

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR



L'auteur et l'éditeur se réservent le droit de traduire ou de faire traduire cet ouvrage en toutes langues. Il poursuivront conformément à la loi et en vertu des traités internationaux toute contrefaçon ou traduction faite au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet ouvrage a été fait à Paris à l'époque de février 1869, et toutes les formalités prescrites par les traités sont remplies dans les divers États avec lesquels il existe des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, ma griffe, sera réputé contrefait, et les fabricants et débitants de ces exemplaires seront poursuivis conformément à la loi.



CORBELL, TYP. ET STER. DE CRÉÉ.

Faire me dado este livro por T. Franzen
9 mch. 1907

BIBLIOTHÈQUE DES PROFESSIONS INDUSTRIELLES ET AGRICOLES
SÉRIE B, No 2.

THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR

PAR

R. CLAUDIUS

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE WURZBOURG
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT

Traduite de l'allemand

PAR F. FOLIE

Docteur ès sciences, professeur à l'École industrielle de Liège

DEUXIÈME PARTIE

MÉMOIRES SUR L'APPLICATION DE LA THÉORIE MÉCANIQUE
DE LA CHALEUR AUX PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES
ET SUR LES MOUVEMENTS MOLÉCULAIRES ADMIS POUR L'EXPLICATION DE LA CHALEUR

I.F. U.F.R.J.

BIBLIOTECA

REGISTR.

DATA

PARIS

48

23/11/06

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE, INDUSTRIELLE ET AGRICOLE

EUGÈNE LACROIX, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE LA SOCIÉTÉ DES INGÉNIEURS CIVILS

54, RUE DES SAINTS-PÈRES

1869

PRÉFACE DU TRADUCTEUR

Cette seconde partie des Mémoires de M. Clausius se compose de deux séries.

La première série (*Introduction et Mémoires X, XI, XII, XIII*) traite de l'application de la théorie mécanique de la chaleur aux phénomènes électriques.

La seconde série (*Mémoires XIV, XV, XVI, XVII*) a pour objet l'explication des phénomènes calorifiques au moyen d'une hypothèse sur les mouvements moléculaires qui constituent la chaleur.

Tous ces Mémoires, comme ceux du premier volume, sont la reproduction des Mémoires originaux insérés, pour la plus grande partie, dans les *Annales* de Pogendorff. Les additions et les notes nouvelles dont M. Clausius a augmenté ces Mémoires sont toutes datées et renfermées entre parenthèses carrées.

Les sujets traités dans ces deux séries sont tout neufs pour les lecteurs français; il n'existe à notre connaissance aucune traduction française des mémoires allemands ou anglais dans lesquels on s'est occupé de ces questions, à part celle d'une partie du *Mémoire XIV* et du *Mémoire XVII*, qui a paru dans les *Archives des sciences physiques et naturelles de Genève*, et celle que nous



avons donnée de l'*Introduction à la théorie mathématique de l'électricité* dans les *Annales du Génie civil*.

L'une des bases principales sur lesquelles s'appuie la théorie mathématique de l'électricité, est l'étude du potentiel et de la fonction potentielle. M. Clausius en a résumé les propriétés fondamentales dans son *Introduction*; toutefois il en existe un grand nombre d'autres qui ont été exposées par lui dans un traité ex professo. Nous avons l'intention de traduire cet ouvrage pour contribuer à remettre en honneur en France cette théorie qui y paraît abandonnée depuis les travaux de Laplace, de Poisson et de Lamé.

Comme nous l'avons fait dans notre préface du premier volume de ces Mémoires, nous nous bornerons à résumer brièvement les points les plus saillants de celui-ci.

L'application du principe de Mayer aux phénomènes électriques conduit à des résultats remarquables et complètement d'accord avec l'expérience, et elle sert souvent à donner la démonstration théorique de lois trouvées empiriquement, soit dans les effets dus à l'électricité statique, soit dans ceux qui sont produits par un courant stationnaire. En outre on trouvera, sur la formation du résidu dans la décharge, une théorie très-intéressante qui peut s'appliquer également à deux hypothèses différentes sur l'état moléculaire de la couche isolante.

