avons trouvé à la fin du second chapitre les lois de l'équilibre de corps assujettis à diverses conditions particulières. Ceux qui auront lu cet article verront que nous aurions peu de chose à y ajouter ici, et qu'il renferme de la manière la plus générale la théorie de l'équilibre des trois machines simples auxquelles on peut aisément ramener toutes les autres ; mais, en faveur de ceux qui veulent étudier les machines d'une manière plus élémentaire, nous allons entrer dans les détails convenables.

169. Nous réduirons les machines simples à trois principales, que l'on peut considérer, si l'on veut, dans l'ordre suivant, eu égard à la nature de l'obstacle qui gêne le mouvement du corps : le *levier*, le *tour*, et le *plan incliné*.

Dans la première machine, l'obstacle est un *point fixe* autour duquel le corps a la liberté de tourner en tous sens.

Dans la seconde, l'obstacle est une *droite fixe* autour de laquelle tous les points du corps n'ont que la liberté de tourner dans des plans parallèles entre eux.

Dans la troisième, l'obstacle est un *plan inébranlable* contre lequel le corps s'appuie, et sur lequel il a la liberté de glisser.

Comme on n'a d'abord considéré cette dernière machine que par rapport aux corps pesans qu'on retient en équilibre sur des plans inclinés à l'horizon, on lui a donné et elle a gardé le nom de *plan incliné*.

Nous parlerons successivement de ces trois machines, et de quelques-unes qui s'y rapportent, dont l'usage est le plus fréquent. Nous ferons abstraction des diverses circonstances physiques qui peuvent influer sur l'équilibre, telles que le frottement des corps les uns sur les autres, et la raideur des cordes au moyen desquelles les forces transmettent leur action aux divers points de la machine. Ainsi l'on supposera que l'action de chaque force se transmet suivant l'axe de la corde à laquelle elle est appliquée, de manière que l'on pourra considérer les cordes comme des fils parfaitement flexibles et inextensibles. On verra facilement dans quels cas et comment on doit avoir égard aux diamètres des cordes. Au reste, nous parlerons plus loin de ces sortes d'instrumens qu'on a mis au rang des machines, et qu'on nomme *machines funiculaires*. Ce que nous en avons dit ici suffit pour notre objet.

DU LEVIER.

170. Soient deux forces quelconques P et Q (fig. 46), appliquées immédiatement ou suivant des cordons, aux deux points A et B d'un levier AFB de figure quelconque; soit F le point fixe, autour duquel le levier a la liberté de tourner, et qu'on nomme ordinairement le *point d'appui* : on demande les conditions de l'équilibre, en faisant d'abord abstraction de la pesanteur du levier.

Fig. 46.

Du point F j'abaisse sur les directions des deux forces P et Q deux perpendiculaires FH, FI, qui rencontrent ces directions, prolongées s'il est nécessaire, en H et I; et regardant ces deux points comme invariablement liés aux points A et B, je suppose que les deux forces P et Q y agissent immédiatement.

Cela posé, j'applique au point F deux forces contraires, P′ et —P, égales et parallèles à P; et, au même point F, deux autres forces contraires Q′ et — Q, égales et parallèles à Q. Il est clair que le levier reste toujours dans le même état. Mais on peut considérer actuellement, au lieu des deux forces primitives P et Q, 1°. deux forces P′ et Q′ respectivement égales et parallèles à ces forces, et de même sens,

mais appliquées en F; 2°. deux couples (P,—P), (Q,—Q), dont les bras de levier sont FH et FI.

Or, la résultante des deux forces P′ et Q′ est toujours détruite par la résistance du point d'appui, si l'on suppose le levier invariablement lié à ce point, de manière qu'il ne puisse prendre qu'un mouvement de rotation autour de lui. Mais le couple résultant des deux couples (P,—P) et (Q,—Q) ne peut jamais être détruit par ce point fixe (76), et par conséquent il faut, pour l'équilibre, que ce couple résultant soit nul de lui-même, ou que les deux couples composans (P,—P) et (Q,—Q) soient équivalens et contraires. Ces deux couples doivent donc se trouver dans des plans parallèles, et par conséquent dans le même plan, puisque leurs plans se rencontrent déjà au point F. En second lieu, leurs momens $P \times FH$, $Q \times FI$ doivent être égaux, et ils doivent tendre à faire tourner en sens contraires.

Donc *pour l'équilibre du levier, il est nécessaire et il suffit : 1°. que les deux forces* P *et* Q *qui le sollicitent soient dans un même plan avec l'appui; 2°. que leurs momens par rapport à ce point soient égaux; 3°. qu'elles tendent à faire tourner en sens contraires.*

A l'égalité des momens $P \times FH = Q \times FI$,

on peut substituer la proportion P : Q :: FI : FH, qui exprime que les forces P et Q doivent être en raison réciproque de leurs distances au point d'appui.

De la charge du point d'appui.

171. Dans le cas de l'équilibre, l'appui n'est pressé que par les deux forces P′ et Q′ qui y sont immédiatement appliquées; car les deux couples (P, —P), (Q — Q) étant en équilibre d'eux-mêmes, c'est-à-dire même en supposant que le levier ne soit pas soutenu, il est clair qu'ils ne peuvent nullement charger le point fixe.

Ainsi, *la pression qu'éprouve le point d'appui est absolument la même que si les deux forces* P *et* Q *s'y transportaient parallèlement à elles-mêmes, sans changer de grandeur ni de sens.*

172. Si l'on achève sur les côtés FP′, FQ′ qui représentent les forces P′ et Q′, le parallélogramme FQ′RP′, la diagonale FR représentera donc la charge R de l'appui; et par conséquent, si la résistance de cet appui n'est pas indéfinie, on pourra juger de quelle résistance il doit être capable, pour n'être pas entraîné par l'action des forces P et Q qui sollicitent le levier.

Comme les forces P′ et Q′ sont parfaitement égales et parallèles aux forces respectives P et Q, et de même sens, les trois côtés et les trois angles du triangle FRQ′, ou du triangle FRP′, représentent les six choses que l'on peut considérer dans le levier, savoir : les deux forces P et Q, la charge R de l'appui, et les inclinaisons mutuelles des directions de ces trois forces.

Donc, si l'on connaît trois quelconques de ces six choses, pourvu qu'il y entre la grandeur de l'une des forces P, Q, R, on pourra trouver les trois autres, de la même manière que l'on résoudrait le triangle FRQ′.

173. Observons que tout ce que nous avons dit a lieu, quelles que soient la figure du levier et les dispositions mutuelles des forces P et Q, et du point d'appui.

Si les forces P et Q (fig. 47) sont parallèles, on peut mener du point fixe une perpendiculaire commune IH sur leurs directions, et ces deux forces devront être en raison réciproque des parties FH et FI, comprises entre leurs directions et l'appui.

La charge de ce point sera égale à la somme des forces P + Q, ou à leur différence P — Q, selon qu'elles seront toutes deux de même

sens (fig. 46), ou de sens contraires (fig. 47).

Lorsque le levier est droit, les parties HF et FI sont proportionnelles aux parties AF et BF, qui sont les distances des points d'application des forces au point d'appui, distances comptées sur le levier lui-même, et que l'on nomme proprement *les bras de levier;* et par conséquent, dans l'équilibre du levier droit, les forces sont réciproques à leurs bras de levier.

174. Si l'on veut considérer l'une des deux forces P et Q, la force P, par exemple, comme celle qui tend à donner le mouvement à la machine, et que l'on nommera la *puissance*, et l'autre force Q, comme l'effort qu'il faut vaincre, et que l'on nommera la *résistance*, on pourra distinguer plusieurs espèces de leviers, suivant la place qu'occupe le point d'appui F, relativement à ces deux forces.

Si l'appui tombe entre la puissance et la résistance, on aura le levier de la première espèce
Fig. 47. (fig. 47), où la puissance a d'autant plus d'avantage, que son bras de levier AF est plus long.

Si l'appui laisse la résistance Q entre lui et la puissance P, on aura le levier de la seconde
Fig. 48. espèce (fig. 48), où la puissance a toujours de l'avantage.

Enfin, si la puissance tombe entre le point d'appui et la résistance, on aura le levier de la troisième espèce (fig. 49), où la puissance Fig. 49.
a toujours du désavantage.

Mais ces différens leviers reviennent tous au même sous le rapport de l'équilibre. De quelque manière que la puissance et la résistance soient disposées entre elles et à l'égard du point d'appui, si on les transporte toutes deux parallèlement à elles-mêmes en ce point, il faut toujours que les deux couples qui en naissent soient équivalens et contraires: ainsi les distinctions précédentes sont inutiles dans la théorie, et ne peuvent servir que dans le discours.

175. Supposons actuellement que le levier soit sollicité par un nombre quelconque de puissances P, Q, R, etc. (fig. 50), toutes situées Fig. 50.
dans un même plan avec le point d'appui F. En abaissant de ce point des perpendiculaires FH, FI, FK, etc., sur leurs directions, et considérant chaque force P comme transformée en une autre égale, parallèle et de même sens, appliquée en F, et en un couple (P, — P) qui a pour bras de levier la distance FH de cette force au point fixe, on verra, comme ci-dessus que la résultante de toutes les forces transpor-

tées sur le point fixe est toujours détruite par sa résistance; mais que le couple résultant doit être nul de lui-même pour l'équilibre, comme si la verge était parfaitement libre: d'où l'on conclura que la somme des momens $P\times FH$, $Q\times FI$, $R\times FK$, etc., doit être égale à zéro, en comptant comme positifs tous les momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, et comme négatifs, les momens qui tendent à faire tourner dans le sens contraire.

On trouvera aussi que la charge du point d'appui est absolument la même que si toutes les forces s'étaient transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point, sans changer de grandeur ni de sens.

176. Si les forces P, Q, R, etc., agissaient dans des plans différens, on verrait de la même manière qu'en transportant toutes ces forces parallèlement à elles-mêmes au point fixe, tous les couples qui en proviennent doivent donner un couple résultant nul de lui-même, ou doivent être en équilibre entre eux.

Mais pour exprimer cette condition, il faut ici trois équations qui expriment que la somme des momens des forces, estimés par rapport à trois axes qui se croisent dans l'espace au point

d'appui, soit nulle d'elle-même à l'égard de chacun de ces axes (65).

Sur quoi l'on peut observer que les trois axes peuvent être menés d'une manière quelconque par le point fixe, pourvu qu'ils ne soient pas dans un même plan; car les trois équations précédentes n'assureraient pas alors l'équilibre du corps.

Puisque les couples qui naissent des forces transportées au point fixe doivent être en équilibre d'eux-mêmes, il s'ensuit que les forces appliquées aux divers points du levier doivent se réduire aux mêmes forces, mais réunies parallèlement à elles-mêmes au point d'appui; et par conséquent on peut exprimer la loi générale de l'équilibre du levier, en disant que les forces appliquées doivent avoir une résultante unique qui passe par le point fixe: proposition qui paraît assez évidente d'elle-même, et dont on part ordinairement comme d'un axiome, pour arriver aux conditions précédentes (116—118).

177. Jusqu'ici nous avons fait abstraction de la pesanteur du levier. Si l'on veut y avoir égard, il faudra considérer le poids de la verge comme une nouvelle force appliquée en son centre de gravité, suivant une direction verti-

cale; et l'on combinera cette force avec les autres, d'après ce que nous avons dit ci-dessus, comme si le levier était sans pesanteur. Ainsi l'on voit que, dans le cas, par exemple, où toutes les forces et la direction du poids du levier se trouvent dans un même plan avec l'appui, c'est la somme de tous les momens, en y comprenant celui du poids, qui doit être égale à zéro pour l'équilibre.

Donc, si l'on veut employer un levier dont le poids n'entre pour rien dans l'équilibre des forces, on n'aura qu'à le placer de telle sorte, que la verticale abaissée de son centre de gravité tombe au point d'appui: alors le moment du poids étant nul de lui-même, on n'aura plus à considérer que les momens des forces appliquées.

178. On a supposé que le point F du levier était arrêté dans tous les sens, de manière que le levier ne pût avoir aucun mouvement de rotation autour de lui: pour se procurer un tel point au-dedans d'un corps, on le traverse ordinairement par un essieu ou cylindre inflexible, d'un diamètre quelconque; et lorsque le corps tourne autour de ce cylindre, il est absolument dans le même cas que s'il tournait autour de son axe considéré comme une ligne

fixe; et tous les points d'une même section plane qui est faite perpendiculairement à l'axe, et dont il résulte un cercle dans le cylindre, soit dans le même cas que s'ils tournaient autour du centre de ce cercle.

A la vérité, dans la disposition précédente, le levier n'a point la liberté de pirouetter en tous sens autour du point fixe; mais lorsque les forces qu'on y suppose appliquées sont toutes dans un plan perpendiculaire à l'axe autour duquel il peut tourner, les lois de l'équilibre y sont parfaitement les mêmes. Au reste on pourrait pénétrer la verge par une sphère fixe qui la touchât au moins en quatre points, de manière que ces quatre points fussent comme les points de contact d'une pyramide circonscrite à sa surface: le levier alors en tournant autour de cette sphère pourrait être considéré comme s'il tournait autour de son centre.

Mais le plus souvent, le levier ne fait que poser sur l'appui fixe, comme on le voit fig. 46, 47, 48. Alors les conditions données plus haut ne suffisent plus pour l'équilibre, abstraction faite du frottement. Il faut, non-seulement que les forces appliquées aient une résultante unique qui passe au point d'appui, mais encore que la direction de cette résultante soit normale à la surface de contact du levier avec l'appui:

car si elle tombe obliquement sur le plan tangent à cette surface, on pourra la décomposer en deux autres, l'une perpendiculaire, et l'autre parallèle à ce plan. La première sera détruite; mais la seconde obtiendra son effet, et fera glisser le levier sur l'appui, comme on le verra à l'article du plan incliné.

De la Balance.

179. La balance ordinaire est un levier du premier genre, aux extrémités duquel sont suspendus par des cordons deux bassins destinés à recevoir les corps dont on veut comparer les poids. On dispose ordinairement cette machine de manière que son centre de gravité passe par la verticale menée par le point d'appui F (fig. 51) et que les bras du levier FA et FB soient parfaitement ĕgaux : alors on est sûr que deux corps graves qui se font équilibre dans les bassins ont des poids parfaitement égaux, et par conséquent renferment des quantités égales de matière. Ainsi, en prenant le poids d'un corps pour unité, on évaluera les masses respectives des différens corps en cherchant à combien d'unités de poids ils font équilibre.

Fig. 51.

Pour qu'une balance soit juste, il faut donc, en premier lieu, que son centre de gravité

tombe dans la verticale menée par le point d'appui.

C'est ce que l'on vérifie sur-le-champ, en examinant si la balance est en équilibre d'elle-même, c'est-à-dire lorsque les bassins sont vides; et si cela n'a pas lieu, on rectifie aisément la balance à cet égard, en attachant à l'un des bassins ou des bras de levier un poids convenable qui rétablisse l'équilibre.

Il faut, en second lieu, que le point d'appui divise le levier ou le *fléau* en deux parties parfaitement égales; et cette seconde condition est la plus importante.

Pour voir si elle a lieu, on n'a qu'à mettre deux corps en équilibre dans les bassins, et les changer ensuite de place. Si les bras de levier sont égaux, l'équilibre doit subsister encore; car les poids qui se sont fait équilibre sont égaux aussi, et il doit être indifférent de les changer de bassins.

Mais si les bras de levier sont inégaux, l'équilibre sera détruit; car les poids qui se sont fait équilibre sont en raison inverse de ces bras de levier : or, en les changeant de place, le plus grand poids agira à l'extrémité du bras de levier le plus long, et par cette double raison entraînera nécessairement l'autre.

La balance alors sera fausse, et l'on ne pourra

la rectifier qu'en changeant le point d'appui ou le point de suspension de l'un des bassins.

On pourra néanmoins s'en servir, et connaître par deux épreuves le poids véritable du corps.

Car, soient P le poids inconnu du corps, x et y les deux bras de la balance; et supposons que le poids P, placé dans le bassin qui répond au premier bras de levier x, fasse équilibre à un poids connu A placé dans l'autre bassin, on aura

$$Px = Ay.$$

Mettons actuellement le poids P dans le bassin qui répond au bras de levier y, et supposons qu'il fasse équilibre à un poids connu B placé dans l'autre, on aura

$$Py = Bx.$$

Multipliant ces deux équations membre à membre, il vient

$$P^2 = AB, \text{ d'où } P = \sqrt{AB};$$

c'est-à-dire que le poids du corps est moyen proportionnel géométrique entre les deux poids auxquels il fait alternativement équilibre dans les deux bassins de la balance.

De la Romaine.

180. La balance romaine est aussi un levier droit du premier genre, mais dont les bras FA, FB (fig. 52) sont inégaux. Fig. 52.

A l'extrémité A du bras le plus court, on suspend le corps dont on veut trouver le poids Q; on l'attache par un crochet, ou bien on le pose dans un bassin qui est suspendu librement au point A, comme dans la balance ordinaire. Sur l'autre bras FB de la romaine est un poids connu p, mobile au moyen d'un anneau le long de ce bras; de sorte qu'en le faisant glisser à une distance convenable FI de l'appui F, il fait équilibre au poids du corps qui agit de l'autre côté.

Si donc, à chaque point I du bras FB, on marquait en nombres le rapport des deux forces Q et p qui se font équilibre, on aurait un instrument fort commode pour peser les différens corps, à l'aide d'un même poids p qui servirait d'unité. Il suffirait, dans chaque cas, de chercher le point I où il faut amener le poids mobile p pour contre-balancer le poids Q, et l'on trouverait marqué en ce point le rapport de Q à p, ce qui est précisément le poids cherché du corps.

Lorsque la romaine est tellement construite, que le centre de gravité de toute la machine, c'est-à-dire du fléau et du bassin, tombe précisément sur le point d'appui F′, la loi de l'équilibre entre les deux forces appliquées est la même que si le levier AC était sans pesanteur; ainsi le rapport de Q à p est égal à celui des deux bras FI et FA, et dans ce cas il est bien facile de construire une *romaine*, c'est-à-dire d'en marquer les différentes divisions.

Mais si le centre de gravité de la machine tombe à droite ou à gauche de l'appui, le rapport de Q à p n'est plus celui des bras de levier IF et AF; il doit être augmenté ou diminué d'une certaine quantité qui dépend du poids V de la machine, et de la distance de ce poids V à l'appui: ainsi les divisions de la romaine doivent être changées. Mais on sent, par ce que je viens de dire, que ces divisions seront encore distribuées de la même manière; seulement le point de départ, c'est-à-dire le point où l'on doit compter zéro pour le poids Q, ne sera plus en F sur l'appui, mais il devra être avancé ou reculé en O (fig. 53), d'une certaine quantité FO, qu'il est bien facile de déterminer.

Fig. 53.

181. Mais sans connaître ni le poids ni le

centre de gravité de la romaine, on peut en marquer exactement les divisions de la manière suivante, que la théorie des couples rend la plus naturelle et la plus facile à retenir.

Je suppose d'abord le bassin vide, ou le poids Q nul, et je fais avancer le poids mobile p jusqu'en un point O, qui se peut trouver à gauche ou à droite de l'appui, mais qui est tel, que le fléau AB devienne horizontal. Dans cet état, le centre de gravité de tout le système, en y comprenant le poids mobile p, passe au point F, et le poids de toute la machine est détruit. C'est donc au point O qu'il faudra marquer zéro, puisque alors le poids Q est tout-à-fait nul.

Actuellement, je suppose que, dans le bassin vide on mette un poids $p' = p$; il est clair que l'équilibre sera rompu, mais que si l'on éloigne le poids mobile d'une quantité convenable l'équilibre sera rétabli. Ainsi, quand d'un côté on ajoute au poids, de l'autre côté il faut chercher ce qu'on doit ajouter au bras de levier pour maintenir l'équilibre. Or, qu'on imagine la force p' transportée parallèlement à elle-même du point A au point d'appui F, elle y sera détruite, et il ne restera qu'un couple $(p', -p')$ appliqué sur $FA = r$, et dont le moment est $p'r$. Ainsi le poids p' qu'on met

dans le bassin vide ajoute de ce côté de la romaine un couple ou moment pr : il faut donc ajouter de l'autre côté un couple égal et contraire $(-p, +p)$ qui ait un même bras de levier r. Or, qu'on place ce couple, ce qui est permis, sur la ligne $OH = r$: alors la force $-p$ détruit son égale et contraire p, et il ne reste que $+p$, qui n'est en quelque sorte que le poids mobile p qu'on aurait éloigné de la quantité $OH = r$. On voit donc que pour chaque poids p qu'on ajouterait dans le bassin, il faudrait éloigner le poids mobile de la longueur constante r du petit bras de la romaine; et si l'on ajoutait une fraction quelconque de p, il est évident, par la même démonstration, qu'il faudrait éloigner le poids mobile d'une même fraction de r.

Donc, à partir du point O déterminé ci-dessus, il faudra porter des parties égales à r, et marquer en ces points de division, 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. Et si l'on veut marquer des fractions intermédiaires, des dixièmes, des centièmes, par exemple, on aura un instrument qui pourra servir pour évaluer le poids des corps à ces décimales près du poids connu p.

On voit que la balance romaine peut être utile en beaucoup de rencontres où la balance ordinaire ne serait d'aucun usage, puisque

celle-ci exige différens poids pour peser les différens corps, tandis que la romaine n'en exige qu'un seul.

Elle a encore cet avantage, que le point d'appui ou de suspension y est moins fatigué par la charge ou la pression des corps que l'on pèse; car, dans la balance ordinaire, cette pression est double du poids du corps, ou $2Q$; au lieu que dans la romaine elle est simplement $Q + p$, ou seulement Q, c'est-à-dire la moitié de la précédente, si l'on veut regarder le poids p comme faisant lui-même partie du poids total de la machine.

On peut varier cette balance de différentes manières, en rendant mobile, au lieu du poids p, le poids Q du corps qu'il s'agit de peser, ou bien le point de suspension du fléau AB, ce qui donnerait lieu à différentes constructions; mais le principe en est toujours le même, et il est inutile de s'y arrêter.

Du Peson.

182. On peut encore, pour évaluer les poids, employer un levier coudé ACB (fig. 54), mobile autour du point fixe C, et dont les bras CA, CB font entre eux un angle droit ACB; et c'est cette espèce de balance qu'on appelle le *peson*. Fig. 54.

Je suppose, pour plus de simplicité, que le bras CB, au bout duquel le corps est suspendu, soit continué de l'autre côté de l'appui d'une longueur égale CB′; de manière que le centre de gravité de cette branche BB′ tombe précisément au point C qui en est le milieu. Alors le poids du bras CB se trouve détruit dans toutes les positions du levier coudé autour du point fixe, et l'on peut se dispenser d'y avoir égard. Mais pour l'autre bras CA, son propre poids contribuera, avec celui qu'on pourrait y attacher d'ailleurs, à contre-balancer le poids du corps. Le plus souvent même, ce bras ou cette aiguille est d'une matière assez pesante pour que la force p qui en résulte en son centre de gravité G fasse toute seule l'office du contre-poids. Au reste, je supposerai que p représente le poids total de l'aiguille et des corps qui pourraient y être attachés, et que le commun centre de gravité soit en G, à la distance CG de l'appui.

Cela posé, le peson étant libre, l'aiguille CA tombant dans la verticale CO, et le bras CB étant horizontal, je suspends en B un corps dont le poids est Q : le bras CB s'abaisse vers la verticale, et l'autre CA s'élève; ainsi la distance BH de la force Q à l'appui diminue, et la distance GI de l'autre force p

au même point, augmente; de sorte que le levier coudé, pour se mettre en équilibre, doit prendre une position où les momens $Q \times BH$ et $p \times GI$ soient égaux de part et d'autre.

Or, soient φ l'angle ACO que fait l'aiguille avec la verticale, R la distance CG de son centre de gravité à l'appui, et r la longueur du bras CB où le corps est suspendu. Comme on a $GI = R \sin \varphi$, et $BH = r \cos \varphi$, l'équation de l'équilibre devient $p.\ R \sin \varphi = Q.\ r \cos \varphi$; ce qui donne

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{r}{R.p}.\, Q;$$

d'où il résulte (puisque les trois quantités p, R et r demeurent invariables) que la tangente de l'inclinaison φ de l'aiguille croît précisément en proportion du poids Q du corps.

Si donc on adapte au peson un quart de cercle COAM, qui représente le secteur que l'aiguille peut parcourir depuis la verticale CO jusqu'à l'horizontale CM, il est bien facile de marquer aux différens points de cet arc les nombres qui répondent aux différens poids.

En effet, qu'on mène la tangente indéfinie OT, et qu'on suspende d'abord en B le poids que l'on veut prendre pour l'unité, ce poids

fera monter l'aiguille d'un certain arc OA ; et la direction de cette aiguille étant prolongée jusqu'à sa rencontre en a, avec la ligne OT, la partie Oa représentera la tangente de cet arc qui répond à l'unité de poids. Ainsi, il n'y aura qu'à porter sur la ligne OT, à partir du point O, des parties égales à Oa, et par les points de division, tirant des lignes au centre C, on aura sur le quart de cercle les points correspondans où il faudra marquer les nombres 0, 1, 2, 3, 4, etc. Et si l'on veut subdiviser chaque partie de OT en fractions, on aura par la même construction les points de l'arc où il faut marquer les mêmes fractions du poids que l'on a pris pour l'unité.

183. Quelque petit que soit le poids p de l'aiguille ; on voit par la proportion $Q : p :: R \text{ tang } \varphi : r$, que ce poids p suffit toujours pour contre-balancer un poids Q aussi grand qu'on le voudra : car la tangente de φ peut devenir plus grande que toute quantité donnée. Ainsi, le peson est d'un usage bien plus étendu que la romaine, et sous un petit appareil, cette machine peut servir à peser les corps les plus considérables.

Mais si la tangente de l'arc φ augmente par degrés égaux avec le poids Q du corps, l'arc

lui-même n'augmente que par degrés inégaux qui diminuent sans cesse ; et les divisions supérieures du peson deviennent de moins en moins sensibles pour les mêmes accroissemens de poids. Par conséquent, si l'on veut que la machine marque plus nettement ces différences, il ne faut pas que le poids de l'aiguille soit trop petit. Aussi, pour peser de lourds fardeaux, on charge l'aiguille d'un certain poids, ce qui lui permet de rester dans la partie moyenne du quart de cercle, où les inégalités de poids sont marquées d'une manière plus sensible.

De la Poulie.

184. L'équilibre de la poulie se rapporte naturellement à celui du levier.

La poulie est une roue circulaire ABK (fig. 55), mobile dans une chape CN, autour d'un axe C. Une partie AB de sa circonférence est enveloppée par une corde PABQ dont les deux extrémités sont tirées par deux forces P et Q. Si l'on mène les deux rayons CA et CB aux deux points extrêmes de contact, on peut regarder les deux forces P et Q comme appliquées aux extrémités d'un levier coudé ACB, dont les deux bras sont parfaitement Fig. 55.

égaux ; et par conséquent il faut, pour l'équilibre, que les deux forces P et Q soient parfaitement égales.

Pour la charge du centre C de la poulie, elle est la même (171) que si les deux forces P et Q s'y transportaient parallèlement à leurs directions, en P′ et Q′. Ainsi, en achevant sur les deux lignes CP′ et CQ′, qui représentent leurs grandeurs, le losange P′CQ′R, la diagonale CR représentera la charge R du point C.

Mais si l'on joint AB, on formera un triangle isoscèle ACB, semblable au triangle P′CR, et par conséquent l'on aura

$$P' \text{ ou } P : R :: AC : AB.$$

C'est-à-dire que *l'une des deux forces* P *et* Q *appliquées à la corde, est à la charge que supporte l'axe de la poulie comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

185. Supposons que l'axe, au lieu d'être fixe, soit retenu par une force égale et contraire à la pression qu'il éprouve, et que l'extrémité du cordon AF (fig. 56), au lieu d'être tirée par la force P, soit invariablement attachée à un point fixe F ; l'équilibre de la Fig. 56.

poulie ne sera point troublé, et le cordon demeurera toujours tendu de la même manière.

La puissance Q sera donc à la force qui retient le centre de la poulie, dans le même rapport que ci-dessus.

Ainsi, en considérant un poids P attaché à la chape CN par un cordon dirigé vers le centre de la poulie, on aurait : *la puissance* Q, *qui tend à faire monter le poids, est à ce poids comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

Lorsque l'arc est égal au tiers de la demi-circonférence, la sous-tendante AB est égale au rayon, et la puissance est égale à la résistance.

Lorsque les deux parties de la corde sont parallèles, la sous-tendante AB (fig. 57) est double du rayon, et la puissance n'est que la moitié de la résistance. C'est le cas le plus favorable à la puissance, puisque le diamètre est la plus grande corde du cercle. Fig. 57.

DU TOUR.

186. Le *tour* en général est, comme nous l'avons dit, un corps solide de figure quelconque, qui n'a que la liberté de tourner autour d'un axe fixe.

Mais ce que l'on nomme *tour* ou *treuil* dans les arts est un cylindre aux bases duquel on adapte ordinairement deux autres cylindres de même axe, mais d'un diamètre plus petit, et que l'on nomme *tourillons*. Ces tourillons re-
Fig, 58. posent sur deux appuis fixes F et H (fig. 58), et le cylindre, en tournant sur ces tourillons, est absolument dans le même cas que s'il tournait autour de son axe considéré comme une ligne fixe.

La résistance que l'on se propose de vaincre, ou le poids Q que l'on veut élever, est appliquée à une corde qui s'enroule autour du cylindre, tandis qu'une puissance P le fait tourner, soit en agissant par une corde CP tangentiellement à une roue (CB) perpendiculaire à l'axe de ce cylindre et solidement liée avec lui, soit en agissant à l'extrémité d'une barre qui traverse le cylindre à angle droit, soit au moyen d'une manivelle, etc., etc.

Les dénominations du tour varient suivant l'objet auquel on le destine et suivant sa position. On le nomme ordinairement *tour* ou *treuil* lorsque l'axe du cylindre est horizontal, et *cabestan* lorsque l'axe est vertical et qu'on se sert de barres pour y appliquer la puissance. Mais quels que soient l'objet et la position de cette machine, et de quelque manière qu'on

lui communique le mouvement, les conditions de l'équilibre y sont toujours les mêmes. Ainsi nous la considérerons, pour plus de simplicité, sous le premier aspect. Nous supposerons que l'axe AB du cylindre soit horizontal, et par conséquent, le plan de la roue vertical; que la puissance P agisse suivant une direction tangente en un point donné C à la circonférence de la roue, et que la résistance Q agisse dans un plan parallèle à celui de la roue, suivant une direction verticale tangente à la surface du cylindre, ou plutôt à la circonférence de la section circulaire DIO faite dans ce cylindre au point D de contact.

Il s'agit de déterminer d'abord le rapport de la puissance à la résistance dans le cas de l'équilibre, et en second lieu les pressions qu'éprouvent les appuis F et H qui soutiennent les tourillons.

Soit B le centre de la roue, A celui de la section DIO. Menez les rayons CB et DA qui seront perpendiculaires aux forces respectives P et Q.

Je transporte la force Q parallèlement à elle-même du point D au point A. Il en naît une force Q′ égale, parallèle à Q et de même sens, appliquée en A, et un couple (Q, — Q) qui a pour bras de levier le rayon DA du cy-

lindre. Je transporte de même la puissance P de C en B ; il en naît une force P′ égale, parallèle et de même sens, appliquée en B, et un couple (P, —P) qui a pour bras de levier le rayon CB de la roue.

Les deux forces P′ et Q′, étant appliquées aux deux points A et B qui appartiennent à l'axe fixe du cylindre, sont évidemment détruites par sa résistance.

Mais les deux couples (P, —P) et (Q, —Q) doivent se faire équilibre d'eux-mêmes ; car, si l'on transporte, pour plus de clarté, le couple (Q, —Q) dans le plan du couple (P, —P), ce qui est permis, on voit que ces deux couples se composent en un seul qui ne peut jamais être en équilibre autour du centre B de la roue. Le couple résultant doit donc être nul de lui-même, et par conséquent les deux couples contraires (P, —P) et (Q, —Q) doivent être équivalens. Ainsi, leurs momens P×CB et Q×DA doivent être égaux, et l'on a P:Q :: DA:CB.

C'est-à-dire que, *pour l'équilibre du tour, il faut que la puissance soit à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.*

Des pressions exercées sur les appuis.

187. Les deux couples (P, —P) et (Q —Q) étant en équilibre d'eux-mêmes, il n'y a que les deux forces P′ et Q′ qui puissent charger l'axe fixe, et par conséquent les appuis : d'où l'on voit d'abord que la *pression exercée par les forces* P *et* Q *appliquées au treuil est absolument la même que si ces forces étaient transportées sur l'axe, parallèlement à elles-mêmes, dans leurs plans perpendiculaires à cet axe.*

Pour obtenir les pressions individuelles des appuis F et H, on décomposera la force Q′ en deux autres parallèles q et q', appliquées aux points respectifs F et H ; et de même la force P′ en deux autres parallèles p et p', appliquées aux mêmes points. La résultante des deux forces p et q exprimera en grandeur et en direction la pression de l'appui F, et la résultante des deux forces p' et q' celle de l'appui H.

Nous avons fait abstraction de la pesanteur du treuil. Ordinairement le corps de cette machine est symétrique par rapport à l'axe fixe, et son centre de gravité tombe sur l'un des points de l'axe lui-même. Alors le poids du treuil ne trouble point la proportion établie ci-dessus entre la puissance et la résistance, mais il change

les pressions exercées sur les appuis. Pour connaître les valeurs réelles de ces pressions, on considérera tout le poids du treuil comme une force verticale V appliquée en son centre de gravité G; et si l'on décompose cette force en deux autres parallèles g et g', appliquées aux points F et H, la résultante des trois forces p, q et g exprimera la charge réelle de l'appui F, et la résultante des trois forces p', q' et g', celle de l'appui H; de sorte que l'on saura de quelles résistances les deux points d'appui doivent être au moins capables, pour n'être pas entraînés par les efforts combinés des deux forces P et Q, et du poids V de la machine.

188. On a supposé que les cordes DQ, CP étaient infiniment déliées; mais les cordes sont ordinairement d'un diamètre fini, ce qui change sensiblement le rapport que nous avons établi entre la puissance et la résistance. En effet, les forces P et Q, que l'on peut regarder comme agissant suivant les axes des cordons, ont leurs bras de levier respectifs augmentés des demi-diamètres de ces cordons. On n'a donc pas alors : la puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue; mais bien, *la puissance* P *est à la résistance* Q *comme le rayon du cylindre augmenté du rayon*

de la corde DQ, *est au rayon de la roue augmenté du rayon de la corde* CP.

Si les rayons des cordes DQ et CP sont proportionnels aux rayons du cylindre et de la roue, cette proportion revient à la première, comme si les cordes étaient des fils infiniment petits, appliqués tangentiellement à la roue et au cylindre.

189. Si l'on veut considérer actuellement un tour sollicité par tant de forces que l'on voudra, situées dans des plans perpendiculaires à l'axe, on verra, comme ci-dessus, qu'en transformant chaque force en une autre égale, parallèle et de même sens, appliquée sur l'axe, et en un couple qui aura pour bras de levier la distance de la force à l'axe, toutes les forces transportées sur l'axe seront toujours détruites par sa résistance, mais que tous les couples devront se réduire à un couple nul de lui-même pour l'équilibre. Or, tous ces couples étant dans des plans parallèles, le couple résultant sera égal à leur somme, et par conséquent il faudra, pour l'équilibre, que la somme des momens des forces par rapport à l'axe soit égale à zéro, en prenant avec des signes contraires les momens des forces qui tendent à faire tourner en sens contraires.

Pour les pressions exercées sur l'axe fixe, elles seront évidemment les mêmes que si toutes les forces appliquées s'y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes, sans sortir de leurs plans perpendiculaires à cette ligne.

Lorsque les forces appliquées au treuil sont dirigées dans des plans quelconques, on peut décomposer chacune d'elles en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la direction de l'axe fixe. Mais les forces parallèles étant transportées dans l'axe, leur résultante est détruite par la résistance longitudinale de cet axe, et leur couple résultant, qui passe par le même axe, est détruit par sa résistance transversale. Il ne reste donc à considérer, pour l'équilibre du treuil, que le groupe des forces qui sont situées dans des plans perpendiculaires à l'axe fixe; ce qui revient au cas précédent.

Ainsi, en nommant P, P′, P″, etc., les forces appliquées; ω, ω', ω'', etc., leurs inclinaisons sur l'axe, et p, p', p'', etc., leurs plus courtes distances à cette droite, on aura, pour l'équilibre, l'équation

$$Pp\sin\omega + P'p'\sin\omega' + P''p''\sin\omega'' + \text{etc.} = 0,$$

ce qui est la condition exprimée au n° 120.

Quant à l'axe du treuil, il sera pressé, 1°. par les composantes $P\sin\omega$, $P'\sin\omega'$, $P''\sin\omega''$, etc.,

transportées sur cet axe; 2°. par la résultante des forces parallèles $P\cos\omega$, $P'\cos\omega'$, $P''\cos\omega''$, etc., qui tend à entraîner le treuil dans le sens de sa longueur; et 3°. enfin, par le couple résultant de ces dernières composantes, ce qui revient à deux forces égales perpendiculaires à l'axe, et qui le poussent en sens contraires.

DU PLAN INCLINÉ.

190. Lorsqu'un point est pressé contre un plan inébranlable et inflexible, par une force normale à ce plan, il est clair que ce point doit rester en équilibre; car il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve dans le plan, d'un côté plutôt que de l'autre, puisque toutes les directions qu'il pourrait prendre font un même angle droit avec la direction de la force; et d'ailleurs il ne peut se mouvoir à travers le plan qui est supposé parfaitement inflexible.

Réciproquement, le point dont il s'agit ne pourra être en équilibre, à moins que la force qui le presse ne soit normale au plan d'appui; car, si elle y était inclinée, cette force pourrait se décomposer en deux autres, l'une perpendiculaire au plan et l'autre située dans ce plan. La première serait détruite; mais la seconde obtiendrait son effet, car il est visible

qu'elle ne pourrait être altérée par la présence du plan le long duquel elle tend à s'exercer. Ainsi il n'y aurait pas équilibre.

On peut dire la même chose d'un point qui s'appuie sur une surface courbe, et le considérer comme s'il reposait sur le plan tangent mené à la surface par ce point même. Il faut donc, pour l'équilibre, que la direction de la force qui le presse soit normale à ce plan, au point de contact; et voilà pourquoi dans l'équilibre du levier qui ne fait que poser sur l'appui, il faut non-seulement que la résultante des forces y passe, mais encore qu'elle soit perpendiculaire à l'élément de contact du levier et de cet appui.

191. On voit donc, d'après ce que l'on vient de dire, que lorsqu'un corps est tenu en équilibre contre un plan inébranlable, ce plan ne peut détruire que des forces dont les directions lui sont normales aux différens points de contact, et que par conséquent sa résistance ne peut faire naître que de telles forces en sens contraires.

Donc, si un corps de figure quelconque, sollicité par des forces quelconques P, Q, R, etc., (fig. 59), ne s'appuie contre un plan que par un seul point O, il ne pourra demeurer en

Fig. 59.

équilibre, à moins que toutes les forces P, Q, R, etc., qui lui sont appliquées, ne soient en équilibre avec une force unique N, qui serait normale à ce plan au point O, et qui représenterait sa résistance actuelle. Donc, *pour l'équilibre d'un corps qui s'appuie par un seul point contre un plan, il faut*, 1°. *que toutes les forces appliquées aient une résultante unique;* 2°. *que la direction de cette résultante soit normale au plan;* 3°. *qu'elle passe au point de contact.*

On voit que ces trois conditions reviennent à celles qu'on a données plus haut pour l'équilibre du levier qui ne fait que poser sur l'appui. Nous aurions pu les trouver par le même raisonnement et les exprimer de la même manière, en disant que toutes les forces appliquées, étant transportées parallèlement à elles-mêmes au point de contact, doivent y donner une résultante normale au plan, et que tous les couples engendrés doivent donner un couple résultant nul de lui-même.

192. Lorsque le corps touche le plan par plusieurs points A, B, C, D, etc. (fig. 60), chacun des points de contact fait naître une résistance normale au plan en ce point; mais toutes ces résistances, étant parallèles et de même

Fig. 60.

sens, se composent toujours en une seule, dont la direction tombe nécessairement dans l'intérieur du polygone formé par tous les appuis A, B, C, D, etc. Les forces appliquées doivent donc être en équilibre avec cette force unique, et par conséquent, *lorsqu'un corps s'appuie contre un plan par plusieurs points, il faut, pour l'équilibre, que les forces appliquées puissent se réduire à une seule, normale au plan, et dont la direction tombe dans l'intérieur du polygone formé par tous les points de contact.*

On voit par là que si le corps repose par une surface finie, la résultante doit rencontrer le plan en l'un quelconque des points de cette surface.

De la pression exercée sur le plan.

193. Lorsque le corps ne repose que par un seul point, il est clair, d'après ce que nous venons de dire, que la pression exercée par les forces est égale à leur résultante.

Si le corps repose par deux points A et B (fig. 61), la résultante N dont la direction tombe nécessairement entre A et B, sur la droite qui joint ces deux points d'appui, se décompose en deux forces parallèles p et q, qui expriment leurs pressions respectives. Fig. 61.

Soit O le point où la résultante N va rencontrer la ligne AB; on aura pour la pression p du point A, $N : p :: AB : BO$; et pour la pression q du point B, $N : q :: AB : AO$; d'où l'on voit que la résultante ou la pression totale N étant représentée par la distance AB des deux appuis, les deux pressions individuelles de ces points sont représentées réciproquement par leurs distances à la pression totale.

Si le corps repose par trois points A, B, C (fig. 62), la résultante N des forces appliquées doit passer en quelque point O dans l'intérieur du triangle ABC (192). Si de l'un des angles, de l'angle A, par exemple, on mène la ligne AO, et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en I avec le côté opposé BC, la force N se décomposera en deux autres parallèles p et n appliquées aux points A et I. Ensuite, la force n se décomposera en deux autres parallèles q et r appliquées en B et C; de sorte que les trois forces p, q, r exprimeront les pressions respectives des trois appuis, A, B, C. Fig. 62.