Passant aux phénomènes thermo-électriques, M. Clausius démontre que la chaleur elle-même doit intervenir dans la production du courant, et que celui-ci ne peut pas s'expliquer par la seule hypothèse de la différence

des actions exercées sur l'électricité par des substances chimiques différentes. Outre le principe de Mayer, M. Clausius a appliqué également à ces phénomènes le second principe fondamental de la théorie mécanique de la chaleur, auquel il a conservé le nom de Carnot, malgré la modification essentielle qu'il a dû apporter, comme nous l'avons vu dans le premier volume, au principe de ce savant, pour le mettre en harmonie avec le premier principe fondamental.

Les formules relatives aux conducteurs non électrolytiques sont applicables également aux conducteurs électrolytiques; mais il se présente ici une difficulté particulière relativement à la manière dont l'électricité se propage.

M. Clausius commence par prouver que les décompositions ne peuvent pas avoir lieu, comme on l'avait admis assez généralement, par simple voie de décompositions et de recombinaisons successives dans les différentes couches, de telle sorte, par exemple, qu'une *molécule totale* du liquide électrolytique étant séparée à l'*anode* en ses deux *molécules partielles*, l'anode retiendrait la molécule partielle négative, tandis que la positive décomposerait la molécule totale suivante et se recombinaisonnerait avec la molécule partielle négative de celle-ci, rendant ainsi libre la molécule partielle positive, qui agirait de même sur la molécule totale suivante, etc. Cette hypothèse en effet conduirait à cette conséquence qu'il existe un excès d'électricité positive *séparée*, ce qui est contradictoire avec la supposition d'un courant stationnaire.

De même il est impossible que les molécules par-

tielles soient combinées d'une manière stable en molécules totales, parce qu'alors la décomposition ne pourrait avoir lieu que du moment où l'intensité du courant serait devenue assez considérable pour pouvoir l'opérer, ce qui est en contradiction avec l'expérience.

L'hypothèse au moyen de laquelle M. Clausius a su éviter ces deux contradictions, consiste essentiellement dans une conception qui se trouve surtout développée dans les Mémoires relatifs aux mouvements moléculaires appelés chaleur.

D'après cette conception, les molécules d'un fluide n'oscilleraient pas, comme celles d'un solide, autour de positions d'équilibre déterminées, mais elles se mouvraient au contraire avec une grande rapidité dans tous les sens.

L'explication des phénomènes électrolytiques ne présente plus aucune contradiction au moyen de cette hypothèse.

Mais c'est surtout dans son application à la théorie des gaz qu'elle conduit aux résultats les plus remarquables.

Leurs propriétés physiques, ainsi que le phénomène de la vaporisation, s'expliquent par son moyen avec facilité. La pression n'est pas autre chose que la force vive de translation des molécules; la chaleur contenue dans le gaz est la force vive totale de tous les mouvements, et l'état gazeux consistant essentiellement dans ces mouvements rapides de molécules indépendantes, la chaleur n'a aucun travail intérieur à effectuer pour dilater un gaz, et ne sert qu'à accroître la quantité de chaleur qu'il contient, si son volume reste constant.

C'est cette idée qui avait conduit M. Clausius à affirmer dans son premier Mémoire (1850), que la chaleur spécifique des gaz sous volume constant est constante, malgré des expériences qui semblaient contredire cette loi; elle a depuis lors, comme on sait, été vérifiée par Regnault.

Le rapport de la force vive de translation à la force vive totale, qui est 0,615 pour les gaz simples et les composés qui n'ont pas subi de diminution de volume par la combinaison, est plus faible pour les gaz composés qui ont subi une diminution de volume.

En recherchant la raison de cette particularité et des lois qui régissent les volumes des gaz, M. Clausius est arrivé à se former l'idée que les molécules des gaz simples sont formées de plusieurs atomes. Ainsi, par exemple, il regarde les molécules de l'oxygène ordinaire libre comme formées de deux atomes combinés, l'un électro-positif, l'autre électro-négatif; ces deux atomes peuvent se séparer dans des conditions particulières, et constituent alors, les uns l'ozone, les autres l'antozone.

M. Clausius avait donc découvert théoriquement l'antozone avant que Schönbein en établît expérimentalement l'existence.

Il nous paraît inutile d'insister sur l'importance de ces idées sur la constitution moléculaire des corps, idées dans lesquelles réside l'avenir de la physique mathématique.