Formons autour du point O, comme sommet, et sur les trois côtés respectifs BC, AC, AB comme bases, les trois triangles BOC, AOC, AOB. Si l'on représente la pression totale exercée en O par l'aire du triangle ABC, les pressions exercées aux trois angles A, B, C seront représentées par les aires respectives des

triangles BOC, AOC, AOB formés sur les côtés opposés.

Car la force N, appliquée en O, est à la force p, appliquée en A, comme AI est à OI : mais les triangles BAC, BOC, ayant même base BC, sont entre eux comme leurs hauteurs, ou comme les lignes AI et OI également inclinées sur la base; on a donc $N : p :: ABC : BOC$. Mais un même raisonnement prouverait qu'on a $N : q :: ABC : AOC$; et $N : r :: ABC : AOB$; donc, etc.

194. Lorsque le corps s'appuie sur le plan par plus de trois points (ou seulement par trois s'ils tombent en ligne droite), les pressions individuelles des appuis sont indéterminées, parce qu'il y a une infinité de manières de décomposer la force N en d'autres forces parallèles appliquées en ces points.

Il suffit que ces pressions individuelles satisfassent à ces conditions : 1°. qu'elles soient toutes de même sens que la pression totale; 2°. qu'elles puissent se composer en une seule, égale à cette pression totale et appliquée au même point O. Cette dernière condition exige trois équations, dont la première exprime que la somme des pressions est égale à la pression totale, et les deux autres, que la somme des

momens des pressions individuelles, par rapport à deux axes quelconques tirés dans le plan des appuis, est égale au moment de la pression totale, par rapport aux mêmes axes (84-127).

195. Si l'on veut considérer actuellement l'équilibre d'un corps qui s'appuie à la fois contre plusieurs plans, on observera que chacun de ces plans fait naître, aux divers points de contact, des résistances de même sens, perpendiculaires à ce plan, et qui par conséquent se composent toujours en une seule, perpendiculaire au même plan. Il faut donc que toutes les forces appliquées soient en équilibre avec ces diverses résistances, qui seront en même nombre que les plans d'appui; et par conséquent les forces qui tiennent en équilibre un corps appuyé sur plusieurs plans doivent toujours se réduire à autant de forces, dirigées perpendiculairement vers ces plans respectifs, et qui tombent, pour chacun d'eux, dans l'intérieur du polygone formé par les points de contact.

196. On voit par là que si le corps ne s'appuie que sur deux plans, en deux points par exemple, et n'est sollicité que par une seule force, ou par des forces qui aient une résul-

tante unique, cette force ou cette résultante unique doit pouvoir se décomposer en deux autres dirigées suivant les normales menées aux deux plans par les points de contact. Ainsi, il faut que les deux normales aillent concourir en un même point situé sur la direction de la force qui presse le corps, et se trouvent dans un même plan avec elle. D'ailleurs, cette force doit être dirigée dans l'angle des deux normales, qui est opposé à celui des deux plans, et son action doit avoir lieu vers cet angle, afin que ses deux composantes suivant les deux normales tendent à pousser le corps contre les plans, c'est-à-dire en sens contraires des résistances qu'ils font naître.

197. Si le corps s'appuie par trois points sur trois plans différens, la force qui le presse doit être réductible à trois autres, dirigées suivant les trois normales menées aux plans par les points de contact.

Mais il ne faut pas conclure de là que les trois normales doivent concourir en un même point sur la direction de la force, ni même qu'il doive y avoir une seule rencontre entre deux de ces quatre lignes; car trois forces qui ne se rencontrent pas peuvent se composer en une seule, et une seule force peut se décomposer suivant trois directions qui ne rencontrent pas la sienne, et qui ne se rencontrent pas entre elles (75).

Application de la théorie à quelques exemples.

198. Ce que nous venons de dire contient toute la théorie de l'équilibre des corps qui s'appuient sur des plans. Nous allons en faire quelques applications très simples.

Soit un corps de figure quelconque, appuyé par un nombre quelconque de points, ou par une base finie, contre un plan inébranlable LDK (fig. 63), et sollicité par deux forces P et Q qui le tiennent en équilibre sur ce plan. Fig. 63.

D'après ce qu'on a trouvé (192), les deux forces P et Q doivent donner une résultante unique N normale au plan; par conséquent leurs directions doivent concourir en quelque point, comme en F, et se trouver dans un plan perpendiculaire au plan LDK. De plus, la direction de cette résultante doit aller rencontrer le plan LDK en l'un des points de contact du corps, ou dans l'intérieur du polygone formé par les points de contact.

Supposons que toutes ces conditions soient remplies, et voyons simplement quels sont les rapports des forces P, Q, et de la pression N exercée sur le plan.

Puisque les forces P et Q ont une résultante normale au plan, il faut que ces deux forces soient réciproquement proportionnelles aux sinus des angles PFN, QFN, que leurs directions forment avec la normale abaissée du point F sur ce plan : car on a vu (36) que deux composantes sont toujours en raison réciproque des sinus des angles que leurs directions forment avec celle de leur résultante ; on a donc

$$Q : P :: \sin PFN : \sin QFN.$$

On a d'ailleurs, pour la résultante N,

$$P : N :: \sin QFN : \sin PFQ.$$

De sorte que chacune des forces P, Q, N, peut être représentée par le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.

Ainsi, toutes les questions que l'on pourrait proposer sur les rapports des trois forces P, Q, N, et sur leurs directions, se réduisent à la résolution d'un triangle dont les trois côtés représenteraient les grandeurs des forces P, Q, N, et les trois angles, leurs inclinaisons mutuelles.

199. Supposons que la force P représente le poids du corps lui-même, sa direction FP sera

verticale et passera au centre de gravité de ce corps.

Menons le plan horizontal LDH qui coupe le premier suivant LD, et nommons le plan LDK, sur lequel le corps s'appuie, le *plan incliné*. Le plan des deux forces P et Q, qui sera, d'une part, perpendiculaire au plan incliné, comme passant par la normale FN, et de l'autre perpendiculaire au plan horizontal, comme passant par la verticale FP, coupera ces deux plans suivant deux droites AB, AC, perpendiculaires à leur commune intersection LD, et qui comprendront entre elles l'angle formé par le plan incliné avec l'horizon.

Représentons simplement le plan horizontal par l'horizontale AC (fig. 64), et le plan incliné, par la ligne AB oblique à la première. D'un point quelconque B, pris sur AB, abaissons une perpendiculaire BC sur AC, et dans le triangle rectangle ABC nommons, suivant l'usage, l'hypoténuse AB, la *longueur* du plan incliné ; le côté BC, sa *hauteur*, et le côté AC, sa *base*. Fig. 64.

La ligne FP étant perpendiculaire à AC, l'angle PFN sera égal à l'angle BAC, et la proportion Q : P :: sin PFN : sin QFN, deviendra

$$Q : P :: \sin BAC : \sin QFN.$$

Si la puissance Q est donnée en grandeur seulement, on trouvera par cette proportion, où il n'y aura que sin QFN d'inconnu, sous quel angle QFN cette puissance Q doit agir pour faire équilibre au poids P. Or, comme à un même sinus répondent deux angles supplémens l'un de l'autre, on voit que la même puissance Q pourra être employée de deux manières différentes pour faire équilibre à la résistance : soit en faisant avec la normale FN au plan incliné, un angle QFN trouvé par la proportion ci-dessus; soit en faisant avec la même ligne l'angle Q'FN supplément du premier.

On trouvera, par la même proportion, la grandeur de la puissance Q, lorsque l'on connaîtra sa direction, ou l'angle QFN qu'elle forme avec la normale.

200. Le cas où la puissance Q est la plus petite à l'égard de la résistance P, est celui où l'angle QFN a le plus grand sinus, puisque la puissance est toujours en raison inverse de ce sinus; mais le plus grand sinus répond à l'angle droit; donc la puissance est alors perpendiculaire sur la normale FN, ou parallèle au plan incliné.

Dans ce cas, l'angle QFN est égal à l'angle droit ACB (fig. 65), et la proportion précédente devient Q : P :: sin BAC : sin ACB; mais dans le triangle ABC, les sinus des angles A et C sont proportionnels aux côtés opposés BC, AB, et par conséquent on a Fig. 65.

$$Q : P :: BC : AB,$$

c'est-à-dire que, *lorsque la puissance est parallèle au plan incliné, elle est au poids du corps qu'elle y retient en équilibre, comme la hauteur du plan est à sa longueur.*

201. Un corps pesant, abandonné à lui-même sur un plan incliné, ne tend donc à glisser le long de ce plan qu'en vertu de la pesanteur diminuée dans le rapport de la hauteur du plan à sa longueur, et c'est cette pesanteur le long du plan que l'on nomme la *pesanteur relative*, par rapport à la pesanteur le long de la verticale, que l'on nomme *pesanteur absolue*. On voit que la pesanteur absolue étant représentée par la longueur du plan incliné, la pesanteur relative est représentée par sa hauteur; ou bien, la pesanteur absolue étant représentée par le sinus de l'angle droit ou par l'unité, la pesanteur relative est représentée par le sinus de l'inclinaison du plan. Lorsque

cette inclinaison est nulle, ou lorsque le plan est horizontal, la pesanteur relative est nulle, et le corps reste en repos sur le plan, comme cela doit être; lorsque l'inclinaison du plan est égale au tiers d'un angle droit, la pesanteur relative est la moitié de la pesanteur absolue; elle se confond enfin avec la pesanteur absolue, lorsque l'inclinaison du plan est égale à l'angle droit, et que, par conséquent, le plan incliné est devenu vertical.

En général, pour comparer les pesanteurs relatives sur des plans différemment inclinés, on n'aura qu'à comparer les sinus de leurs inclinaisons.

Donnons la même hauteur BC à deux plans différemment inclinés, et adossons-les comme on le voit dans la figure 66 : les pesanteurs le long de ces plans seront réciproques à leurs longueurs AB, BD; car elles sont directement proportionnelles aux sinus des angles A et D qui mesurent les inclinaisons des plans, et, dans le triangle ABD, ces sinus sont proportionnels aux côtés opposés BD et AB. Fig. 66.

Donc, si l'on a deux corps pesans M et N appuyés sur ces plans adossés, et qu'on les lie entre eux par un fil qui passe sur une poulie de renvoi placée en B, de manière que les deux parties rectilignes du fil soient parallèles

à ces plans respectifs, ces deux corps ne pourront se faire équilibre, à moins que leurs masses ne soient proportionnelles aux longueurs AB et BD des deux plans sur lesquels ils reposent.

202. Lorsque la puissance Q (fig. 67) est horizontale, et par conséquent parallèle à la base AC du plan incliné, l'angle QFN devient égal à l'angle ABC, et l'on a Fig. 67.

$$Q : P :: \sin BAC : \sin ABC,$$

ou bien

$$Q : P :: BC : AC,$$

c'est-à-dire que, *si la puissance est horizontale, elle est au poids du corps qu'elle tient en équilibre sur le plan incliné, comme la hauteur du plan est à sa base.*

203. Le cas où la puissance est la plus grande à l'égard du poids, est le cas où l'angle QFN devient nul. La puissance Q est alors perpendiculaire au plan incliné, et la proportion Q : P :: sin BAC : sin QFN donne pour sa valeur, $Q = \frac{P \times \sin BAC}{0} = \infty$.

Il n'y a donc pas, à proprement parler, de *maximum* pour la puissance; mais ce résultat nous apprend qu'aucune force, quelque grande

qu'elle soit, ne peut empêcher un corps pesant de glisser le long d'un plan incliné, en le pressant perpendiculairement contre ce plan. Si nous voyons tous les jours arriver le contraire, c'est que les surfaces des corps, même les mieux polis, sont hérissées d'une infinité d'espérités qui s'engagent entre elles dans le contact de ces surfaces, et les empêchent de glisser librement les unes sur les autres. Or, nous avons fait abstraction de cette propriété des corps, et de la résistance particulière qui en résulte, et que l'on nomme la *force du frottement*.

204. Lorsqu'un corps pesant s'appuie à la fois sur plusieurs plans inclinés, en considérant son poids comme une force verticale qui passe par son centre de gravité, on trouvera les conditions de l'équilibre d'après ce qui a été dit (195), et les pressions respectives que souffrent les points de contact, lorsque ces pressions seront déterminées.

Si nous considérons simplement le cas où le
Fig. 68. corps est soutenu aux deux points I et O (fig. 68) par deux plans inclinés HI, HO, il faudra (196) que les deux normales IA, OA, à ces plans, aillent concourir en un même point A de la verticale GP qui passe au centre de gravité G

du corps, et qui représente la direction de son poids. De plus, comme le poids P de ce corps doit pouvoir se décomposer suivant ces normales, il faudra qu'elles soient toutes deux dans un même plan avec la direction GP, et par conséquent, dans un plan vertical.

Ces conditions suffisent pour l'équilibre, et si l'on prend, sur la direction du poids, une partie quelconque AD, qui représente sa quantité, et qu'on achève sur AD comme diagonale, et suivant les directions AI et AO, le parallélogramme ABCD, la force P se décomposera en deux autres, représentées par les côtés AB et AC de ce parallélogramme. Ces deux forces seront respectivement détruites par les deux plans inclinés, et donneront en même temps les valeurs de leurs pressions individuelles.

Observons que le plan des deux normales IA, OA, étant à la fois perpendiculaire aux deux plans inclinés, est perpendiculaire à leur commune intersection; mais ce plan est en même temps vertical, puisqu'il passe par la verticale GP; donc la commune intersection des deux plans inclinés doit être perpendiculaire à un plan vertical; donc elle est horizontale. Ainsi un corps pesant ne peut rester en équilibre entre deux plans inclinés,

à moins que leur intersection ne soit horizontale, ce qui paraissait d'ailleurs assez évident.

De la vis.

205. La *vis* est une machine qui se rapporte à la fois au levier et au plan incliné. On y considère en général l'équilibre d'un corps qui se trouve en même temps assujetti à tourner autour d'un axe fixe, et à descendre uniformément le long de cet axe, en s'appuyant sur une surface inclinée.

Mais pour expliquer clairement la construction de cette machine, considérons d'abord un
Fig. 69. cylindre droit ABCD (fig. 69) que l'on développe sur un plan. Le développement est un rectangle BEMC dont la base BE est égale en longueur à la circonférence du cylindre, et peut s'exprimer par $2\varpi r$, en nommant r le rayon du cylindre, et ϖ le rapport de la circonférence au diamètre.

Divisons le côté BC en parties égales BA, RQ, QP, etc.; et, après avoir pris sur EM la partie EG=BR, menons BG, et les parallèles RH, QK, etc.

Si l'on replie le rectangle BEMC sur le cylindre, la suite des droites BG, RH, etc., tracera sur sa surface une courbe continue que

l'on nomme *hélice*, la première droite BG, formant une portion de l'hélice, qui commencera en B, et aboutira en R, où elle sera continuée par la seconde droite RH, et ainsi de suite. Chacune de ces portions de l'hélice, dont les deux extrémités viennent aboutir sur la même génératrice, et qui fait ainsi le tour entier du cylindre, se nomme *spire;* et l'intervalle compris entre deux spires consécutives, mesuré le long de la génératrice, et qui est partout le même, se nomme le *pas* de l'hélice.

Puisque, dans le développement du cylindre, l'hélice est une suite de lignes droites parallèles, il est clair que la propriété caractéristique de l'hélice est d'être partout également inclinée aux diverses génératrices qu'elle va rencontrer sur la surface cylindrique. Lorsque le cylindre est vertical, elle est donc partout également inclinée à l'horizon, et un point a, qui repose sur cette hélice, et qui peut être regardé comme situé sur la tangente en ce point, est dans le même cas que s'il reposait en a' sur un plan incliné QHK, dont la base est $QH = 2\varpi r$, et dont la hauteur HK est égale au pas de l'hélice, et sera désignée simplement par h.

206. Si l'on suppose donc que le point a soit pressé sur l'hélice par une force verticale p, et soit retenu en même temps par une force horizontale f, qui, appliquée tangentiellement au cylindre, empêche ce point de glisser sur l'hélice, on aura (202)

$$f : p :: \text{HK} : \text{QH},$$

ou

$$f : p :: h : 2\varpi r.$$

Menons par le point a l'horizontale ao, qui rencontre en o l'axe FI du cylindre, que je suppose fixe. Prolongeons indéfiniment cette droite, et considérons-la comme un levier inflexible, mobile autour du point fixe o.

Au lieu d'appliquer immédiatement au point a une force horizontale f, pour retenir ce point sur l'hélice, on pourrait appliquer une autre force parallèle q en un point quelconque du levier bo; et cette force q ferait sentir au point a la même impression que la force f, si elle était à celle-ci dans la raison réciproque des deux bras de levier bo et ao, c'est-à-dire (en faisant $bo = \text{R}$, et observant que ao est le rayon r du cylindre), si l'on avait

$$d : f :: r : \text{R};$$

mais on a trouvé ci-dessus

$$f : p :: h : 2\varpi r.$$

Donc, en multipliant par ordre, on aura

$$q : p :: h : 2\varpi \text{R};$$

c'est-à-dire que la puissance horizontale q sera à la force verticale p qui presse le point a sur l'hélice, comme le pas de l'hélice est à la circonférence qui tend à décrire la puissance q autour de l'axe du cylindre.

Observons que le rayon r du cylindre, ou la distance de l'hélice à l'axe, n'entre plus dans cette proportion. Ainsi, l'on aura toujours le même rapport entre la puissance q et la force p, quel que soit le cylindre sur lequel l'hélice est tracée, pourvu que le pas de cette hélice soit le même.

On ne doit pas perdre de vue d'ailleurs que l'on n'a supposé le cylindre vertical que pour mieux fixer les idées et simplifier le discours; mais que tout ce qu'on a dit de la force verticale p et de la puissance horizontale q, doit s'entendre en général d'une force parallèle à l'axe du cylindre, et d'une puissance qui agirait dans un plan perpendiculaire au même axe, à la distance R de cette ligne.

207. Actuellement il n'est pas difficile de définir la vis et de trouver les conditions de son équilibre.

La vis est un cylindre droit revêtu d'un

filet saillant engendré par le plan d'un triangle, ou d'un parallélogramme, ou d'une figure quelconque qui, s'appuyant par sa base sur une génératrice, tourne autour de l'axe du cylindre, en descendant le long d'une hélice tracée sur sa surface. Tous les points qui composent le filet de la vis peuvent donc être regardés comme appartenant à des hélices décrites sur des cylindres de même axe, mais de rayons différens. Or, toutes ces hélices ont évidemment le même pas, et c'est ce que l'on nomme le *pas* de la vis.

La génération de l'*écrou* est la même. Concevons une pièce M, de figure quelconque, pénétrée par le cylindre : le triangle ou le parallélogramme qui produit sur le cylindre le filet de la vis, produira dans l'intérieur de cette pièce un sillon ou creux parfaitement égal au filet, et que celui-ci remplira exactement; et cette seconde pièce, qui peut être regardée comme le moule de la première, forme l'*écrou* de la vis.

Maintenant, si l'une de ces deux pièces est fixe, il est clair que l'autre lui est tellement assujettie, qu'elle n'a plus que la liberté de tourner autour de l'axe du cylindre, et de descendre en même temps sur la seconde, comme sur une surface inclinée. Il y a donc, entre

les forces qui se feraient équilibre sur la pièce mobile, des relations particulières qui dépendent de son assujettissement à la seconde; et ce sont ces relations qui constituent les conditions de l'équilibre dans la vis.

On ne considère ordinairement que deux forces appliquées à la pièce mobile : l'une P parallèle à l'axe, et qui tend à la faire descendre en tournant autour de cet axe; l'autre Q située dans un plan perpendiculaire à l'axe, et qui, au moyen d'un levier, tend à la faire remonter en sens contraire. Pour fixer les idées, nous supposerons ici que l'écrou soit mobile (fig. 70) et que la vis soit fixe : le rapport des deux forces P et Q serait absolument le même dans le cas où, l'écrou étant fixe, la vis serait mobile. Fig. 70.

D'abord, si l'écrou ne posait que par un seul point sur le filet de la vis, en nommant h le pas de la vis, et R le bras de levier de la puissance ou la distance à l'axe, on aurait, d'après ce qu'on a vu,

$$Q : P :: h : 2\varpi R.$$

Mais, en quelque nombre de points que l'écrou s'appuie sur le filet, on peut imaginer que la résistance P est décomposée en autant de forces parallèles p, p', p'', etc., qui pres-

sent en ces différens points, et que la puissance Q est partagée en autant de forces q, q', q'', etc., dont chacune fait équilibre en particulier à la force qui lui répond parmi les forces p, p', p'', etc.; et, comme on a constamment

$$q : p :: h : 2\varpi R,$$
$$q' : p' :: h : 2\varpi R,$$
$$q'' : p'' :: h : 2\varpi R,$$
etc.,

on aura

$$q+q'+q''\ldots \text{ ou } Q : p+p'+p''\ldots \text{ ou } P :: h : 2\varpi R;$$

c'est-à-dire que, *dans l'équilibre de la vis, la puissance qui tend à faire tourner l'écrou, est à la résistance qui le presse dans le sens de l'axe, comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire la puissance.*

Ainsi la puissance a d'autant plus d'avantage pour contre-balancer la résistance, ou pour comprimer dans le sens de l'axe de la vis, que cette puissance agit à une plus grande distance de l'axe, et que le pas de la vis est moindre.

Du Coin.

208. Le coin est un prisme triangulaire AF (fig. 72), que l'on introduit par l'une de ses Fig. 72.

arêtes EF entre deux obstacles, pour exercer latéralement deux efforts qui tendent à les écarter.

L'arête EF, par laquelle le coin tend à s'enfoncer, se nomme le *tranchant* du coin; les deux faces adjacentes ADFE, BCFE, se nomment les *côtés*; et la face opposée ABCD, la *tête*.

C'est sur cette face qu'on applique le coup, au moyen d'un marteau ou d'un corps quelconque. Quelle que soit la direction du choc, on peut toujours concevoir son action comme décomposée en deux autres, l'une perpendiculaire à la tête du coin, et qui obtient tout son effet sur lui; l'autre parallèle, et qui ne lui imprime aucun mouvement, parce qu'elle ne peut tendre qu'à faire glisser le marteau sur ce coin.

Nous supposerons donc sur-le-champ que la puissance soit appliquée perpendiculairement à la tête du coin, et nous chercherons simplement les efforts qui en résultent contre les deux obstacles perpendiculairement aux deux côtés.

Par la direction de la puissance P, et perpendiculairement aux arêtes du coin, faisons passer une section MNO (fig. 73); la ligne MN pourra représenter la tête du coin, et les deux Fig. 73.

lignes MO et NO les deux côtés. D'un point A pris sur la direction de la puissance, abaissons deux perpendiculaires AB, AC sur les côtés MO, NO; prenons la partie AD qui représente la quantité et la direction de la puissance P, et achevons le parallélogramme ABCD.

La puissance P, représentée par AD, se décomposera en deux autres Q et R, représentées par AB et AC, et qui exprimeront les efforts exercés perpendiculairement aux côtés MO, NO.

On aura donc, P:Q:R, comme AD:AB:AC; ou, en mettant BD au lieu de AC, comme AD : AB : BD, c'est-à-dire, comme les trois côtés du triangle ABD.

Mais ce triangle est semblable au triangle MNO, parce que les côtés AD, AB, BD sont respectivement perpendiculaires aux trois côtés MN, MO, NO.

On aura donc

$$P : Q : R :: MN : MO : NO;$$

c'est-à-dire que, *la puissance étant représentée par la tête du coin, les deux forces qui en résultent perpendiculairement aux côtés seront représentées par ces côtés eux-mêmes.*

Si le triangle MNO est isocèle, les deux forces Q et R sont égales, et la puissance P est à l'une d'elles comme la tête du coin est à l'un

des côtés, qu'on peut nommer dans ce cas la *longueur* du coin.

On voit, par ce que nous venons de dire, qu'à puissances égales, l'effort exercé par le coin est d'autant plus grand, que la tête en est plus petite par rapport à la longueur.

De quelques Machines composées.

209. Jusqu'à présent nous n'avons considéré qu'un seul corps solide, gêné dans ses mouvemens par différens obstacles; et c'est ce qui forme les diverses machines simples. Nous allons considérer actuellement un assemblage de machines simples qui réagissent les unes sur les autres en vertu de leur liaison mutuelle; et c'est ce que l'on nomme une *machine composée.*

Si l'on ne suppose que deux forces appliquées à la machine composée, on voit que la machine simple, qui reçoit immédiatement l'action de l'une d'elles, transmet cette action, d'après les lois de son équilibre, à la machine simple avec laquelle elle est liée; que celle-ci la transmet de même à la machine suivante; et ainsi de suite, jusqu'à la dernière qui communique l'action à la seconde force, ou à la résistance qu'il faut vaincre. Ainsi il est tou-

jours facile de déterminer le rapport de la puissance à la résistance, par une suite de proportions données par les lois de l'équilibre des machines intermédiaires; et c'est ce qu'on va vérifier tout à l'heure sur quelques exemples très simples.

Mais nous devons faire observer que les questions suivantes se rapportent naturellement au problème le plus général de la Statique, c'est-à-dire font partie de cette théorie étendue où l'on recherche les lois de l'équilibre dans les systèmes dont la figure est variable suivant des conditions quelconques données. Les deux axiomes qui servent de base à cette théorie sont :

1°. *Que si un système quelconque de points est en équilibre, chaque point doit être en équilibre de lui-même, tant en vertu des forces qui lui sont immédiatement appliquées, qu'en vertu des résistances ou réactions qu'il éprouve de la part des autres points du système;*

2°. *Que deux points ne peuvent agir l'un sur l'autre que dans la direction de la droite qui les joint, et que l'action est toujours égale et contraire à la réaction.*

Au moyen de ces deux axiomes et des conditions connues de l'équilibre d'un corps libre, on peut trouver les conditions de l'équilibre

d'un système quelconque de corps, pourvu qu'on sache évaluer les résistances qui naissent de leur liaison mutuelle : car ces résistances étant une fois évaluées, il ne s'agit plus que de les combiner avec les forces données immédiatement par la question, et d'exprimer les conditions de l'équilibre de chaque corps, comme s'il était parfaitement libre dans l'espace.

Quoique nous ne puissions, sans passer les bornes de cet Ouvrage, traiter ici ce sujet avec toute la généralité dont il est susceptible, nous donnerons néanmoins les conditions de l'équilibre de quelques systèmes variables qu'on emploie souvent dans les arts, et que l'on a coutume de considérer dans les élémens de Statique, parce que les réactions des différens corps les uns sur les autres y sont très faciles à évaluer, et ne supposent guère que la composition des forces et les deux axiomes précédens.

Des Cordes.

210. Considérons premièrement un *polygone funiculaire*, c'est-à-dire un assemblage de points liés entre eux par des cordons parfaitement flexibles et inextensibles.

On sait d'abord que si trois forces P, Q, R

Fig. 74. (fig. 74) dirigées suivant les axes de trois cordons AP, AQ, AR, sont en équilibre autour d'un même point A, chacune de ces forces doit être égale et directement opposée à la résultante des deux autres.

Il faut donc, 1°. que les axes des trois cordons soient dans un même plan; 2°. que les rapports des forces soient tels, que chacune d'elles puisse être représentée par le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres. Ainsi l'on a, pour l'équilibre, cette suite de rapports :

$$P : Q : R :: \sin QAR : \sin PAR : \sin PAQ.$$

211. Si l'on suppose que les extrémités des cordons AQ, AR, soient fixes, les valeurs de Q et R, données par les rapports ci-dessus, exprimeront les efforts que supportent ces points fixes en vertu de la force P, ou les tensions des deux cordons AQ, AR.

On voit que ces tensions seront d'autant plus grandes que l'angle QAR sera plus obtus, et qu'elles deviendront infinies, si cet angle devient égal à deux angles droits.

Une corde tendue en ligne droite à deux points fixes sera donc nécessairement rompue par la plus petite force qui lui serait appliquée

transversalement, si cette corde, n'étant pas susceptible de s'étendre, n'a pas d'ailleurs une résistance longitudinale infinie.

212. Les conditions précédentes pour l'équilibre des trois forces P, Q, R, supposent que le point A soit invariablement attaché à chacun des cordons, ou que le nœud qui les rassemble soit fixe : mais si le point A pouvait couler le long du cordon RAQ (fig. 75), comme ferait Fig. 75. un anneau infiniment petit, enfilé dans ce cordon, alors il ne suffirait plus que les forces P, Q, R eussent les relations données ci-dessus, il faudrait encore que la direction de la force P divisât en deux également l'angle formé par les deux parties de la corde QAR.

En effet, si l'on suppose que l'équilibre ait lieu, et qu'on fixe invariablement deux points F et F′ pris où l'on voudra sur ces cordons, il est clair que le point A est dans le même cas que s'il avait la liberté de se mouvoir dans une ellipse dont F et F′ sont les deux foyers, et AF, AF′, les rayons vecteurs. Or, pour qu'il soit en équilibre sur cette courbe en vertu de la force P, il faut que cette force soit perpendiculaire à la tangente à l'ellipse en ce point (190), et par conséquent divise en deux parties égales l'angle FAF′ formé par les rayons vecteurs.

Ainsi, dans le cas d'un nœud coulant, les deux parties de la corde le long de laquelle le nœud peut glisser doivent être également tendues.

213. On voit en même temps que, si l'on suppose le point ou l'anneau A fixe, les deux forces Q et R, appliquées au cordon QAR qui passe sur cet anneau, doivent être égales entre elles pour l'équilibre, et que la pression exercée par les deux forces sur le point fixe A est dirigée suivant la ligne qui divise en deux parties égales l'angle formé par les deux parties du cordon.

Quant au rapport de cette pression P à la tension Q du cordon, on aura, en nommant α la moitié de l'angle QAR, $P : Q :: \sin 2\alpha : \sin \alpha$; ou bien, $P : Q :: 2\cos\alpha : 1$.

D'où l'on voit que la pression exercée sur le point A est égale à la tension de la corde multipliée par le double cosinus de la moitié de l'angle QAR.

214. Actuellement soient plusieurs points A, B, C, D (fig. 76), liés entre eux par des cordons AB, BC, CD, et tirés par des forces N, P, Q, R, S, T, suivant d'autres cordons, mais de manière que chacun des points ou

Fig. 76.

nœuds A, B, C, D n'en assemble pas plus de trois en même temps.

Si tout le système est en équilibre, chaque point doit être en équilibre de lui-même, en vertu des forces qui lui sont appliquées et des tensions des cordons adjacens. Le point A, par exemple, n'étant lié immédiatement qu'au seul point B, doit être en équilibre en vertu des deux forces N et P, et de la tension du cordon AB; car les autres points C et D ne peuvent réagir sur lui que par le cordon AB.

Il faut donc que les trois cordons AN, AP, AB soient dans un même plan; et, si l'on nomme X la tension du cordon AB, il faut qu'on ait les rapports suivans :

$$N : P :: \sin PAB : \sin NAB,$$
$$P : X :: \sin NAB : \sin NAP.$$

De même, le point B doit être en équilibre en vertu de la force Q et des tensions suivant BA et BC. Or, la tension du cordon AB est la même que tout à l'heure; car l'action du point A sur le point B est parfaitement égale et contraire à l'action du point B sur le point A. Nous avons nommé X cette tension, nommons Y celle du cordon BC; on aura

$$X : Q :: \sin QBC : \sin ABC,$$
$$Q : Y :: \sin ABC : \sin QBA.$$

L'équilibre du point C donnera de même

$$Y : R :: \sin RCD : \sin BCD.$$
$$R : Z :: \sin BCD : \sin BCR.$$

On aura de même pour le point D deux proportions, etc.; et ainsi de suite, s'il y avait un plus grand nombre de points.

En multipliant par ordre un nombre convenable de ces proportions, on trouvera le rapport de l'une quelconque des forces, à telle autre force ou tension que l'on voudra. Si l'on multiplie les trois premières, par exemple, on aura le rapport de N à Q. Si l'on multiplie les quatre premières, on aura celui de N à la tension Y; etc.

215. Si les directions prolongées des forces P, Q, R, S divisent en deux parties égales les angles respectifs, NAB, ABC, BCD, CDT du polygone funiculaire, les cordons AN, AB, BC, CD, DT seront tous également tendus; car on aura, par les rapports précédens,

$$N = X,\ X = Y,\ Y = Z,\ Z = T.$$

De plus, en nommant 2α, 2β, 2γ, 2δ les angles du polygone, on aura, par les mêmes proportions,

$$P : Q : R : S :: \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : \cos\delta;$$

c'est-à-dire que les forces appliquées aux divers angles du polygone seront proportionnelles aux cosinus des moitiés de ces angles.

Donc, si, au lieu des forces P, Q, R, S, on substitue des points fixes A, B, C, D par-dessus lesquels passe la corde NABCDT; d'abord, les deux forces N et T qui tirent les extrémités de cette corde seront égales entre elles, et la corde sera partout également tendue; et en second lieu, la corde pressera sur chaque point en raison du cosinus de la moitié de l'angle formé en ce point; car chacun des points fixes A, B, C, D, tient lieu d'une force qui divise en deux également l'angle formé par les deux parties de la corde qui y passe (213).

216. Supposons que les deux côtés contigus AB, BC soient égaux: le cosinus de la moitié de l'angle compris est marqué par le rapport de l'un des côtés au diamètre du cercle qui passerait par les trois points A, B, C. Donc, si tous les côtés du polygone funiculaire sont égaux entre eux, on peut dire que les forces P, Q, R, S sont réciproques aux diamètres de ces différens cercles dont chacun passe par trois angles consécutifs du polygone.

Or, en considérant une courbe comme un polygone d'une infinité de côtés égaux, chacun

des cercles dont il s'agit devient, en chaque point de la courbe, ce qu'on nomme le cercle *osculateur*, c'est-à-dire le cercle qui a la même courbure.

Donc, lorsqu'une courbe funiculaire, rentrante sur elle-même, ou dont les deux bouts sont fixes, est tirée en tous ses points équidistans par une infinité de forces normales qui se font équilibre, la corde est partout également tendue, et chaque force normale à la courbe est réciproque au rayon de la courbure dans le point où cette force est appliquée.

On a un exemple très simple de cet équilibre dans une corde tendue par deux forces sur le contour d'une courbe fixe quelconque; car chaque point de la courbe fixe tient lieu d'une force qui serait dirigée suivant la normale à cette courbe. Ainsi dans l'équilibre de la corde, la tension est partout la même, et chaque point de la courbe fixe est pressé suivant la normale en raison inverse du rayon de courbure.

217. Le polygone funiculaire NABCDT étant en équilibre en vertu des forces N, P, Q, R, S, T, concevons que sa figure devienne parfaitement invariable, de manière que les points A, B, C, D ne puissent plus changer leurs

distances mutuelles; il est clair que l'équilibre subsistera toujours. Mais alors les forces N, P, Q, R, S, T étant en équilibre sur un système invariable, l'une d'elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres; ainsi ces autres forces ont une résultante. Or, comme cette résultante est exactement la même que si toutes les composantes s'étaient réunies parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque de sa direction, il s'ensuit que *chaque cordon est tendu par la force qui le sollicite, comme il le serait par la résultante de toutes les autres forces qu'on y transporterait parallèlement à elles-mêmes.*

218. Lorsque les cordons extrêmes AN, DT sont dans un même plan, les deux forces N et T ont une résultante; et, d'après ce qu'on vient de dire, cette force doit être égale et directement opposée à la résultante V des autres forces P, Q, R, S, comme si le polygone était invariable de figure. La résultante des forces P, Q, R, S appliquées aux angles du polygone, doit donc passer par le point O où vont concourir les deux cordons extrêmes; et par conséquent si les deux extrémités N et T de ces cordons sont fixes, on aura sur-le-champ les deux efforts que supportent ces points fixes,

ou les tensions des cordons AN, DT, en décomposant, au point O, la résultante V en deux forces N et T dirigées suivant ces cordons.

On trouverait de même les tensions de deux cordons quelconques situés dans un même plan, en prenant la résultante des forces appliquées sur les nœuds intermédiaires, et la décomposant suivant ces deux cordons au point où ils concourent : car si un polygone funiculaire est en équilibre, une partie quelconque de ce polygone est aussi en équilibre d'elle-même, en vertu des forces appliquées sur cette partie, et des tensions des deux derniers cordons que l'on y considère.

219. Lorsque les directions des forces P, Q, R, S, sont toutes parallèles (fig. 77), on a toujours pour les forces et les tensions les mêmes proportions que ci-dessus (214); mais il faut une condition de plus pour l'équilibre : c'est que toutes les forces P, Q, R, S et les côtés du polygone soient dans un même plan. Car, autour de chaque nœud, les cordons doivent être dans un même plan (210) : mais, si le cordon BQ est parallèle au cordon AP, le plan PAB des trois premiers cordons est le même que le plan ABQ des trois suivans, et ainsi de suite.

Fig. 77.

Dans cette hypothèse de puissances parallèles, comme on a

$$\sin PAB = \sin QBA,\quad \sin QBC = \sin RCB,\ \text{etc.},$$

on trouvera par les proportions (214) que les tensions successives N, X, Y, Z, T, sont réciproques aux sinus des inclinaisons des côtés sur la direction des puissances parallèles P, Q, R, S, et qu'ainsi chacune des tensions est représentée par la sécante de son inclinaison sur une perpendiculaire à ces puissances.

Cela pourrait se voir aussi, comme au n° 218, en comparant immédiatement les tensions de deux côtés quelconques, qui seront toujours ici situés dans un même plan.

Mais, pour avoir des expressions plus simples et plus commodes, regardons toutes les forces appliquées au polygone comme étant verticales, et supposons qu'un des côtés de ce polygone soit horizontal.

Si l'on voulait comparer la tension t d'un côté quelconque à la tension a du côté horizontal d'où l'on part, on imaginerait ces deux côtés prolongés jusqu'à leur rencontre, et l'on supposerait en ce point une force verticale V égale à la somme des puissances appliquées sur les nœuds intermédiaires, et qui ferait équilibre aux deux tensions a et t.

On aurait donc, en nommant φ l'inclinaison de la tension t sur la tension horizontale a,

$$t : a :: 1 : \cos\varphi,$$

ou $t = a$ séc φ : d'où l'on voit que, *dans l'équilibre d'un polygone funiculaire tiré par des puissances verticales, la tension de chaque côté est proportionnelle à la sécante de l'angle que fait ce côté avec l'horizon.*

On aurait ensuite

$$t : V :: 1 : \sin\varphi;$$

ce qui donne la tension d'un côté quelconque exprimée par son inclinaison sur le côté horizontal, et par la somme des puissances parallèles qui agissent entre ces deux côtés.

On aurait enfin (ce qui, d'ailleurs, est une suite des deux proportions précédentes)

$$V : a :: \sin\varphi : \cos\varphi,$$

ou $V = a$ tang φ; d'où l'on tire ce théorème relatif à la figure que prend le polygone en vertu des forces appliquées : *la tangente de l'inclinaison de chaque côté sur l'horizon est proportionnelle à la somme des puissances verticales appliquées sur le contour, depuis le côté le plus bas jusqu'à celui que l'on considère.*

De la Chaînette.

220. On peut considérer une corde pesante comme un fil chargé d'une infinité de petits poids distribués sur toute sa longueur, ou comme un fil sollicité en tous ses points par de petites forces verticales, et par conséquent parallèles. On voit donc que si cette corde est attachée à deux points fixes S et T (fig. 78), elle ne peut demeurer en équilibre, à moins qu'elle ne soit tout entière dans un plan vertical. Elle forme alors un polygone funiculaire d'une infinité de côtés, ou plutôt une ligne courbe que l'on nomme la *chaînette*. Fig. 78.

Pour trouver les efforts que la corde exerce sur les deux points S et T qui la soutiennent, on mènera à la courbe en ces points deux tangentes SO, TO, qui seront comme les prolongemens des derniers côtés du polygone funiculaire; appliquant ensuite au point O une force égale à la résultante de toutes les forces qui la sollicitent, c'est-à-dire égale au poids total de la corde, on décomposera cette force en deux autres dirigées suivant les tangentes OS, OT, et qui exprimeront les charges respectives des deux points de suspension (218).

On trouverait de même la tension de la

corde en un point quelconque, en imaginant que ce point est fixe, et en cherchant, comme ci-dessus, la charge qu'il éprouve par le poids du reste de la corde qui demeure en équilibre au-dessous.

Au reste, si l'on nomme t la tension en un point quelconque M de la chaînette, a celle qui a lieu au point B le plus bas, V le poids de l'arc s compris entre ces deux points, et φ l'angle formé avec la ligne horizontale par la tangente à l'extrémité de l'arc s, on aura entre ces quatre quantités les mêmes équations qu'au n° 219.

On voit donc, par la première équation $t = a \sec \varphi$, que, *dans une corde pesante en équilibre, la tension en chaque point varie comme la sécante de l'inclinaison de la courbe sur la ligne horizontale.*

Par la seconde équation $V = t \sin \varphi$, on voit que *la tension à l'extrémité d'un arc quelconque de la corde est égale au poids de cet arc divisé par le sinus de l'inclinaison de la corde en ce point.*

Et l'on doit remarquer que ces équations ont lieu, quelle que soit l'inégalité de la corde ou chaîne pesante que l'on considère.

Si la chaîne est uniforme, on peut représenter le poids V de l'arc s par la longueur de cet arc lui-même, et la troisième équation

devient $s = a \operatorname{tang} \varphi$: équation très simple de la chaînette entre les coordonnées s et φ.

Ainsi *la chaînette est une courbe telle, que la tangente de son inclinaison sur un axe horizontal augmente comme la longueur de l'arc à partir du point le plus bas.*

Cette courbe est donc la même à gauche et à droite de l'axe vertical qui passe par le sommet B; et, comme la parabole, elle a deux branches égales qui s'étendent à l'infini.

Il est même aisé de voir que le rayon R de la courbure y est exprimé par $R = a : \cos^2 \varphi$, et qu'ainsi il est réciproque au carré du cosinus de l'inclinaison de la courbe sur son axe horizontal.

Car, en considérant une courbe comme un polygone d'une infinité de côtés égaux c, on a pour le rayon R du cercle décrit sur deux côtés consécutifs comme cordes, $R = c : 2 \sin \varepsilon$, en nommant 2ε l'angle extérieur du polygone (216).

Or φ étant l'inclinaison du premier côté, et par conséquent $\varphi + 2\varepsilon$ celle du second, on a ici par les équations

$$s = a \operatorname{tang} \varphi \text{ et } s + c = a \operatorname{tang} (\varphi + 2\varepsilon),$$
$$c = a \left(\operatorname{tang} (\varphi + 2\varepsilon) - \operatorname{tang} \varphi\right),$$

expression qu'on peut ramener à celle-ci:

$$c = a.\frac{2\sin\varepsilon.\cos\varepsilon}{\cos\varphi.\cos(\varphi+2\varepsilon)}.$$

On a donc

$$R = \frac{c}{2\sin\varepsilon} = a.\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi.\cos(\varphi+2\varepsilon)};$$

d'où l'on tire, en faisant l'angle extérieur 2ε égal à zéro (afin de passer du polygone à la courbe même),

$$R = \frac{a}{\cos^2\varphi};$$

ce qu'il fallait démontrer.

221. Ce qu'on vient de dire d'une corde pesante, ou d'un assemblage de petits corps pesans unis ensemble par un fil inextensible, pourrait s'appliquer à plusieurs globules appuyés les uns contre les autres, et qui se soutiendraient mutuellement en voûte. Ils doivent affecter alors la forme d'une chaînette renversée. Car, si tous ces globules, à cause de leur impénétrabilité mutuelle, sont en équilibre en vertu de leur poids, ou des forces verticales qui les sollicitent, il est clair qu'ils demeureraient encore en équilibre si ces forces venaient toutes à agir en sens contraire, pourvu qu'alors on supposât tous ces globules liés deux à deux par un fil inextensible; mais alors ce fil formerait une chaînette renversée : donc il a actuellement cette figure.

C'est encore la figure que prendrait une voile verticale enflée par le vent. Car, considérez dans cette voile une section quelconque horizontale s que nous regarderons comme un polygone d'une infinité de côtés égaux. Il est visible que le nombre des molécules d'air qui viennent rencontrer un de ces côtés, est proportionnel, non pas à la longueur c de ce côté, mais à sa projection $c.\cos\varphi$ sur une perpendiculaire à la direction du vent. Ainsi, la force qui vient sur chaque élément de la courbe s est proportionnelle au cosinus de son inclinaison φ à la perpendiculaire dont il s'agit. Mais cette force n'agit pas tout entière sur la voile : car, à la rencontre du côté c, la vitesse v de chaque molécule d'air se décompose en deux : l'une $v\sin\varphi$ parallèle à c, et qui ne tend qu'à faire glisser cette molécule sur la voile sans y produire aucun effet ; l'autre $v\cos\varphi$ perpendiculaire au côté c, et qui seule agit pour tendre cette voile. La force normale qui presse chaque élément de la courbe s est donc proportionnelle à $\cos^2\varphi$.

Mais une courbe étant tenue en équilibre par des forces normales appliquées en tous ses points équidistans, chacune d'elles (216) est réciproque au rayon de la courbure

dans le point où cette force est appliquée : *et vice versâ* ce rayon est réciproque a la force. Or ici la force est proportionnelle à $\cos^2\varphi$.

Donc, une section quelconque horizontale faite dans une voile verticale enflée par le vent, est de telle nature, que le rayon osculateur y est réciproque au carré du cosinus de l'inclinaison de la courbe sur une perpendiculaire à la direction du vent : ce qui est précisément une chaînette dont l'axe serait dans cette direction (220).

Des Poulies et des moufles.

222. Considérons maintenant un système de poulies mobiles A, A′, A″ (fig. 79). La première A, qui soutient un poids P attaché à sa chape, se trouve embrassée par une corde dont l'une des extrémités F est fixe, tandis que l'autre est attachée à la chape de la poulie suivante A′; cette seconde poulie est de même embrassée par une corde dont l'une des extrémités F′ est fixe, tandis que l'autre est attachée à la chape de la troisième poulie A″, et ainsi de suite jusqu'à la dernière, dont le cordon, arrêté d'une part à un point fixe F″, est tiré de l'autre par une puissance Q. Fig. 79.

Si tout le système est en équilibre, chaque

poulie est en équilibre d'elle-même, en vertu des forces ou des tensions qui agissent sur elle.

Ainsi, nommant r, r', r'' les rayons respectifs des poulies; c, c', c'', les sous-tendantes des arcs embrassés par les cordons; X la tension du premier cordon; Y celle du suivant; on aura pour l'équilibre de la poulie A (185),

$$X : P :: r : c.$$

On aura de même pour l'équilibre de la poulie A′,

$$Y : X :: r' : c';$$

et pour la troisième A″,

$$Q : Y :: r'' : c'';$$

et multipliant par ordre, il viendra

$$Q : P :: rr'r'' : cc'c'',$$

c'est-à-dire, *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des poulies est au produit des sous-tendantes des arcs embrassés par les cordons.*

223. Si tous les cordons deviennent parallèles (fig. 80), les sous-tendantes c, c', c'', deviennent égales aux diamètres $2r$, $2r'$, $2r''$, et l'on a, en divisant les deux termes du dernier rapport par le produit $rr'r''$, Fig. 80.

$$Q : P :: 1 : 2.2.2,$$

c'est-à-dire qu'en général *la puissance est au poids comme l'unité est au nombre 2 élevé à une puissance marquée par le nombre des poulies.*

C'est le cas le plus favorable à la puissance; car le produit des sous-tendantes c, c', c'' est le plus grand possible, lorsqu'elles sont égales aux diamètres.

Si, dans chaque poulie, l'arc embrassé par la corde était le tiers de la demi-circonférence, les sous-tendantes de ces arcs seraient égales aux rayons respectifs des poulies, et la puissance serait égale au poids.

224. Une *moufle* est un système de poulies assemblées dans une même chape, ou sur des axes particuliers (fig. 81 et 82) ou sur le même axe (fig. 83). Fig. 81, 82, 83.

Considérons deux moufles, l'une fixe et l'autre mobile, et supposons que toutes les poulies soient embrassées par une même corde attachée par une extrémité à la chape de l'une des moufles, et tirée à l'autre extrémité par une puissance Q, qui fait équilibre à un poids P suspendu à la moufle mobile.

Si l'on suppose, ce qui a presque toujours lieu d'une manière sensible, que les diverses

parties de la corde soient parallèles, il est visible qu'on aura, *la puissance* Q *est à la résistance* P, *comme l'unité est au nombre des cordons qui soutiennent la moufle mobile;* car toutes les poulies étant embrassées par la même corde, et devant être en équilibre, chacune en particulier, les cordons sont également tendus. On peut donc considérer le poids P comme soutenu par autant de forces égales et parallèles qu'il y a de cordons qui vont directement d'une moufle à l'autre, et par conséquent la tension de l'un de ces cordons, ou la puissance Q est au poids P, comme l'unité est au nombre de ces cordons.

Ainsi dans le cas de la figure 81, la puissance est le sixième de la résistance; et dans le cas de la figure 82, elle n'en est que le cinquième, parce qu'il y a un cordon de moins pour soutenir la moufle mobile.

225. Considérons enfin un système de tours, A, A′, A″ qui réagissent les uns sur les autres, comme on le voit dans la figure 84. Soient r, r', r'' les rayons respectifs de leurs cylindres; R, R′, R″ ceux de leurs roues. La corde appliquée tangentiellement au premier cylindre porte un poids P, et la corde appliquée à la roue, au lieu d'être tirée immédiatement par Fig. 84.

une puissance, est attachée au cylindre du second tour A′. La roue de celui-ci est de même tirée par une corde qui passe sur le cylindre du troisième tour A″ et ainsi de suite jusqu'au dernier, dont la roue est tirée par la puissance Q.

Si le système est en équilibre, chaque tour est en équilibre de lui-même en vertu des tensions des cordons qui sollicitent le cylindre et la roue. Ainsi, en nommant X la tension du cordon qui va du premier tour au second, on aura (186)

$$X : P :: r : R;$$

en nommant Y celle du cordon suivant, on aura

$$Y : X :: r' : R',$$

et de même pour le dernier tour,

$$Q : Y :: r'' : R'';$$

et multipliant par ordre,

$$Q : P :: rr'r'' : RR'R'',$$

c'est-à-dire, *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des cylindres est au produit des rayons des roues.*

Des Roues dentées.

226. Si l'on rapproche tous ces tours, de manière que la roue du premier devienne tangente au cylindre du second, et que la roue de celui-ci soit tangente au cylindre du troisième, et ainsi de suite; et si l'on suppose que chaque roue s'engage au cylindre contigu, de telle sorte qu'elle ne puisse tourner sans faire tourner ce cylindre, et réciproquement, on pourra supprimer les cordes qui lient tous ces tours, et l'on aura toujours le même rapport que ci-dessus entre la puissance et la résistance.

Pour engager solidement chaque roue avec le cylindre du tour suivant (fig. 85), on pratique à leurs circonférences des *dents* également espacées, qui engrènent les unes dans les autres, de manière que chaque roue, qu'on nomme alors *roue dentée*, ne peut tourner sur son axe, sans que le cylindre, qu'on nomme alors *pignon*, ne tourne en même temps sur le sien. Fig. 85.

On a donc, pour l'équilibre de deux forces qui réagissent l'une sur l'autre au moyen des roues dentées: *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.*

Du Cric.

227. On considère, dans le *cric* simple, un pignon que l'on fait tourner sur son axe au moyen d'une manivelle (fig. 86): ce pignon engrène avec une barre inflexible dentée, de manière qu'en tournant sur son axe, il oblige la barre à se mouvoir dans le sens de sa longueur. En supposant donc une résistance qui s'oppose directement au mouvement de cette barre, résistance que l'on peut considérer comme une force perpendiculaire à l'extrémité du rayon du pignon, il est visible que l'on aura: *la puissance appliquée à la manivelle est à la résistance, dans le sens de la barre, comme le rayon du pignon est au rayon de la manivelle.*

Fig. 86.

D'où l'on voit que l'effort exercé par le cric sera d'autant plus considérable que le rayon du pignon sera plus petit par rapport à celui de la manivelle.

Lorsqu'on veut augmenter encore la force du cric, sans augmenter le bras du levier de la manivelle et sans diminuer le rayon du pignon, au lieu de faire agir immédiatement ce pignon sur la barre dentée, on le fait agir sur une roue dentée intermédiaire, et c'est le

pignon de cette roue qui engrène avec la barre. Alors on a pour l'équilibre: *la puissance appliquée à la manivelle est à la résistance, dans le sens de la barre, comme le produit des rayons des deux pignons est au produit du rayon de la roue par le rayon de la manivelle.*

De la Vis sans fin.

228. On peut encore considérer une vis mobile autour de son axe, et dont le filet mène les dents successives d'une roue à laquelle il se présente toujours d'une manière uniforme; et c'est ce qui compose la *vis sans fin.*

Par l'équilibre de la vis, on voit (fig. 87) que la puissance Q, appliquée à la manivelle dont le rayon est R, est à l'effort f, avec lequel le filet presse la dent de la roue, comme le pas h de la vis est à la circonférence $2\varpi R$, que tend à décrire la puissance; et l'on a

$$Q : f :: h : 2\varpi R.$$

Actuellement si cette roue dentée, d'un rayon A, fait tourner un cylindre de même axe, et monter un poids P, suspendu au bout d'une corde qui s'enroule sur ce cylindre, on aura par l'équilibre du treuil, en nommant a le rayon du cylindre,

$$f : P :: a : A;$$

et, multipliant par ordre,

$$Q : P :: ah : 2\varpi R.A,$$

c'est-à-dire, *la puissance est au poids comme le produit du pas de la vis par le rayon du treuil, est au produit du rayon de la roue dentée par la circonférence que tend à décrire la puissance.*

D'une machine nouvelle qu'on a nommée le Genou.

229. Cette machine est composée de deux barres ou verges raides AO, BO (fig. 88 et 89), jointes en O par une charnière sur laquelle elle peuvent tourner comme les deux branches d'un compas. L'extrémité A de la première est liée par une autre charnière à une barre inébranlable AC, de sorte que cette branche AO est comme un levier dont l'appui fixe est au point A; mais l'extrémité B de la seconde branche ne fait que poser sur la barre inébranlable, ou plutôt elle est contenue dans la rainure fixe AC, le long de laquelle elle peut glisser librement.

Fig. 88. et 89.

Par la nature même de cet assemblage, il est évident que, si une puissance agit pour faire tourner la branche OA autour du point A, et rapprocher ainsi le point O de l'axe fixe AC, l'angle O du genou tend à s'ouvrir, et le point B tend à s'éloigner de A en glissant dans la rainure AC. Donc, si l'on applique en B une force convenable en sens contraire, elle fera équilibre à la puissance; et c'est dans le rapport de ces deux forces que consiste la loi de cette machine, qui dépend, comme on voit, de la théorie du levier et du plan incliné.

Au lieu d'appliquer immédiatement la puissance P à la branche OA, on l'applique ordinairement à une barre *mn* solidement liée avec elle; et c'est à l'aide de cette barre *mn*, qu'on agit sur le genou, pour exercer en B, le long de la rainure, l'effort Q ou la pression qu'on veut produire.

Supposons donc que la puissance P agisse au point *n*, perpendiculairement à la distance A*n*, ce qui est la position la plus favorable à l'action de cette puissance; et réduisons toute la figure aux lignes droites OA, OB, AC, A*n*, qui sont toutes dans un même plan avec les directions des forces appliquées.

Si l'on considère d'abord cette puissance P qui tend à faire tourner le levier AO autour du point A, et qu'on cherche avec quelle force X elle pousse le point O, et par conséquent

le point B, dans le sens OB, on verra, par la loi du levier, que ces deux forces P et X sont entre elles comme leurs bras de levier Ah et An, de sorte qu'on aura P : X :: Ah : An; ou si l'on fait, pour abréger, le bras A$n = r$, le côté AO $= a$, et par conséquent A$h = a \sin$ O; en désignant par O l'angle du genou, on aura plus simplement

$$P : X :: a \sin O : r.$$

Actuellement, cette force X qui pousse B vers le plan incliné AC, est à la force Q, qui retient ce point le long du même plan, comme le rayon est au cosinus de l'inclinaison OBA; de sorte qu'en nommant B cet angle, on a

$$X : Q :: 1 : \cos B;$$

et, multipliant par ordre, il vient

$$P : Q :: a \sin O : r \cos B,$$

proportion qui contient la loi cherchée de l'équilibre du genou.

230. On pourrait encore présenter la démonstration précédente d'une manière aussi simple et plus conforme à la méthode générale indiquée à la fin du n° 209; car le système etant supposé en équilibre, chaque partie doit être en équilibre d'elle-même, en vertu des

forces appliquées et de la réaction qu'elle éprouve de la part des autres parties. Ainsi le levier OA doit être en équilibre en vertu de la puissance P et de l'action X du point B sur le point O de ce levier, action qui ne peut avoir lieu que dans le sens BO; et l'on a

$$P : X :: a \sin O : r.$$

Maintenant le point B doit être en équilibre de lui-même, en vertu de la force Q qui le tire le long du plan BA, et de la réaction du point O qui le pousse suivant OB contre ce même plan; et comme cette réaction est encore égale à X, on a, par la théorie du plan incliné,

$$X : Q :: 1 : \cos B,$$

ce qui redonne, en multipliant par ordre, la même proportion trouvée ci-dessus, d'où l'on tire

$$Q = \frac{Pr \cos B}{a \sin O},$$

pour l'expression de l'effort Q exercé par la puissance.

Remarque.

231. A mesure que l'angle B diminue, l'angle O du genou augmente; le facteur cos B croît donc sans cesse vers l'unité, et le facteur sin O

diminue vers zéro, de manière qu'ils peuvent approcher de ces limites d'aussi près qu'on voudra. Or, la résistance Q étant proportionnelle à cos B et réciproque à sin O, on voit par cette double raison, que la force Q augmente à mesure que les deux côtés du genou s'approchent d'être en ligne droite, et qu'à cette limite, elle serait infinie : ce qui veut dire qu'elle augmente sans bornes, et qu'ainsi la pression exercée par le genou, dans le sens de la rainure, peut devenir plus grande que toute pression donnée.

On voit encore que la puissance a d'autant plus d'avantage, que le côté AO $= a$ est plus court, et que le bras de levier A$n = r$ est plus considérable. Par cette dernière raison, il y aura de l'avantage, pour une même longueur de la barre *mn*, à implanter cette barre sur le côté le plus près qu'on pourra de l'angle du genou.

Si la puissance P, au lieu d'agir perpendiculairement sur la ligne A*n*, agissait sous un autre angle quelconque dans le même plan, il faudrait prendre, pour le bras de levier *r*, la distance de cette force au point fixe.

S'il y avait plusieurs forces pour faire tourner le levier AO, il faudrait mettre dans l'équation précédente, au lieu du moment P*r*, la somme des momens de toutes ces forces.

Du Genou isocèle.

232. Supposons que le triangle AOB soit isocèle, et qu'ainsi les angles A et B soient égaux ; l'angle O devient le supplément de 2B, et l'on a sin O $=$ 2 sin B cos B. La proportion donnée plus haut pour l'équilibre devient donc

$$P : Q :: 2a \sin B : r,$$

ou bien, si l'on aime mieux introduire dans la proportion l'angle O des deux côtés du genou, comme l'angle B est complément de $\frac{O}{2}$, on aura sin B $= \cos \frac{O}{2}$, ou simplement sin B $= \cos \varphi$, en faisant, pour simplifier, $\frac{O}{2} = \varphi$, et la proportion sera

$$P : Q :: 2a \cos \varphi : r,$$

ce qui donne une expression très simple de la loi de l'équilibre.

Mais on peut encore, au lieu des sinus ou cosinus, n'employer que des lignes tirées de la construction de la machine ; car il est évident que le terme $2a \sin B$, ou $2a \cos \varphi$, vaut deux fois la flèche OI $= f$ d'un arc de cercle qui serait conduit par AOB ; donc, si l'on voulait nommer simplement cette ligne OI la *flèche* du genou, la loi de l'équilibre pourrait s'énoncer de la manière suivante :

Dans l'équilibre du genou dont les côtés sont égaux, la puissance qui tend à faire tourner le premier côté autour de son extrémité fixe, est à la résistance que l'extrémité mobile du second côté éprouve dans le sens de la rainure, comme le double de la flèche du genou est au bras du levier par lequel agit la puissance.

233. J'ai fait abstraction du poids des parties de la machine, mais il est bien aisé d'y avoir égard. Et d'abord, l'axe ou la rainure AC étant supposée fixe, son poids G ne change en rien la proportion trouvée pour l'équilibre; il ne fait qu'ajouter à la pression de cette barre sur ses appuis. Mais le poids de la première branche AO, que je représente par $2p$, favorise l'action de la puissance; et si l'on suppose, par exemple, que l'axe AC soit vertical, et la branche AO d'une grosseur uniforme, de manière que son centre de gravité tombe au milieu de AO, il est évident que le poids $2p$ ajoute au moment Pr de la puissance, le moment pf. Enfin le poids $2p$ de la seconde branche BO, que je suppose égal et appliqué de même au milieu de BO, peut se décomposer en deux forces égales, l'une p appliquée en O, l'autre p appliquée en B en sens opposé de Q. Or la première force p à la distance f du point fixe, ajoute encore au moment de la puissance le

moment pf, et la seconde appliquée en B, diminue la force Q de p.

Ainsi l'équation de l'équilibre, qui était

$$P.r = Q.2f,$$

devient, quand on a égard au poids de la machine,

$$P.r + pf + pf = (Q - p)\,2f,$$

ce qui donne

$$P.r = (Q - 2p)\,2f;$$

d'où l'on voit que le poids de la machine, dans la situation que je lui ai donnée, augmente l'effort Q d'une quantité $2p$ égale à la moitié du poids des deux branches mobiles du genou.

Des pressions exercées sur les appuis.

234. Quant aux pressions que souffre l'axe fixe AC, tant en vertu des forces appliquées que du poids de la machine, voici comment on peut les calculer.

Premièrement, cet axe est pressé au point B par une force perpendiculaire V, résultante de X et de $Q - p$, et dont la valeur est exprimée par $(Q - p)\cot\varphi$.

En second lieu, le point fixe A est pressé par le poids G de la barre AC et par la résultante de toutes les forces qui agissent sur la branche AO, et qu'on transporterait parallèlement à

INSTITUTO DE FISICA DA U.F. BIBLIOTECA

elles-mêmes au point A. Or, qu'on décompose d'abord chacune de ces pressions en deux autres, l'une dirigée dans l'axe AC, l'autre perpendiculaire au même axe, on aura, pour les deux composantes de P, P cos ω et P sin ω, ω étant l'inclinaison de P sur AC; pour les deux composantes de X, on aura $(Q-p)$ et V; enfin pour les deux poids $2p$ et p transportés en A, on aura la force $3p$ dirigée suivant l'axe AC. Donc, en réduisant, le point A souffrira, dans le sens de l'axe AC, une pression α égale à $G+P\cos\omega-Q+4p$; et dans une direction perpendiculaire, une pression β égale à $P\sin\omega+(Q-p)\cot\varphi$. De sorte que la pression totale du point fixe sera exprimée en grandeur par $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, et sera inclinée sur l'axe AC d'un angle dont la tangente sera $\frac{\beta}{\alpha}$.

Ainsi l'on saura avec quelle force l'axe du genou doit être retenu et en A et en B, pour n'être pas entraîné par l'action combinée des forces appliquées et du poids de la machine.

235. J'ai cru devoir expliquer cette machine nouvelle avec assez de détail, parce qu'elle m'a paru ingénieuse, et qu'elle n'est encore démontrée nulle part. Elle est à peu près du même genre que la vis, mais d'une construction beaucoup plus simple : on peut s'en servir de la

même manière, pour exercer, à l'aide d'une puissance médiocre, des pressions très considérables, ou pour former, sur certains corps, de fortes et vives empreintes.

Sur un ancien paradoxe de Statique relatif à la théorie des momens.

236. La loi du levier, comme on l'a vu plus haut, et comme on le sait depuis long-temps, est que les deux forces appliquées soient réciproques à leurs distances au point d'appui, et qu'ainsi les momens de ces forces soient égaux entre eux pour l'équilibre.

Or il y a une machine singulière, dont l'idée est due à *Roberval*, et qui présente une espèce de levier où deux poids égaux se font toujours équilibre, quoiqu'on les suspende à des bras de levier quelconques inégaux; et de là résulte, dans la théorie des momens, une espèce de paradoxe, qu'on a tâché de résoudre par une certaine décomposition de forces, mais dont il me semble qu'on n'a point encore donné la véritable explication. (*Voyez* l'article de d'*Alembert*, au mot *Levier*, dans l'Encyclopédie.)

Cependant on pouvait reconnaître d'abord que ce cas d'équilibre n'a rien de contraire à la loi générale du levier; car la machine de Roberval n'est point un véritable levier, c'est-à-dire

un corps ou une verge *raide* mobile autour d'un *seul point fixe* : c'est un assemblage ou système de figure *variable*, dans lequel il y a *deux points fixes*, et où il n'est pas du tout surprenant que la condition de l'équilibre soit tout autre que dans le levier simple. Ainsi, par cette seule distinction que nous avons établie entre une machine simple et une machine composée, le paradoxe s'évanouit. Mais on n'avait point encore une définition bien précise des machines, ni surtout une idée nette des *momens*, efforts d'un certain genre que les *couples* seuls ont mis en évidence, et pour ainsi dire rendus sensibles dans toute la Mécanique. Et en effet, par cette théorie des couples, la machine de Roberval n'offre pas même de difficulté : car, à l'aide des deux points fixes qui existent dans le système, il peut très bien arriver que chacun des couples qui viennent des deux forces appliquées se trouve séparément détruit par la résistance de ces points, et que, dans une pareille machine, le rapport des momens soit tout-à-fait arbitraire. C'est en effet ce qui a lieu, comme on va le voir tout à l'heure : et ce cas singulier d'équilibre, loin d'offrir un paradoxe, n'est qu'une nouvelle confirmation de nos principes; et je ne m'y arrête un instant que pour en donner, par les couples, la démonstration la plus claire, et peut-être la seule exacte qu'on en ait encore présentée jusqu'ici.

De la Balance de Roberval.

237. Imaginez quatre règles deux à deux égales et parallèles, et formant un parallélogramme AB*ab* (fig. 90 et 91), dont les côtés soient mobiles autour des angles A, B, *a*, *b*, comme sur des charnières. Supposez que les milieux F et *f* des deux côtés AB, *ab*, soient fixes, et, pour plus de clarté, que ces deux points tombent dans la même verticale F*f*; vous aurez une machine formée par la réunion de deux balances égales et parallèles, qui se répondent dans un même plan vertical, et dont tous les mouvemens autour de leurs appuis se suivent sans se nuire en aucune manière. Car si l'une d'elles, AB par exemple, tourne autour de son appui fixe F, l'autre *ab* tourne en même temps sur le sien dans le même sens et d'une même quantité angulaire; et le parallélogramme AB*ab* prend toutes les figures qu'il peut affecter, en changeant ses angles, sans changer la longueur de ses côtés. Fig. 90 et 91.

Si donc, à l'un de ces leviers tel que AB, et en des points quelconques de ce levier, ou même de son prolongement, étaient appliquées deux forces qui se fissent équilibre, il faudrait

nécessairement que ces deux forces fussent réciproques à leurs distances au point d'appui F, comme si le levier AB était seul et parfaitement libre; car ce levier est libre en effet, puisque l'autre *ab* ne fait que suivre, et, pour ainsi dire, répéter ses mouvemens, sans y porter la moindre altération. Ainsi les momens devraient être égaux de part et d'autre autour du point fixe F, et il n'y aurait là rien qui ne fût entièrement d'accord avec la théorie.

Mais si au lieu d'appliquer les forces ou les deux poids P et Q à l'un de ces leviers, on les applique, le premier P, à une barre KI invariablement fixée à angle droit sur le côté B*b* qui unit les deux balances, le second Q à une barre GH, fixée de même sur le côté A*a*, on trouve que ces deux poids, pourvu qu'ils soient égaux, se font toujours équilibre, quelles que soient les longueurs des bras IK et GH où ils sont suspendus; et c'est ce qu'il faut montrer ici comme une conséquence toute naturelle de notre théorie des momens.

Pour cela, qu'on transporte la force P parallèlement à elle-même de I en K dans la droite B*b*, et l'on a un couple (P, — P) dont le bras de levier est IK. Mais ce couple est détruit par les deux points fixes; car il peut d'abord être changé en un autre équivalent d'un bras égal

à la distance *mn* des deux balances AB et *ab*, ensuite, comme le bras KI est invariablement attaché au côté B*b*, par l'hypothèse même, ce couple transformé (P′, — P′), peut être tourné dans son plan, et appliqué exactement sur le côté B*b*. Dans cette position, l'une des forces P′ se dirige vers le point F qui est fixe, l'autre — P′ se dirige vers l'autre point fixe *f*, et le couple est détruit, quel que soit son moment P′ × *mn* ou P × IK. Ainsi il ne reste, de ce côté de la machine, que la force P transportée au point K.

Pareillement, la force Q peut être transportée parallèlement à elle-même de G en H, et le couple (Q, — Q) qu'elle produit, pouvant être changé en un autre (P′, — Q′) appliqué sur le côté A*a*, se trouve détruit, comme le précédent, par la résistance des deux points fixes.

Il ne reste donc que les deux forces P et Q, mais appliquées maintenant aux points K et H, ou si l'on veut en B et A, et qui, par l'équilibre de la balance AB, doivent être parfaitement égales entre elles. Ainsi, dans la balance de Roberval, la condition unique pour l'équilibre est l'égalité des deux poids, quelles que soient leurs distances aux points d'appui.

Cette machine est en quelque sorte, pour les simples forces, ce que le levier ordinaire est

pour les couples ou momens. Dans l'équilibre du levier, les deux forces peuvent être dans un rapport quelconque, il suffit que les momens soient égaux : mais, dans la balance de Roberval, il faut que les forces soient égales, et c'est le rapport des momens qui est arbitraire.

238. Au reste, ceci n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale, car, au lieu de deux balances AB et *ab*, on pourrait considérer deux leviers égaux et parallèles, dont les appuis F et *f* ne soient plus au milieu de leurs longueurs, mais divisent ces lignes dans un même rapport quelconque. De plus, on pourrait supposer que les forces P et Q, qui agissent sur les barres IK, GH, ne soient point parallèles, mais dirigées comme on voudra dans le même plan. On démontrerait exactement de la même manière que les deux forces P et Q étant transportées parallèlement à elles-mêmes aux deux bouts B et A de l'un des deux leviers AB de la machine, les deux couples qui naissent de cette translation sont séparément détruits par les points fixes; que, par conséquent, la condition unique pour l'équilibre, est que les deux forces appliquées soient entre elles dans un rapport constant, qui ne dépend point de leurs distances au point F, mais uniquement des distances de ce point aux

deux parallèles à ces forces, menées par les deux bouts du levier. Ainsi, quand deux forces sont une fois en équilibre sur cette machine, on peut les transporter où l'on veut parallèlement à elles-mêmes, sans que l'équilibre soit troublé. Elles réagissent toujours l'une sur l'autre de la même manière. La seule chose qui change est la grandeur des couples détruits, et par conséquent, la pression que souffrent en sens contraires les deux points fixes dans la direction des deux leviers.

Par exemple, dans le cas de P et Q parallèles, le point F, outre la pression verticale P+Q qu'il supporte, comme dans le levier ordinaire, éprouve encore, dans le sens du levier, une pression P′—Q′, égale à $\frac{P \times KI}{mn} - \frac{Q \times GH}{mn}$; et l'autre point fixe *f* éprouve une pression égale et parallèle, et de sens contraire : de sorte qu'il y a, sur l'axe F*f* qui joindrait les points fixes, un couple dont le moment est $P \times KI - Q \times GH$, c'est-à-dire égal à la différence des momens des forces appliquées, et qui tend à renverser la machine.

239. Il faut remarquer que, dans la démonstration précédente, il n'est pas nécessaire de supposer les barres KI et GH implantées à angle

droit, et sur le milieu des côtés B*b*, A*a*; elles peuvent y être fixées où l'on voudra et sous des angles quelconques; il suffit que la liaison avec ces côtés soit invariable.

240. On pourrait encore, au lieu de deux leviers AB et *ab*, imaginer deux tours égaux et parallèles, dont je suppose les deux axes projetés en F et *f*. Si les rayons correspondans des deux roues et des deux cylindres sont unis de même par des côtés parallèles B*b*, A*a* mobiles sur des charnières B, *b*, A, *a*, on aura encore une machine du même genre que la balance de Roberval, et où deux poids P et Q étant une fois en équilibre, y resteront toujours, à quelque distance qu'on les suspende sur les bras KI et GH.

241. Si l'on imagine enfin que les axes fixes de ces tours soient les axes de deux vis égales, qu'une puissance P tende à faire avancer dans leurs écrous, on verra de même que l'effort de cette puissance, pour faire avancer la vis, ne change point, quelle que soit la longueur du bras KI par lequel elle agit, et qu'il est toujours le même que si la force agissait simplement au point B, dans une direction parallèle.

242. Nous pourrions étudier encore d'autres machines; mais comme elles n'offriraient rien de nouveau qui méritât de trouver place dans les Élémens, nous n'étendrons pas plus loin ces applications. Notre objet principal, dans ces deux derniers chapitres, était de fixer, par quelques exemples très simples, les principes que nous avions établis et développés dans les deux chapitres précédens. Nous avons cru devoir indiquer en même temps la marche que l'on peut suivre pour trouver les conditions de l'équilibre dans quelque machine que ce soit, et c'est ce qui ne présentera aucune difficulté, d'après ce qu'on a dit aux n°s 209 et suivans, surtout lorsque l'on ne considérera que deux forces appliquées à la machine.

FIN.

MÉMOIRE

SUR

LA COMPOSITION DES MOMENS

ET DES AIRES

DANS LA MÉCANIQUE.

Des Couples.

Dans ma *Statique*, j'ai nommé *couple* l'ensemble de deux forces parfaitement égales, parallèles et de sens opposés. On sait que ces deux forces n'ont pas de résultante, c'est-à-dire ne peuvent être tenues en équilibre par aucune simple force dirigée comme on voudra dans l'espace. A la vérité, le calcul, qui donne, pour cette résultante, une force nulle appliquée à une distance infinie des composantes, ne nous apprend plus rien alors, puisqu'il donne la même expression pour deux autres forces quelconques égales, parallèles et de sens opposés, dont l'effet pourtant n'est pas le même que celui des deux premières; mais il est évident *à priori* que de telles forces ne peuvent avoir de résultante unique : car si l'on pouvait assigner la position de cette résultante à l'égard de l'une des forces du couple, on lui en trouverait sur-le-champ une autre parfaitement symétrique et de sens contraire à l'égard

de la seconde ; et elle aurait à la fois deux positions différentes ; ce qui est absurde.

L'effort d'un couple ne peut être contre-balancé que par celui d'un autre couple. J'ai fait voir que cet effort a pour mesure le produit de l'une des forces par la distance qui les sépare ; de sorte qu'en nommant ce produit le *moment* du couple, deux couples contraires se font équilibre, quand leurs momens sont égaux.

Composition des couples, analogue à la composition des forces.

J'ai d'ailleurs établi sur les couples tous les théorèmes qui correspondent à la composition des forces ; et même cette proposition (dont on fait si souvent usage), qu'une force peut être transportée en un point quelconque de sa direction, trouve ici son analogue, qui consiste en ce qu'*un couple peut être transporté partout où l'on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra dans ce plan, sans que son effet en soit changé.*

Ainsi des couples situés arbitrairement dans le même plan ou dans des plans parallèles sont des couples de même direction ; d'où l'on voit combien est illusoire l'expression que donne le calcul pour la résultante d'un couple, puisque, d'après cette propriété, il n'y aurait pas de lieu de l'espace où l'on ne pût la supposer appliquée ; ce qui n'a plus aucun sens.

Mais la proposition précédente est principalement utile dans la composition des couples, où elle permet de les rapprocher et de les disposer entre eux de la manière la plus favorable à la démonstration, et nous conduit par une voie très simple aux théorèmes suivans :

1°. *Deux couples situés d'une manière quelconque dans le même plan ou dans deux plans parallèles, se composent en un seul égal à leur somme, ou à leur différence, selon que ces deux couples sont de même sens ou de sens contraires.*

2°. *Deux couples situés d'une manière quelconque dans deux plans perpendiculaires aux deux côtés d'un parallélogramme, et représentés en grandeur par ces côtés, se composent en un seul situé dans un plan perpendiculaire à la diagonale, et représenté en grandeur par cette diagonale.*

D'où l'on peut conclure que *trois couples perpendiculaires aux trois arètes contiguës d'un parallélépipède quelconque, et représentés, pour leurs momens, par les longueurs de ces arètes, se composent en un seul, perpendiculaire à la diagonale, et représenté pour son moment par la longueur de cette diagonale.*

Ces théorèmes, comme nous le verrons tout à l'heure, renferment la théorie des momens, considérée de la manière la plus générale, et la théorie des aires, qui ne sont autre chose, dans le mouvement des corps que les momens des forces qui les animent ; mais ils se démontrent avec autant de simplicité que le parallélogramme des forces, et font descendre ainsi dans les Élémens les propositions les plus élevées de la Mécanique.

Qu'on me permette ici d'en rappeler en peu de mots l'usage dans la Statique, et, sans cesser de tendre vers l'objet de ce Mémoire, d'y arriver dans l'ordre naturel de nos idées.

I.

Usage des couples dans la Statique.

Une force étant appliquée en un point d'un corps ou système quelconque solide, si l'on prend un autre point quelconque dans ce corps, ou au dehors, pourvu qu'on l'y suppose invariablement attaché, et qu'on applique à ce nouveau point deux forces contraires égales et parallèles à la première, il est clair que l'état du corps ne sera pas changé ; mais on pourra considérer actuellement, au lieu de la simple force proposée, 1°. une force parfaitement égale, parallèle et de même sens, appliquée au nouveau point ; 2°. un couple formé par les deux forces parallèles restantes. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs, dans un plan quelconque parallèle au sien, ce qui est permis, il ne restera au point dont il s'agit qu'une force parfaitement égale et parallèle à la force primitive, et qui ne serait en quelque sorte que cette même force qu'on y aurait transportée parallèlement à elle-même.

On peut donc dire qu'une force peut être transportée parallèlement à elle-même en un point quelconque, pourvu que l'on considère le couple qu'elle engendre dans cette translation, et qui a pour mesure le produit de la force par le chemin qu'elle a parcouru.

Cela posé, tant de forces que l'on voudra étant appliquées d'une manière quelconque à un corps, si on les transporte toutes parallèlement à elles-mêmes en un même point quelconque, elles viendront s'y composer

en une seule que je nommerai la *résultante*, et tous les couples qu'elles ont produits dans leur translation se composeront en un seul, que je nommerai le *couple résultant*.

Composition générale des forces.

Ainsi, *des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, peuvent toujours se réduire à une seule, et à un couple unique, lesquels sont, en général, situés dans des plans différens.* Sur quoi l'on peut observer que la direction, la quantité et le sens de la résultante seront toujours les mêmes en quelque lieu qu'on ait pris l'*origine*, c'est-à-dire le point où l'on a transporté toutes les forces. En variant la position de ce point, la résultante ne fera que se transporter parallèlement à elle-même en divers lieux de l'espace, mais le plan et la valeur du couple changeront nécessairement.

Lois de l'équilibre.

Mais quelle que soit la position de l'origine, un couple ne pouvant jamais être tenu en équilibre par aucune simple force dirigée comme on voudra dans l'espace, il résulte de ce que nous venons de dire qu'il ne pourra jamais y avoir équilibre entre les forces, à moins que la résultante et le couple résultant ne soient tous les deux nuls à la fois.

Ainsi toutes les forces appliquées au corps, étant transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, doivent s'y faire équilibre entre elles, et tous les couples qu'elles produisent en se transportant en ce point doivent aussi se faire équilibre entre eux.

Telles sont les propriétés générales de l'équilibre, c'est-à-dire les conditions qui existent nécessairement dans l'équilibre de tout système libre. Elles fournissent les six équations connues, entre les forces décomposées suivant trois axes quelconques dans l'espace, et entre les couples décomposés suivant trois plans différens qu'on peut supposer conduits par ces axes.

A quoi se réduisent les conditions précédentes, quand il y a un point fixe dans le système.

Ces trois dernières équations suffisent, lorsqu'il y a un point fixe dans le système, en supposant qu'on ait pris ce point pour l'origine : car la résultante, se trouvant détruite par sa résistance, peut avoir telle valeur qu'on voudra, et il suffit que le couple résultant soit nul. On voit bien nettement par là que la pression exercée sur le point fixe est identiquement la même que si toutes les forces du système y étaient transportées parallèlement à leurs directions : car elles y sont actuellement transportées; et pour les couples qu'elles ont produits, comme ils doivent être en équilibre d'eux-mêmes, c'est-à-dire quand bien même le corps ne serait pas soutenu, il est évident qu'ils ne peuvent nullement charger le point fixe.

Propriété nouvelle de l'équilibre d'un corps solide.

Lorsque des forces sont en équilibre autour d'un système quelconque invariable de forme, on sait qu'elles peuvent toutes varier proportionnellement à leurs grandeurs sans cesser de se faire équilibre. Mais

on voit ici qu'elles peuvent encore s'approcher ou s'éloigner toutes d'un même point quelconque, proportionnellement à leurs distances à ce point, sans que cet équilibre soit troublé : car si chaque force se meut ainsi parallèlement à elle-même, dans le plan formé par sa direction et le point dont il s'agit, elle augmente ou diminue le couple qu'elle donne à son égard, dans le même rapport que sa distance à ce point, et par conséquent tous les couples du système conservent leurs positions, et demeurent proportionnels. Ainsi la résultante et le couple résultant étant une fois nuls, le seront toujours, et l'équilibre subsistera.

Condition nécessaire pour qu'un système quelconque de forces ait une résultante unique.

Les forces appliquées au système étant ramenées, comme nous venons de le voir, à une seule force et à un seul couple, si la force se trouve parallèle au plan du couple, on pourra amener ce couple dans un même plan avec elle, et les réduire tous deux à une force unique : et réciproquement, comme on a démontré qu'une force et un couple ne peuvent se réduire à une force unique sans être dans le même plan ou dans des plans parallèles, ce qui est ici la même chose, il s'ensuit que *des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace ne peuvent jamais se réduire à une seule, à moins que la résultante de toutes ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, n'ait une direction parallèle au plan du couple résultant.*

C'est par là qu'on peut voir comment trois forces

dirigées dans des plans différens, peuvent se composer en une seule, sans qu'il y ait aucune rencontre entre leurs directions; et comment une force peut se décomposer suivant trois directions qui ne rencontrent pas la sienne et qui ne se rencontrent pas entre elles.

Expression analytique des propriétés précédentes.

Pour soumettre les propositions précédentes au calcul, concevons à l'origine où l'on transporte toutes les forces, trois axes quelconques, que nous prendrons rectangulaires entre eux, pour plus de simplicité dans les expressions.

Soit R la résultante générale; X, Y, Z ses trois composantes suivant les axes des x, y, z; soient α, β, γ les trois angles respectifs que sa direction forme avec eux.

On aura, par le parallélépipède des forces,

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

et $$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \cos\beta = \frac{Y}{R}, \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Or, X, Y, Z sont respectivement égales aux sommes des forces décomposées parallèlement aux trois axes des x, y, z. On trouvera donc facilement par ces équations la valeur et la direction de la résultante générale. La première condition de l'équilibre, qui veut que cette résultante soit nulle, donnera ce qu'on nomme les trois équations de l'équilibre de *translation*, qui reviennent à ce que la somme des forces estimées suivant trois axes quelconques soit nulle d'elle-même par rapport à chacun de ces axes.

Soit G le moment du couple résultant; L, M, N les momens respectifs des trois couples dans lesquels il se décompose perpendiculairement aux trois axes des x, y, z; soient λ, μ, ν les trois angles que forme avec ces axes la perpendiculaire au plan de ce couple, et que nous avons nommée l'*axe* du couple.