On trouvera une étude très-générale sur la théorie des gaz, fondée sur les mêmes idées, et appliquée spécialement à la conductibilité des gaz pour la chaleur. L'importance de ce travail ne nous permettrait pas d'en

INTRODUCTION

A LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLECTRICITÉ

§ 1. Dans l'étude mathématique de l'électricité, il s'agit d'abord de déterminer de quelle manière une quantité d'électricité, que l'on communique à un corps conducteur, se distribue dans l'intérieur de ce corps ou à sa surface, soit que celui-ci soit assez éloigné d'autres corps conducteurs pour que des forces électriques étrangères ne puissent pas agir sur lui, soit qu'il se trouve dans le voisinage d'autres corps conducteurs, qui sont ou isolés et chargés de quantités données d'électricité comme lui, ou mis en communication avec la terre. Cette détermination, de même que tous les calculs relatifs à l'électricité, est considérablement simplifiée par l'introduction d'une certaine fonction, déjà employée par différents géomètres, comme Laplace et Poisson, et qui a été traitée d'une manière spéciale, en 1828, par George Green, sous le nom de *fonction potentielle* ¹⁾; Gauss en a fait également plus tard l'objet de développements mathématiques très-remarquables ²⁾.

¹⁾ An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism; by George Green. Nottingham, 1828. Réimprimé dans le journal de Crellé, t. XLIV et XLVII.

²⁾ Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839.



J'ai publié sur cette fonction, qui est d'une importance capitale en physique mathématique, un ouvrage dont il vient de paraître une nouvelle édition, augmentée en différents endroits ¹⁾. J'ai développé dans cet ouvrage les propriétés principales de cette fonction, ainsi que celles d'une quantité que l'on en déduit par l'intégration et que l'on nomme le *potentiel*. Je puis donc me borner ici à rappeler brièvement quelques théorèmes qui sont nécessaires à l'intelligence de cette Introduction et des Mémoires qui suivent, et je renverrai à cet ouvrage pour la démonstration de ces théorèmes et pour leurs développements ultérieurs.

Pour plus de simplicité, je rapporterai toujours spécialement à l'électricité les considérations qui suivent, quoique, comme on le verra facilement, elles puissent aisément s'étendre, avec de légères modifications, à d'autres agents qui exercent des attractions ou des répulsions en raison inverse du carré de la distance.

§ 2. Les recherches mathématiques sur l'électrostatique partent en général de l'hypothèse qu'il existe deux électricités différentes, de telle nature que deux quantités d'électricités de même sens se repoussent, et que deux quantités d'électricités de sens contraires s'attirent. Ce n'est pas à dire que les résultats de ces recherches soient liés à cette hypothèse, de telle sorte qu'ils doivent subsister ou tomber avec elle; on peut même affirmer que ces résultats doivent encore rester valables, quant à leur essence, si cette hypothèse vient à être remplacée par une autre également propre à expliquer les forces électriques que nous connaissons par l'expérience. C'est pour cette raison que les mathématiciens n'ont pas hésité à se servir de cette hypothèse, en laissant à l'avenir de décider si elle doit être regardée comme exacte dans le sens littéral.

Soient donc données deux quantités d'électricité que nous

¹⁾ Die Potentialfunction und das Potential, ein Beitrag zur mathematischen Physik. Leipzig, bei J. A. Barth.

représenterons par q et q' , ces grandeurs étant positives ou négatives suivant que les quantités d'électricité appartiendront à l'une ou à l'autre des deux espèces. Imaginons que ces deux quantités d'électricité soient concentrées en deux points: la force qu'elles exercent l'une sur l'autre devra d'abord être proportionnelle à chacune des deux quantités, et par suite à leur produit; en second lieu, elle doit être considérée comme inversement proportionnelle au carré de la distance, ainsi que l'expérience l'a suffisamment établi. Nous pouvons donc, si r désigne la distance des deux points, représenter la force par l'expression suivante:

$$e \frac{qq'}{r^2},$$

où e désigne un facteur constant qui dépend de l'unité qui servira de mesure aux quantités d'électricité.