On aura, par le parallélépipède des couples,

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

et $$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \cos\mu = \frac{M}{G}, \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Or, on voit (n°s 102 et 103 *de la Stat.*) que les couples L, M, N sont respectivement égaux aux sommes des momens pris dans l'acception ordinaire par rapport aux trois axes x, y, z, c'est-à-dire aux sommes des produits qui résultent des forces projetées sur chacun des plans coordonnés, multipliées par leurs distances à l'axe qui lui est perpendiculaire : on trouvera donc facilement par les équations ci-dessus la valeur et la position du couple résultant.

La seconde condition générale de l'équilibre, qui veut que ce couple soit nul, donnera ce qu'on appelle les équations de l'équilibra de *rotation*, qui consistent en ce que la somme des momens de toutes les forces, par rapport aux trois axes coordonnés, soit nulle d'elle-même relativement à chacun de ces axes.

Que ces sortes de produits qu'on appelle momens, *n'étaient au fond que la mesure de certaines forces cachées que les couples ont mises en évidence.*

On voit ici, par l'identité des couples avec les mo-

mens tels qu'on les considère ordinairement en Statique, quel rôle jouent ces sortes de produits dans la composition générale des forces et dans les lois de leur équilibre. A la vérité, dans l'équilibre d'un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe, les lois connues du levier nous montraient bien ces produits comme les efforts des puissances pour faire tourner le corps autour de cet axe, puisque l'on trouvait que la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens doit être égale à la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner dans le sens contraire. Mais, lorsqu'il n'y avait aucun point d'appui, et que le système était parfaitement libre dans l'espace, les momens ne restaient plus dans les conditions de l'équilibre que comme de simples expressions de calcul, et perdaient cette espèce de signification que leur donne la présence d'un axe fixe, et qui les avait fait nommer *momens* par les anciens géomètres. Or, par la théorie des couples, ils reparaissent dans l'équilibre des corps libres, comme dans l'équilibre des corps gênés par des obstacles. Estimés par rapport à un point quelconque du corps, ils mesurent certains efforts particuliers que l'on peut concevoir comme engendrés par les puissances qui se transportent parallèlement à elles-mêmes en ce point, et qui, tandis que ces puissances s'y composent et s'y font équilibre à leur manière, doivent aussi se composer et se faire équilibre à la leur. Ce n'est pas qu'au fond les valeurs des momens et des couples ne soient parfaitement les mêmes. L'analyse n'a pour objet que de simples rapports, et les diverses grandeurs, sous ses formules, ne conservent plus aucune trace des premières idées

qu'on y avait jointes. Mais, en Géométrie comme en Algèbre, la plupart des idées différentes ne sont que des transformations; les plus lumineuses et les plus fécondes sont pour nous celles qui font le mieux image, et que l'esprit combine avec le plus de facilité dans le discours et dans le calcul : or, les couples ont éminemment cet avantage sur les momens; et, si l'on considère que la théorie des momens se présente d'elle-même dans la réduction générale des forces et dans les conditions de leur équilibre; que, d'un autre côté, dans la Dynamique, la composition des mouvemens de rotation est aussi nécessaire que celle des mouvemens de translation, pour l'analyse complète du mouvement d'un corps de grandeur sensible, on verra que la composition des couples exposée ci-dessus, tant par la symétrie des théorèmes que par la simplicité des démonstrations, vient se ranger naturellement à côté de la composition des forces, et forme ainsi la seconde partie essentielle des Élémens.

Équation de condition pour qu'un système de forces ait une résultante unique.

Nous avons vu tout à l'heure que si des forces quelconques sont réductibles à une seule, la résultante générale sera parallèle au plan du couple résultant. Pour exprimer cette condition dans le calcul, il n'y a donc qu'à exprimer que l'axe du couple est perpendiculaire à la direction de la résultante, ou que le cosinus de leur inclinaison mutuelle est nul. Mais, d'après les dénominations précédentes, le cosinus de cet angle est

$$\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta.\cos\mu+\cos\gamma.\cos\nu;$$

expression qui étant égalée à zéro, après y avoir substitué à la place des cosinus leurs valeurs, donne sur-le-champ l'équation

$$XL+YM+ZN=0,$$

qui établit la relation cherchée entre les forces et leurs momens estimés par rapport aux trois axes.

Équations de condition pour qu'il y ait une résultante unique qui passe en un point donné.

Mais si l'on voulait exprimer que les forces sont réductibles à une seule qui passe en un point donné, on transporterait l'origine en ce point, et l'on exprimerait que le couple résultant y est nul. Ainsi a, b, c étant les coordonnées de la nouvelle origine, il suffirait, dans les expressions L, M, N, de mettre $x-a$, $y-b$, $z-c$, à la place de x, y, z; ce qui donnerait les nouveaux mouvemens L′, M′, N′, et l'on aurait les trois équations

$$L'=0,\ M'=0,\ N'=0,$$

qui nous font voir que la somme des momens doit être nulle par rapport à trois axes qui se croisent au point donné.

Si le point n'est pas donné, et qu'on cherche au contraire s'il y a dans l'espace quelque point où les forces peuvent donner un couple nul, on aura les trois mêmes équations, mais où a, b, c seront alors les inconnues. Or, en les éliminant, on trouvera d'abord, entre les forces proposées, l'équation de condition $XL+YM+ZN=0$, sans laquelle les trois premières ne peuvent subsister, et qui nous redonne ainsi la condition d'une résultante unique, comme cela doit être.

II.

Des Couples ou momens rapportés à différens axes.

Le couple résultant G décomposé perpendiculairement à un axe qui forme avec le sien un angle θ, étant égal à G cos θ; si l'on nomme λ', μ', ν', les trois angles que cet axe forme avec ceux des coordonnées, comme on a par la Géométrie

$$\cos\theta=\cos\lambda\cos\lambda'+\cos\mu\cos\mu'+\cos\nu\cos\nu',$$

on trouvera

$$G\cos\theta=L\cos\lambda'+M\cos\mu'+N\cos\nu',$$

formule très simple qu'*Euler* a donnée dans le tom. VII des Nouveaux Actes de Pétersbourg, mais à laquelle il n'était parvenu que par de longs circuits d'analyse. Cette équation nous apprend que *si l'on connaît les sommes* L, M, N, *des momens par rapport à trois axes rectangulaires, on trouvera sur-le-champ la somme des momens par rapport à un axe quelconque, en multipliant ces trois sommes respectives par les cosinus des angles que les trois axes font avec le nouvel axe donné.*

C'est ainsi qu'en Géométrie, pour projeter une ligne sur un axe quelconque, on peut d'abord projeter cette ligne sur trois axes rectangulaires; projeter ensuite ces trois projections sur l'axe donné, et ajouter ensemble ces projections de projections.

Du moment maximum *entre les momens rapportés aux différens axes qui passent par un même point.*

Puisque la somme des momens, par rapport à un

axe qui fait, avec celui du couple résultant, un angle θ, est G cos θ, il s'ensuit :

1°. *Que de tous les axes qui passent par l'origine, l'axe du couple résultant est celui par rapport auquel la somme des momens est la plus grande ;*

2°. *Que la somme des momens est la même par rapport à tous les axes qui font un même angle avec celui du plus grand moment, ou qui forment une surface conique décrite autour de lui sous cet angle ;*

3°. *Que la somme des momens est nulle par rapport à tous ceux qui font cet angle droit, ou qui forment un plan perpendiculaire à sa direction.*

L'axe et la valeur du moment *maximum* ne sont autre chose que l'axe et la valeur du couple résultant, et se déterminent par les mêmes équations. D'où l'on voit que *le carré du moment* maximum *est égal à la somme des carrés des momens par rapport à trois axes rectangulaires, et que son axe est la diagonale du parallélépipède construit sur les trois lignes qui représenteraient sur ces axes les grandeurs respectives des trois momens précédens.*

Ce sont les résultats que Laplace avait déjà tirés de l'Analyse; ils formaient de beaux *théorèmes* de Mécanique, et ils ne sont plus ici que des *corollaires évidens* de la composition des couples.

Mais voici de nouvelles conséquences, entièrement dues à nos principes, et qui achèvent toute la théorie des momens.

Du Moment minimum *entre l'infinité des momens* maxima *relatifs à tous les points de l'espace.*

Observons que tout ce que nous venons de dire est relatif à l'origine que l'on a choisie pour y transporter toutes les forces. En prenant cette origine ailleurs, la quantité, le sens de la résultante générale, ne changent pas, et sa direction demeure toujours parallèle à elle-même; mais le moment *maximum* varie de grandeur, et son axe s'incline sur sa première position. Pour chacun des points de l'espace, considérés successivement comme origines, il y a donc un axe autour duquel la somme des momens est un *maximum* relativement à tous les axes qui se croisent au même point. On pourrait donc demander en quel lieu il faudrait prendre l'origine ou le centre des momens, pour que le moment *maximum* y fût plus petit que partout ailleurs, et par conséquent fût le *minimum* des momens *maxima* relativement à tous les points de l'espace.

Pour trouver facilement la position de ce point, regardons toutes les forces comme réduites à une seule et à un couple, par rapport à un point quelconque connu, et suivons les variations qu'éprouve ce couple par le déplacement de l'origine.

D'abord il est visible qu'en déplaçant l'origine dans la direction même de la résultante générale, le couple résultant ne change pas ; car le couple que fournit la résultante en se transportant en un autre point de sa propre direction est nul de lui-même, et le couple primitif n'est pas altéré. Nous voyons donc que *les momens* maxima *sont constans pour toutes les origines*

prises le long d'une même droite parallèle à la direction de la résultante générale, et que leurs axes sont parallèles entre eux. Ainsi, tout ce que nous avons dit plus haut des momens par rapport aux axes qui se croisent en un même point subsiste de la même manière et avec les mêmes valeurs, pour tous les points de la résultante qui y passe.

Supposons donc que l'origine s'écarte de cette direction, et soit tellement placée dans l'espace, que le couple résultant soit perpendiculaire à la direction de la résultante ; je dis qu'alors ce couple est dans la position du *minimum ;* car si l'on déplace actuellement l'origine d'une manière quelconque, il ne pourra qu'augmenter. En effet, la résultante, en changeant de position, produira un couple perpendiculaire sur le premier ; et puisque ces deux couples sont rectangulaires, ils donneront par leur composition le nouveau couple résultant plus grand que l'un ou l'autre d'entre eux : donc le premier couple résultant aura augmenté ; donc il se trouvait dans la position du *minimum* lorsqu'il était perpendiculaire à la direction de la résultante générale, ou lorsque son axe coïncidait avec elle.

Comment on détermine l'axe du couple minimum.

Soit donc G une ligne qui représente à la fois l'axe et la valeur du couple résultant par rapport à un point connu ; R une autre ligne qui représente la valeur et la direction de la résultante en ce point ; φ l'angle que forment ces deux droites.

Pour avoir l'origine du couple résultant *minimum*, il faudra transporter la résultante R parallèlement à

elle-même, de telle sorte et d'une telle quantité p, que le couple Rp qu'elle produira, étant composé avec le couple primitif G, forme un couple résultant dont l'axe soit R.

L'axe du couple Rp doit donc être dans le plan des deux lignes R et G qui font un angle φ ; d'ailleurs il est nécessairement perpendiculaire à la direction R ; donc on aura, par le parallélogramme des couples,

$$Rp = G \sin \varphi ,$$

et, pour la valeur K du couple *minimum*,

$$K = G \cos \varphi .$$

Ainsi, en élevant au sommet de l'angle φ, et sur le plan de cet angle, une perpendiculaire $p = \frac{G \sin \varphi}{R}$, et menant par l'extrémité de cette perpendiculaire une parallèle à la direction de la résultante générale, on aura l'axe du *minimum* des momens *maxima*, et l'origine pourra être prise partout où l'on voudra sur cet axe.

Si l'on veut tout rapporter aux troix axes coordonnés, soient α, β, γ les inclinaisons de R sur ces axes, et λ, μ, ν celles de G sur les mêmes lignes ; on aura, pour l'inclinaison mutuelle φ de R et G,

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu ;$$

ou bien, en mettant, au lieu des cosinus, leurs valeurs données précédemment,

$$\cos \varphi = \frac{XL + YM + ZN}{RG},$$

d'où l'on tire

$$K = \frac{XL + YM + ZN}{R},$$

expression très simple de la valeur du couple *minimum* K.

Actuellement, soient a, b, c les trois coordonnées de l'extrémité de la perpendiculaire p; on aura d'abord $a^2+b^2+c^2=p^2$, qui donne, en mettant pour p sa valeur,

$$a^2+b^2+c^2=\frac{G^2-K^2}{R^2}.$$

Ensuite, comme p est à la fois perpendiculaire à R et à G, il est clair qu'on aura

$$aX+bY+cZ=0,$$
$$aL+bM+cN=0;$$

ce qui fait trois équations au moyen desquelles on pourra déterminer a, b, c, et par conséquent la position de l'axe du couple *minimum* dans l'espace.

De l'axe central *des momens.*

Cet axe remarquable, où la somme des momens est à la fois un *maximum* relativement aux axes qui se croisent au même point que lui, et un *minimum* relativement à ceux qui donnent les momens *maxima* aux divers points de l'espace, pourrait se nommer l'axe *central* des momens; et cette dénomination, déjà motivée en ce qu'il jouit d'une propriété exclusive par rapport à tous les autres, se trouve pleinement justifiée, si l'on observe qu'aux mêmes distances autour de lui, les momens *maxima* sont les mêmes, et que leurs axes ont, à son égard, des positions semblables.

En effet, le même raisonnement qui nous a fait passer tout à l'heure du couple résultant G au couple *minimum* K, nous ramène, dans l'ordre inverse, de celui-ci au premier, et par les mêmes équations,

$$Rp=G\sin\varphi, \text{ et } K=G\cos\varphi.$$

Mais ici, de quelque côté qu'on transporte la résultante R, pourvu que ce soit à une même distance p de sa position actuelle ou de l'axe *central*, on trouvera toujours un couple résultant G de même valeur, et une même inclinaison φ entre son axe et la résultante; et, de plus, le plan de ces deux droites sera toujours perpendiculaire à la ligne p: puisque, si tout cela n'avait pas lieu comme ci-dessus, en ramenant la résultante dans l'axe central, on ne retrouverait plus le même couple *minimum* K, ce qui ne peut pas être.

Les momens maxima *sont donc constans, non-seulement pour toutes les origines prises le long d'une parallèle à la résultante, comme nous l'avions déjà remarqué, mais encore pour toutes les origines prises sur le cylindre que décrirait cette droite autour de l'axe central qui lui est parallèle.*

Pour les axes de ces momens, tant que l'origine ne sort pas d'une même génératrice de ce cylindre, ils demeurent parallèles entre eux et forment un plan; mais si l'origine passe d'une génératrice à l'autre par la circonférence d'un cercle, ils forment un hyperboloïde de révolution autour de l'axe central.

Les momens *maxima* G ne varient donc qu'avec les distances p de leurs origines à l'axe central, et les deux équations précédentes nous donnent

$$G^2=R^2p^2+K^2,$$

équation qui nous fait voir que ces momens croissent, pour les origines prises à différentes distances de l'axe central, comme les ordonnées d'une hyperbole dont ces distances seraient les abscisses; ainsi leurs valeurs augmentent sans bornes, et il n'y a pas de moment *maximum maximorum*; ce qui était d'ailleurs assez évident de soi-même.

On a de plus, $\text{tang}\,\varphi = \frac{Rp}{K}$, ce qui donne les inclinaisons des axes des momens *maxima* sur l'axe central, et nous montre que leurs tangentes varient dans le rapport des distances de leurs origines à cet axe.

Remarquons encore que, dans le cas où la résultante générale est nulle, on a, par la première équation, $G = K$, quelle que soit la valeur de p.

Lors donc que les forces appliquées sont telles, qu'étant transportées en un même point, elles se font équilibre entre elles, les momens *maxima* sont les mêmes pour tous les lieux de l'espace, et leurs axes sont tous parallèles.

Si les forces appliquées ont une résultante unique, comme on a pour cette condition $\cos\varphi = 0$, l'équation $K = G\cos\varphi$ donne $K = 0$; c'est-à-dire que le moment *minimum maximorum* est nul, comme il est clair que cela doit être, puisque l'origine tombe alors sur la direction même de la seule force à laquelle se réduisent toutes celles du système.

Classification de tous les axes de l'espace auxquels on voudrait rapporter les momens d'un système de forces.

Telle est donc la théorie générale exposée ci-dessus que tous les axes de l'espace auxquels on peut rapporter les momens d'un système quelconque de forces, peuvent être distingués et classés entre eux de la manière suivante :

D'abord, si, pour simplifier les choses, nous ne considérons que les axes qui se croiseraient aux divers points qu'on peut prendre sur un même plan perpendiculaire à la direction de la résultante; nous observons :

1°. Que, parmi tous les axes qui se croisent en un même point, il y en a un seul distingué de tous les autres, en ce que la somme des momens y est un *maximum*.

Les autres se classent autour de lui en diverses surfaces coniques circulaires dont il serait l'axe commun. Pour tous ceux qui forment la même surface, les momens sont égaux, et ils varient d'un cône à l'autre en raison des cosinus des angles sous lesquels ces cônes sont décrits.

2°. Parmi tous les axes qui donnent les momens *maxima* relativement aux divers points du plan, il y en a un seul distingué de tous les autres, en ce qu'il donne le plus petit de ces *maxima*, ou le *minimum maximorum* des momens.

Les autres axes des *maxima* se classent autour de lui en diverses surfaces d'hyperboloïdes de révolution dont il serait l'axe commun. Pour tous ceux qui forment la surface d'un même hyperboloïde, les momens *maxima* ont la même valeur, et ils varient d'un hyperboloïde à l'autre, suivant les lois que nous avons données ci-dessus.

Actuellement, tout ce que nous venons de dire relativement aux diverses origines prises dans un même plan perpendiculaire à la résultante, subsiste de la

même manière, et avec les mêmes valeurs, pour tous les lieux qu'occuperaient successivement tous ces points en transportant le plan parallèlement à lui-même. Les momens *maxima* restent les mêmes autour des mêmes axes qui deviennent parallèles ; et comme il n'y a, parmi eux, que l'axe du moment *minimum maximorum* qui soit perpendiculaire au plan mobile, on voit qu'il est le seul qui n'ait absolument qu'une même position dans l'espace ; que, de plus, tous les axes qui ont à son égard des positions semblables, donnent les mêmes momens ; et c'est ce qui nous a fait nommer cet axe unique, l'*axe central* des momens.

Au reste, les résultats précédens, tirés des raisonnemens les plus simples, pourraient aussi se déduire du calcul par la méthode ordinaire *de maximis et minimis ;* et l'on trouve aisément, pour l'axe du moment *minimum maximorum*, les équations suivantes :

$$(N+Yx-Xy)\,Y-(M+Xz-Zx)\,Z=0,$$
$$(L+Zy-Yz)\,Z-(N+Yx-Xy)\,X=0,$$
$$(M+Xz-Zx)\,X-(L+Zy-Yz)\,Y=0,$$

où x, y, z sont les coordonnées de cette ligne par rapport à trois axes autour desquels les sommes respectives des momens sont L, M, N, tandis que X, Y, Z, sont les sommes des forces décomposées parallèlement aux mêmes axes.

L'une quelconque de ces équations est une suite nécessaire des deux autres, et par conséquent elles ne représentent qu'une seule et même ligne droite, laquelle est manifestement parallèle à la direction de la résultante générale des forces.

On trouve encore, pour le lieu de tous les points relativement auxquels les momens *maxima* sont égaux et représentés par H, l'équation suivante :

$$(L-Yz+Zy)^2+(M-Zx+Xz)^2+(N-Xy+Yx)^2=H^2,$$

qui appartient à une surface cylindrique à base circulaire décrite autour de la première droite, ce qui est conforme à ce que nous avons vu précédemment.

Mais nous ne nous arrêterons pas à ces détails, et nous passerons sur-le-champ aux applications de la théorie des momens à la Dynamique.

III.

Application de la théorie précédente à la Dynamique.

Soient tant de corps libres qu'on voudra qui se meuvent, sans aucune dépendance mutuelle, avec des vitesses uniformes suivant des droites quelconques, dans l'espace.

Puisque chaque corps se meut uniformément en ligne droite, la force qui l'anime demeure constante et de même direction.

Donc la résultante générale de toutes les forces qui animent les corps du système, et leur moment résultant par rapport à un point fixe quelconque, demeurent constamment les mêmes dans tout le cours du mouvement.

Conservation des forces et conservation des momens.

Actuellement, si l'on suppose que tous ces corps qui étaient libres viennent tout-à-coup à se lier ensemble d'une manière quelconque, et à réagir encore les uns

sur les autres en vertu de nouvelles forces quelconques, mais réciproques, c'est-à-dire telles, qu'entre deux corps l'action soit toujours parfaitement égale et contraire à la réaction, ce qui comprend toutes les forces de la nature ; les mouvemens individuels des différens corps seront changés, et les forces qui les animent varieront de grandeurs et de directions, et continueront de varier à chaque instant du mouvement. Mais ce qui est bien remarquable, et forme un des plus beaux principes de la Dynamique, c'est que la résultante générale de toutes ces forces, et leur moment résultant par rapport au point fixe, demeureront toujours les mêmes qu'auparavant, et seraient encore conservés, si tous les corps redevenaient libres, et que chacun d'eux s'échappât en ligne droite avec la nouvelle vitesse dont il est actuellement animé.

Démonstration très simple de ces deux lois générales.

Ce principe, qui se déduit des équations différentielles du mouvement, peut aussi se démontrer par un raisonnement si simple, que je ne crois pas devoir l'omettre ici.

Il est clair, en effet, que si chaque corps, à cause de sa liaison avec les autres, ne peut plus obéir pleinement à l'impulsion qu'il a reçue, sa force se décompose en deux autres, l'une qui est détruite, et l'autre qui subsiste actuellement. Tout se passe comme à la rencontre d'un obstacle invincible; excepté que la composante, qui serait anéantie par l'obstacle, va se reporter sur les autres corps qui la détruisent par leur action. La force de chaque corps étant ainsi remplacée par deux semblables composantes, la résultante de

toutes ces nouvelles forces et leur moment résultant sont toujours les mêmes qu'avant cette substitution. Mais les composantes, qui se font équilibre entre elles, donnent leur résultante et leur moment résultant nuls, comme nous l'avons vu dans les lois générales de l'équilibre : donc la première résultante et le premier moment résultant sont conservés, et n'ont souffert aucune altération par l'action mutuelle des différens corps du système. Quant aux autres forces qui pourraient exister entre ces corps, comme elles sont réciproques, c'est-à-dire deux à deux égales et contraires, elles ne changent rien non plus aux valeurs précédentes, car leur résultante et leur moment résultant sont évidemment nuls d'eux-mêmes.

On voit donc que, dans un système de corps qui ont reçu des impulsions primitives, et qui réagissent d'une manière quelconque les uns sur les autres, la somme de toutes les forces qui les animent, estimées suivant une même droite, et la somme de leurs momens estimés autour d'un même axe fixe quelconque, demeurent constamment les mêmes, malgré les variations qu'éprouvent les mouvemens individuels des corps, et soit que ces mouvemens changent par des nuances insensibles, soit qu'il survienne entre eux des changemens brusques par l'action réciproque des corps, ou par toute autre liaison nouvelle qu'on voudrait établir subitement entre ces corps.

Ces deux propriétés générales du mouvement correspondent, en quelque sorte, aux deux propriétés générales de l'équilibre ; les mêmes sommes qui doivent être nulles dans l'état d'équilibre demeurent constantes dans l'état de mouvement ; et la conservation des forces

et des momens, présentée de cette manière, subsiste également pour toutes les lois possibles entre la force et la vitesse du corps en mouvement.

A quoi répondent les lois précédentes dans la nature. — Conservation du mouvement du centre de gravité; conservation des aires.

Dans la nature, la force d'un corps en mouvement se mesure par le produit de la masse et de la vitesse; et le premier principe répond à la conservation du mouvement du centre de gravité, qui consiste en ce que ce centre se meut toujours uniformément en ligne droite, et de la même manière que si tous les corps du système y étaient réunis, et que les forces qui les animent s'y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes.

En effet, puisque la somme des forces estimées suivant une même droite est constante, on peut dire que la somme des vitesses de toutes les molécules égales du système, et par conséquent, leur moyenne vitesse, pour s'éloigner d'un plan perpendiculaire à cette droite, est aussi une quantité constante. Or, à chaque instant, les vitesses des molécules sont mesurées par les petits accroissemens, positifs ou négatifs, de leurs distances au plan que je considère : ainsi la moyenne vitesse n'est autre chose que le moyen accroissement, ou l'accroissement de la moyenne de toutes ces distances, et par conséquent, c'est la vitesse même du point qui est le centre de gravité de tout le système. Donc la vitesse de ce point, estimée suivant une droite quelconque dans l'espace, est toujours la même; et, comme elle représente la moyenne vitesse de toutes les molécules, elle s'exprime par la somme de toutes les vitesses, divisée par leur nombre, ou par la somme de toutes les forces divisée par la masse entière du système.

Si l'on prend, pour cette droite à laquelle on rapporte les forces, la direction même de la résultante générale, on voit que le centre de gravité se meut précisément dans cette direction; car si l'on cherchait actuellement la vitesse de ce centre, pour s'éloigner d'un plan quelconque mené suivant cette droite, on trouverait cette vitesse nulle, puisque la somme des forces, estimées dans un sens quelconque perpendiculaire à la résultante générale, est toujours nulle.

Ainsi *le centre de gravité du système se meut uniformément, en ligne droite, dans la direction même de la résultante générale, et sa vitesse est exprimée par cette résultante divisée par la masse entière du système.*

Si cette résultante générale est nulle, et qu'ainsi toutes les forces appliquées soient réductibles à un couple, le centre de gravité du système reste donc en repos dans l'espace, quels que soient les mouvemens particuliers des différens corps qui le composent.

Si tous ces corps sont liés entre eux de manière à former un système invariable de figure, le système ne peut donc avoir qu'un mouvement de rotation autour du centre de gravité; d'où l'on voit que l'effet d'un couple sur un corps ou système solide, est de le faire tourner autour d'un point déterminé, qui ne dépend ni de la grandeur ni de la direction du couple appliqué, mais uniquement de la figure du corps, ou plutôt de la disposition mutuelle des différentes particules qui le composent. Ainsi le centre de gravité des corps

se présente d'une manière aussi naturelle dans la théorie du mouvement que dans celle de l'équilibre: et il ne faut pas, avec quelques géomètres, le regarder seulement comme un point qu'il est préférable de choisir, parce que certaines expressions analytiques qu'on y rapporte se simplifient, ou que certaines intégrales s'y évanouissent, mais bien comme un point dont la considération s'offre d'elle-même dans la nature, et vient, pour nous, de cette loi qui fait simplement la force proportionnelle à la vitesse. On doit dire la même chose de ces trois *axes principaux* de rotation, autour desquels un corps peut tourner librement, parce que les forces centrifuges s'y contre-balancent. C'est en vertu de cette même loi dont je viens de parler, qu'il y a de tels axes dans tous les corps, qu'il y en a trois, qu'ils passent au centre de gravité et qu'ils sont rectangulaires entre eux.

Mais je passe au second principe de la conservation des momens. Si l'on prend un point fixe quelconque et que, de ce point fixe ou *foyer*, on mène à tous les corps du système des rayons vecteurs, en projetant toutes ces droites sur un plan quelconque, on verra facilement que le moment de chaque force par rapport à un axe perpendiculaire au plan de projection, et passant par le foyer, est proportionnel au produit de la masse du corps par l'aire que trace sur ce plan la projection de son rayon vecteur.

Ainsi, *dans la loi de la nature, la conservation des momens revient à la conservation des aires, qui consiste en ce que la somme des produits des corps par les aires respectives que tracent les projections de leurs rayons vecteurs sur un plan fixe quelconque mené par le foyer,*

est proportionnelle au temps, c'est-à-dire est toujours la même, en temps égal, pendant tout le mouvement du système.

Si toutes les masses du système étaient égales entre elles, on n'aurait pas besoin de considérer leurs produits respectifs par les aires précédentes, mais simplement ces aires elles-mêmes; et le théorème reviendrait à ce que la somme des aires décrites par les rayons vecteurs autour du foyer est toujours égale en temps donné. C'est ainsi qu'on peut toujours énoncer le principe des aires; mais en supposant que les masses du système soient divisées en parties égales, et qu'on ait tiré du foyer des rayons vecteurs à toutes ces parties.

Plan du maximum *des aires.*

Cela posé, puisque les aires tracées par les rayons vecteurs ne sont autre chose que les momens des forces, il s'ensuit qu'on peut appliquer à la composition des aires tout ce que nous avons dit de la composition des momens.

Et d'abord, on voit que, parmi tous les plans menés par le même foyer, et qui reçoivent de la part des rayons vecteurs des aires différentes, il y en a un seul qui reçoit la plus grande; et si l'on nomme L, M, N les sommes respectives des aires tracées sur trois plans rectangulaires quelconques, menés par le foyer, on aura pour la valeur G de l'aire qui est un *maximum*,

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Et, à l'égard du plan qui la reçoit, si l'on nomme λ, μ, ν, les trois angles respectifs qu'il forme avec les

trois premiers, on aura pour les cosinus de ces angles

$$\cos\lambda = \frac{L}{G},\ \cos\mu = \frac{M}{G},\ \cos\nu = \frac{N}{G},$$

ce qui détermine sur-le-champ la position de ce plan remarquable.

Lorsque l'on connaît l'aire *maximum* G, et le plan sur lequel elle tombe, on trouve facilement les aires que reçoivent les divers plans menés par le foyer; car θ étant l'angle que forme un plan quelconque avec celui du *maximum* des aires, on a pour l'aire décrite sur ce nouveau plan, $G\cos\theta$; d'où l'on voit que les aires sont égales sur tous les plans qui font le même angle avec celui du *maximum*, ou qui touchent un cône décrit sous le complément de cet angle autour de l'axe perpendiculaire à ce dernier plan; que, de plus, elles sont nulles quand l'angle θ est droit, c'est-à-dire sur tous les plans perpendiculaires à celui du *maximum*.

Plan du minimum *des aires* maxima.

Actuellement, parmi tous les plans qui donnent les aires *maxima*, relativement aux divers points de l'espace considérés comme foyers, il y en a un seul qui donne le *minimum* de ces *maxima*, ou l'aire *minimum maximorum*.

Ce plan est perpendiculaire à la direction de la résultante générale, ou du mouvement commun qui emporte le système. Son axe, c'est-à-dire la perpendiculaire qui y serait élevée au foyer, se trouvera absolument de la même manière que l'axe central des momens, et le foyer pourra être pris partout où l'on

voudra sur cette ligne. Pour tous les foyers qui en seraient aux mêmes distances dans un plan perpendiculaire, les aires *maxima* auront les mêmes valeurs, et leurs plans seront perpendiculaires aux diverses génératrices d'un hyperboloïde de révolution décrit autour de cet axe central. D'ailleurs, ces aires *maxima* et les inclinaisons de leurs plans varieront, en vertu des distances précédentes, d'après les mêmes lois que nous avons données plus haut; et l'on trouvera sur les aires tous les théorèmes analogues à ceux qui ont été rapportés sur les momens.

Usage de ces plans; de ceux qu'il faut choisir pour y rapporter les corps du système.

Cette constance des aires décrites sur des plans qui restent immobiles au foyer nous donne d'abord l'idée de les observer sur les plans auxquels nous rapportons les différens corps, afin qu'à toutes les époques du mouvement nous puissions retrouver le position de ces plans, et reconnaître les changemens survenus dans le système. Mais, d'après ce que nous venons de dire, on voit qu'il y a un choix à faire entre ces plans coordonnés; car si un plan qui reste immobile au foyer reçoit constamment la même aire de la part des rayons vecteurs, un plan qui recevrait constamment une même aire donnée ne serait pas pour cela immobile, et pourrait se mouvoir d'une manière quelconque tangentiellement à un certain cône décrit autour du foyer. Donc si l'on avait rapporté primitivement tous les corps du système à un certain plan, et qu'on ne sût rien autre chose de ce plan, sinon qu'il recevait une

aire donnée, on ne pourrait plus reconnaître actuellement sa position dans l'espace, parce qu'il a pu changer, ou, plus exactement, parce qu'il y en a une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété que lui.

Mais si l'on savait que le plan cherché était, entre tous ceux qui passent au même foyer, celui qui recevait l'aire la plus grande, on le retrouverait sur-le-champ, parce qu'il est unique et jouit d'une propriété exclusive par rapport à tous les autres.

C'est donc ce plan qu'il faut choisir, de préférence *à tous ceux qui passent en un même point*, pour y rapporter les différens corps du système; et, sans connaître la grandeur de l'aire qui y est décrite, on pourra retrouver sa position dans tous les temps, pourvu qu'on connaisse le point fixe d'où partaient les rayons vecteurs, ou du moins quelque autre point fixe qui soit, avec le premier, dans la direction du mouvement général; car nous avons vu que, pour ce nouveau foyer, le plan de l'aire *maximum* serait parallèle au premier.

Si l'on ne connaissait point la position de ce foyer, quand bien même on saurait que l'aire *maximum* décrite sur le plan cherché avait une valeur donnée, on ne pourrait pas encore distinguer ce plan d'une infinité d'autres perpendiculaires aux génératrices d'un certain hyperboloïde de révolution, parce que chacun de ces plans jouirait de la même propriété de recevoir une aire *égale*, et *maximum* entre celles des plans qui se croiseraient avec lui au même point.

Mais si l'on ajoutait que l'aire *maximum* dont il s'agit était le *minimum* des aires *maxima* relatives aux

divers foyers de l'espace, on retrouverait sur-le-champ la position du plan cherché, parce qu'il jouit, non-seulement d'une propriété exclusive par rapport à ceux qui passeraient au même foyer, mais encore d'une autre propriété exclusive par rapport à tous ceux qui auraient la première commune avec lui.

C'est donc ce nouveau plan qu'il faut choisir de préférence à tous ceux de l'espace; et l'on en pourra retrouver la position à toutes les époques, sans connaître ni la grandeur de l'aire qui y est décrite, ni le point qu'on a pris pour centre des rayons vecteurs. Mais, pour le déterminer, il faudra toujours avoir quelque point fixe d'où l'on puisse partir actuellement, et connaître en outre la grandeur et la direction de la résultante générale qui emporte le système dans l'espace.

Dans le cas des aires relatives, que l'aire minimum maximorum *est la même que l'aire* maximum *autour d'un foyer quelconque.*

Lorsqu'on ne connaît aucun point fixe auquel on puisse rapporter les rayons vecteurs, et qu'on partage les mouvemens des corps eux-mêmes que l'on considère, on ne peut plus observer que des aires décrites autour de foyers mobiles dans la directiondu mouvement général. Or, ces aires sont alors les mêmes que si le mouvement général était nul, ou que le centre de gravité du système fût en repos.

On a pu voir, en effet, par l'équation $G^2 = K^2 + R^2 p^2$, qu'un moment *maximum* G, relatif à une certaine origine, se compose du moment *minimum maximorum* K, et du moment Rp de la résultante générale par la distance de l'axe central à cette origine; de même

l'aire *maximum*, par rapport à un foyer fixe, est la résultante de l'aire *minimum maximorum* et de l'aire qui serait décrite par le rayon vecteur de la masse entière du système, considérée comme réunie dans l'axe central, et animée, suivant cet axe, de la vitesse commune. Si donc le foyer que l'on considère, au lieu d'être fixe dans l'espace, se meut avec la vitesse commune parallèlement à l'axe central, cette partie des aires qui sont décrites en vertu du mouvement général disparaît d'elle-même; et les aires observées sont parfaitement les mêmes que si la résultante général était nulle, ou que le centre de gravité du système fût en repos dans l'espace.

Mais quand la résultante générale est nulle, les aires *maxima* sont égales pour tous les foyers de l'espace, et leurs plans sont tous parallèles; donc alors le foyer de l'aire *minimum maximorum*, peut être pris partout où l'on voudra.

Application au système du monde.

Ainsi, dans le système du monde, comme on ne connaît aucun point fixe auquel on puisse rapporter les différens corps célestes, et qu'on ignore d'ailleurs dans quel sens et avec quelle force ce système est entraîné dans l'espace, on ne peut déterminer ni le plan ni la valeur de l'aire *minimum maximorum*, et l'on peut choisir simplement le plan du *maximum* des aires, relativement à un point quelconque, qui se meuve en ligne droite avec la vitesse commune du système. On peut donc prendre le foyer au centre de gravité, qui jouit de cette propriété dans tout le cours du mouvement; et c'est ce qu'a fait l'auteur de la *Mécanique céleste*, qui, le premier, a considéré ce plan dans notre système planétaire, et qui lui a donné le nom de *plan invariable*.

Au reste, on peut encore prendre le foyer au centre de l'un quelconque des corps considéré comme fixe à chaque instant, c'est-à-dire comme actuellement privé de sa vitesse relative : ce point, n'ayant plus alors que la vitesse commune, sera dans le même cas que le centre de gravité; ainsi le plan de l'aire *maximum* relative à ce point sera parallèle au premier, et recevra la même aire.

Si donc, pour considérer également tous les corps du système, on prend successivement les aires élémentaires décrites autour de chaque corps par tous les autres, en multipliant ces diverses sommes par les masses respectives des corps qui ont servi successivement de foyers, on trouvera, en les ajoutant, tous les produits des masses prises deux à deux, multipliées par les aires qu'elles tracent dans le même temps, l'une autour de l'autre considérée comme immobile.

Le plan dont nous avons parlé jouit donc encore de cette propriété remarquable, que la somme des produits précédens y est un *maximum*, aussi bien que sur tous ceux qui lui sont parallèles; et l'on voit que cette somme n'est autre chose que l'aire *maximum* relative au centre de gravité, multipliée par la masse entière du système. C'est ainsi que Laplace présente encore la théorie de ce plan *invariable*, en ramenant le principe des aires à des relations entre les distances mutuelles des différens corps du système.

Ce plan forme en quelque sorte l'immuable *équateur* du système du monde. Quels que soient les change-

mens que la suite des siècles amène entre les corps célestes, il demeurera toujours parallèle à lui-même; et, puisqu'on en peut retrouver la position dans tous les temps, comme on retrouve celle du centre de gravité, en y rapportant tous les corps du système, on aura toujours le moyen de comparer, d'une manière précise, les observations de l'Astronomie faites aux époques les plus éloignées.

Nous rappellerons encore ce corollaire remarquable de la théorie précédente, que, dans un système de molécules solides et fluides, animées primitivement par des forces quelconques et soumises à leur action mutuelle, s'il arrive qu'après un grand nombre d'oscillations, ces molécules se fixent à un état permanent de rotation, autour d'un axe invariable passant par leur commun centre de gravité (et l'on conjecture avec assez de vraisemblance que c'est le cas des corps célestes), alors leur équateur, ou le plan perpendiculaire à cet axe, sera parallèle à celui qui recevait, à l'origine du temps, le *maximum* des aires relativement au centre de gravité.

Mais nous n'étendrons pas plus loin ces dernières considérations, qui ont été assez approfondies par le géomètre que nous avons cité. Notre objet principal était de fonder une nouvelle théorie des momens et des aires, d'étendre et de simplifier à la fois toute cette partie de la Mécanique, et de faire passer ainsi dans les élémens les plus beaux théorèmes qu'on y eût trouvés jusqu'ici.

Remarque nouvelle sur les aires.

Nous finirons par observer, sur la loi des aires, que

les plans ne sont pas les seules surfaces sur lesquelles elles se conservent sans altération pendant le mouvement du système. La même propriété appartient aussi à toute surface conique circulaire dont le sommet est placé au foyer des rayons vecteurs; mais il faut projeter ces rayons sur le cône par des lignes parallèles à son axe.

Les aires décrites sur les surfaces de différens cônes de même axe et de même sommet seront réciproquement proportionnelles aux sinus des angles sous lesquels ces cônes sont décrits; d'où l'on voit que le cône qui recevra l'aire la plus petite sera le cône décrit sous l'angle droit autour de l'axe commun, c'est-à-dire le plan perpendiculaire à cet axe.

Entre tous les cônes semblables de même sommet, mais d'axes différens, il y en aura un seul sur la surface duquel l'aire tracée par les rayons vecteurs sera un *maximum*.

Parmi tous ceux qui donneraient de même les aires *maxima* relativement aux divers foyers de l'espace, il y en aura un seul qui donnera le *minimum* de ces aires *maxima*.

Pour les axes de ces cônes remarquables, ils ne sont autre chose que les axes des momens ou des aires qui jouissent des propriétés analogues, et ils se détermineront absolument de la même manière. Enfin l'on trouvera, en considérant les aires tracées sur des cônes quelconques semblables, tous les théorèmes que nous avons donnés par rapport aux aires qui sont tracées sur de simples plans.

NOTE

Sur le double mouvement de la Terre et des corps célestes.

Pour montrer encore, par un nouvel exemple, la simplicité et l'avantage de notre théorie des couples, je dirai deux mots sur la manière dont on explique ordinairement le double mouvement de rotation et de translation qui anime la Terre et les autres corps célestes.

Jean Bernoulli est, je crois, le premier qui ait eu l'idée de cette explication ; mais la voici telle qu'elle est présentée par Laplace, dans son *Exposition du Système du Monde*, liv. III, chap. v.

« Lorsqu'un corps, dit l'auteur, reçoit une impul-
» sion suivant une direction qui ne passe point par le
» centre de gravité, les diverses parties du corps ont
» des vitesses inégales, et de cette inégalité résulte un
» mouvement de rotation du corps autour de son centre
» de gravité, en même temps que ce centre est trans-
» porté avec la vitesse qu'il aurait prise, si la direction
» de l'impulsion eût passé par ce point. Ce cas est celui
» de la Terre et des planètes. Ainsi, pour expliquer le
» double mouvement de rotation et de translation de
» la Terre, il suffit de supposer qu'elle a reçu primiti-
» vement une impulsion dont la direction a passé à une
» petite distance de son centre de gravité, distance

» qui, dans l'hypothèse de l'homogénéité de cette pla-
» nète, est à peu près la cent-soixantième partie de
» son rayon. Il est infiniment peu probable que la pro-
» jection primitive des planètes, des satellites et des
» comètes a passé exactement par leurs centres de gra-
» vité; tous ces corps doivent donc tourner sur eux-
» mêmes. Par une raison semblable, le Soleil, qui
» tourne sur lui-même, doit avoir reçu une impulsion
» qui, n'ayant point passé par le centre de gravité, le
» transporte dans l'espace, avec le système planétaire,
» à moins qu'une impulsion dans un sens contraire
» n'ait anéanti ce mouvement, ce qui n'est pas vrai-
» semblable. »

Mais j'observe d'abord que cette hypothèse d'une impulsion unique, imprimée à chaque planète, est elle-même trop particulière, et par conséquent très peu vraisemblable; et, ce qui est plus digne de remarque, on peut voir qu'elle est entièrement inutile à l'explication du phénomène naturel dont il s'agit.