Nous adopterons la mesure suivante. L'unité d'électricité sera pour nous la quantité d'électricité qui exerce sur une quantité égale, à l'unité de distance, une action égale à l'unité de force. Dans ce cas, le facteur constant sera, en valeur absolue, égal à 1. Mais il reste encore à décider si nous le ferons égal à $+1$ ou à -1 . A cet effet, nous devons faire intervenir la différence entre la force attractive et la force répulsive, et les faire entrer dans le calcul l'une comme positive, l'autre comme négative. Nous conviendrons de regarder une attraction comme positive et une répulsion comme négative. Dans l'étude de l'électricité, nous devons donc rendre le facteur constant négatif, puisque des électricités de même sens se repoussent, et nous le ferons égal à -1 , en vertu de la détermination précédente de sa valeur absolue. L'expression de la force que les quantités d'électricité q et q' exercent l'une sur l'autre deviendra ainsi:

$$-\frac{qq'}{r^2}.$$

§ 3. Supposons maintenant que la quantité d'électricité q' ,

concentrée en un point, n'agisse pas seule sur la quantité q , mais qu'il y ait des quantités d'électricité q' , q'_1 , q'_2 , etc., en nombre arbitraire, concentrées en différents points, et qui agissent toutes sur q ; ou bien que l'électricité qui exerce son action, au lieu d'être concentrée en des points isolés, soit répandue sur une ligne, sur une surface ou dans un espace solide. Pour déterminer dans ce cas, d'une manière aussi simple que possible, la force cherchée en grandeur et en direction, commençons par former une grandeur que nous définirons de la manière suivante.

Désignons par p le point où se trouve la quantité d'électricité q soumise à l'action des autres quantités; r , r_1 , r_2 , etc., les distances de ce point aux points où sont concentrées les quantités d'électricité q' , q'_1 , q'_2 , etc. La grandeur dont il vient d'être question, et que l'on a coutume de représenter par V , sera déterminée par l'équation :

$$(1) \quad V = - \left(\frac{q'}{r} + \frac{q'_1}{r_1} + \frac{q'_2}{r_2} + \text{etc.} \right),$$

ou, en employant le signe sommatoire :

$$(2) \quad V = - \sum \frac{q'}{r}.$$

Si l'électricité qui exerce son action n'est pas concentrée en des points isolés, mais répandue en tous les points d'une ligne, d'une surface ou d'un espace solide, on se la représentera comme décomposée en éléments dq' ; on désignera par r la distance d'un élément au point p , et l'on emploiera, au lieu du signe sommatoire précédent, le signe de l'intégration; on aura ainsi :

$$(3) \quad V = - \int \frac{dq'}{r}$$

Cette dernière expression de V est la plus générale, et elle renferme la précédente; car on peut évidemment effectuer l'intégration, même dans le cas où des quantités finies d'électricité sont concentrées en des points isolés.

D'après ce qui précède, il va de soi que l'on peut former une expression de cette espèce non-seulement pour l'électricité, mais pour tout autre agent qui attire ou repousse en raison inverse du carré de la distance; on conservera seulement, pour plus de généralité, le coefficient ϵ de la formule générale, dont la valeur dépend de l'unité de mesure de l'agent, et que nous avons remplacé par -1 pour l'électricité.

C'est cette quantité V que Green a nommée *fonction potentielle*. Gauss l'a ensuite appelée *potentiel*; toutefois cette dernière dénomination est sujette à quelque inconvénient. Il y a, en effet, encore une autre grandeur très-importante, et dont il sera question plus bas, que l'on appelle, suivant les circonstances, le *potentiel d'une quantité sur une autre*, ou le *potentiel d'une quantité sur elle-même*. En adoptant la dénomination de Gauss, on emploierait donc le même mot *potentiel* pour deux notions qui ont sans doute de l'analogie entre elles, mais qui ne sont pas identiques. C'est pourquoi, dans mes Mémoires sur l'électricité et dans l'ouvrage cité plus haut, j'ai repris le nom de *fonction potentielle*, proposé par Green pour la quantité définie par l'équation (3), et réservé celui de *potentiel* pour la quantité qui se déduit, par l'intégration, de la fonction potentielle.

§ 4. On peut, à l'aide de la fonction dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent, déterminer de la manière suivante la force qui agit en un point quelconque p .