Et en effet, quel que soit le nombre des impulsions différentes qu'un corps ait pu recevoir en tant de points, et suivant telles directions qu'on voudra dans l'espace, on a démontré que ces forces sont toujours réductibles à une seule appliquée au centre de gravité de ce corps, et qui en transporte également toutes les parties suivant des directions parallèles, et à un seul couple ou moment qui fait tourner le corps autour de ce centre mobile. Le double mouvement qu'on observe dans la Terre et dans les corps célestes est donc un phénomène naturel qui n'a besoin d'aucune explication, ni d'aucune hypothèse particulière, puisque c'est le mouvement le plus général de tous les corps qui se meuvent en vertu de forces ou impulsions quelconques. Ainsi toutes les planètes doivent naturellement tourner sur elles-mêmes, en même temps qu'elles sont emportées dans l'espace : et, si elles ne tournaient point, ce serait, au contraire, un phénomène très singulier, et qui demanderait une explication toute particulière; car il faudrait supposer, 1°. que toutes les impulsions primitives se sont précisément réduites à une seule force, et 2°. que la direction de cette force passait par le centre de gravité de la planète que l'on considère. Et de même, si la planète ne faisait que tourner sur son axe, sans éprouver aucun déplacement dans l'espace, il faudrait supposer que toutes les impulsions transportées au centre de gravité s'y sont exactement fait équilibre, et que, de toutes les forces appliquées, il n'est ainsi résulté qu'un seul couple; ce qui présenterait un second cas particulier tout aussi invraisemblable que le précédent. Mais celui de la nature n'a rien qui doive surprendre, puisque ce double mouvement des corps célestes est le résultat général de forces ou impulsions primitives quelconques qui ont pu être imprimées à ces différens corps. On peut même dire que, dans un corps libre, l'observation d'un seul de ces deux mouvemens fournirait, au besoin, une preuve naturelle de l'autre; et qu'ainsi la rotation connue du Soleil indique, avec une extrême vraisemblance, son mouvement de translation dans l'espace; mouvement insensible pour nous, mais peut-être très rapide, et qui ne nous échappe que par l'énorme distance où nous sommes des étoiles, seuls corps de l'espace auxquels nous pourrions le rapporter comme à autant de points fixes.

Quoi qu'il en soit, et pour revenir à nos principes, je remarquerai encore un autre défaut, dans l'explication qu'on a donnée du double mouvement de la Terre, par l'hypothèse d'une impulsion unique; car, pour la rigueur du raisonnement, il aurait fallu ajouter encore une condition particulière qu'on a omise : c'est que cette impulsion primitive aurait eu lieu précisément au périhélie ou à l'aphélie de cette planète. Et, en effet, l'équateur étant le plan même du couple primitif imprimé à la Terre, si ce couple provenait, comme on le suppose, d'une seule force transportée parallèlement à elle-même au centre de gravité, il faudrait d'abord que cette force se fût trouvée dans le plan de l'équateur. Mais, d'un autre côté, cette même force devait être parallèle à la tangente de l'orbite sur laquelle elle emportait la Terre : donc il faudrait que l'impulsion unique eût été appliquée à la Terre, au moment où celle-ci se trouvait à l'une ou à l'autre des deux extrémités du grand axe de son orbite, c'est-à-dire au périhélie ou à l'aphélie; car ce n'est qu'en ces deux points qu'une ligne située dans l'équateur peut être en même temps parallèle à la tangente de l'orbite de la Terre. En tout autre lieu, cette tangente est inclinée à l'équateur, et par conséquent la direction de la force est inclinée au plan du couple : or la force et le couple, étant inclinés l'un à l'autre, ne peuvent jamais se réduire à une seule force, et par conséquent ne peuvent être regardés comme provenant d'une impulsion unique. D'où l'on voit que, même pour l'exactitude de cette explication, que notre théorie des couples rend d'ailleurs inutile, il fallait encore supposer que la Terre a été frappée

dans une direction perpendiculaire à la droite qui joignait à cette époque le centre de la Terre et celui du Soleil; et il faudrait ajouter la même condition pour les autres planètes, ce qui augmente encore, s'il est possible, l'extrême invraisemblance de l'hypothèse d'une impulsion unique, ou, ce qui est la même chose, de plusieurs impulsions différentes qui eussent été exactement réductibles à une seule.

THÉORIE ET DÉTERMINATION

DE

L'ÉQUATEUR DU SYSTÈME SOLAIRE.

Je vais développer dans ce Mémoire les recherches nouvelles que j'ai présentées à l'Académie le 24 mars 1828, et qui ont pour objet l'une des questions les plus élevées du système du monde. Il s'agit de la détermination exacte du seul plan des aires qui soit vraiment invariable dans notre système planétaire, et qui en forme en quelque sorte l'immuable *équateur;* car le plan que M. Laplace a nommé *invariable* et déterminé comme tel dans sa *Mécanique céleste,* n'est point le véritable; et nous allons voir qu'à cet égard l'analyse de l'auteur avait besoin d'être rectifiée. Mais, auparavant, je crois devoir rappeler les premières idées qui ont donné naissance à la théorie des aires, afin de jeter un nouveau jour sur l'origine et la suite naturelle de ces considérations.

THÉORIE.

I.

On a vu que, dans le mouvement de plusieurs corps qui réagissent d'une manière quelconque les uns sur les autres, mais dont le système est supposé parfaitement libre de toute action étrangère, si l'on projette

sur un plan les aires que tracent, autour d'un point fixe ou *foyer*, les rayons vecteurs menés de ce foyer à toutes les particules égales du système, la somme de ces aires projetées demeure constante, c'est-à-dire est toujours la même en temps égal, malgré les variations qu'éprouve chacune d'elles par l'action réciproque des différens corps: et c'est dans cette propriété générale du mouvement des systèmes que consiste le principe si connu de la *conservation des aires*.

II.

Les géomètres ne se sont pas élevés tout d'un coup à cette loi générale de la Dynamique. L'origine de ces idées remonte à Képler, qui le premier imagina de considérer l'aire du secteur que décrit le rayon vecteur d'une planète dans son mouvement autour du soleil. Et si l'on cherche ce qui a pu lui donner cette idée, on trouvera, ce me semble, qu'il y parvint, non point par hasard comme on pourrait le croire d'abord, mais par une certaine marche naturelle, que je veux indiquer en passant, parce qu'elle se retrouve dans toutes nos recherches, et qu'elle résulte, pour ainsi dire, de la nature même de l'esprit humain.

Et en effet, nous ne connaissons en toute lumière qu'une seule loi: c'est celle de la constance et de l'uniformité. C'est à cette idée simple que nous cherchons à réduire toutes les autres, et c'est uniquement dans cette réduction que consiste pour nous la *science*. Ainsi, quand nous étudions les choses qui changent pour découvrir ce qu'on appelle la loi de leurs variations, notre unique objet est de trouver ce qu'il peut y avoir d'uniforme et de constant au milieu de ces

choses qui varient. Que si, avec le temps et par un nouvel examen, nous venons à reconnaître que des rapports qui nous avaient paru constans sont eux-mêmes variables, il nous faut faire un nouveau pas: mais notre marche est toujours la même; car alors ce n'est plus dans ces rapports, mais dans quelque autre formé de leur combinaison, que notre esprit va rechercher cette loi de constance qui avait, pour ainsi dire, échappé à ses premières conclusions. Tel est, je crois, le mouvement naturel de l'esprit humain, mouvement qu'on pourrait même remarquer dans la Géométrie et dans l'Analyse, mais dont l'Astronomie nous offre ici l'image la plus sensible.

Ainsi les anciens astronomes, d'après les premières apparences des mouvemens célestes, avaient cru naturellement que les planètes décrivaient dans leur cours des cercles parfaits, et qu'elles les décrivaient d'un mouvement uniforme: de sorte que le rayon mené du centre à la planète et sa vitesse angulaire étaient regardés comme constantes. Malgré quelques inégalités que l'observation avait rendues sensibles, cette première loi du mouvement des planètes subsista très long-temps, parce qu'on faisait disparaître à très peu près ces inégalités en essayant de mieux placer le centre de ce cercle parfait qu'on avait imaginé. Mais Képler ayant reconnu, par la comparaison attentive de nombreuses observations, que le mouvement d'une planète se fait, non dans un cercle, mais dans une ellipse dont le soleil occupe un des foyers, de sorte que le rayon vecteur et l'angle qu'il décrit étaient tous deux variables; et ne trouvant plus ainsi, ni dans ce rayon ni dans cet angle, cette constance qu'on y avait d'abord supposée,

imagina de la retrouver dans une quantité nouvelle composée de ces deux-là : et considérant dans cette vue la plus simple qu'on en puisse former, savoir : l'aire du secteur elliptique que trace le rayon vecteur de la planète autour du soleil, il trouva enfin que cette aire était constante, c'est-à-dire toujours la même en temps égal, ou, en d'autres termes encore, que l'aire décrite était proportionnelle au temps écoulé.

Cette loi de Képler, qui n'était prouvée que par l'observation, Newton la démontra ensuite comme un théorème mathématique qui doit avoir lieu dans le mouvement de tout corps attiré par une force quelconque vers un centre fixe : et réciproquement, il fit voir que si cette description uniforme des aires est observée dans le mouvement d'un corps, elle est une preuve de l'attraction ou de la tendance de ce corps au centre des rayons vecteurs ; ce qui conduit naturellement au principe de la pesanteur universelle.

Enfin, vers le milieu du siècle dernier, le chevalier d'Arcy, Daniel Bernouilli et Euler découvrirent presque en même temps, mais sous des formes différentes, un théorème plus général, et qui n'est en quelque sorte que celui de Newton étendu à plusieurs corps qui seraient soumis à la fois à leurs actions réciproques, et à des forces quelconques dirigées vers un même point fixe. Dans le mouvement du système autour de ce point comme foyer, l'aire que décrit chaque corps en particulier n'est plus constante ; elle varie à chaque instant de grandeur et de position par l'action perturbatrice des autres corps. Mais en projetant toutes ces aires variables sur un même plan fixe, et les multipliant par les masses respectives des corps, on trouve

que la somme de ces projections est constante, et se conserve sans altération, comme dans le cas d'un seul mobile.

On voit comment les géomètres qui démontrent et qui généralisent, ont su s'élever rapidement au principe général des aires dans un système quelconque, et par conséquent dans le système du monde ; mais observez en passant que si ce principe n'eût pas été ainsi démontré et découvert à l'avance, le temps seul, et par cette même marche de l'esprit que j'ai indiquée plus haut, aurait encore pu nous y conduire. Car, à la longue, et par des observations plus précises, on aurait reconnu que l'aire décrite par chaque planète n'est pas rigoureusement uniforme : et considérant alors les différentes aires relatives aux différentes planètes, pour en faire, ce qui était naturel, la combinaison la plus simple, comme celle de la somme de leurs projections sur un seul et même plan, on aurait retrouvé dans l'ensemble de ces aires cette constance rigoureuse qui n'était plus dans chacune d'elles.

III.

Quoi qu'il en soit, le principe a lieu, comme on l'a dit, dans le mouvement d'un système de corps qui réagissent d'une manière quelconque les uns sur les autres ; mais, pour la rigueur du théorème, il faut l'énoncer comme je l'ai fait au commencement, c'est-à-dire en considérant, non pas le produit de chaque masse par l'aire que décrit le rayon vecteur mené au centre de ce corps, mais la somme des aires décrites par les rayons menés à toutes les particules égales du système ; ce qui donne la vraie quantité, qui est rigoureu-

sement constante dans tout le cours du mouvement.

Si les corps ne sont point attirés vers un point extérieur, et n'éprouvent que leur action ou attraction mutuelle, le foyer des rayons vecteurs peut être pris partout où l'on voudra dans l'espace. Si, comme dans le système du monde, on fait abstraction du mouvement général qui emporte le système, pour ne considérer que les mouvemens relatifs des corps, on doit placer naturellement le foyer dans leur commun centre de gravité, parce que ce point déterminé est en repos, et comme fixe, dans l'espace relatif où s'exécutent les mouvemens observés des différens corps.

IV.

Maintenant, si l'on considère les divers plans de projection qu'on pourrait mener par le même foyer, et sur lesquels la somme des aires projetées aurait en général des valeurs différentes, il est aisé de voir que, parmi ces plans, il y en a une infinité où cette somme est nulle; que tous ces plans de projection nulle se coupent suivant une seule et même droite déterminée; que tous les plans possibles qui passent par cette droite jouissent de la même propriété, et sont les seuls qui en jouissent. Le plan perpendiculaire à cette droite est donc un plan distingué de tous les plans de l'espace par cette propriété, que la somme des aires se trouve nulle sur tous les plans qui lui sont perpendiculaires. Quant aux plans qui lui sont également inclinés, la somme des aires y a une même valeur, et cette valeur est proportionnelle au cosinus de l'inclinaison; d'où il résulte que, sur le plan unique et distinct dont il s'agit, cette somme est la plus grande possible, ou ce qu'on appelle un *maximum*. Or, c'est ce plan du

maximum des aires que M. Laplace a nommé *le plan invariable*.

V.

La considération de ce plan remarquable s'était déjà présentée aux géomètres dans la recherche analytique du mouvement de quelques systèmes: et elle avait même été employée dans le problème de la rotation d'un corps solide qui tourne librement autour de son centre de gravité. En cherchant à simplifier le calcul, on était arrivé naturellement à ce plan de projection, comme à l'un des trois plans coordonnés qu'on devait choisir de préférence, afin de rendre nulle la somme des aires sur les deux autres, et de faire ainsi disparaître deux intégrales ou constantes arbitraires. Or, il faut faire ici une remarque essentielle: c'est que ce seul cas particulier de la détermination du plan invariable dans le mouvement d'un corps ou système solide, en contient au fond toute la théorie; car, comme l'expression des aires décrites par les différens points d'un système ne dépend ni de la liaison ni de l'attraction mutuelle de ces points, il est évident que le même calcul, ou la même transformation de coordonnées, qui détermine ce plan dans un système de points invariablement liés entre eux, le donne également dans un système de points liés entre eux d'une manière quelconque. Ainsi l'on voit que la théorie du plan invariable se trouvait connue, parce que cette théorie étant indépendante de la nature du système, un seul exemple qu'on en donne suffit ponr la démontrer tout entière. Mais on doit dire que M. Laplace est le premier qui ait considéré et déterminé ce plan

dans notre système planétaire, et qui lui ait donné un nom.

VI.

Ce grand géomètre a donc cherché la position que ce plan devait avoir, par rapport à l'écliptique, au commencement de l'année 1750, et même celle qu'il aura en 1950, d'après les variations calculées qu'auront subies à cette époque les excentricités, les inclinaisons et les nœuds des différentes orbites des corps célestes. Et, par les formules qu'il a données à ce sujet, ou la règle qu'il énonce au chapitre II du livre IV de son *Exposition du Système du Monde*, il a trouvé que l'inclinaison du plan à l'écliptique était de 1°, 7689 au commencement de 1750; et la longitude de son nœud ascendant, de 114°,3979: valeurs qu'il trouve devoir être à très peu près les mêmes en 1950, la longitude du nœud ayant seule varié de 45″. C'est ce qu'on peut voir dans le chapitre XVII du livre VI de la *Mécanique céleste*.

Mais, ayant eu l'occasion d'examiner cette analyse, j'ai remarqué qu'elle ne pouvait être exacte que dans l'hypothèse où les planètes seraient regardées comme autant de points massifs, dont chacun serait chargé de la masse entière de la planète et de ses satellites; et qu'ainsi, pour déterminer le plan invariable du *maximum* des aires, M. Laplace n'avait considéré que les aires dues aux seuls mouvemens de révolution des planètes autour du soleil.

VII.

Or, en appliquant nos principes à cette détermination, j'ai reconnu que la position du plan invariable dans le système du monde ne dépendait pas seulement des aires que décrivent les planètes en vertu de leurs révolutions autour du soleil, mais qu'elle dépendait encore d'autres aires, auxquelles on n'avait point songé, savoir, de celles qui sont dues aux révolutions particulières des satellites autour de leurs planètes principales, et de celles qui naissent de la rotation de ces planètes et du soleil lui-même sur leurs propres axes. Il résulte en effet, de notre théorie des couples, que le plan dont il s'agit n'est au fond que celui de l'aire qui proviendrait de la combinaison de toutes ces aires simultanées, si on les composait entre elles à la manière des simples forces appliquées sur un point; que le plan de cette aire résultante est le seul dont on puisse affirmer qu'il demeure immobile dans le ciel, ou qu'il reste toujours parallèle à lui-même, quels que soient les changemens que la suite des siècles puisse amener dans les mouvemens, dans la figure et la position mutuelle des différens corps célestes. Que si l'on ne composait entre elles qu'une partie de ces aires simultanées, on ne pourrait plus dire que l'aire partielle qui en résulte est invariable de grandeur et de position dans l'espace: d'où il faut conclure que le plan invariable déterminé par M. Laplace peut changer, et qu'ainsi il n'est pas propre à faire reconnaître, dans la suite des temps, les changemens réels qui peuvent survenir dans la position des orbes et des équateurs planétaires.

VIII.

Pour remplir ce grand objet, et donner aux astro-

nomes futurs le moyen de comparer avec précision les observations séparées par de longs intervalles de temps, il faut donc recourir à ce nouveau plan que je propose, et qui forme en quelque sorte l'immuable *équateur* du système du monde. Or voici, d'après notre théorie des couples, l'expression la plus simple de la règle qui le détermine.

« Considérez d'abord, pour chacun des corps célestes, l'aire résultante de celles que décrivent toutes ses particules autour de son propre centre de gravité, aire qui tombe sur le plan de l'équateur du corps, et qui a pour mesure le produit de son moment d'inertie par sa vitesse angulaire de rotation; et regardez maintenant les centres de ces corps comme autant de points où leurs masses respectives seraient concentrées.

» Considérez ensuite, pour chaque groupe formé d'une planète et de ses satellites, l'aire que chacun des corps y décrit dans son orbite autour du centre de gravité de ce groupe, laquelle se trouvera en multipliant la masse du corps par le carré du rayon vecteur et la vitesse angulaire de révolution; et réduisez maintenant ce groupe à son centre de gravité comme à un seul point où toute la masse serait concentrée.

» Considérez enfin les aires que les centres de ces groupes et ceux des corps qui n'ont point de satellites, décrivent dans leurs orbites autour du commun centre de gravité de tout le système, et dont chacune se mesurera de même en multipliant la masse par le carré du rayon vecteur et la vitesse angulaire de révolution.

» Si, par ce même centre de tout le système, vous menez des lignes perpendiculaires aux plans respectifs de toutes les aires que je viens de considérer, et proportionnelles à leurs grandeurs, et que vous composiez entre elles toutes ces lignes à la manière des forces, la ligne résultante sera perpendiculaire au plan de l'équateur cherché, et sa longueur représentera la quantité de l'aire totale qui s'y décrit.

» Sur quoi il faut observer que les lignes composantes dont il s'agit doivent être tirées d'un même côté de l'écliptique, parce que, dans notre système, les différentes aires que ces lignes représentent, étant vues de ce même côté, se décrivent toutes dans le même sens. Ainsi en supposant toutes ces lignes menées du côté boréal de l'écliptique, la ligne résultante prolongée de ce côté ira marquer dans le ciel le pôle boréal de l'équateur du système du monde. »

Par cette règle générale (ou les formules qu'on en peut facilement déduire), si l'on suppose connus les masses et les momens d'inertie des corps célestes, il est évident qu'à une époque quelconque, et par les distances et les mouvemens mêmes des corps célestes, observés à cette époque, on pourra déterminer la position de cet équateur par rapport au plan mobile de quelque orbite planétaire, tel, par exemple, que le plan de notre écliptique. Si donc on imagine que la recherche en soit faite à des époques différentes, et qu'on le trouve situé dans des positions différentes, comme on est sûr que ce plan n'aura pas changé, on conclura le changement réel survenu dans la position de l'écliptique et des différentes orbites qu'on y aurait rapportées. C'est ainsi que les observations des mouvemens

célestes peuvent être ramenées à des termes fixes, et dégagées de l'incertitude et de l'erreur que les variations de l'écliptique et le mouvement propre des étoiles auraient pu à la longue y introduire.

IX.

Quant à ces aires nouvelles qui doivent entrer dans la détermination de notre plan invariable, on pourrait dire que celles qui viennent des mouvemens particuliers des satellites, et même de la rotation de quelques planètes, sont des quantités assez petites, et que le plan invariable déterminé, en ne négligeant que ces petites quantités, différerait peu du véritable. Mais il faut remarquer que l'aire due à la rotation du soleil est une quantité considérable, et qui ne peut être omise dans aucun cas; car, en supposant d'abord le soleil homogène, je trouve que cette aire vaut plus de 50 fois celle que la terre décrit en vertu de son mouvement dans son orbite annuelle. Si, comme il est vraisemblable, la densité du soleil n'est pas uniforme, mais qu'elle augmente de la surface au centre en raison de la profondeur, ou bien encore suivant cette loi de densité que M. Laplace emploie pour la figure de la terre, dans le tome V de sa *Mécanique céleste*, et qui fait la densité proportionnelle à la racine carrée de la pression, je trouve que l'aire décrite a encore les deux tiers de la valeur précédente. Et dans l'hypothèse même où la densité irait en croissant, depuis la surface, où elle serait nulle, jusqu'au centre, où elle deviendrait infinie, comme ferait l'ordonnée d'une hyperbole équilatère qui s'avancerait parallèlement à elle-même pour se confondre avec l'asymptote je trouve que l'aire dont il s'agit vaudrait

encore la moitié de celle qui a lieu dans le cas de l'homogénéité. De sorte que, dans cette hypothèse qui paraît extrême, le plan invariable de M. Laplace, déterminé sans tenir compte de cette quantité, diffère autant du véritable, que si l'on eût oublié dans le calcul au moins 25 globes tels que le nôtre, qui auraient circulé comme lui, à la même distance du soleil, et dans un plan incliné d'environ 7° au plan de notre écliptique. Cette omission altère donc d'une manière très sensible la position du plan invariable : car il est aisé de voir qu'elle change de plusieurs minutes son inclinaison à l'écliptique, et de plusieurs degrés, la longitude de son nœud ascendant. Ainsi il paraît aussi nécessaire pour l'application que pour la théorie, d'avoir au moins égard, dans le système du monde, à cette partie des aires qui vient de la rotation connue du soleil.

X.

Il peut paraître surprenant que M. Laplace, qui le premier a eu l'idée de chercher, dans le système du monde, la position d'un plan invariable déterminé par la condition que la somme des aires projetées y soit un *maximum*, n'ait considéré dans son analyse que les aires décrites par les planètes en vertu de leurs mouvemens de révolution autour du soleil, et qu'il ait oublié, non-seulement les aires dues aux révolutions particulières des satellites, mais encore celles qui naissent de la rotation de ces planètes et du soleil lui-même sur leurs propres axes. Et, si l'on est surpris que cette omission singulière ait pu avoir lieu, on ne l'est pas moins qu'elle ait échappé jusqu'ici à ceux qui ont pu étudier ce point important de la Mé-

canique céleste. Par le peu qu'on a dit, on voit bien ce qui doit manquer aux formules de M. Laplace ; le défaut est sensible ; mais ce qu'on cherche ici est la cause naturelle qui y a fait tomber.

Or, avec un peu de réflexion, il n'est pas difficile de remonter à la source de cette erreur, et de la trouver dans cette théorie même qu'on avait autrefois des aires ou des momens : théorie imparfaite où l'on ne savait pas d'une manière précise ce que ces quantités représentent, je ne dis pas dans le calcul, mais dans la science des forces considérée en elle-même. Et en effet, pour M. Laplace, comme pour les anciens auteurs, les momens ou les aires ne sont que de simples quantités numériques ou géométriques, de pures expressions d'analyse, qui se présentent dans les équations de l'équilibre ou du mouvement des systèmes, et auxquelles on aurait simplement donné un nom pour abréger le discours. Sous ce point de vue géométrique, le plan invariable que l'auteur considère n'est donc qu'un certain plan choisi entre les autres par la condition que la projection des aires y soit la plus grande ; ou plutôt, c'est l'un des trois plans coordonnés, choisi de manière que la projection des aires soit nulle sur les deux autres ; ce qui est une pure transformation de coordonnées, qui paraît propre à simplifier le calcul, en faisant disparaître, comme on l'a dit, deux constantes arbitraires. Or, on ne voit là que des quantités abstraites, de simples formules d'analyse, sans aucune idée de la nature propre des grandeurs dont il s'agit dans la science de l'équilibre ou du mouvement des systèmes. Et, comme l'idée de considérer les aires dans le système du monde vient de cette fameuse loi de

Képler, qui n'est relative qu'aux secteurs décrits par les rayons vecteurs des planètes dans leur mouvement elliptique autour du soleil, il est assez naturel que M. Laplace ne songe qu'à ces mêmes aires dues aux révolutions des planètes, et que, dans la théorie de son plan invariable, il oublie toutes les autres. Il semble d'ailleurs que ces autres aires, produites par les mouvemens particuliers des satellites, et par la rotation des planètes sur elles-mêmes, n'étant point tracées, comme les premières, autour d'un même centre, mais se décrivant à part autour de divers centres particuliers, elles sont en quelque sorte des aires indépendantes, et qu'elles ne doivent point entrer dans la combinaison dont il s'agit. Ainsi, en supposant même que la considération de ces quantités se fût présentée un moment à l'esprit, on voit qu'elle aurait pu être aussitôt écartée comme une idée étrangère, et sans qu'on en fît aucune mention. C'est ce qui explique naturellement l'omission ou l'erreur dont je parle et qui a pu si facilement échapper dans l'ancienne théorie. Mais dans nos principes, cette omission est impossible ; car, pour nous, les aires ne sont point des surfaces qu'on projette sur tel ou tel plan, mais de véritables forces de rotation ou des *couples* qui s'exercent dans le système : et il ne s'agit pas ici de simplifier un calcul ou de chercher un plan sur lequel la projection des aires soit un *maximum*, mais bien de composer entre eux ces couples qui agissent, et de déterminer la grandeur et la position du couple unique qui en résulte ; couple remarquable, dont on démontre que le plan et la grandeur se conservent les mêmes dans tout le cours du mouvement, malgré les changemens qui arrivent

aux grandeurs et aux inclinaisons mutuelles des différens couples qui le composent. Par cette notion dynamique des aires, il suffit donc de jeter les yeux sur le système du monde pour voir que l'aire *maximum*, ou pour mieux dire, que l'aire *résultante*, doit être composée, non-seulement de celles qui viennent du mouvement des planètes dans leurs orbites, mais encore de celles qui naissent des mouvemens particuliers des satellites et de la rotation de tous ces corps sur leurs propres axes : car bien que ces aires soient décrites autour de différens centres, comme elles ne sont qu'une expression géométrique des couples qui les produisent, il est évident qu'elles doivent être toutes rapportées à un seul et même foyer, et se composer ensemble comme si leurs plans y étaient tous transportés parallèlement à eux-mêmes.

Ainsi la composition des couples, qui a étendu et simplifié toute la doctrine des aires, aura encore servi à nous faire découvrir une erreur qui pouvait rester long-temps cachée dans une application de la Mécanique à l'un des plus grands objets du système du monde. Cet exemple nous fait sentir toute l'importance qu'on doit attacher aux notions primitives et aux vrais principes des choses ; car le calcul n'est qu'un instrument, qui ne produit rien par lui-même, et qui ne rend en quelque sorte que les idées qu'on lui confie. Si nous n'avons que des notions imparfaites, ou si l'esprit ne regarde la question que d'un point de vue borné, ni l'analyse ni le calcul ne lui apporteront plus de lumière, et ne donneront à nos résultats plus de justesse ou plus d'étendue : au contraire, on peut dire que cet art de réaliser en quelque sorte par le calcul de fausses ou de vagues conceptions, n'est propre qu'à rendre l'erreur plus durable en lui donnant, pour ainsi dire, une sorte de consistance.

XI.

Au reste, si l'on veut voir, par le calcul même, le défaut des formules de M. Laplace, il n'y a qu'à considérer les trois équations qu'il emploie, et d'où il part, comme d'une expression exacte de la conservation des aires sur les trois plans rectangles des axes coordonnés.

En plaçant l'origine ou le foyer des rayons vecteurs au commun centre de gravité de tous les corps m, m', m'', etc., qui composent le système proposé, et nommant x, y, z, les trois coordonnées du centre du corps m ; x', y', z', celles du centre de m' ; etc., et employant, pour abréger, le signe Σ pour indiquer la somme de tous les termes semblables à celui qu'on écrit à la suite de ce signe, les trois équations dont il s'agit sont représentées simplement par

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=c=\textit{constante},$$

$$\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=c'=\textit{constante},$$

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=c''=\textit{constante}.$$

Or, je dis que ces formules ne sont vraies qu'autant que les corps du système y sont réellement des points dont les masses respectives seraient m, m', m'', etc.

Que si m, par exemple, est un corps de dimension finie, le terme $m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$, qui s'y rapporte

dans la première équation, n'exprime pas la projection, sur le plan des xy, de l'aire décrite autour de l'origine par le mouvement de ce corps m. Et en effet, il est évident que cette aire est la somme de toutes celles qui sont dues au mouvement de toutes les particules du même corps. Or, en nommant X et Y les coordonnées de la particule dm par rapport aux mêmes axes, il est clair que la somme dont il s'agit est l'intégrale $\int\left(\mathrm{X}\frac{d\mathrm{Y}}{dt}-\mathrm{Y}\frac{d\mathrm{X}}{dt}\right)dm$ étendue à la masse entière du corps m; et l'on va voir que cette intégrale n'est pas exprimée, comme on le suppose, par le terme $m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$.

Soient en effet, ξ et π les deux coordonnées de la particule dm, parallèles aux x et y, mais rapportées au centre de gravité du corps m, de sorte que l'on ait

$$\mathrm{X}=x+\xi, \qquad \mathrm{Y}=y+\pi,$$

et

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt}, \qquad \frac{d\mathrm{Y}}{dt}=\frac{dy}{dt}+\frac{d\pi}{dt}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'intégrale précédente $\int\left(\mathrm{X}\frac{d\mathrm{Y}}{dt}-\mathrm{Y}\frac{d\mathrm{X}}{dt}\right)dm$, et si l'on observe que, l'origine des ξ et π étant au centre de gravité de m, on a

$$f\xi dm=0, \quad f\pi dm=0, \quad \int\frac{d\xi}{dt}dm=0, \quad \int\frac{d\pi}{dt}dm=0;$$

on trouvera que l'intégrale $\int\left(\mathrm{X}\frac{d\mathrm{Y}}{dt}-\mathrm{Y}\frac{d\mathrm{X}}{dt}\right)dm$ a pour valeur la somme des deux termes

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+\int\left(\xi\frac{d\pi}{dt}-\pi\frac{d\xi}{dt}\right)dm;$$

de sorte que la vraie valeur de l'aire décrite diffère précisément de la valeur qu'on emploie, de l'intégrale $\int\left(\xi\frac{d\pi}{dt}-\pi\frac{d\zeta}{dt}\right)dm$, qui exprime l'aire due à la rotation de m sur son propre centre; quantité qui doit être ajoutée à l'aire $m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$, si la rotation du corps a lieu dans le même sens que son mouvement de révolution, et qui doit en être retranchée dans le cas contraire.

Les véritables équations qui expriment la conservation des aires dans le système sont donc, en nommant ζ la troisième coordonnée de dm relative au centre de m,

$$\Sigma\left\{m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+\int\left(\xi\frac{d\pi}{dt}-\pi\frac{d\xi}{dt}\right)dm\right\}=a=\text{constante},$$

$$\Sigma\left\{m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\int\left(\zeta\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{d\zeta}{dt}\right)dm\right\}=b=\text{constante},$$

$$\Sigma\left\{m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\int\left(\pi\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\pi}{dt}\right)dm\right\}=c=\text{constante}.$$

D'où l'on voit que dans cette théorie des aires, appliquée au système du monde, lorsqu'on réduisait les planètes et le soleil lui-même à des points massifs placés dans leurs centres de gravité, on supprimait sans s'en apercevoir toute cette partie des aires qui naissent de leurs mouvemens de rotation sur eux-mêmes. L'erreur est toute semblable à celle qui nous ferait prendre, pour le moment d'inertie d'un corps relatif à un certain axe extérieur, le produit de la masse de ce corps par le quarré de la distance de son

centre de gravité à l'axe que l'on considère; tandis que la vraie valeur de ce moment d'inertie est égale au produit précédent augmenté du moment d'inertie du corps par rapport à l'axe parallèle qui passe en son centre de gravité.

Mais, indépendamment de ces aires dues aux rotations du soleil et des planètes, on avait encore oublié celles qui naissent des mouvemens particuliers des satellites : car, pour en tenir compte, il ne suffit pas, comme on peut le croire, de prendre pour la valeur de m la masse de la planète réunie à celle de ses satellites; il faut encore ajouter les termes qui expriment les aires dues aux révolutions particulières de cette planète et de ses satellites autour de leur commun centre de gravité. Et il faudrait même ajouter les petites aires qui sont dues aux rotations des satellites sur eux-mêmes, si l'on voulait être dans toute la rigueur des choses.

XII.

Les formules employées par M. Laplace ne peuvent donc (même en faisant abstraction des satellites) exprimer exactement les aires décrites que dans le cas où les corps m, m', m^0, etc., seraient dépourvus de toute rotation sur eux-mêmes, ou bien encore seraient des points massifs (et dont il faudrait même supposer que la rotation n'est pas infinie); car il n'y a que l'une ou l'autre de ces hypothèses qui puisse faire disparaître les termes qu'il a oubliés dans son analyse. Ces formules ne donnent donc point, et ne donneront jamais les valeurs des aires décrites dans le système des corps célestes; car tous ces corps sont de dimension finie,

et ils tournent actuellement sur leurs axes : et quand bien même il arriverait, par quelque cause que ce fût, que chacun d'eux se condensât, et se réduisît en quelque sorte à son centre de gravité, les aires actuelles dues à leurs mouvemens de rotation ne s'évanouiraient point. Par le principe même des aires, à mesure que chaque corps se condenserait, il serait, pour ainsi dire, forcé de tourner plus vite, et de manière que l'aire due à sa rotation fût toujours conservée : d'où l'on voit que les expressions qui forment les premiers membres des équations de M. Laplace n'en seraient pas moins incomplètes qu'auparavant, et qu'ainsi ces équations ne peuvent jamais donner le plan du *maximum* des aires, le seul qui soit rigoureusement invariable.

XIII.

A la vérité, si chaque corps était infiniment petit, et que par conséquent les distances de ses différentes molécules à un centre extérieur d'attraction pussent être regardées comme égales entre elles, on pourrait dire que la rotation de ce corps sur lui-même ne serait point altérée par l'attraction des autres. Et il en serait de même, si chaque corps, au lieu d'être un point massif, était un globe parfait de dimension finie, formé de couches concentriques dont chacune serait d'une densité uniforme dans toute son étendue; car, pour chacun de ces globes, les attractions des autres se réduisant toujours à une force simple qui passerait par le centre de ce globe, il est évident que son mouvement de rotation n'en serait pas plus troublé que dans le cas précédent. Dans l'une ou l'autre de ces deux suppositions, on pourrait donc dire que la projection

des aires dues aux rotations des corps serait à part une quantité constante sur chacun des plans coordonnés; que par conséquent les projections des aires dues aux seuls mouvemens de révolution seraient aussi à part des quantités constantes sur les mêmes plans, et qu'ainsi le plan déterminé par les équations de M. Laplace, s'il n'est plus, comme je l'ai fait voir, le plan du *maximum* des aires, est du moins un certain plan qui demeure invariable de position, malgré l'action mutuelle des différens corps du système.

XIV.

Quoique les deux hypothèses précédentes n'aient point lieu dans la nature, et qu'on puisse se dispenser de les examiner, il n'est peut-être pas inutile de montrer ici tout ce qu'elles ont de faux en elles-mêmes et de contraire à la question de philosophie naturelle dont il s'agit.

Et d'abord on pourrait remarquer que si chacun des corps célestes était un globe parfait, tel que je viens de le dire, il serait fort inutile de faire un long calcul (et dépendant même de données assez mal connues), pour trouver un plan qui fût invariable dans le système du monde : car il suffirait de prendre comme tel le plan de l'équateur de l'un de ces globes, et, par exemple, celui du soleil, ou, ce qui serait encore plus simple et plus facile, celui de la terre que nous habitons. Il est clair que cet équateur resterait toujours parallèle à lui-même dans l'espace, et qu'on y pourrait rapporter avec précision les plans des différentes orbites des corps célestes. Cette supposition, comme on voit, ne convient guère à notre système, puisque

le seul aplatissement très petit de notre globe vers ses deux pôles suffit déjà pour déranger à chaque instant notre équateur, comme on le reconnaît dans le ciel par le phénomène sensible de la précession des équinoxes.

Mais, pour en venir à cette hypothèse imaginaire où les planètes seraient des globes parfaits, je dis que, même dans ce cas, il ne serait pas permis de proposer, comme un plan qui doit rester invariable dans toute la suite des siècles, ni l'un des équateurs de ces globes, ni le plan déterminé par les formules de M. Laplace, où l'on ne tient pas compte des aires dues aux rotations des corps du système. Et en effet, pour affirmer qu'un tel plan demeurera invariable, il faudrait être assuré que la figure des corps ne sera point changée, soit par quelque rencontre ou choc mutuel qui pourrait survenir entre eux, soit par quelque force intérieure qui viendrait à s'y développer, ou même par quelque explosion subite qui ferait éclater le corps en plusieurs fragmens, comme M. Olbers, et après lui quelques géomètres, conjecturent que cela est déjà arrivé à l'une des anciennes planètes de notre système, laquelle, en se brisant, aurait produit les quatre planètes nouvelles qu'on a nommées *Pallas*, *Cérès*, *Junon* et *Vesta*. Or la figure du corps étant ainsi changée, soit par une de ces causes, soit par toute autre qui nous est inconnue, l'aire due à la rotation de ce corps sur lui-même commencerait d'être altérée par l'action des autres, et cesserait d'être à part une quantité constante. Les aires dues aux mouvemens de révolution cesseraient donc aussi d'être constantes, et ni l'équateur du corps ni le plan dont j'ai parlé ne seraient plus

invariables de position dans l'espace. Ainsi l'on voit que tous ces plans viendraient à changer, tandis que le nôtre resterait le même, et que la grandeur de l'aire qui y tombe n'aurait pu éprouver la moindre altération, par aucune de ces causes qui auraient troublé toutes les aires individuelles qui la composent.

XV.

Tel est donc, pour un système libre de toute action étrangère, le plan unique dont l'invariabilité puisse être assurée dans toute la suite des siècles. Ce grand équateur seul, et l'aire qui s'y projette, ne dépendent ni de la liaison mutuelle des corps ni de la loi de leur attraction, qui pourraient même changer arbitrairement, soit par degrés insensibles, soit d'une manière brusque, comme on voudra le supposer. Ainsi, dans notre système planétaire, on pourrait imaginer que la loi d'attraction devînt tout autre; ou que la gravité même vînt à cesser; ou que la figure des corps fût altérée par des forces quelconques, ou même par les mouvemens volontaires des êtres animés qui les habitent; on pourrait supposer que les planètes, qui aujourd'hui nagent librement dans l'espace, vinssent tout à coup à se lier ensemble d'une manière quelconque, et, par exemple, de manière à former un système entièrement solide, etc.; et malgré tous ces changemens, le plan invariable des aires se retrouverait exactement dans la même position qu'il occupe aujourd'hui, et qu'il a toujours occupée depuis l'origine des choses. Propriété remarquable qui caractérise ce plan, et qui n'appartient à nul autre déterminé sans tenir compte de toutes les aires actuellement décrites dans le système.

XVI.

On trouvera peut-être que j'insiste sur des vérités claires; mais la question mérite d'être développée: et d'ailleurs, par quelques difficultés qui ont été faites à ce sujet, j'ai pu croire que notre théorie n'avait pas été bien comprise. J'ai donc voulu montrer avec évidence que, dans notre système, il n'y a qu'un seul plan invariable, comme il n'y a qu'un seul point qui soit le centre de gravité, et une seule droite qui en marque la route dans l'espace: que la forme des mobiles, la loi particulière de l'attraction réciproque au carré des distances, n'entrent absolument pour rien dans cette théorie, et que, par conséquent, elle ne peut être modifiée par aucune raison qu'on voudrait tirer de ces circonstances étrangères: que d'ailleurs ce plan invariable ne saurait être déterminé avec trop de précision, et qu'il doit l'être, autant que possible, indépendamment de toute autre théorie, puisque, par l'hypothèse même, il est destiné à faire reconnaître les plus petits changemens qui peuvent survenir dans le système, et à rectifier ou confirmer nos autres calculs sur les variations des mouvemens célestes.

XVII.

Détermination *de l'équateur dont il s'agit.*

Quant à la détermination effective de ce plan, elle suppose à la vérité que l'on connaisse, outre la proportion des masses des différens corps célestes, les va-

leurs de leurs momens d'inertie par rapport à leurs axes de rotation. Les masses nous sont déjà à peu près connues; mais les momens d'inertie ne le sont point, parce qu'ils dépendent de la loi de densité de ces corps, c'est-à-dire de la loi suivant laquelle la matière, de la surface au centre, est répandue dans chacun d'eux. Or, c'est ce que nous ignorons entièrement, et c'est ce que le temps seul peut nous apprendre, comme je le montrerai tout à l'heure, par la comparaison même que l'on pourra faire de la théorie avec les observations. Mais quand bien même on n'aurait pu s'élever jamais à la connaissance précise de ces élémens nécessaires du calcul, j'observe qu'il n'en convenait pas moins aux géomètres de présenter d'abord une théorie exacte, et de lui donner toute cette rigueur qui fait le caractère propre des vérités mathématiques. C'était un premier objet qu'il fallait remplir pour l'exactitude et la perfection de la science. Mais je dis plus : c'est qu'il convient aussi aux astronomes d'en commencer dès aujourd'hui l'application au système du monde, en employant les meilleures données que nous ayons sur les masses des corps célestes, et les valeurs les plus vraisemblables que nous puissions attribuer aux aires qui naissent de leur rotation sur eux-mêmes. Et en effet, ce premier résultat du calcul et ceux que les astronomes à venir trouveront dans leur temps par des calculs semblables étant comparés les uns aux autres, pourront servir à corriger de siècle en siècle les valeurs approchées de ces élémens, qu'on n'avait pu d'abord mesurer avec précision. En observant la position du plan invariable par rapport aux étoiles, on cherchera si, parmi les change mens survenus, les uns

pouvant être attribués aux mouvemens propres de quelques étoiles, les autres ne pourraient pass'expliquer par le seul déplacement du plan que l'on considère ; et alors on essaiera de rectifier de la manière la plus probable les valeurs employées dans la première détermination.

XVIII.

Quoique cette méthode soit conforme à celle des astronomes, et paraisse ici la seule qui puisse nous conduire, il faut avouer pourtant que, dans cet application de la théorie, l'esprit ne se trouve pas complètement satisfait. On voudrait, s'il est possible, une approximation directe et sûre, qui fût exempte d'incertitude et de tâtonnement. La difficulté paraît grande : car, ne connaissant autour de nous rien de fixe dans l'espace, et ne pouvant ainsi nous assurer des mouvemens réels des corps, il ne nous reste qu'à essayer de les démêler dans les apparences, afin de rectifier successivement nos premières suppositions.

Mais, en y réfléchissant davantage, j'ai trouvé que la théorie même nous offrait une voie directe pour aller au but; et voici une conséquence nouvelle qui prouve qu'avec des observations très précises, on peut parvenir un jour à la connaissance des masses et des momens d'inertie des corps célestes, et par conséquent à la détermination du plan invariable, sans rien emprunter d'ailleurs, je veux dire sans supposer aucune autre théorie ni aucune notion préalable des valeurs approchées de ces élémens qui nous sont inconnus.

Imaginez, en effet, que l'on forme, à une époque quelconque, l'expression analytique de la grandeur

de l'aire résultante, en y mettant les valeurs des lignes, des angles et des vitesses que peut donner l'observation à cette époque, et en y laissant, comme autant d'indéterminées ou d'inconnues, les masses et les momens d'inertie des différens corps du système. Si vous supposez qu'on répète cette opération à autant d'époques différentes qu'il y a d'inconnues à découvrir, vous aurez autant d'expressions différentes de cette aire, qui se compose de toutes les aires décrites dans le système; et comme cette résultante est toujours la même, vous pourrez égaler vos expressions deux à deux, et former ainsi autant d'équations qu'il y a d'inconnues dans la question que l'on considère. Vous pourrez donc alors déterminer ces inconnues, et de là conclure la position du plan invariable, non-seulement à cette époque, mais encore à toutes les époques antérieures où les observations auront été faites. Ainsi la théorie se suffit, pour ainsi dire, à elle-même, et elle n'a besoin, pour être appliquée, que des données immédiates de l'observation. On peut donc, par les seuls mouvemens des corps célestes, observés à différentes époques éloignées, s'élever à la connaissance de leurs masses et de leurs momens d'inertie, et cela indépendamment de toute notion sur ces valeurs approchées, sur la nature des orbites que les corps décrivent, et même sur la loi d'attraction qui existe entre eux.

XIX.

Voilà sans doute un des résultats les plus remarquables des principes généraux de la Mécanique. De ce lieu de l'espace où nous sommes placés, nous ne

pouvons mesurer que des lignes et des angles, et compter le temps qui s'écoule; mais il paraît comme impossible de mesurer les masses et les momens d'inertie de différens corps dont nous ne pouvons approcher, parce que ces quantités ne dépendent pas des seules dimensions visibles de la figure, mais de la matière dont les corps sont formés, ou de la loi de leur densité, qui nous est entièrement inconnue. Cependant s'il arrive que ces corps s'attirent suivant une loi quelconque, connue ou inconnue, qui soit constante ou même variable avec le temps, nous voyons ici qu'il suffira d'observer les distances et les mouvemens de ces corps pour découvrir la proportion qui règne entre leurs masses, et même entre leurs momens d'inertie; car les observations étant faites à autant d'époques différentes qu'il y a d'inconnues, fourniront toutes les équations nécessaires pour les déterminer.

XX.

Dans le système du monde, en regardant une planète comme très petite par rapport au soleil, et un satellite comme très petit par rapport à sa planète, et supposant d'ailleurs que chaque corps n'obéisse qu'à la force principale qui l'attire, on a reconnu de bonne heure, par les vitesses des corps comparées à leurs distances au centre de leurs révolutions, que l'attraction est en raison inverse du carré de la distance; et de là on a tiré la proportion des masses du soleil et des planètes principales qui ont des satellites. Mais cette détermination, quelque ingénieuse et admirable qu'elle nous paraisse, et qu'elle le soit en effet, ne me semble pas tirée des vrais principes de la science, je veux dire ici,

des seuls principes généraux qui pourraient également la donner dans toute autre loi d'attraction. Elle est fondée sur la supposition que la masse de chaque corps peut être négligée par rapport à celle du corps principal qui l'attire et sur la connaissance d'une loi suivant laquelle l'attraction de ce corps s'exerce à différentes distances. Or, je trouve ici que la proportion des masses peut se déterminer par la seule observation des distances et des vitesses des corps, sans aucune idée de leurs grandeurs approchées, ni de la loi suivant laquelle ils s'attirent. Il suffit qu'ils s'attirent, et que, par cette action égale et contraire, ils troublent mutuellement les aires qu'ils décrivent autour de leur commun centre de gravité. Par cette perturbation même, les aires individuelles et les plans de ces aires sont changés avec le temps; et comme il y a une quantité qui ne change point, quand bien même la liaison et l'attraction des corps varieraient d'une manière quelconque, il s'ensuit qu'on peut former avec le temps assez d'équations pour déterminer les masses respectives de tous ces corps, sans rien emprunter à la théorie de la gravitation universelle.

Ce n'est pas qu'on ne doive à Képler et à Newton la même admiration et la même reconnaissance pour la découverte d'un rapport ou d'une loi qui nous apprend dès aujoud'hui la proportion de certaines quantités que le seul principe général des aires n'aurait pu nous donner que dans un avenir très éloigné. Mais je ne m'occupe ici que de la science considérée en elle-même, dans ce qu'elle a de plus général et de plus parfait. Et d'ailleurs, ces principes généraux nous seraient toujours nécessaires: car, pour les valeurs des momens d'inertie

des corps célestes, il me semble que la loi connue de l'attraction ne peut rien nous apprendre, et je ne vois pas qu'on les puisse découvrir autrement que par ces principes et des observations très exactes faites à de très longs intervalles. Ces quantités, et la position précise de l'équateur de notre système ne peuvent donc être déterminées de bien long-temps. Que si pourtant on voulait se borner à la considération du soleil, dont la rotation influe beaucoup plus que celle des autres planètes sur la grandeur de l'aire résultante, il faudrait un temps moins considérable, car il suffirait de former les expressions de cette aire à deux époques différentes, et les égaler, ce qui pourrait donner le moment d'inertie de ce grand corps par rapport à son axe de rotation, en supposant toutefois des observations aussi précises et aussi répétées que l'exige une recherche aussi délicate.

XXI.

Mais pour achever le développement de cette grande théorie, imaginons qu'avec le temps, la grandeur et le plan de l'aire résultante aient été déterminés dans notre système planétaire, et voyons ce qu'au-delà de cet avenir les observations et le calcul pourraient encore nous apprendre. Il est évident que si l'on continuait de former des équations semblables aux précédentes, pour de nouvelles époques ultérieures, ces équations devraient s'accorder à donner la même valeur pour la grandeur de l'aire résultante. Si cet accord a lieu, on conclura qu'on a le véritable équateur du système solaire, au moyen duquel on reconnaîtra les changemens

réels survenus dans la position mutuelle des orbites des corps célestes. Mais si les équations viennent à présenter des valeurs différentes, il faudra conclure qu'il y a dans le système quelque action étrangère qui vient, ou des comètes, ou des étoiles, ou de quelque corps invisible et ignoré dont on n'a pas tenu compte, et qu'ainsi le couple qu'on a calculé n'est pas le couple résultant de tous ceux qui animent l'ensemble des corps que l'on considère.

Ainsi la théorie et l'observation continueront d'ajouter à nos connaissances. On verra si cette action des corps étrangers, sur le système des planètes et du soleil, peut être ou non regardée comme insensible; si le grand équateur de ce système demeure toujours parallèle à lui-même dans l'espace, ou bien si cet équateur change aussi à la longue, comme celui de notre globe; et si ses nœuds, par un mouvement bien plus insensible encore, rétrogradent de même sur le grand orbe que le soleil peut décrire autour de quelque centre éloigné. C'est probablement ce qui arrive; car il serait bien hors de toute vraisemblance que les étoiles n'eussent aucune action sur le soleil et les planètes qui l'accompagnent; et de cette action inégale sur les différens points du système, doit résulter un couple infiniment petit qui altère insensiblement la position du couple actuel qui anime ce système.

XXII.

Ainsi notre plan invariable lui-même avec le temps pourra changer. Dans nos théorèmes mathématiques, tout est rigoureux. La conservation du mouvement

du centre de gravité, et celle des aires, ont lieu sans la moindre altération, parce qu'on y suppose un système parfaitement libre, c'est-à-dire, tel qu'il serait s'il existait seul dans l'espace. Mais, dans la nature, on ne peut plus faire cette supposition, puisque au-delà de notre système solaire, nous découvrons tant d'autres corps qui peuvent agir sur lui. Ne perdons jamais de vue que ces idées de constance et d'uniformité, qui plaisent tant à l'esprit dans l'étude de la nature, n'ont au fond rien d'absolu: elles ne conviennent qu'à ce peu d'étendue et de durée qui nous est accordé dans le temps et dans l'espace. Il en est du développement de ces grands phénomènes comme d'une courbe immense, dont nous ne verrions qu'un arc d'une petite longueur, et que nous prendrions pour une ligne droite dans tout le reste de son cours. Pour arriver à la constance absolue, il faudrait remonter à tout l'ensemble des corps de cet univers, de manière qu'il ne restât plus rien d'extérieur à considérer. C'est alors qu'on pourrait dire de cet ensemble, que le mouvement du centre de gravité est rigoureusement uniforme et rectiligne, et que la résultante générale de toutes les aires décrites est inaltérable de grandeur et de position dans l'espace absolu. Mais alors, comme il n'y aurait plus aucune raison pour que ce centre fût porté d'un côté plutôt que de tout autre, ni que l'ensemble des corps tournât dans un certain sens plutôt que dans le sens contraire, il faudrait conclure que le commun centre de gravité est parfaitement en repos, et que la résultante générale des aires est entièrement nulle. Ainsi, l'on trouverait que toutes les forces et tous les momens de l'univers se balan-

cent: je veux dire que si tous les corps qui existent venaient à se lier entre eux de manière à former un système invariable de figure, ce grand tout deviendrait parfaitement immobile dans l'espace absolu.

XXIII.

Mais ces dernières considérations, qui sont si loin de notre portée, ne pourraient même, comme on le voit, nous conduire à rien qui fût à notre usage. Car, de ce dernier centre, où l'on se placerait un moment par la pensée, on ne verrait plus d'aires décrites dans un sens, qui ne fussent détruites, et pour ainsi dire, effacées par d'autres aires décrites en sens contraire: de sorte que la considération de toutes les aires du système ne pourrait plus donner lieu à la détermination d'aucun plan. Ainsi les vérités qu'on veut rendre absolues, à force d'abstraire, ou de généraliser, s'évanouissent en quelque sorte, ou deviennent comme des *axiomes* qui n'apprennent plus rien. Dans toutes nos lois les plus *générales*, il n'y a que celles qui conservent encore quelque chose de *relatif* qui puissent nous instruire, et partant nous intéresser. Pour nous, l'attraction des étoiles, même les plus voisines, jusqu'ici paraît insensible, et l'altération qu'elle pourrait causer dans la position de l'équateur de notre système ne sera, je crois, de long-temps aperçue. Il faut donc nous en tenir à la considération de cet équateur, essayer de le déterminer, reconnaître, s'il est possible, ses variations, afin d'acquérir quelque idée

nouvelle sur la constitution de notre système, et sur les changemens qu'il peut éprouver par l'action des comètes et des étoiles, ou d'autres corps inconnus de cet univers.

Addition *au mémoire qui précède.*

En regardant le soleil, les planètes et leurs satellites comme un système libre de toute action étrangère, il est démontré que le nouveau plan des aires que je propose sous le nom d'*équateur* du système du monde est le seul qui soit rigoureusement invariable, c'est-à-dire qui reste toujours parallèle à lui-même dans l'espace.

Il est certain que cet *équateur* n'est pas le même que le plan nommé *invariable* par M. Laplace; qu'il y a une différence de plusieurs minutes entre leurs inclinaisons au plan de l'écliptique, et une différence de plusieurs degrés entre les longitudes de leurs nœuds ascendans: ce qui est ici une différence de position très considérable.

Il est encore évident que le plan de M. Laplace ne peut plus être nommé le plan du *maximum* des aires, puisque dans sa détermination M. Laplace n'a pas tenu compte de ces aires décrites qui viennent des rotations des corps célestes, et des révolutions particulières de chaque planète principale et de ses satellites autour de leur commun centre de gravité.

Ces trois points de doctrine sont incontestables, et je crois même, incontestés: mais voici ce qu'on a pu dire.

Si l'on considère la petitesse des corps célestes par rapport à leurs distances mutuelles, la presque sphéricité de ces corps, et le peu d'influence que leur attraction réciproque doit avoir pour troubler leurs rotations sur eux-mêmes, il semble que tous ces corps pourraient être ici regardés comme autant de points massifs, et que si le plan de M. Laplace n'est pas le plan du *maximum* des aires, et par cela même n'est pas rigoureusement invariable, il est du moins un certain plan qui doit varier extrêmement peu ; et que, par rapport aux plans des orbites célestes, il est pour ainsi dire *assez invariable* pour nous faire reconnaître les plus petits changemens qui pourraient survenir dans la position de ces orbites. De sorte que, pour le système du monde tel qu'il est constitué, le plan dont il s'agit peut conserver encore le nom de *plan invariable ;* ce qui paraît d'abord assez plausible.

Mais il faut bien remarquer qu'une proposition de ce genre, pour être admissible, je ne dis pas en géométrie, mais seulement en astronomie pratique, aurait besoin d'être fondée sur des raisons plus précises. Car il ne suffirait pas de montrer que les variations du plan de M. Laplace sont extrêmement petites, ce qui n'est pas douteux ; mais il faudrait prouver qu'elles sont beaucoup plus petites que celles des autres plans qu'on y veut rapporter dans la vue de reconnaître les petits mouvemens qu'ils pourraient avoir dans l'espace. Voilà nettement ce qu'il faudrait prouver, si la chose est possible ; mais c'est ce que personne n'a encore fait, et ne pourra faire, comme on va le voir tout à l'heure.

On conviendra que, pour nous, contens d'avoir subs-

titué un plan rigoureusement invariable à la place d'un autre qui n'est point démontré tel, nous pourrions nous dispenser d'examiner la question peu géométrique dont il s'agit : car il est clair que ce ne serait pas à nous, mais à ceux qui essaient de conserver au plan de M. Laplace la propriété d'être invariable, de faire voir qu'en effet ce plan varie si peu qu'il convient à cet usage délicat pour lequel il est proposé. Mais afin de leur épargner cette fausse et vaine recherche, je vais montrer que ce plan supposé invariable, *varie ;* que sa variation n'est pas extrêmement petite, comme on pourrait le croire, mais qu'elle est du même ordre que la précession des équinoxes, mouvement sensible dans le ciel, et remarqué, il y a deux mille ans, par Hypparque, un des plus grands astronomes de l'antiquité.

Or, pour voir sans calcul, et de la manière la plus évidente, ce défaut des formules de M. Laplace, il n'y a qu'à les appliquer au cas le plus simple de tous, à celui où le système ne serait composé que de deux corps.

Ne considérons donc que la terre et le soleil, et supposons même afin de rendre la chose plus manifeste, que le soleil soit parfaitement sphérique, qu'il ne tourne point sur son axe, et que son centre agisse exactement comme un point où toute la masse serait concentrée.

Par les formules de M. Laplace il est évident que le plan invariable serait le plan même de l'orbite de la terre, ou ce qu'on appelle le plan de l'*écliptique* : de sorte que ce plan serait immobile, ou toujours parallèle à lui-même dans l'espace. Or, je dis que dans ce cas (le plus favorable qu'on puisse imaginer pour la théo-

rie de M. Laplace), les nœuds de l'écliptique sur un plan fixe varieraient d'une manière très sensible.

Et en effet, soit *a* la grandeur de l'aire qui vient de la rotation de la terre sur elle-même, et dont le plan est l'*équateur;* soit A l'aire qui vient de la révolution de la terre autour du soleil, et dont le plan est l'*écliptique*. Il est certain par notre théorie que le *vrai plan invariable* serait celui de l'aire G qui serait composée des deux aires *a* et A. Or, le plan (G) de cette aire résultante passe nécessairement par la commune intersection des plans des deux aires composantes; et par conséquent, il passe toujours par la commune intersection de l'équateur et de l'écliptique, ou ce qu'on appelle la *ligne des nœuds*. Il est donc certain qu'à une époque quelconque du mouvement, la ligne des nœuds serait située dans le plan (G) de l'aire résultante. Or, comme ce plan (G) est réellement invariable, il est évident que si le plan de l'écliptique l'était aussi, la ligne des nœuds serait immobile dans l'espace. Mais on sait que, par la seule action du soleil sur le sphéroïde terrestre, la ligne des nœuds aurait un mouvement de précession, qui, pour fixer les idées, serait d'environ 15″, si l'on évalue l'action du soleil aux $\frac{3}{7}$ de celle de la lune dans la précession totale qui est de 50″ par année. Donc il est impossible que le plan de l'écliptique soit invariable; et l'on voit même qu'il se mouvrait avec l'équateur de telle manière que leur commune intersection décrirait notre plan fixe (G) par un mouvement angulaire de 15″ par année, ou de 15′ en soixante ans.

Ainsi, dans ce cas si simple que j'examine, le plan

donné comme invariable par les formules de M. Laplace change d'une manière bien sensible, puisque ses nœuds sur notre plan fixe s'y mouvraient exactement comme les deux points de l'équinoxe. A la vérité l'aire *a* due à la rotation de la terre étant très petite par rapport à l'aire *A* due à sa révolution autour du soleil, l'axe de l'écliptique ne ferait qu'un angle très petit avec l'axe fixe de notre plan invariable (G) et par conséquent s'en écarterait peu; mais il est certain qu'il tournerait autour de cet axe fixe exactement avec la même vitesse que l'axe de l'équateur.

On pourrait rendre encore bien plus sensible cette variation des nœuds du plan donné par les formules de M. Laplace. Supposons, par exemple, que le système soit formé de ces trois corps: le soleil, la terre et la lune; et regardons même ces corps comme trois points massifs qui ne sont soumis qu'à leur action mutuelle. Par la théorie de M. Laplace, on trouverait que le plan invariable est le plan de l'orbite que le centre de gravité de la terre et de la lune décrit autour du soleil; ce qui serait encore à très peu près le plan de l'écliptique. Mais par notre théorie, où l'on tient compte non-seulement de l'aire T due au commun mouvement de révolution de la terre et de la lune autour du soleil, mais encore de l'aire O qui vient de la révolution particulière de ces deux corps dans le plan de l'orbe lunaire, il est certain que le *vrai plan invariable* serait celui de l'aire K qui résulte de la composition des deux aires T et O; plan qui passe nécessairement par la commune intersection des plans de ces deux aires composantes, et par conséquent, par les

nœuds de l'orbe lunaire sur le plan de M. Laplace. Si donc ce dernier plan était invariable, il faudrait conclure (puisque le nôtre (K) l'est aussi) que la ligne des nœuds est immobile dans l'espace. Or on sait que, par l'action moyenne du soleil, les nœuds de l'orbe lunaire rétrogradent d'environ 20 degrés par an. Donc le plan de M. Laplace doit se mouvoir avec celui de l'orbe lunaire, et de telle manière que leur commune intersection décrive notre plan fixe (K) par un mouvement angulaire d'environ 20 degrés par an, ou d'une circonférence entière en dix-huit ans.

On pourrait donner beaucoup d'autres exemples : mais ce qu'on vient de dire suffit pour montrer de quel ordre peuvent être dans notre système planétaire les variations que le plan de M. Laplace doit éprouver à raison de ces aires qu'il a oublié de faire entrer dans son analyse. Le mouvement de ses nœuds, sur le vrai plan invariable, est précisément le même que celui des nœuds du plan de l'aire composée de toutes celles qu'il a oubliées dans son calcul. J'ai dit *oubliées*, et non pas *négligées ;* parce que M. Laplace, qui, dans sa *Mécanique céleste,* néglige tant de quantités, n'oublie jamais d'en faire mention, et de dire pourquoi il les néglige. Dans la théorie même dont il s'agit, il néglige, parmi les termes qui contiennent les produits deux à deux des masses des corps célestes, tous ceux où n'entre point la masse du soleil ; et il ne manque pas d'en donner une raison (que je n'examine point ici). Mais quant à ces aires nouvelles que j'ai le premier considérées, il n'en dit pas un seul mot : et pourtant il arrive que ces quantités, non-seulement sont bien

plus grandes que celles qu'il néglige, mais encore surpassent de beaucoup plusieurs de celles qu'il conserve, telles que les aires décrites par Mercure, Vénus, Mars et la Terre autour du soleil. J'ai donc dû supposer que ce grand géomètre avait oublié les aires qui viennent de la rotation des corps célestes sur eux-mêmes, et des révolutions particulières de leurs satellites : car ceux qui prétendent qu'il y a songé, mais qu'*il les a volontairement omises, comme n'étant d'aucune influence dans cette théorie*, lui prêtent une faute, lorsque moi-même je n'ai parlé que d'un oubli.

THÉORIE GÉNÉRALE

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

Le principe des *vitesses virtuelles* est connu depuis long-temps, aussi bien que la plupart des principes généraux de la mécanique. *Galilée* observa le premier, dans les machines, cette fameuse propriété des vitesses virtuelles, c'est-à-dire, cette relation si connue qui existe entre les forces appliquées et les vitesses que prendraient leurs points d'application si l'on venait à troubler infiniment peu l'équilibre de la machine. *Jean Bernouilli* vit toute l'étendue de ce principe, et l'énonça avec cette grande généralité qu'on lui donne aujourd'hui. *Varignon* et la plupart des géomètres prirent soin de le vérifier dans presque toutes les questions de la statique; et quoiqu'on n'en eût point de démonstration générale, il fut universellement regardé comme une loi fondamentale de l'équilibre des systèmes.

Mais jusqu'à M. Lagrange, les géomètres s'étaient plus appliqués à démontrer ou, à étendre les principes généraux de la science, qu'à en tirer une règle générale pour la solution des problèmes; ou plutôt ils ne s'étaient pas encore proposé ce grand problème qui est à lui seul toute la mécanique.

Ce fut alors une heureuse idée de partir sur-le-champ

du principe des vitesses virtuelles comme d'un *axiome*, et sans s'arrêter davantage à le considérer en lui-même, de ne songer qu'à en tirer une méthode uniforme de calcul pour former les équations de l'équilibre et du mouvement dans tous les systèmes possibles. On franchit par là toutes les difficultés de la mécanique : évitant pour ainsi dire, de faire la science elle-même, on la transforma en une question de calcul : et cette transformation, l'objet et le résultat de la *Mécanique analytique*, parut comme un exemple frappant de la puissance de l'*Analyse*.

Cependant, comme dans cet Ouvrage, on ne fut d'abord attentif qu'à considérer ce beau développement de la Mécanique qui semblait sortir tout entière d'une seule et même formule, on crut naturellement que la science était faite, et qu'il ne restait plus qu'à chercher la démonstration du principe des vitesses virtuelles. Mais cette recherche ramena toutes les difficultés qu'on avait franchies par le principe même. Cette loi si générale, où se mêlent des idées vagues et étrangères de mouvemens infiniment petits et de perturbation d'équilibre, ne fit en quelque sorte que s'obscurcir à l'examen : et le livre de M. Lagrange n'offrant plus alors rien de clair que la marche des calculs, on vit bien que les nuages n'avaient paru levés sur le cours de la Mécanique, que parce qu'ils étaient pour ainsi dire rassemblés à l'origine même de cette science.

Une démonstration générale du principe des vitesses virtuelles devait au fond revenir à établir la mécanique entière sur une autre base. Car la démonstration d'une loi qui embrasse tout une science ne peut être autre chose que la réduction de cette science à une autre loi

aussi générale, mais évidente, ou du moins plus simple que la première, et qui partant la rende inutile. Ainsi, par cela même que le principe des vitesses virtuelles renferme toute la mécanique, comme il a besoin d'une démonstration approfondie, il ne peut lui servir de base première. Chercher à le démontrer pour l'heureux usage qu'on en a fait, c'est chercher à s'en passer pour cet usage même ; soit en trouvant quelque autre loi aussi féconde mais plus claire, soit en fondant sur les principes ordinaires une théorie générale de l'équilibre, dont la propriété des vitesses virtuelles ne devient plus alors qu'un simple corollaire.

Ainsi, dans cet état où M. Lagrange avait porté la science, ce n'était point la démonstration du principe des vitesses virtuelles qu'il fallait chercher immédiatement. La *Mécanique analytique*, telle que l'auteur l'a conçue, est au fond ce qu'elle doit être : et la démonstration du principe des vitesses virtuelles n'y *manque* point, puisque, si l'on essayait de la mettre à la tête de ce livre d'une manière générale et bien développée, l'ouvrage se trouverait fait deux fois ; je veux dire que cette démonstration comprendrait déjà toute la mécanique. Il faut considérer que M. Lagrange s'est placé tout d'un coup sur un des points élevés de la science, afin de découvrir quelque règle générale pour résoudre, ou du moins pour mettre en équations, tous les problèmes de la mécanique ; et cet objet est parfaitement rempli. Mais pour former la science elle-même, il faut élever une théorie qui domine également tous les points de vue d'où l'on peut l'envisager. Il faut aller directement, non pas au principe obscur des vitesses virtuelles, mais à cette règle claire qu'on en a su tirer

INSTITUTO DE FISICA DA BIBLIOTECA

pour la solution des problèmes : et cette recherche directe, la seule propre à satisfaire notre esprit, fait l'objet principal du Mémoire qu'on va lire.

I.

Propriétés de l'équilibre communes à tous les systèmes libres.

L'un des premiers élémens de la théorie générale de l'équilibre est cet axiome ; que si des forces se font actuellement équilibre sur un système quelconque de figure variable, l'équilibre ne cessera point en supposant que le système soit rendu tout-à-coup invariable, ou vienne, pour ainsi dire, à se solidifier lui-même.

Les conditions de l'équilibre des corps solides doivent donc se retrouver dans l'équilibre de tous les systèmes possibles, et c'est pour cela qu'on peut les nommer les *propriétés générales* de l'équilibre.

On a présenté *ces conditions* de plusieurs manières ; mais on peut remarquer qu'*elles se réduisent à cette condition unique, que les forces appliquées aux divers points du système soient décomposables, suivant les droites qui les joignent, en forces deux à deux égales et contraires*. C'est *la possibilité* de cette décomposition qui exige les six équations ordinaires de l'équilibre, comme on le verra tout à l'heure.

D'abord le théorème est évident pour l'équilibre de deux forces ; il faut que ces deux forces soient parfaitement égales et contraires.

Il est bien aisé d'*en conclure* que, pour trois forces, si l'on joint leurs points d'application par trois lignes

droites, il faut nécessairement que ces forces soient décomposables en d'autres deux à deux égales et contraires dans ces trois lignes.

Actuellement, si l'on a un nombre quelconque de forces, que l'on prenne trois quelconques de leurs points d'application, les trois lignes qui les joignent, et toutes celles qui partant des autres points, viendraient aboutir à ceux-là : on pourra se représenter ces trois premiers points comme les angles de la commune base de plusieurs pyramides triangulaires dont les autres points seraient les sommets.

Cela posé, on peut toujours commencer par décomposer les forces appliquées à ces sommets, chacune en trois autres suivant les trois arêtes qui y aboutissent.

Ensuite, on est le maître de décomposer les trois forces qui sont aux coins de la commune base, en forces qui soient égales et contraires aux premières, et en d'autres. Si l'on supprime les forces égales et contraires dans les arêtes, il ne reste plus que trois forces appliquées aux trois angles de la base. Mais puisqu'il y a équilibre, ces forces restantes doivent être décomposables suivant les trois côtés de cette base, en forces deux à deux égales et contraires.

Donc toutes les forces étaient décomposables suivant les droites qui joignent leurs points d'application en forces deux à deux égales et contraires dans chacune d'elles ; et cette décomposition est déterminée lorsqu'elle ne se fait, comme on le suppose ici, que par $3h - 6$ distances mutuelles, h étant le nombre total des points du système.

Lorsqu'on veut faire entrer dans le calcul, non-seulement les quantités des forces appliquées, mais encore

leurs inclinaisons mutuelles, on se donne, au lieu de chaque force, ses trois composantes parallèles à trois axes connus. Alors, pour exprimer qu'en chaque point chaque force est décomposée en d'autres suivant les arêtes qui y aboutissent, il faut trois équations où ces dernières composantes sont les inconnues. Il faudrait donc en tout $3h$ équations pour les h points du système. Mais si l'on veut que les composantes soient deux à deux égales et contraires dans les $3h-6$ arêtes, elles ne formeront que $3h-6$ inconnues. Donc, en les éliminant, il restera entre les forces données six équations de condition, pour que leur décomposition en forces égales et contraires soit possible, et par conséquent pour qu'il y ait équilibre. Ce sont les six équations connues : nous les avons données ailleurs par une autre métaphysique qui a de grands avantages; mais j'ai été bien aise d'en indiquer, en passant, cette démonstration nouvelle, parce qu'on y découvre un nouveau sens, et qu'ici ces équations ne sont pas obtenues séparément et par des considérations particulières, mais s'offrent à la fois toutes six comme l'expression d'une *seule* et unique condition, qui est LA POSSIBILITÉ *que les forces appliquées se décomposent en d'autres égales et contraires suivant les distances mutuelles des différens points.*

Cette décomposition est donc *nécessaire* dans l'équilibre de tous les systèmes possibles ; et, quand les distances mutuelles des points du système sont toutes invariables, *elle suffit*, de quelque façon qu'elle s'opère d'ailleurs ; je veux dire, quelle que soit la proportion des composantes dans les distances mutuelles successives.

Mais lorsqu'aucune de ces lignes n'étant invariable

à part, c'est simplement une fonction de leurs longueurs qui doit demeurer constante, alors la décomposition précédente (qui est toujours nécessaire) ne suffit plus pour assurer l'équilibre du système ; il faut encore qu'il règne d'une droite à l'autre, entre les valeurs des forces égales et contraires, une certaine proportion qui dépend de la nature de la fonction proposée. Or c'est précisément cette proportion qu'il s'agit de découvrir ici ; et c'est dans la manière générale de la déduire de la fonction proposée, que consiste la loi fondamentale de l'équilibre des systèmes.

II.

D'un système où les points ne sont liés que par une seule équation entre leurs distances mutuelles.

Ne considérons d'abord que quatre points, et leurs distances m, n, p, q, r, s qui sont comme les arêtes d'une pyramide triangulaire dont ces points seraient les sommets.

Représentons par $f(m, n, p, q, r, s) = L = const$: la fonction quelconque de ces distances qui doit demeurer constante, en sorte qu'on ait toujours cette équation, dans quelques positions respectives que puissent passer les divers points du système.

Cela posé, soient, s'il est possible, quatre forces qui tiennent ces quatre points en équilibre. Si on les conçoit décomposées, chacune en trois autres suivant les trois arêtes contiguës, il résulte de ce qu'on vient de dire, que les deux composantes qu'on trouvera dans chaque arête seront nécessairement égales et con-

traires; sans quoi il n'y aurait point équilibre, même en supposant toutes ces arêtes devenues raides.

Il ne reste donc qu'à trouver la proportion des composantes autour de chaque sommet de la pyramide.

Pour cela, je suppose que trois quelconques des points deviennent parfaitement fixes dans l'espace. L'équilibre n'est pas troublé. Mais, à cause de l'équation proposée, le quatrième n'a plus que la liberté de se mouvoir sur une certaine surface courbe, et il a entièrement cette liberté : donc il est nécessaire que la force unique qui le presse soit actuellement perpendiculaire à cette surface (*).

Or, m, n, p, étant les trois arêtes qui se terminent au point que l'on considère, la surface qu'il a la liberté de décrire quand les trois autres deviennent fixes, est donnée par l'équation,

$$f(m, n, p, q, r, s) = const.$$

lorsqu'on y regarde m, n, p comme seules variables.

La normale à cette surface se trouve donc en prenant les trois *fonctions primes* $f'(m), f'(n), f'(p)$, de la fonction proposée relativement aux trois lignes ou rayons m, n, p, portant sur eux trois longueurs respectives proportionnelles à ces fonctions *primes*, avec cette attention de les porter, sur les rayons mêmes, pour les fonctions *primes* qui auront le même signe; et sur leurs prolongemens, pour les fonctions qui auront le signe contraire : si l'on achève le rhomboïde, la diagonale donne la direction de la normale, comme cela se voit par la géométrie (**).

(*) Voyez sur ce principe, la note I.

(**) On trouvera plus loin la démonstration de ce théorème.

Donc, puisque la force appliquée au point que l'on considère doit agir suivant cette direction, ses trois composantes suivant les arêtes m, n, p, sont nécessairement proportionnelles aux trois fonctions *primes* $f'(m), f'(n), f'(p)$.

On verrait de même qu'au point où se terminent les trois arêtes m, q, r, les trois composantes de la force qui le sollicite, sont proportionnelles aux trois fonctions *primes* $f'(m), f'(q), f'(r)$, et ainsi de suite.

Donc les forces égales et contraires dans les six arêtes m, n, p, q, r, s, sont toutes proportionnelles aux six fonctions *primes* $f'(m), f'(n), f'(p), f'(q), f'(r), f'(s)$.

Donc il est démontré, en toute rigueur, que si quatre corps ou points sont liés entre eux par la condition qu'une fonction quelconque de leurs distances mutuelles demeure constante, ces corps ne peuvent être en équilibre, à moins qu'ils ne soient sollicités les uns vers les autres, suivant leurs distances mutuelles, par des forces proportionnelles aux fonctions *primes* de la fonction donnée relativement à ces distances : ou, ce qui est la même chose, à moins qu'ils ne soient sollicités par quatre forces P, Q, R, S, qui puissent se décomposer en celles-là; et, comme cette condition détermine entièrement les forces, il s'ensuit que de telles forces se feront réellement équilibre sur le système.

On a considéré sous la fonction les six distances mutuelles m, n, p, q, r, s, des quatre corps ; mais le raisonnement serait le même si cette fonction ne renfermait qu'une partie quelconque de ces distances. Seulement on trouverait que les forces sont nulles le long des distances qui n'entrent pas dans la fonction.

Par exemple, que, des trois distances m, n, p, du premier point aux trois autres, il n'entre que les deux premières m et n dans la fonction proposée; alors la surface que ce point peut décrire, quand les autres sont fixement arrêtés, est donnée par l'équation $f(m, n, q, etc.) = const.$ en y regardant m et n comme seules variables. C'est une surface de révolution autour de la ligne qui joint les deux corps d'où partent les deux rayons vecteurs m et n. La normale à cette surface est donc simplement la diagonale d'un parallélogramme construit sur deux droites proportionnelles à $f'(m)$, $f'(n)$, dont on aurait prolongé ces rayons vecteurs. La force qui doit agir suivant cette normale se décompose donc entièrement, suivant les distances m et n, en deux autres proportionnelles à $f'(m)$, $f'(n)$, et ne donne point de composante suivant la distance p, qui n'entre point dans la fonction.

Si, des trois distances m, n, p du premier point aux autres, il n'y en avait qu'une seule m sous la fonction, la surface qu'il pourrait décrire quand les autres sont fixes, serait donnée par l'équation $f(m, q, r, \ldots) = const.$, en y regardant m comme seule variable, ce qui équivaut à $m = const.$ C'est alors une sphère dont la ligne m est le rayon, et par conséquent la normale. La force qui doit agir suivant cette ligne y reste donc tout entière, et ses deux composantes sont nulles, y suivant les distances n et p: d'où l'on voit qu'il ne peut avoir aucune action *directe* entre les corps, suivant leurs distances mutuelles que la fonction ne renferme pas.

Soient actuellement tant de points que l'on voudra, et

$$f(m, n, p, q, r, \ldots) = L = const.$$

une équation quelconque entre leurs distances mutuelles $m, n, p, q, r, \ldots$: et, s'il y a dans cette équation plus de $3h - 6$ distances mutuelles, h étant le nombre des points, qu'on élimine ces lignes superflues, ou qu'on les suppose éliminées au moyen des équations de condition qui ont lieu entre les lignes qui joignent des points deux à deux dans l'espace : on pourra se représenter comme ci-dessus, toutes ces distances mutuelles comme les arêtes de pyramides triangulaires successives qui s'appuieraient toutes sur une même base.

Cela posé, soit le système tenu en équilibre par des forces P, Q, R, S,... respectivement appliquées à ses différens points.

D'abord toutes ces forces doivent être décomposables suivant les lignes $m, n, p, q, r, \ldots$ en forces deux à deux égales et contraires, sans quoi il ne pourrait pas y avoir équilibre, comme on l'a démontré plus haut.

Cette décomposition supposée faite (et elle aura lieu ici d'une manière déterminée), il ne s'agit plus, pour connaître les forces, que de trouver la proportion nécessaire de leurs composantes. Or, je dis qu'elles sont entre elles comme les fonctions *primes* de la fonction proposée relativement aux lignes $m, n, p, q, r, \ldots$ où elles sont dirigées.

En effet, considérons à part quatre points qui forment les angles de l'une de nos pyramides, et supposons pour un moment que, leurs distances mutuelles restant seules variables dans l'équation, toutes les autres y deviennent constantes; il est clair que le jeu de ces quatre corps devient le même que s'ils étaient restés seuls dans l'espace, mais liés entre eux par l'équation proposée, où l'on regarderait leurs seules

distances mutuelles comme variables, et toutes les autres lignes comme de simples nombres donnés. Cela résulte de la supposition même, et se voit aussi très bien dans la figure, en se représentant les six arêtes de notre pyramide restées seules variables. D'abord, le point qui fait le sommet de cette pyramide ne tient point aux autres arêtes devenues invariables; et pour les trois points à la base, ils ne sont pas plus gênés par ces arêtes, qui viennent sur eux trois à trois des autres points du système, que si elles n'y étaient réellement pas. Car, bien que ces lignes soient devenues isolément raides, comme on les suppose restées mobiles autour de leurs points d'intersection, qui eux-mêmes sont mobiles dans l'espace, il est visible qu'elles se prêtent d'elles-mêmes aux mouvemens des trois points où elles aboutissent, et ne font que les suivre, sans les gêner, dans toutes les positions où ils peuvent passer quand on fait varier leurs seules distances mutuelles dans l'équation proposée.

Donc en vertu de ce qui a été démontré, il faudrait pour l'équilibre particulier du système de nos quatre points, qu'ils fussent sollicités les uns vers les autres par des forces proportionnelles aux fonctions *primes* de la fonction donnée, prises relativement à leurs distances mutuelles.

Mais il est clair que cette proportion doit se retrouver absolument la même dans l'équilibre général du système; car si l'équilibre est supposé y exister, il y subsiste toujours en supposant telles arêtes que l'on voudra devenues raides, et supprimant alors toutes les forces égales et contraires qui se détruiraient d'elles-mêmes dans ces arêtes. Les forces restantes appliquées

au système partiel le long des arêtes ou distances mutuelles restées variables, doivent donc suivre nécessairement la loi de l'équilibre de ce système.

Donc, au moment de l'équilibre général, on est sûr que les composantes contraires qu'on trouverait dans les arêtes de l'une quelconque de nos pyramides, sont proportionnelles aux fonctions *primes* de la fonction donnée relativement à ces lignes. Donc, à cause des arêtes communes aux pyramides successives, cette proportion s'étend d'une arête à l'autre dans toute la figure du système; et tous les points sont nécessairement sollicités les uns vers les autres, suivant leurs distances mutuelles m, n, p, q, r, ... qui entrent dans la fonction, par des forces proportionnelles aux fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, $f'(q)$, f', (r), etc., de cette fonction, relativement à ces distances m, n, p, q, r, ... *Ce qu'il fallait démontrer.*

Si donc, aux différens points du système, on prend sur les lignes $m, n, p, q, r, \ldots$ des longueurs quelconques toutes proportionnelles aux fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, etc., qui se rapportent à ces lignes, ces longueurs représenteront les composantes des forces qui doivent être appliquées à ces points respectifs; de sorte qu'en les réduisant en chaque point à une seule P, on aura la force unique qui doit y être appliquée pour l'équilibre du système.

La manière la plus simple de trouver l'expression de ces forces P, Q, R..., est de chercher, pour chacune d'elles P, ses trois composantes X, Y, Z parallèles à trois axes rectangulaires dans l'espace.

Soient x, y, z les trois coordonnées du premier point par rapport à ces axes, m, n, p, etc., ses dis-

tances aux autres points dont les coordonnées soient x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; etc., on aura :

$$m = \sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]},$$
$$n = \sqrt{[(x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2]},$$
$$p = \sqrt{[(x-x''')^2 + (y-y''')^2 + (z-z''')^2]},$$

etc.,

et les fonctions *primes* de ces expressions, prises par rapport à x, et que nous représenterons par $\frac{dm}{dx}$, $\frac{dn}{dx}$, $\frac{dp}{dx}$, etc., seront les cosinus des angles que les droites font avec l'axe des x.