Commençons par supposer que la quantité d'électricité qui se trouve au point p , et qui reçoit l'action de cette force, soit une *unité d'électricité positive*; nous l'avons désignée plus haut par q . Décomposons la force exercée sur cette unité d'électricité en trois dirigées suivant trois axes rectangulaires, et désignons les composantes par X , Y , Z . En regardant V (la fonction potentielle de l'électricité qui agit sur le point considéré) comme fonction des coordonnées x , y , z du point, nous aurons :

$$(4) \quad X = \frac{dV}{dx}; \quad Y = \frac{dV}{dy}; \quad Z = \frac{dV}{dz}.$$

On peut également exprimer la composante de la force suivant une direction quelconque, tout aussi simplement que ces composantes suivant les axes des coordonnées. Imaginons une ligne quelconque passant par le point p , et désignons par s la distance du point p comptée sur cette ligne à partir d'un autre point pris pour origine; par suite, désignons par $\frac{dV}{ds}$ l'accroissement infiniment petit que prend V , lorsque le point considéré p parcourt sur cette ligne le chemin élémentaire ds ; la composante de la force suivant la direction de cette ligne, composante que nous nommerons S , sera déterminée par l'équation

$$(5) \quad S = \frac{dV}{ds}.$$

Si ce n'est pas une *unité*, mais une quantité quelconque d'électricité qui se trouve en p et reçoit l'action de la force, nous la représenterons, comme plus haut, par q , qui peut être positif ou négatif; et les expressions des composantes de la force, dont cette quantité d'électricité reçoit l'action, suivant les axes des coordonnées x, y, z , et suivant la direction quelconque s , seront :

$$q \frac{dV}{dx}, \quad q \frac{dV}{dy}, \quad q \frac{dV}{dz} \text{ et } q \frac{dV}{ds}.$$

Lorsque l'on aura exprimé de cette manière les composantes de la force suivant les trois axes, on pourra en déduire aisément la force elle-même en grandeur et en direction.

§ 5. Une équation de la forme

$$V = A,$$

où A désigne une constante, est celle d'une surface qui jouit de cette propriété, que, pour tout point qui s'y trouve, la force qui serait exercée sur une quantité d'électricité concentrée en ce point est normale à cette surface. Celle-ci a donc, relativement à la force électrique considérée, la même propriété que celle dont jouit la surface libre d'un fluide en repos, re-

lativement à la pesanteur; c'est pour cette raison qu'elle s'appelle *surface de niveau*.

Si l'on donne à la fonction potentielle une autre valeur constante, en posant par exemple :

$$V = B,$$

on déterminera ainsi une autre surface de niveau, et, de cette manière, on peut en obtenir une infinité. En conséquence, nous donnerons à la valeur que prend la fonction potentielle en un point quelconque de l'espace, et qui détermine la surface de niveau passant par ce point, le nom de *niveau potentiel* de ce point.

Pour l'électricité (de même que pour tout autre agent qui exerce des actions soit attractives, soit répulsives), les niveaux potentiels peuvent être ou positifs ou négatifs; et les espaces dans lesquels l'un ou l'autre cas se présente sont séparés entre eux par une surface de niveau dont le niveau potentiel est nul.

Imaginons maintenant une unité d'électricité positive, concentrée en un point quelconque de l'espace, et considérons la force qui agit sur elle, en déterminant la composante de cette force suivant chacune des directions qui partent de ce point; nous pourrions en général affirmer ce qui suit. Dans les directions suivant lesquelles le niveau potentiel augmente, la composante de la force est positive; elle est négative dans celles suivant lesquelles il diminue; et elle est d'autant plus grande en valeur absolue, que le niveau potentiel varie plus rapidement dans la direction considérée, puisque, d'après ce qui précède, la composante de la force est représentée par le coefficient différentiel du niveau potentiel relatif à cette direction.

§ 6. Outre la propriété de représenter les composantes de la force d'une manière si simple, la fonction potentielle jouit encore d'une autre propriété très-importante; nous l'exprimerons d'abord pour un agent quelconque, qui exerce des

actions attractives ou répulsives en raison inverse du carré de la distance, et nous l'appliquerons ensuite immédiatement à l'électricité.