Les forces $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, etc., appliquées au point que l'on considère, suivant ces droites, donneront donc parallèlement à l'axe des x, les composantes respectives

$$f'(m)\frac{dm}{dx}, f'(n)\frac{dn}{dx}, f'(p)\frac{dp}{dx}, \text{ etc.},$$

lesquelles se réduiront à une seule X, égale à leur somme,

$$f'(m)\frac{dm}{dx} + f'(n)\frac{dn}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} + \text{etc.};$$

mais cette expression n'est autre chose que la fonction *prime* de la fonction proposée, $f(m,n,p,q,r,\ldots)$, ou L, prise relativement à x, et que nous représenterons simplement par $\left(\frac{dL}{dx}\right)$.

Ainsi la force appliquée au premier point aura sa composante suivant l'axe X, des x, représentée par $\left(\frac{dL}{dx}\right)$, c'est-à-dire, par la fonction *prime* de la fonction donnée L, relativement à la coordonnée du point le long de cet axe.

On aura de même pour les deux autres composantes Y, Z, suivant les axes des y, z, les expressions $\left(\frac{dL}{dy}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz}\right)$; de sorte que la force elle-même P sera représentée par

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}.$$

Si l'on considère la surface courbe représentée par l'équation $L = const.$, quand on y regarde x, y, z comme seules variables, on sait que $\left(\frac{dL}{dx}\right)$, $\left(\frac{dL}{dy}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz}\right)$, sont proportionnelles aux cosinus des trois angles que fait, avec les axes, la normale à cette surface (*).

$$\text{La force P} = \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}$$

est donc dirigée perpendiculairement à la surface courbe que le point où elle agit pourrait décrire si tous les autres devenaient fixes; ce qui doit être,

(*) Cette Analyse contient la démonstration générale du théorème de géométrie dont on a parlé plus haut (p. 434). Il en résulte que les lignes $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, etc., composées à la manière des forces, donnent pour résultante la normale à la surface courbe décrite par le point où m, n, p, q, etc., aboutissent comme rayons vecteurs. C'est ce rapprochement curieux, entre la composition des forces et

et ce qu'on pouvait supposer *à priori*, comme dans le cas du système de quatre points, où l'on est parti de cette vérité comme principe.

Donc en appliquant ce qu'on vient de dire aux différens points du système, les forces P, Q, etc., qui les sollicitent sont toutes proportionnelles aux fonctions,

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]},$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]},$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy''}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right]},$$

etc.

et chacune d'elles est normale à la surface courbe que son point d'application pourrait décrire, en vertu de l'équation $L = const.$, si l'on supposait tous les autres fixement arrêtés.

Cette démonstration nous paraît nette et rigoureuse ; elle est même dégagée de cette espèce d'axiome, que, dans les systèmes, les points ne peuvent agir les uns sur les autres que suivant les droites qui les joignent. En effet, pour obtenir les forces totales qui

---

la détermination des normales, qui amène en Mécanique ces fonctions *primes* de la fonction donnée, comme l'expression naturelle des forces capables de se faire équilibre. Car il faut, en chaque point, que les forces appliquées soient proportionnelles à ces fonctions *primes*, afin de donner leur résultante dirigée suivant la normale à la surface que ce point peut décrire quand on arrête tous les autres : et c'est ensuite la nécessité de l'équilibre dans chaque partie du système, qui étend cette proportion d'un point à l'autre dans toute l'étendue de la figure.

doivent être appliquées aux points respectifs du système, nous sommes bien maîtres d'imaginer chacune d'elles comme décomposée en d'autres suivant telles lignes que nous voulons choisir, et qui, pour chaque point, sont au nombre de trois au moins; et puisque nous avons trouvé la proportion nécessaire de toutes ces composantes, il s'ensuit que nous avons trouvé les vraies forces de l'équilibre, et que cet équilibre est unique.

Cependant, voici une difficulté apparente qu'il n'est peut-être pas inutile de proposer et de résoudre, parce que sa solution très simple met le théorème dans un nouveau jour.

Quand le système n'est composé que de quatre points, il faut nécessairement leurs six distances mutuelles pour déterminer la pyramide dont ils sont les angles ; et par conséquent il n'y a aucune équation de *condition*, c'est-à-dire qui existe d'elle-même entre ces distances.

Mais lorsque le nombre des points est supérieur à quatre, il y a plus de distances mutuelles qu'il n'en faut pour assurer la figure du système ; et l'on a, entre toutes les distances, autant d'équations de condition que de lignes superflues. On peut donc alors éliminer de la fonction proposée $f(m,n,p,q,r,\ldots.)$, ou y introduire telles de ces lignes qu'on voudra, et que toutefois la combinaison de ces équations pourra permettre. Ainsi l'on pourra varier les distances qui entrent sous cette fonction, et la forme de cette fonction de plusieurs manières.

Or, suivant qu'on voudra présenter cette fonction entre telles ou telles distances mutuelles, on trouvera telles ou telles forces suivant ces distances ;

d'où il paraît que les forces totales P, Q, etc., qui en résulteraient à chaque point, pourraient bien n'être pas les mêmes dans ces différens cas, quoiqu'au fond la liaison des points n'ait pas été changée, et que le cas de l'équilibre soit unique.

Pour détruire sur-le-champ cette difficulté, j'observe que, si une fonction des distances mutuelles de plusieurs points peut quelquefois être écrite de plusieurs façons, selon les distances que l'on y veut choisir, cette fonction néanmoins reste toujours *identique*, si on la regarde comme une fonction des coordonnées x, y, z de tous les points. En effet, les équations de condition qui ont lieu entre les distances mutuelles $m,n,p,q,r,\ldots$ ne sont autre chose que des identités, lorsqu'on vient à y substituer, au lieu de ces droites, leurs expressions par les coordonnées x, y,z; x',y',z', etc., des différens points qu'elles unissent. Ainsi, quoiqu'au moyen de ces équations, la fonction proposée L puisse être changée en m,n,p, q, $r,\ldots$ elle demeure toujours la même en x, y, z; x',y',z', etc., etc. : les expressions

$$\left(\frac{dL}{dx}\right),\ \left(\frac{dL}{dy}\right),\ \left(\frac{dL}{dz}\right);\ \left(\frac{dL}{dx'}\right),\ \left(\frac{dL}{dy'}\right),\ \left(\frac{dL}{dz'}\right),\ \text{etc.},$$

sont donc aussi toujours les mêmes. Or, comme on sera toujours conduit à ces expressions pour les composantes de P, Q, etc., de quelque manière permise que la même fonction L ait été écrite en $m,n,p,q,r,\ldots$, il s'ensuit qu'on parviendra toujours aux mêmes forces P, Q, R, etc., pour l'équilibre du système, comme cela doit être.

Ceci nous fait voir encore que si la fonction proposée $f(m, n, p, q, r, \ldots) = L$, est présentée entre plus de lignes $m,n,p,q,r,\ldots$ qu'il n'en faut pour la figure, il sera inutile d'éliminer les autres, comme on l'a supposé fait, au commencement, pour la clarté de la démonstration. Les fonctions $\left(\frac{dL}{dx}\right)$, $\left(\frac{dL}{dy}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz}\right)$; $\left(\frac{dL}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dL}{dy'}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz'}\right)$, etc., qu'on en tirerait pour l'expression des forces de l'équilibre, seraient identiquement les mêmes que si l'on n'avait pas fait l'élimination ; et par conséquent on les obtiendra tout de suite, sans rien changer à la forme sous laquelle la fonction est donnée.

A l'égard des *actions réciproques* des différens points, si l'on sait que, dans le système dont on s'occupe, il ne peut y avoir de communication directe entre les h points que par leurs $3h-6$ distances mutuelles qui entrent sous la fonction, on conclura de ce qui a été démontré, que ces points agiront réellement les uns sur les autres, suivant ces distances m, n, p, q, $r,\ldots$ en raison des fonctions *primes* $f'(m), f'(n), f'(p), f'(q), f'(r)$, etc.

Mais de même que la fonction proposée peut être présentée indifféremment entre telles ou telles distances mutuelles, de même la communication des points peut être établie suivant telles ou telles de ces lignes sans que la liaison générale de ces points soit changée. Si donc on ignore de quelle manière le système est exécuté, on ne pourra pas dire, d'après la seule fonction $f(m,n,p,q\ldots)$, quelles sont les réactions véritables des différens points, parce qu'on ne

saura pas si les liens qui pourraient donner lieu à ces actions directes sont établis précisément le long des distances mutuelles $m,n,p,q,r,\ldots$ qui paraissent dans la fonction. Ainsi cette fonction, qui, sous quelque forme qu'elle soit donnée, caractérise le système, et suffit pour faire connaître sur-le-champ les forces uniques, P; Q, R, etc., ou

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]},$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]}, \text{ etc.},$$

qui doivent être appliquées aux différens points, ne suffit pas pour apprendre comment ces forces se distribuent réellement des uns aux autres : il faut encore regarder la construction du système lui-même, et voir suivant quelles distances mutuelles la communication est réellement établie. S'il arrive qu'elle se fasse précisément par les mêmes distances que celles qui sont dans la fonction donnée, on prendra sur-le-champ les fonctions *primes* relatives à ces distances, et l'on aura les réactions véritables des différens points. Mais si la communication s'opère par d'autres lignes, il faudra commencer par éliminer de la fonction toutes les distances mutuelles le long desquelles il n'y a pas de lien immédiat dans la construction du système (ce qui pourra toujours se faire au moyen des équations de condition entre ces droites), et les fonctions *primes* de cette fonction nouvelle par rapport aux distances mutuelles qui y restent, seront les expressions des actions réciproques qui auront véritablement lieu entre les corps.

Tel est l'esprit de cette loi fondamentale, qui contient toute la science des forces. Avant d'aller plus loin, il me paraît à propos d'en faire quelques applications simples, où l'on voie à la fois la rapidité des solutions et l'identité de la théorie avec les premiers principes de l'équilibre.

Considérons d'abord trois points liés entre eux par la condition que la somme de leurs distances mutuelles m,n,p, doive demeurer constante.

La fonction $f(m,n,p)$ sera donc ici $m+n+p$; en prenant les fonctions *primes*, on aura

$$f'(m)=1,\quad f'(n)=1,\quad f'(p)=1.$$

Ce qui nous apprend que chacun des trois points doit être sollicité vers les deux autres par des forces égales; que par conséquent les trois forces P, Q, R, qu'il faut appliquer à ces points, sont représentées en grandeurs et en directions par les diagonales de trois losanges construits avec les mêmes côtés sous les trois angles du triangle.

C'est la loi de l'équilibre de trois points ou passeraient, comme dans des anneaux, un même fil inextensible le long duquel ils pourraient couler librement. Quand ces points se meuvent de manière que le fil reste tendu, la somme de leurs distances mutuelles demeure constante, conformément à l'équation $m+n+p=$ const., et chacun d'eux lorsqu'on le suppose seul mobile, n'a plus que la liberté de se mouvoir sur un ellipsoïde de révolution dont les deux autres sont les foyers. C'est pour cela que chacune des forces appliquées divise en deux parties égales l'angle

formé par les distances de son point d'application aux deux autres ; car cette force doit être normale à l'ellipsoïde dont il s'agit, et dans cette surface la normale divise en deux parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs.

On peut remarquer que le fil inextensible ne représente pas complètement la liaison que l'équation suppose; car ce fil fait simplement que la somme des distances des points ne peut pas devenir plus grande, mais il ne l'empêche pas de devenir moindre. Ainsi, pour l'équilibre des trois corps unis par le fil, il faut encore ajouter que les forces doivent agir de manière à ce que le fil soit tendu ; au lieu que dans l'équilibre du système défini par l'équation $m+n+p=const.$ elles peuvent agir indifféremment, ou pour tendre le fil, ou pour le comprimer ; de sorte que l'espèce de fil flexible que le calcul suppose, est tout-à-la-fois inextensible et incompressible.

Si c'était simplement la somme des distances m et n des deux premiers corps au troisième, qui dût demeurer constante, on aurait

$$f(m,n)=m+n=const.,$$

d'où $f'(m)=f'(n)=1$. Ainsi, il faudrait appliquer aux deux premiers corps deux forces égales, suivant leurs distances m et n, au troisième, et à celui-ci une force égale et contraire à leur résultante; et il n'y aurait point de force suivant la distance p, qui n'entre pas sous la fonction.

C'est en effet le cas de trois corps, dont l'un pourrait couler comme un anneau le long du fil, tandis

que les deux autres seraient fixement attachés à ses deux bouts. Quand les deux corps extrêmes sont supposés fixes, celui du milieu n'a plus que la liberté de décrire un ellipsoïde de révolution autour d'eux comme foyers; mais ceux-ci décrivent simplement des sphères autour de lui, comme centre, quand ils sont regardés, l'un après l'autre, comme seuls mobiles. Voilà pourquoi la force appliquée au corps qui peut glisser le long du fil, divise en deux également l'angle formé par les deux portions de ce fil, tandis que chacune des deux autres forces agit vers le corps du milieu, dans la direction du fil lui-même.

S'il y avait plus de trois corps unis entre eux par un même fil, le long duquel ils pussent couler librement, en nommant $m,n,p,q,r,\ldots$ les portions successives de ce fil, on aurait

$$f(m,n,p,q,r,\ldots)=m+n+p+q+r+\ldots=const.,$$

et par conséquent

$$f'(m)=f'(n)=f'(p)=f'(q)=f'(r)=\text{etc.}=1,$$

comme ci-dessus : d'où l'on voit que le fil doit être également tendu dans toute sa longueur; que chacune des forces divise en deux parties égales l'angle du polygone funiculaire où elle est appliquée, et qu'elles sont toutes proportionnelles aux cosinus des moitiés de ces angles ; etc.

Supposons actuellement que nos trois corps soient tellement liés, que la somme des carrés de leurs distances mutuelles reste constante.

La fonction $f(m,n,p)$ sera ici $m^2+n^2+p^2$; et l'on

aura

$$f'(m) = 2m,\ f'(n) = 2n,\ f'(p) = 2p.$$

Il faudra donc, pour l'équilibre, que chaque corps soit sollicité vers les deux autres par des forces proportionnelles à ses distances à ces deux corps; d'où il est facile de voir que les trois forces uniques P, Q, R, qui agiraient sur ces points respectifs, sont dirigées vers leur centre de gravité, en les supposant de masses égales, et sont proportionnelles à leurs distances à ce centre.

C'est en effet ce qui résulterait du plus simple raisonnement; car en vertu de l'équation..... $m^2 + n^2 + p^2 = const.$, si l'on suppose deux des points devenus fixes, le troisième n'a plus que la liberté de décrire une sphère dont le centre est au milieu de la droite qui joint les deux autres : or la force qui le sollicite, dans le cas de l'équilibre, doit être normale à cette surface, et par conséquent les trois forces doivent être dirigées des trois angles du triangle vers les milieux des côtés opposés, et se croiser ainsi au centre de gravité de ce triangle; il est clair ensuite qu'elles sont entre elles comme les distances des angles à ce point.

Mais ici on ne peut plus construire le système, comme on l'a fait dans l'exemple précédent; il faudrait un fil d'une espèce particulière, où les corps pussent rouler de manière que la somme des carrés de leurs distances fût toujours la même, et nous ne connaissons pas de fil qui ait cette propriété. Mais de quelque façon qu'un pareil système puisse être exécuté, qu'il soit même possible ou non, peu importe à la théorie; notre objet n'est pas de le faire, mais de trouver les forces d'équilibre qui résultent nécessairement de sa définition, et le problème est résolu dans toute sa pureté.

Que si l'on avait un plus grand nombre de corps liés de manière que la somme des carrés de toutes leurs distances mutuelles dût demeurer constante, on verrait de même que, pour l'équilibre, tous ces corps doivent être sollicités les uns vers les autres proportionnellement à leurs distances; de sorte que les forces totales qui les animent respectivement sont dirigées vers le centre de gravité de tous ces points, considérés comme égaux en masse, et sont proportionnelles aux distances de ces points à ce centre commun.

Si la fonction des distances mutuelles était..... $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \ldots$, en prenant les fonctions *primes*, on aurait

$$f'(m) = -\frac{1}{m^2},\ f'(n) = -\frac{1}{n^2},$$

$$f'(p) = -\frac{1}{p^2},\ f'(q) = -\frac{1}{q^2},\ \text{etc.}$$

et tous les corps, dans le cas de l'équilibre, devraient être sollicités les uns vers les autres en raison inverse des carrés de leurs distances mutuelles, etc.

On pourrait multiplier les exemples; mais ceux-ci suffisent, et je reviens à la question générale.

D'un système où les points sont liés par plusieurs équations quelconques entre leurs distances mutuelles.

Supposons actuellement que les points du système soient tellement liés, qu'on ait toujours entre leurs distances mutuelles les équations suivantes :

$$f(m,n,p,q,r,\ldots) = L = const.$$
$$\varphi(m,n,p,q,r,\ldots) = M = const.$$
$$\psi(m,n,p,q,r,\ldots) = N = const.$$
etc.

de sorte que le système puisse affecter toutes les figures où ces équations subsistent, et n'en puisse affecter aucune où elles cesseraient d'avoir lieu.

Premièrement, par cela seul que les points du système sont liés entre eux par la première équation $L = const.$, on peut leur appliquer les forces respectives

$$\lambda\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}$$
$$\lambda\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy'}\right)^2\right]}$$
$$\lambda\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy''}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right]}$$
etc.

λ désignant un coefficient quelconque indéterminé, et chaque force étant normale à la surface représentée par l'équation $L = const.$, lorsqu'on y regarde les trois coordonnées du point d'application comme seules variables; et l'on est sûr que ces forces se font équilibre sur le système.

En second lieu, parce que les points sont liés entre eux par la seconde équation $M = const.$, on peut leur appliquer encore les forces respectives

$$\mu\sqrt{\left[\left(\frac{dM}{dx}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz}\right)^2\right]}$$
$$\mu\sqrt{\left[\left(\frac{dM}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz'}\right)^2\right]}$$
$$\mu\sqrt{\left[\left(\frac{dM}{dx''}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy''}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz''}\right)^2\right]}$$
etc.

μ étant un nouveau coefficient indéterminé; et chacune de ces forces étant normale à la surface représentée par l'équation $L = const.$, lorsqu'on y regarde les coordonnées du point d'application comme seules variables.

De même, en désignant par ν un coefficient indéterminé comme les précédens, on peut encore appliquer aux points du système les forces respectives

$$\nu\sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz}\right)^2\right]}$$
$$\nu\sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz'}\right)^2\right]}$$
$$\nu\sqrt{\left[\left(\frac{dN}{dx''}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy''}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz''}\right)^2\right]}$$
etc.

dirigées suivant les normales aux surfaces respectives représentées par l'équation $N = const.$, lorsqu'on y regarde successivement, etc.

Et ainsi de suite pour les autres équations qui lient les points du système.

Il est bien manifeste qu'il y aura équilibre en vertu de toutes ces forces, puisqu'il y aurait équilibre en particulier dans chaque groupe relatif à chaque équation.

Mais on pourrait demander si ces forces, ou leurs résultantes aux différens points, sont les seules qui puissent se faire équilibre sur le système : si, par la simultanéité des équations $L = const.$, $M = const.$, $N = const.$, etc., les points ne pourraient pas devenir capables d'autres résistances que des résistances composées de celles qui naîtraient successivement de ces équations, si elles avaient lieu l'une après l'autre.

Pour répondre à cette question, j'observe qu'au moment de l'équilibre du système, chaque équation peut être regardée comme tenant lieu de certaines forces; car si l'on venait à supprimer tout-à-coup cette équation, l'équilibre serait rompu; mais il est clair qu'il y aurait de certaines forces propres à empêcher cette rupture, et qui remplaceraient parfaitement l'équation absente. Si donc on imagine que toutes les équations, hors la première, soient actuellement remplacées par des forces convenables, les points ne se trouvant plus liés entre eux que par la seule équation $L = const.$, il est nécessaire que toutes les forces appliquées soient réductibles à des forces proportionnelles aux fonctions :

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]},$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]},$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right]},$$

etc.

D'où l'on voit que cette équation, dans l'équilibre du système, ne peut tenir lieu que des mêmes forces dont elle pourrait tenir lieu si elle était seule. Ainsi, les forces qui peuvent se faire équilibre sur un système défini par plusieurs équations, ne sont autre chose que les forces composées de celles qui s'y feraient équilibre séparément en vertu de chaque équation.

Lorsque les points du système ne sont liés que par une seule équation, le cas de l'équilibre est unique; je veux dire qu'il n'y a, pour chaque figure où peut passer le système, que des forces P, Q, R, etc., de directions et de proportions déterminées, qui puissent s'y faire équilibre. Mais lorsqu'il y a deux équations $L = const.$, $M = const.$, l'équilibre n'est plus unique, et il y a pour une même figure une infinité de groupes de forces qui peuvent se faire équilibre sur le système. En effet, au moyen des deux indéterminées λ et μ qui affectent les deux composantes

$$\lambda\sqrt{\left[\left(\frac{dM}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dz}\right)^2\right]},$$

$$\mu\sqrt{\left[\left(\frac{dM}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dz}\right)^2\right]},$$

de chaque force, on peut varier les directions et la proportion de ces forces d'une infinité de manières. Seulement il faut observer que chacune d'elles ne sortira pas d'un plan déterminé : car la première composante est normale à la surface représentée par l'équation $L = const.$, lorsqu'on y regarde les coordonnées du point comme seules variables; la seconde est normale à la surface représentée par l'équation $M = const.$,

lorsqu'on y regarde les mêmes coordonnées comme seules variables. La résultante est donc située dans le plan perpendiculaire à l'intersection de ces deux surfaces. C'est en effet ce qui doit avoir lieu; car si l'on vient à fixer tous les points du système, hors celui dont il s'agit, il n'aura plus que la liberté de se mouvoir le long de cette intersection, comme dans un canal infiniment étroit: or, l'équilibre n'étant point troublé par l'hypothèse, il faut nécessairement que la force appliquée soit actuellement perpendiculaire à la direction de ce canal.

Quand il y a plus de deux équations qui lient les points du système, l'indétermination du cas de l'équilibre est encore plus étendue; et pour les points dont les coordonnées se trouvent à la fois dans trois équations, les forces appliquées peuvent avoir des directions quelconques. Les trois indéterminées λ, μ, ν, qui affectent alors les trois composantes de chaque force, peuvent donner à cette force une direction arbitraire dans l'espace. C'est ce qui s'accorde encore avec notre principe; car si l'on suppose devenus fixes tous les points hors celui que je considère, comme ses coordonnées entrent à la fois dans trois des équations, ce point ne conserve plus aucune liberté dans l'espace, ainsi la force qui le sollicite n'est obligée à aucune direction déterminée (*).

(*) Au reste, il faut bien entendre ceci: les directions des forces ne sont pas toutes indéterminées; s'il n'y avait, par exemple, que trois équations, une fois que l'on aurait disposé de λ, μ, ν, pour donner à l'une des forces une direction arbitraire, les directions et la proportion des autres serait nécessairement déterminées.

IV.

D'un système où les points sont liés par des équations quelconques *entre leurs coordonnées.*

Jusqu'ici nous n'avons considéré qu'un système entièrement *libre*, c'est-à-dire, dont les points ne se trouvent liés que par des équations entre *leurs distances mutuelles;* mais il est bien facile d'étendre la loi que nous avons trouvée, à un système où les points seraient liés par des équations entre *leurs coordonnées relatives à trois axes fixes dans l'espace.* Ce n'est pas que les fonctions L, M, N, etc., des distances mutuelles m, n, p, q, etc., ne puissent être regardées comme fonctions des coordonnées x, y, z; x', y', z', etc., au moyen des expressions $\sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ etc.] qu'on y substituerait à la place des lignes m, etc.; mais elles ne contiennent alors ces coordonnées x, y, z; x', y', z', etc., que d'une certaine manière, et nous voulons passer au cas où elles en seraient des fonctions *quelconques.*

Pour cela, reprenons notre système libre de l'article précédent, et, choisissant à volonté trois points de ce système, menons de chacun des autres trois lignes à ces points; et supposons, ce dont on est toujours le maître, que, dans les équations $L = const.$, $M = const.$, $N = const.$, etc., il n'entre que ces distances et celles qui joignent nos trois points deux à deux.

Si l'on suppose alors que ces trois points deviennent fixes, les forces de l'équilibre n'en seront pas moins exprimées par les mêmes fonctions qu'auparavant;

seulement les trois points devenus fixes supporteront des pressions égales et contraires aux forces qu'il aurait fallu y appliquer s'ils étaient restés libres avec les autres. Actuellement, faisons abstraction de ces trois points, c'est-à-dire, regardons les autres comme formant à eux seuls un système qui est celui que nous avons en vue. Les équations entre leurs distances aux trois points fixes deviendront des équations quelconques entre les coordonnées qui déterminent leurs lieux dans l'espace: cependant les forces de l'équilibre seront exprimées comme auparavant. Ces forces, il est vrai, ne se feront plus équilibre entre elles *seules,* comme dans le cas du système libre, où nous les avons vues se décomposer en forces, deux à deux égales, et contraires, suivant les droites qui joignent les points; et même il pourra souvent arriver qu'il n'y ait aucune action directe entre ces mêmes points. Mais pour concevoir alors comment l'équilibre s'opère, il faudra supposer qu'on restitue ces trois points fixes avec lesquels les premiers sont en liaison tacite; et c'est par ces points, comme par des espèces de poulies de renvoi, que ceux du système réagiront les uns sur les autres, et entretiendront la loi de leurs résistances respectives de la même manière que si tout était libre dans l'espace.

Voilà précisément ce qui arrive quand on considère un système dont les points sont liés par des équations *quelconques* entre leurs coordonnées. On ne voit actuellement que les points dont les coordonnées paraissent dans ces équations, et l'on ne peut plus expliquer l'équilibre entre ces seuls corps: c'est qu'en se donnant une équation quelconque entre les coordonnées de plusieurs points, on introduit tacitement

des objets fixes extérieurs, auxquels les points se trouvent liés, et souvent par lesquels seuls ils peuvent se communiquer leur action réciproque. Mais si l'on imagine alors qu'on ait pris trois points quelconques dans l'espace, et qu'on ait changé les coordonnées primitives en d'autres qui soient, pour chaque point, ses distances à ces trois foyers, en ajoutant ces trois points au système, et considérant le tout comme libre, on trouvera pour les forces la même expression que nous avons donnée plus haut; et si l'on ne veut plus compter ensuite les trois forces appliquées aux trois foyers, parce qu'en les supposant fixes, ils n'ont pas besoin d'être retenus par des forces actuelles, et qu'ils trouvent en eux-mêmes les résistances nécessaires pour l'équilibre, on n'aura égard, comme on le fait ordinairement, qu'à celles des points du système proposé, lesquelles auront entre elles les mêmes relations qu'auparavant, et se déduiront immédiatement des équations données, sans leur faire subir aucune transformation.

Et de là résulte enfin ce théorème, qui est l'objet principal du Mémoire:

Quelles que soient les équations $L = 0$, etc., *qui règnent entre les coordonnées des différens points d'un système, chacune d'elles, pour l'équilibre, demande qu'on applique à ces points, le long de leurs coordonnées, des forces quelconques proportionnelles aux fonctions primes de cette fonction* L, *relativement à ces coordonnées respectives.*

Ainsi, en représentant par $L = 0$, $M = 0$, etc., des équations quelconques entre les coordonnées x, y, z; x', y', z', etc., des différens points, et par λ, μ, etc.,

des coefficiens quelconques indéterminés, on aura, pour les forces totales, X,Y,Z; X′,Y′,Z′, etc., qui doivent être appliquées à ces points suivant leurs coordonnées :

$$\begin{aligned}
X &= \lambda\left(\frac{dL}{dx}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dx}\right) + \text{etc.}\\
Y &= \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dy}\right) + \text{etc.}\\
Z &= \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dz}\right) + \text{etc.}
\end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

$$\begin{aligned}
X' &= \lambda\left(\frac{dL}{dx'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dx'}\right) + \text{etc.}\\
Y' &= \lambda\left(\frac{dL}{dy'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dy'}\right) + \text{etc.}\\
Z' &= \lambda\left(\frac{dL}{dz'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dz'}\right) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc.

Si l'on élimine de ces équations les indéterminées λ, μ, etc., il restera les conditions de l'équilibre proprement dites, c'est-à-dire, les relations qui doivent avoir lieu entre les seules forces appliquées et les coordonnées de leurs points d'application pour l'équilibre du système.

Les équations (A) sont en même nombre que les coordonnées de tous les points, et les indéterminées λ, μ, etc., en même nombre que les équations de condition $L = 0$, $M = 0$, etc. Le nombre des conditions de l'équilibre est donc égal à celui de toutes les coordonnées, moins le nombre des équations qui les lient; par conséquent les conditions de l'équilibre diminuent à mesure que celles de la liaison augmentent. Mais comme, pour un système entièrement libre et dont le nombre de points est h, il ne pourrait pas y avoir plus de $3h - 6$ équations de condition, auquel cas la figure serait entièrement déterminée, il s'ensuit que, pour l'équilibre d'un tel système, il reste toujours six conditions nécessaires, comme nous le savions d'ailleurs.

En général on voit que les équations de l'équilibre, réunies aux équations de condition, suffiront pour résoudre tous les problèmes qu'on pourra se proposer sur l'équilibre du système. Par exemple, on peut se donner les forces appliquées X,Y,Z; X′,Y′,Z′, etc., et demander la figure que doit prendre le système pour se mettre en équilibre en vertu de ces forces. Dans ce cas, les équations réunies dont je viens de parler, et dont le nombre est égal à celui de toutes les coordonnées, serviront à les faire connaître, et par conséquent les lieux des différens corps dans l'espace. Mais si l'on se donnait la figure du système, c'est-à-dire les coordonnées de tous les points, et qu'on demandât les forces capables de faire prendre au système cette figure, comme les forces X,Y,Z; X′,Y′, Z′, etc., qui seraient alors les inconnues, ne se trouvent que dans les équations de l'équilibre, et n'entrent point dans les équations de condition, on aurait moins d'équations que d'inconnues, et le problème demeurerait indéterminé : d'où l'on voit que, pour une même figure du système, il y a une infinité de groupes de forces capables de s'y faire équilibre; ce qui s'accorde encore avec ce que nous avons trouvé précédemment; etc. etc.

Mais je passe à la conclusion générale, où l'on

rappelle sous un même point de vue le problème de l'équilibre et celui du mouvement.

V.

Conclusion de ce Mémoire.

Les lois de l'équilibre et du mouvement d'un point libre sont connues et parfaitement démontrées; mais s'il y a plusieurs points liés entre eux par des conditions quelconques, quelles seront les lois de l'équilibre et du mouvement de tout le système? Voilà le problème général de la mécanique.

Or, l'idée la plus naturelle dans cette recherche est de considérer que si tout le système est actuellement en équilibre, chaque point doit être en équilibre de lui-même, en vertu des forces qui lui sont immédiatement appliquées, et des résistances qu'il éprouve de la part des autres, à cause de sa liaison avec eux. Et de même, quand le système entre en mouvement, chaque point doit se mouvoir comme s'il était libre, et qu'il obéit à la fois aux forces qui le sollicitent et aux forces de résistance dont nous venons de parler. Si donc on savait évaluer ces résistances mutuelles, on n'aurait qu'à les combiner avec les forces immédiatement données par l'état de la question, et posant les équations de l'équilibre ou du mouvement pour chaque point, comme s'il était parfaitement libre, on aurait tout ce qui serait nécessaire pour déterminer l'état du système dans l'espace, et le problème serait résolu.

Toute la mécanique se réduit donc à savoir estimer les résistances réciproques que peuvent se prêter les

différens points d'un système, en vertu des conditions qui les lient.

Mais pour donner là-dessus une règle *générale*, il faut nécessairement concevoir ces conditions exprimées sous une forme *générale*. Il faut commencer par établir une définition générale des *systèmes;* sans quoi la mécanique ne serait plus que l'énumération des cas particuliers d'équilibre et de mouvement que l'on saurait résoudre, et il n'y aurait pas plus lieu de s'en proposer le problème général, que dans la géométrie, de chercher une règle générale des tangentes, si l'on ne supposait avant tout les courbes définies par leurs équations.

Or, en supposant que les conditions qui lient entre eux plusieurs corps et qui en font un *système*, consistent en ce que, dans toutes les positions où peuvent passer ces corps, il y ait des fonctions quelconques de leurs coordonnées qui doivent toujours demeurer nulles ou constantes, nous avons démontré qu'en vertu de chacune d'elles, les corps sont rendus capables, suivant leurs coordonnées, de résistances simultanées proportionnelles aux fonctions primes de cette fonction, relativement à ces coordonnées respectives.

On n'aura donc, pour résoudre les problèmes, qu'à prendre les résistances mutuelles des corps, d'après cette règle générale; à combiner ces forces avec celles qui leur sont immédiatement appliquées, et à traiter séparément chacun d'eux, comme s'il était libre.

Ainsi, des équations précédentes (A), les trois premières peuvent être regardées comme les équations de l'équilibre du premier point, qui serait libre, mais sollicité à la fois par les forces appliquées X, Y, Z,

et par les forces contraires

$$\left[\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dx}\right)+\text{etc.}\right],$$

$$\left[\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dy}\right)+\text{etc.}\right],$$

$$\left[\lambda\left(\frac{dL}{dz}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dz}\right)+\text{etc.}\right],$$

qui naissent des équations $L=0$, $M=0$, etc.

De même les trois équations suivantes peuvent être considérées comme, etc., et ainsi des autres.

Quant aux équations du mouvement, on les formera en égalant l'expression générale $\frac{d^2x}{dt^2}$ de la force accélératrice suivant chaque coordonnée x, à la force appliquée X, combinée avec la résistance suivant cette même coordonnée, et l'on aura pour le premier point,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dx}\right)+\text{etc.}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dy}\right)+\text{etc.}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\lambda\left(\frac{dL}{dz}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dz}\right)+\text{etc.}$$

et de même pour le second point,

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=X'+\lambda\left(\frac{dL}{dx'}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dx'}\right)+\text{etc.}$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}=Y'+\lambda\left(\frac{dL}{dy'}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dy'}\right)+\text{etc.}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2}=Z'+\lambda\left(\frac{dL}{dz'}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dz'}\right)+\text{etc.}$$

et ainsi de suite pour les autres points du système.

Telles sont les équations générales du mouvement, d'où il s'agira de tirer, par le calcul intégral, la solution des problèmes qu'on pourra se proposer sur le mouvement du système.

De la loi de l'équilibre établie ci-dessus, nous aurions bien pu conclure que si l'on trouble infiniment peu l'équilibre d'un système quelconque de corps, de manière que les conditions de la liaison ne soient pas violées, la somme des *momens* de toutes les forces appliquées, c'est-à-dire, suivant l'acception de *Galilée*, la somme de leurs produits par les chemins respectifs que parcourent leurs points d'application dans le sens de ces forces, doit toujours être égale à zéro ; ce qui constitue le principe des vitesses virtuelles : mais ce principe n'est plus alors qu'un simple corollaire de la théorie précédente, lequel, pour la solution des problèmes, nous ramènerait à la règle générale d'où nous l'aurions tiré lui même, et ne se ferait même bien entendre que par cette règle.

On voit encore qu'il a été inutile de rappeler le fameux principe de *D'Alembert*, qui réduit la Dynamique à la Statique. En vertu de ce principe, si l'on décompose chaque mouvement imprimé en deux autres, dont le premier soit celui que le corps prendra réellement, tous les seconds doivent se faire équilibre entre eux ; c'est-à-dire, que si l'on décompose chaque mouvement imprimé en deux, dont l'un soit celui que le corps perd, l'autre sera celui qu'il prendra. Mais cela revient immédiatement à ce qu'on vient de dire, savoir, que le mouvement réel de chaque point est le résultat de son mouvement imprimé, et

de la résistance qu'il éprouve par sa liaison avec les autres ; ce qui est évident de soi-même. Ainsi le principe de *D'Alembert* n'est au fond que cette idée simple, qu'on remarque à peine dans la suite du raisonnement, et qui ne revêt la forme d'un principe que par un certain tour d'expression qu'on lui donne.

Cependant, comme on a vu que, pour avoir le mouvement de chaque point, il faut connaître la résistance qu'il peut éprouver de la part des autres, et que, d'un autre côté, ces résistances mutuelles ne sont autre chose que des forces qui se font équilibre à chaque instant sur le système, dans les figures successives où il passe, il en résulte non-seulement que les lois du mouvement peuvent être ramenées à celles de l'équilibre, comme on le savait déjà par le principe de D'Alembert, mais encore qu'elles doivent y revenir nécessairement d'elles-mêmes; que dans l'étude ordonnée des diverses parties de la Mécanique, on ne peut pas traiter l'équilibre comme un cas particulier du mouvement, et qu'il est dans la nature des choses que la Dynamique soit fondée sur la Statique.

NOTE I.

Sur ce principe, que dans l'équilibre des systèmes, chaque force doit être perpendiculaire à la surface ou à la courbe sur laquelle le point d'application n'aurait plus que la liberté de se mouvoir, si tous les autres points devenaient fixes.

Ce principe peut être regardé comme un élément de la théorie générale de l'équilibre ; il est clair, parfaitement exact, et la vérité en est hors d'atteinte. En effet, on démontre que, si un point n'a d'autre liberté dans l'espace, que celle de se mouvoir sur une surface ou sur une ligne courbe fixement arrêtée, il n'y peut être en équilibre, à moins que la résultante des forces qui le sollicitent ne soit perpendiculaire à cette surface ou à cette ligne courbe.

Or, soit un système quelconque de points en équilibre en vertu d'autant de forces appliquées, de sorte qu'il n'y ait qu'un seule force pour chaque point. L'équilibre ne sera pas troublé si l'on fixe tous les points, hors un seul, et qu'on supprime ensuite toutes les forces appliquées aux points devenus fixes. Il ne restera donc à considérer qu'un seul point, et la force unique qui le sollicite. Mais si, par la nature du système, quand on fixe tous les points hors un seul, celui-ci ne conserve plus que la liberté de se mouvoir sur une certaine surface ou sur une courbe, il est précisément dans le même cas que s'il y eût été placé d'abord, comme sur un objet fixement arrêté ; et puisqu'il y est

en équilibre, il faut que la force *unique* qui agit sur lui soit perpendiculaire à cette surface ou à cette ligne courbe.

Mais on voit que, pour la rigueur de la démonstration, il faut entendre simplement la surface ou la courbe que le point pourrait décrire dans le seul cas où l'on fixerait tous les autres points du système sans exception : car si l'on ne fixait qu'une partie des autres points, il ne serait plus permis de supprimer, comme on l'a fait, toutes les autres forces du système, et de ramener ainsi la question au cas où il n'y a plus qu'un seul point et une seule force à considérer. Je vais éclaircir ceci par un exemple.

Dans le système formé de trois points A, B, C, liés entre eux de manière à ne pouvoir changer leurs distances mutuelles; en considérant le point A, par exemple, si l'on ne supposait devenu fixe qu'un seul des deux autres, comme le point C, on verrait que le point A n'a plus que la liberté de décrire une sphère autour du point C comme centre; d'où il paraîtrait s'ensuivre que, pour l'équilibre, la force appliquée en A doit être normale à cette sphère, et par conséquent dirigée vers le point C; ce qui n'est pas nécessaire.

Mais si l'on suppose rendus fixes à la fois les deux points B et C, le point A n'a plus que la liberté de décrire un arc de cercle autour de la droite BC, comme axe de révolution; et l'on peut ici rigoureusement conclure que la force appliquée doit être perpendiculaire à la direction de cet arc de cercle; condition qui n'oblige la force qu'à se trouver, d'une manière quelconque, dans le plan des trois points A, B, C, comme on sait que cela doit être.

Quand on ne fixe qu'un seul point C, il est bien vrai que le point A ne peut plus se mouvoir que sur une sphère déterminée; mais observez qu'il ne peut le faire sans entraîner l'autre point B, lequel, étant sollicité par une force (qu'on n'a pas pu supprimer puisqu'il est resté mobile), réagit nécessairement sur le point A. Dans cette hypothèse donc, la force que l'on voit appliquée en A n'est pas la seule qui sollicite ce point; et il n'est pas nécessaire qu'elle soit perpendiculaire à la surface qu'il pourrait décrire, puisque, d'après le principe même, cela ne convient qu'à la résultante de toutes les forces qui pourraient agir sur le point que l'on considère. Il n'en est pas de même quand on suppose rendus fixes à la fois les deux points B et C; la force appliquée au point A est alors la seule qui le presse, puisqu'on peut regarder les deux autres forces du système comme supprimées; et par conséquent il est nécessaire ici que la force appliquée soit perpendiculaire à la direction de la courbe où le point conserve encore la liberté de se mouvoir.

Au reste, on pourrait encore appliquer le principe dans la première hypothèse; mais, pour être exact, il faudrait commencer par prendre l'action du point B sur le point A, combiner ensuite cette force avec celle qui y est immédiatement appliquée, et l'on trouverait que la résultante de ces deux forces doit être normale à la sphère dont il s'agit, comme cela a réellement lieu.

Mais il est bien plus clair et plus simple de n'employer ce principe que selon l'énoncé qu'on en a fait

au commencement de cette Note. On ne s'en est même servi dans le Mémoire, que pour les systèmes où les points ne sont liés que par une seule équation : il n'y a pas là deux manières de l'entendre ; car, s'il n'y a qu'une seule équation entre les coordonnées des points, il faut nécessairement les supposer fixes tous, hors un seul, pour que celui-ci devienne assujetti à ne pouvoir plus que décrire une surface. Si l'on en laissait seulement un autre mobile, celui que l'on considère ne serait gêné d'aucun côté dans l'espace ; il pourrait encore s'y mouvoir en tous sens, et il n'y aurait plus lieu de rien tirer de cette hypothèse pour la direction que doit avoir la force appliquée dans le cas de l'équilibre.

Puisque dans la théorie générale de l'équilibre il a suffi de considérer ce principe dans un cas où il n'offre pas la plus légère difficulté, et que tout le reste s'en trouve déduit avec rigueur, on aurait pu se dispenser d'y revenir dans cette Note, et de lever des difficultés qui ne peuvent pas naître. Mais nous avons voulu faire voir que ce principe est général, qu'il a lieu dans toutes les machines, et nous l'avons remarqué particulièrement dans le *levier*, pour nous conformer au desir que M. *Lagrange* nous a fait l'honneur de nous témoigner à cet égard. Le levier n'est, en effet, que le système de l'exemple précédent, où l'un C des trois points A, B, C est véritablement fixe. On ne considère plus alors que l'équilibre des deux forces appliquées aux deux bouts A et B du levier, et le point d'appui C tient lieu de la troisième force. On voit donc que notre principe ne dit pas que les deux forces appliquées doivent être normales aux sphères que les deux bouts A et B du levier pourraient

décrire autour du point d'appui C, mais bien qu'elles doivent être perpendiculaires aux arcs de cercles respectifs que ces points pourraient décrire autour des droites CB et CA, comme axes de révolution ; d'où il suit que les deux forces appliquées doivent être dans un même plan avec l'appui ; ce qui est en effet la première condition connue de l'équilibre du levier.

Quant à la seconde condition, elle résulte de ce qu'on a dit sur les systèmes invariables : chacune des deux forces étant décomposée en deux autres, la première vers le point d'appui, la seconde vers l'autre bout du levier, les deux premières se trouvent toujours détruites par la résistance de l'appui ; mais les deux secondes doivent être parfaitement égales et contraires : d'où l'on tire aisément que les deux forces appliquées sont réciproques à leurs distances au point d'appui.

Tout cela subsiste, quel que soit l'angle C du triangle ACB, et par conséquent a lieu encore dans le cas où cet angle devient égal à deux droits : les trois points A, C, B tombent alors en ligne droite ; et c'est ainsi qu'on passe au *levier droit*, qui n'est qu'un cas particulier de celui que nous venons de considérer. Mais on n'y pourrait plus immédiatement appliquer les raisonnemens qui précèdent ; car les trois points A, C, B étant en ligne droite, si l'on en suppose deux fixes, le troisième se trouve tout-à-fait arrêté ; ce qui n'apprend plus rien pour les directions des forces, ou ce qui semblerait dire qu'elles peuvent être dirigées d'une manière quelconque. D'un autre côté, on ne peut plus décomposer chacune d'elles en deux autres, suivant les mêmes lignes que ci-dessus, puisque ces lignes n'en font plus qu'une seule. Aussi,

pour comprendre et pour bien expliquer l'équilibre du levier *droit*, faut-il le supposer d'abord courbe, ou un peu rompu au point d'appui, comme l'a fait *Newton*, et après lui, *D'Alembert* dans son *Traité de Dynamique*.

On voit reparaître alors les vraies conditions de l'équilibre du levier, et même la manière dont les forces y réagissent l'une sur l'autre. Que si la marche paraît indirecte, et la démonstration peu naturelle, en ce qu'on paraît déduire une chose simple d'une chose composée, c'est qu'on ne fait pas assez d'attention à l'idée de raideur, qui paraît simple et qui est réellement complexe. Pour écrire, en effet, que trois points A, C, B font partie d'un corps raide, il faut nécessairement écrire que leurs trois distances mutuelles sont séparément invariables, et cela, que les trois points soient en ligne droite ou non. Il n'y a donc, pour l'objet que l'on a en vue, rien de plus simple dans un cas que dans l'autre. Mais si, dans le cas où les points sont en ligne droite, la loi de leur équilibre ne se montre plus aussi bien, ou même nous échappe, il sera très naturel de supposer d'abord que les trois points ne sont pas en ligne droite, d'y voir alors la loi de l'équilibre, et de la suivre jusqu'au cas où les points redeviennent en ligne droite. C'est ainsi que dans l'analyse, pour trouver les vraies valeurs de certains symboles algébriques, il ne faut plus les considérer en eux-mêmes, mais remonter aux fonctions qui les ont pu produire par l'hypothèse de quelques valeurs particulières attribuées aux variables.

Ce qu'on vient de dire donne la vraie cause de l'équilibre du levier. Dans la nature un levier *droit*, *sans épaisseur*, est impossible : il serait rompu par la plus

petite force transversale. La destruction des forces ne peut s'y opérer que par sa résistance longitudinale, et par conséquent, il faut toujours que ces forces puissent se décomposer en d'autres qui se détruisent dans l'*intérieur* du levier lui-même.

NOTE II.

Démonstration du principe des vitesses virtuelles ; identité de ce principe avec le théorème général qui fait l'objet du Mémoire précédent.

On s'est contenté d'observer, dans le Mémoire, que du théorème où l'on est parvenu sur l'expression générale des forces de l'équilibre, on pouvait passer aisément au principe des vitesses virtuelles. Mais ce principe est si célèbre dans l'histoire de la Mécanique, que je ne puis m'empêcher de marquer en peu de mots ce passage ; et j'y reviens d'autant plus volontiers, que non-seulement le principe des virtuelles est un corollaire de la proposition générale établie ci-dessus, mais qu'il me paraît encore identique avec elle lorsqu'on le regarde sous son vrai point de vue, et qu'on l'énonce d'une manière complète.

Soit le système défini par les équations suivantes entre les coordonnées des corps,

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z;\ x',y',z';\ \text{etc.}) &= 0 \\ \varphi(x,y,z;\ x',y',z';\ \text{etc.}) &= 0 \\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Supposons qu'on imprime à tous ces corps des vitesses quelconques qu'ils puissent avoir actuellement sans violer les conditions de la liaison, les coordonnées $x, y,$

z; x', y', z'; etc. varieront avec le temps t, dont il faudra les regarder comme fonctions ; et, pour que les vitesses imprimées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, etc., soient permises par la liaison, comme on le suppose, il faudra qu'elles satisfassent aux équations

$$f'(x)\frac{dx}{dt}+f'(y)\frac{dy}{dt}+f'(z)\frac{dz}{dt}+f'(x')\frac{dx'}{dt}+\text{etc.}=0,$$

$$\varphi'(x)\frac{dx}{dt}+\varphi'(y)\frac{dy}{dt}+\varphi'(z)\frac{dz}{dt}+\varphi'(x')\frac{dx'}{dt}+\text{etc.}=0,$$

etc. (B)

tirées des précédentes (A) ; et il suffira qu'elles y satisfassent pour que les conditions de la liaison soient observées.

Ou bien, si l'on multiplie ces équations par des coefficiens quelconques indéterminés λ, μ, etc., et qu'on les ajoute, il suffira qu'elles satisfassent à la seule équation suivante, indépendamment de λ, μ, etc.

$$\begin{aligned}&[\lambda f'(x)+\mu\varphi'(x)+\text{etc.}]\frac{dx}{dt}\\&+[\lambda f'(y)+\mu\varphi'(y)+\text{etc.}]\frac{dy}{dt}\\&+[\lambda f'(z)+\mu\varphi'(z)+\text{etc.}]\frac{dz}{dt}\\&+[\lambda f'(x')+\mu\varphi'(x')+\text{etc.}]\frac{dx'}{dt}\\&+\text{etc.}=0.\end{aligned}\qquad (C).$$

Or, les fonctions qui multiplient les vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, etc., ne sont autre chose (d'après

ce qui a été démontré) que les expressions générales des forces capables d'être en équilibre sur le système. Supposant donc des forces X, Y, Z; X′, Y′, Z′, etc., qui s'y feraient actuellement équilibre, on aurait :

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}+X'\frac{dx'}{dt}+Y'\frac{dy'}{dt}+\text{etc.}=0\ldots\ (D)$$

Au lieu des trois composantes X, Y, Z, multipliées par les vitesses respectives $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on peut mettre la résultante P, multipliée par la vitesse résultante, projetée sur la direction de P, et que je nommerai $\frac{ds}{dt}$; et de même pour les autres ; et l'on aura :

$$P\frac{ds}{dt}+P'\frac{ds'}{dt}+P''\frac{ds''}{dt}+\text{etc.}=0;$$

c'est-à-dire que, *si des forces se font équilibre sur un système quelconque, la somme de leurs produits par les vitesses, quelles qu'elles soient, qu'on voudra imprimer aux corps, mais que leur liaison permet, sera toujours égale à zéro, en estimant ces vitesses suivant les directions des forces.*

On voit par là qu'on peut prendre des vitesses quelconques finies, que l'on mesurerait par des droites quelconques qui seraient simultanément décrites par les corps, s'ils venaient tout-à-coup à rompre leur liaison et à s'échapper librement, chacun de son côté.

Quand on veut mesurer ces vitesses par les espaces mêmes que les corps décrivent réellement, comme elles varient à chaque instant par la liaison des corps, il faut prendre ces espaces infiniment petits, sans quoi ils ne mesureraient plus les vitesses imprimées ; et c'est

ainsi qu'on tombe dans les *vitesses virtuelles* proprement dites, où le principe vient perdre une partie de sa clarté.

Il résulte, en effet, de ce que nous venons de dire, que cette belle propriété de l'équilibre peut s'énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'on voit suivre aux différens corps d'un système des mouvemens quelconques qui ne violent point la liaison établie entre eux, c'est-à-dire, qui nous présentent continuellement le système dans des figures où les équations de condition subsistent, on peut être sûr que les forces qui seraient capables de se faire équilibre sur une de ces figures, dans le moment où le système y passe, sont telles que, multipliées par les vitesses actuelles des corps projetées sur leurs directions, la somme de tous ces produits est nécessairement égale à zéro.

Le principe, de cette manière, n'offre plus aucune trace de ces idées de mouvemens infiniment petits, et de perturbation d'équilibre, qui paraissent étrangères à la question, et qui laissent dans l'esprit quelque chose d'obscur.

Lorsqu'il y a équilibre, il est clair que le principe a lieu pour tous les systèmes de vitesses que les points pourraient avoir en passant par la figure que l'on considère.

Mais quand on veut partir du principe, et l'énoncer de manière qu'il assure l'équilibre, faut-il dire qu'il a lieu pour ce nombre infini de systèmes de vitesses? Il y aurait surabondance de conditions, et l'on voit qu'il suffit de dire que l'équation (D) doit se vérifier pour autant de systèmes de vitesses que les équations de condition (B) en laissent d'indépendantes ; ou bien

(en réunissant, comme on l'a fait ci-dessus, toutes ces équations en une seule (C), au moyen des indéterminées λ, μ, etc.), il suffit de dire que l'équation (D) des *momens* doit se vérifier pour autant de systèmes de vitesses qu'il y a de vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, etc. Mais comme chacun de ces systèmes de vitesses doit satisfaire à l'équation (C), par hypothèse, cela revient à dire que toutes les forces appliquées X, Y, Z ; X′, Y′, etc., qui multiplient les vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, etc., dans l'équation (D), doivent être toutes proportionnelles aux fonctions

$$[\lambda f'(x) + \mu \varphi'(x) + \text{etc.}], [\lambda f'(y) + \mu \varphi'(y) + \text{etc.}],$$
$$[\lambda f'(z) + \mu \varphi'(z) + \text{etc.}], [\lambda f'(x') + \mu \varphi'(x') + \text{etc.}],$$
$$[\lambda f'(y') + \mu \varphi'(y') + \text{etc.}], \text{ etc.},$$

qui multiplient les mêmes vitesses dans l'équation générale (C), qui fait régner entre elles les seules conditions que la liaison exige. Donc le principe des vitesses virtuelles, bien énoncé, c'est-à-dire avec toutes les idées qui peuvent le faire comprendre, est parfaitement identique avec le théorème général qui fait l'objet du Mémoire. Il dit exactement la même chose ; savoir, que, pour l'équilibre, les forces appliquées suivant les coordonnées des corps, en vertu de chaque équation, doivent être proportionnelles aux fonctions *primes* de cette équation, relativement à ces coordonnées respectives : mais c'était là précisément ce qu'il fallait démontrer.

Au reste, on serait encore conduit à reconnaître cette identité en partant de l'énoncé ordinaire du prin-

cipe des vitesses virtuelles, et se rendant bien compte, avant tout, du vrai sens qu'on y doit attacher. En effet, le problème général de la Statique n'est pas seulement de chercher les rapports des forces qui se font actuellement équilibre sur le système, mais bien l'expression générale des forces qui peuvent s'y faire continuellement équilibre, dans toutes les figures où il peut passer en vertu des équations de condition. L'équation générale donnée par le principe des vitesses virtuelles n'est donc pas, s'il est permis de parler ainsi, la relation d'un moment; elle ne doit pas simplement considérer l'équilibre du système dans la figure où il est, mais encore dans toute la suite des figures où il peut être, puisque c'est cette suite de figures qui le caractérise et en constitue la définition. Ainsi cette équation ne dit pas qu'il faut prendre pour les forces de tels nombres qu'elle en soit satisfaite, mais (puisque ces forces doivent varier avec la figure) qu'il faut choisir, pour les représenter, de telles fonctions des coordonnées, qu'elle demeure continuellement satisfaite, ou soit identique. Or, en vertu des conditions mêmes, on sait qu'il doit régner entre les vitesses simultanées que pourraient avoir les corps, une équation linéaire identique (C), dont les coefficiens sont les fonctions *primes* des fonctions données par rapport aux coordonnées suivant lesquelles on estime ces vitesses. L'équation des *momens* dit donc que les forces de l'équibre doivent être représentées par ces fonctions, et par conséquent, pour la démontrer, il faut faire voir comment de telles forces se font effectivement équilibre; ou bien il fallait chercher directement quelles fonctions des coordonnées peuvent représenter

les forces de l'équilibre, comme nous l'avons fait d'abord.

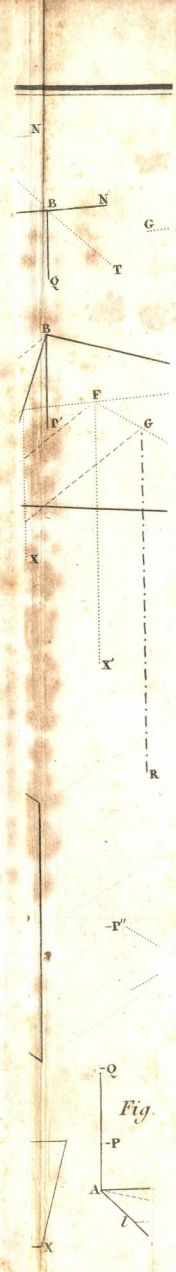
C'est pourquoi la plupart des démonstrations par lesquelles on a ramené le principe des vitesses virtuelles, ou à d'autres principes, ou à la loi connue de quelque machine simple, telle que le levier, etc., nous paraissent bien plutôt des *preuves* que de véritables démonstrations. Toutes, en effet, même la plus heureuse, qui est de M. Carnot, se font sans rien emprunter de la définition générale du système, comme si la machine était, pour ainsi dire, voilée, et qu'on n'en vît sortir que les cordons où sont appliquées les puissances. On peut bien prouver ou rendre sensible, par quelque construction plus ou moins simple, que si l'on trouble un peu l'équilibre, ces puissances doivent être dans un certain rapport avec les allongemens permis de ces cordons; mais cela ne peut offrir que les rapports actuels des forces considérées comme nombres, et ne montre point du tout la forme d'expression qui leur est propre. Cette perturbation de l'équilibre n'apprendrait, dans aucun cas, à quelle machine on aurait affaire, et les mêmes rapports pourraient s'offrir entre les forces appliquées, quoique les machines fussent de constitution tout-à-fait différente, et que chacune d'elles imprimât pourtant à l'expression des forces qui lui conviennent, une forme différente qu'on y devrait voir et retrouver sans cesse, si la difficulté du théorème était entièrement consommée. Ainsi, la propriété des vitesses virtuelles n'en restait pas moins mystérieuse, et l'on n'avait point de véritable démonstration, je veux dire une explication ouverte et claire, où l'on vit non-seulement que la chose se passe ainsi, mais qu'elle

est encore une suite de la définition générale que soi-même on a donnée au système que l'on considère.

C'est peut-être par quelque vue semblable, et pour arriver à l'équation des *momens* comme à une équation identique, que M. *Laplace* (*Mécan. Célest.*, tom. I, p. 40) ne considère que les équations qui représentent la liaison des parties du système, et n'emploie d'autres principes que celui de la composition des forces, et de l'égalité entre l'action et la réaction; ce qu'on peut regarder comme les élémens de la théorie de l'équilibre. Mais, comme dans son analyse, l'auteur ne fait rien entrer qui vienne de la définition du système dont il s'occupe, cette démonstration n'a aucune force, et la difficulté reste en son entier.

Quoi qu'il en soit, au reste, soit qu'on veuille partir du principe des vitesses virtuelles pour en suivre jusqu'au bout la signification intime, soit qu'on attaque directement le problème de la mécanique, ce qui est plus simple, on se trouve amené sur-le-champ à chercher quelles sont les fonctions des coordonnées qui donnent les forces de l'équilibre dans toutes les figures que peut affecter le système, en obéissant aux équations qui règnent entre les coordonnées des différens corps. Tel est exactement le problème que nous nous sommes proposé; et notre objet bien net et bien distinct a été de le résoudre par les premiers principes de la Statique et de la Géométrie.

FIN DES NOTES.



Fig

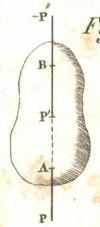


Fig . 1.

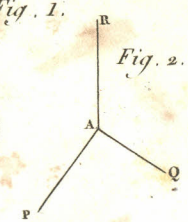


Fig . 2.

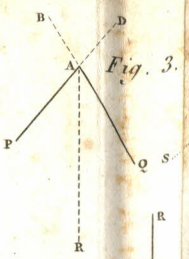


Fig . 3.

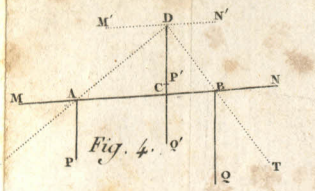


Fig . 4.

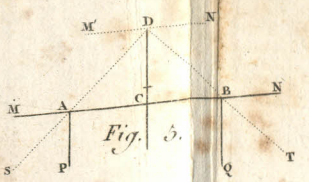


Fig . 5.

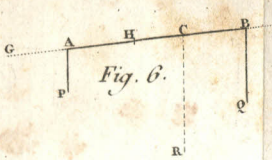


Fig . 6.

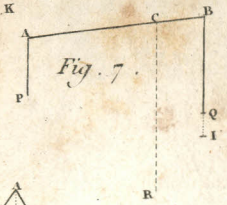


Fig . 7.

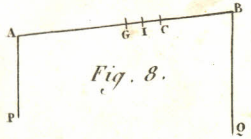


Fig . 8.

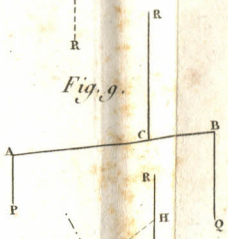


Fig . 9.

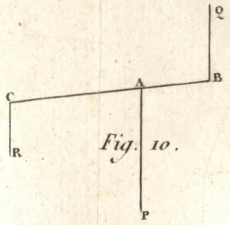


Fig . 10.

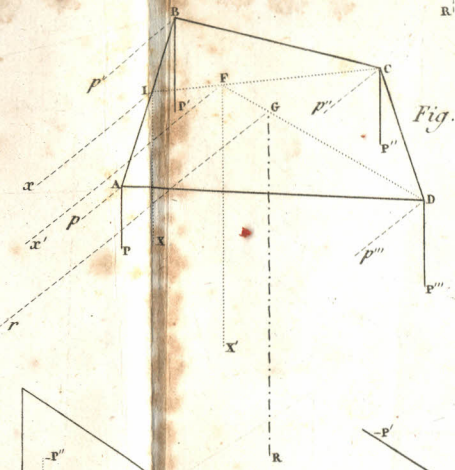


Fig . 11.

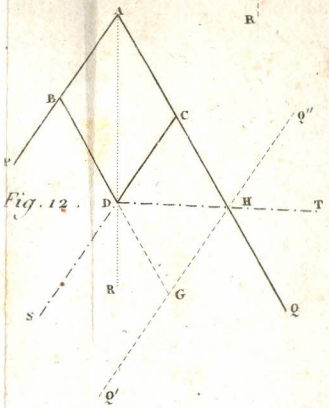


Fig . 12.

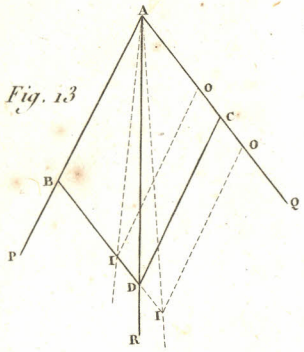


Fig . 13.

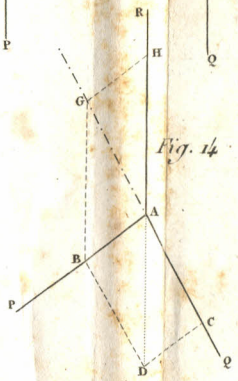


Fig . 14.

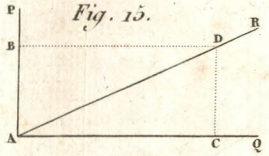


Fig . 15.

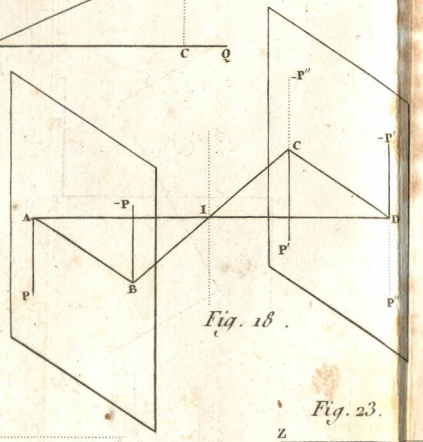


Fig . 18.

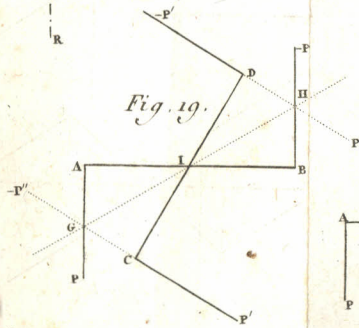


Fig . 19.

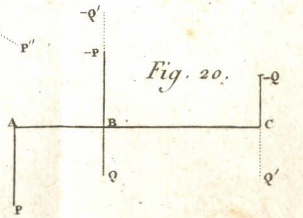


Fig . 20.

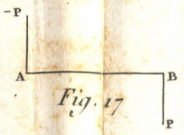


Fig . 17.

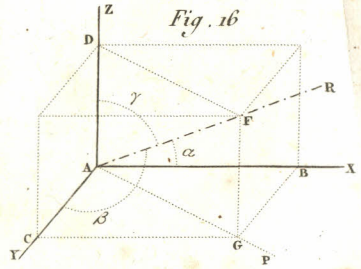


Fig . 16

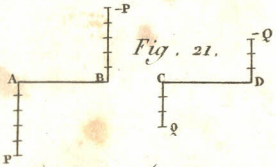


Fig . 21.

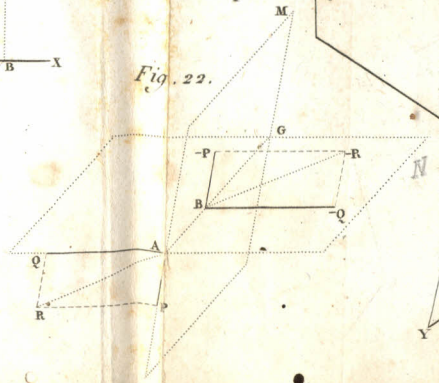


Fig . 22.

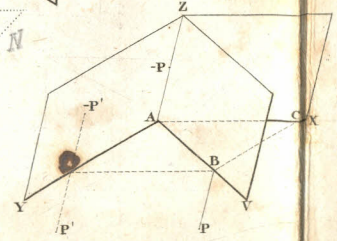


Fig . 23.

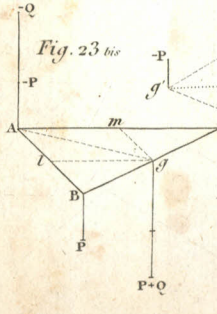


Fig . 23 bis

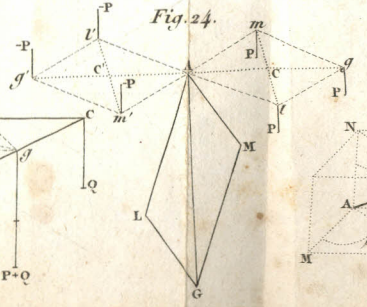


Fig . 24.

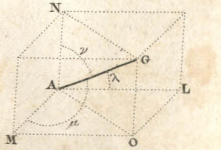


Fig . 25.

Fig. 26.

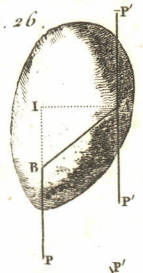


Fig. 27.

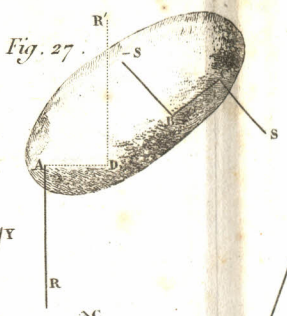


Fig. 28.

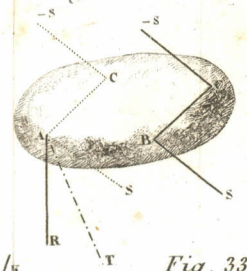


Fig. 29.

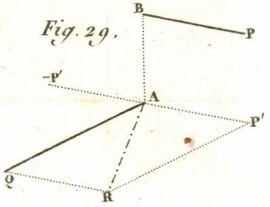


Fig. 30

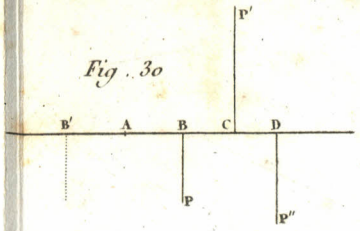


Fig. 31.

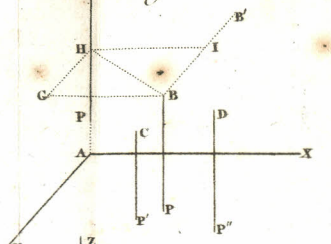


Fig. 32.

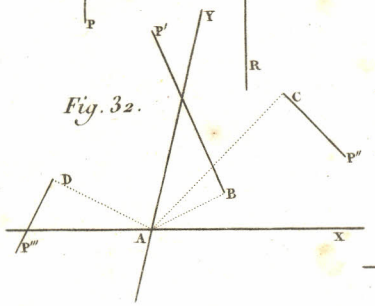


Fig. 33.

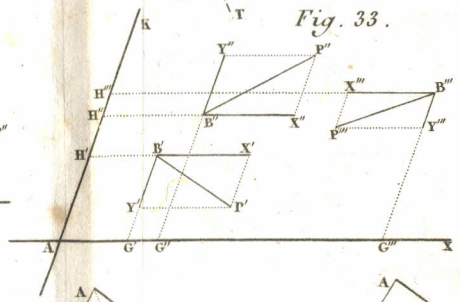


Fig. 34.

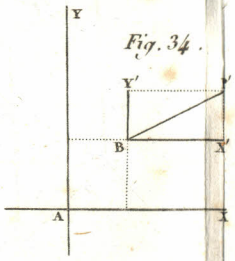


Fig. 35.

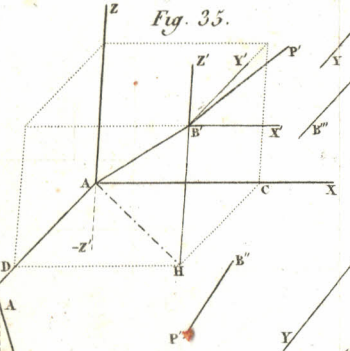


Fig. 36.

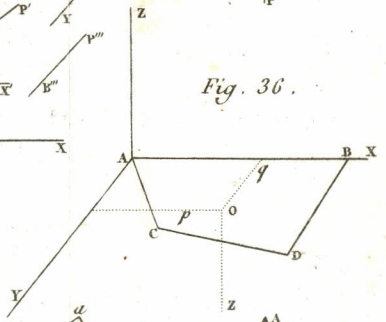


Fig. 37.

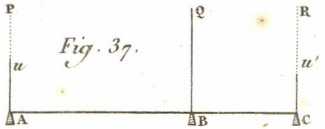


Fig. 38.

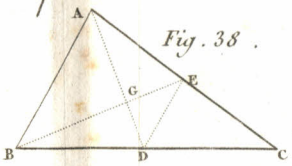


Fig. 39.

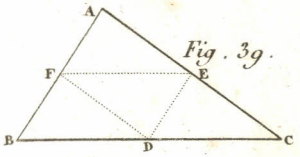


Fig. 40.

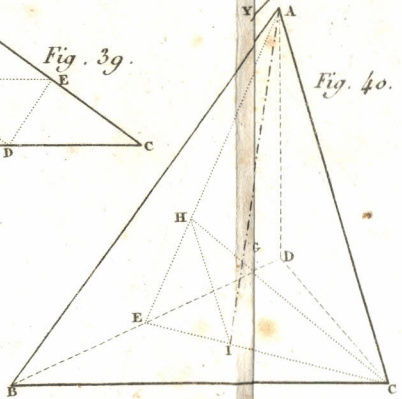


Fig. 41.

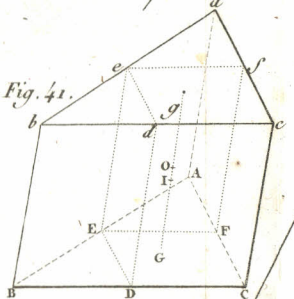


Fig. 42.

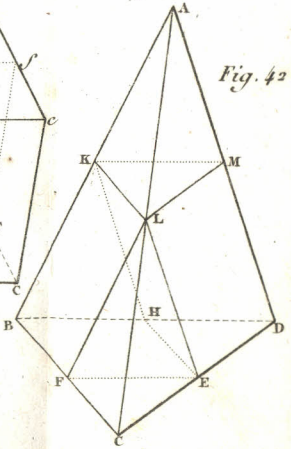


Fig. 43.

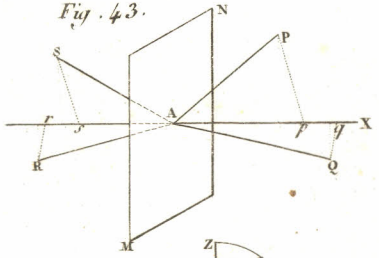


Fig. 44.

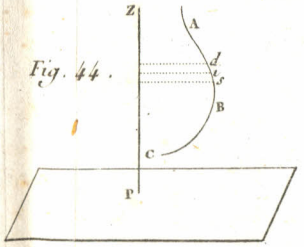


Fig. 45.

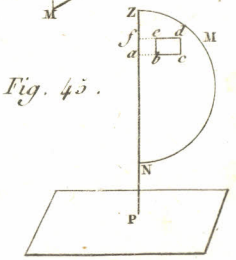


Fig. 46.

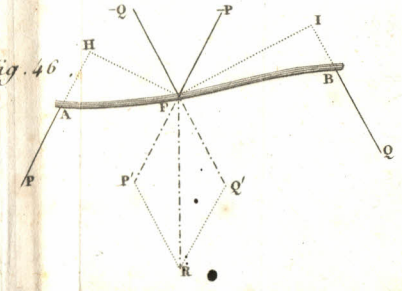


Fig. 47.

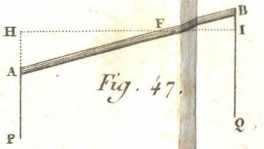


Fig. 48.

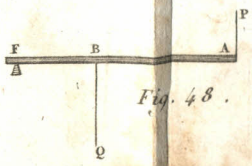


Fig. 49.

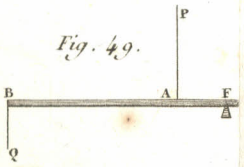
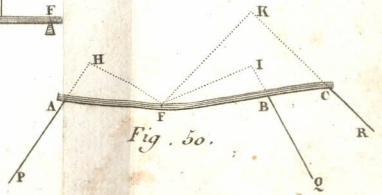


Fig. 50.



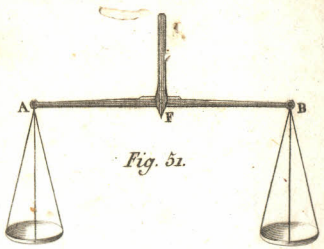


Fig. 51.

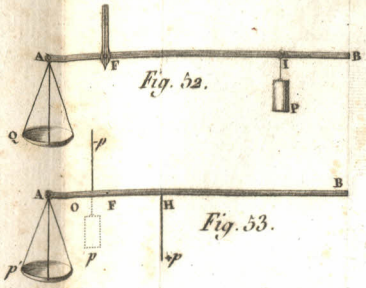


Fig. 52.

Fig. 53.

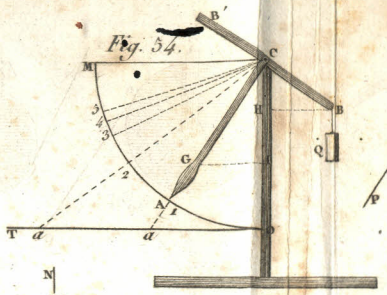


Fig. 54.

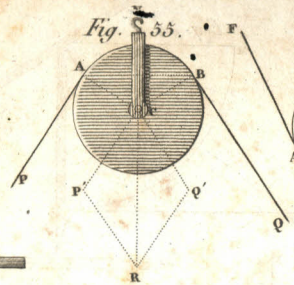


Fig. 55.

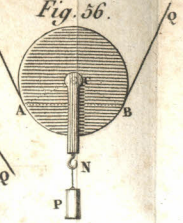


Fig. 56.

Fig. 57.

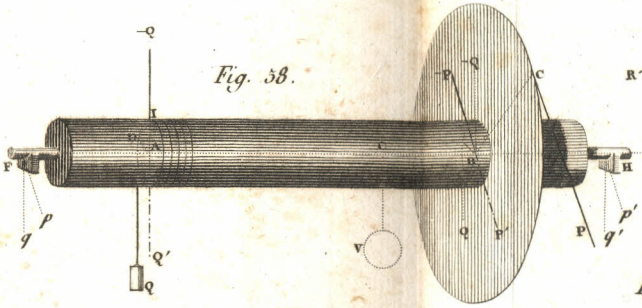


Fig. 58.

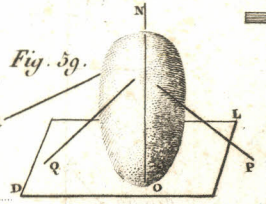


Fig. 59.

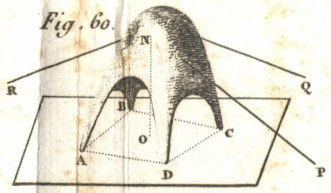


Fig. 60.

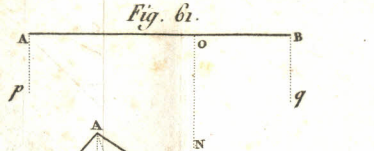


Fig. 61.

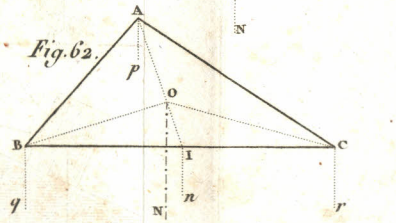


Fig. 62.

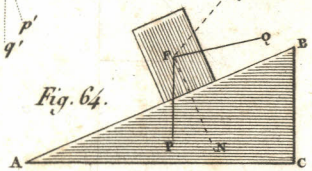


Fig. 64.

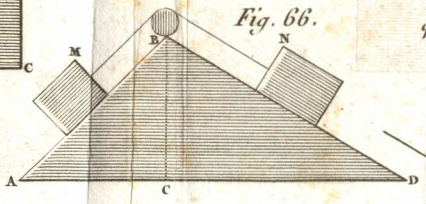


Fig. 66.

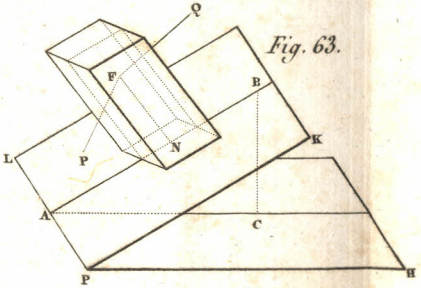


Fig. 63.

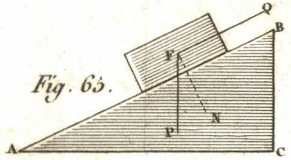


Fig. 65.

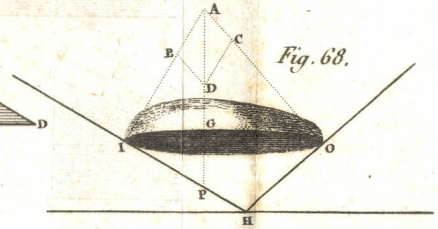


Fig. 68.

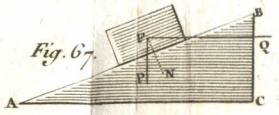


Fig. 67.

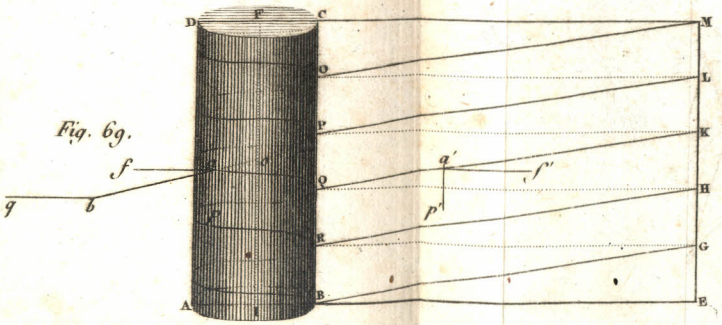


Fig. 69.

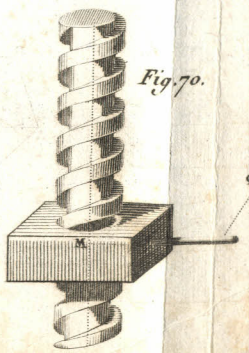


Fig. 70.

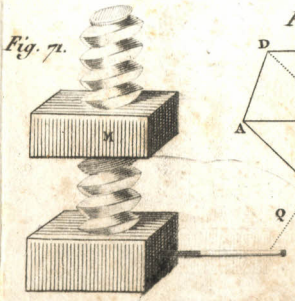


Fig. 71.

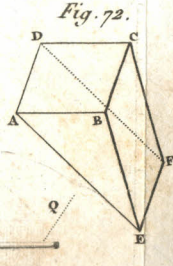


Fig. 72.

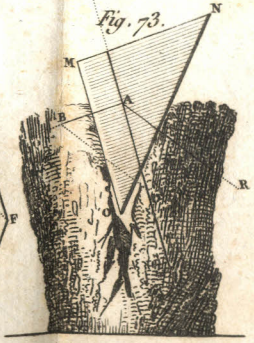


Fig. 73.

Adam Sc.

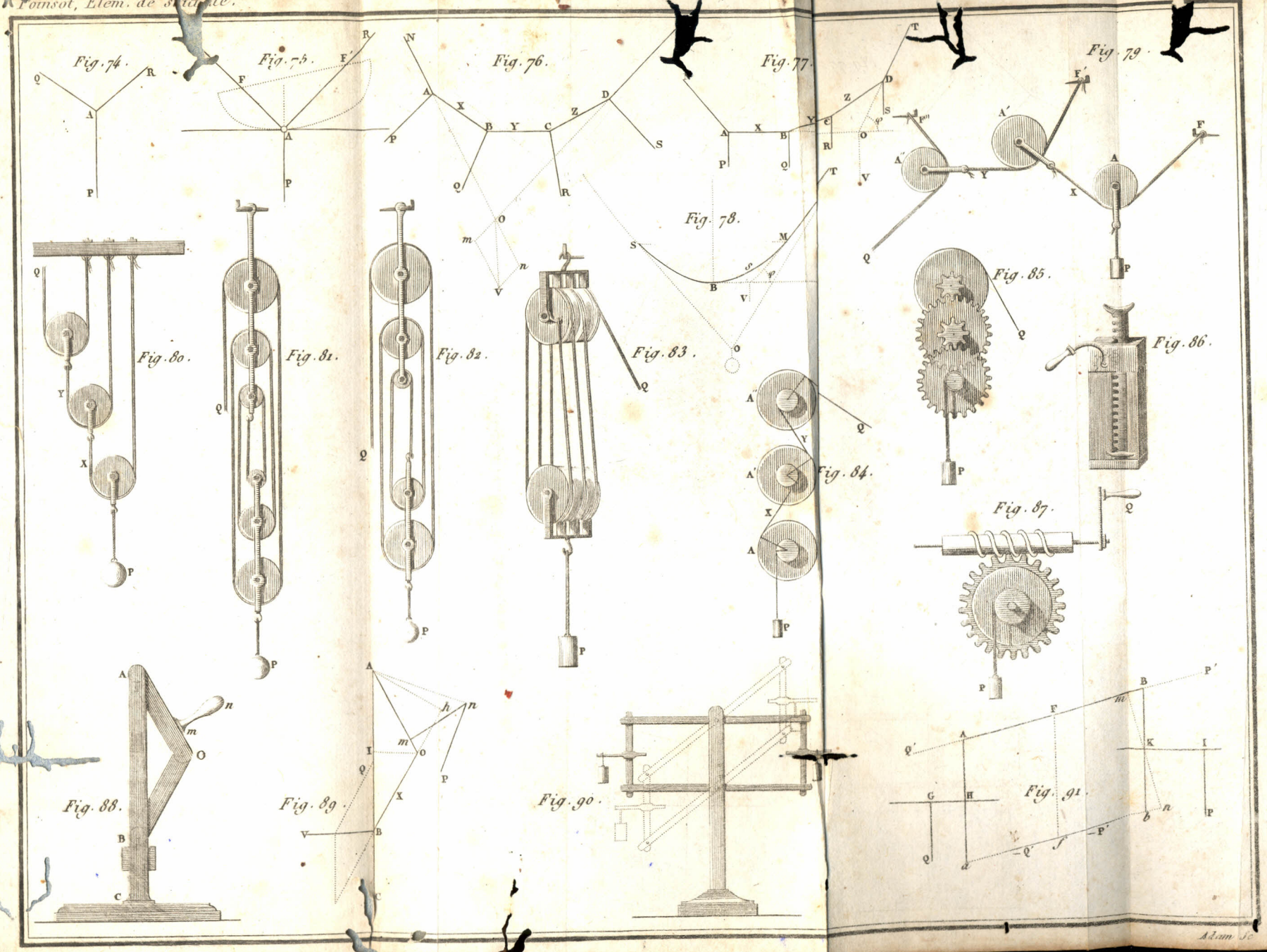


Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.

Adam Sc.