Si le point p est situé dans un espace dans lequel il ne se trouve rien de l'agent dont la fonction potentielle est représentée par V , on a l'équation :

$$(6) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Si, au contraire, le point p se trouve dans un espace qui est rempli par l'agent actif ou par une partie de celui-ci, l'équation prend une autre forme. En représentant la densité de l'agent au point considéré de cet espace par k (de sorte que la quantité de l'agent qui se trouve dans un élément d'espace $d\tau$ est représentée par $k d\tau$), on aura alors l'équation :

$$(7) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\epsilon k.$$

Cette dernière équation est la plus générale, et elle embrasse la précédente; car si le point p se trouve en dehors de l'espace rempli par l'agent actif, on a $k = 0$, ce qui change l'équation (7) en (6). Il résulte de l'équation (7), qu'au moyen de la fonction potentielle on peut déterminer non-seulement les forces qu'exerce l'agent actif, mais encore la distribution elle-même de cet agent.

Si l'on donne au coefficient ϵ la valeur -1 que nous avons adoptée pour l'électricité, conformément à l'unité choisie, l'équation (7) devient :

$$(8) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 4\pi k.$$

§ 7. Considérons maintenant, comme nous l'avons dit au commencement de cette Introduction, un corps formé d'une substance conductrice, mais entouré de corps non conducteurs; et supposons qu'on lui communique une quantité quelconque

d'électricité qui doit se mettre en équilibre soit par elle-même, soit sous l'influence de quantités d'électricité étrangères répandues sur d'autres corps. Il s'agit de savoir comment on exprimera mathématiquement, de la manière la plus simple, la condition nécessaire à cet équilibre, et où se trouvera alors l'électricité qui existera comme électricité décomposée. On remarquera à ce sujet que l'on suppose qu'un corps à l'état neutre renferme, dans chacun de ses éléments, des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative, tandis qu'à l'état électrique, il se trouve dans l'intérieur du corps ou à sa surface des lieux où il y a un excès d'électricité positive ou négative. C'est cet excès, quelque part qu'il se trouve, que nous nommons électricité décomposée, comme nous l'avons déjà fait plus haut.

S'il doit y avoir équilibre dans le corps conducteur, les forces exercées dans l'intérieur de celui-ci par les différentes quantités d'électricité décomposée doivent se détruire mutuellement en chaque point, de telle sorte que leur résultante soit nulle; car, s'il y avait en un certain point une résultante d'une valeur appréciable, l'électricité positive y existante se mouvrait dans la direction de la résultante, et l'électricité négative en sens contraire; ce qui serait contradictoire avec l'hypothèse qu'il doit y avoir équilibre. De la condition que la résultante doit être nulle, il suit que ses composantes suivant trois axes rectangulaires doivent l'être séparément. Pour tout point pris à l'intérieur du corps conducteur, on doit donc avoir les trois équations suivantes :

$$\frac{dV}{dx} = 0; \quad \frac{dV}{dy} = 0; \quad \frac{dV}{dz} = 0;$$

et de là résulte, comme condition d'équilibre, que la fonction potentielle doit avoir à l'intérieur du corps conducteur une valeur constante.

D'après ce que nous venons de dire, nous pourrions également écrire les trois équations suivantes :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^2V}{dy^2} = 0; \quad \frac{d^2V}{dz^2} = 0;$$

et si l'on tient compte de ces équations, on déduira de l'équation (8), qu'en tout point de l'intérieur du corps on doit avoir :

$$k = 0.$$

On arrive ainsi à cette conséquence importante que, dans l'état d'équilibre, il ne peut se trouver nulle part dans l'intérieur du corps, pour autant qu'il soit conducteur, de l'électricité décomposée; mais que ce n'est qu'à sa surface, là où il est limité par des corps non conducteurs, que de l'électricité décomposée peut être accumulée.

On doit donc imaginer à la surface une couche très-mince comme remplie d'électricité décomposée. Il serait difficile de déterminer exactement l'épaisseur de cette couche, sans pénétrer d'une manière plus approfondie l'essence de l'électricité et la nature des milieux conducteurs et non conducteurs, à la limite desquels l'électricité est accumulée. Aussi se contente-t-on ordinairement de ce résultat, que l'épaisseur de cette couche doit être très-faible; et, dans la plus grande partie des développements, on en fait abstraction et l'on regarde simplement l'électricité comme accumulée sur une surface.

§ 8. Puisque, comme nous venons de le dire, on a affaire, dans la théorie de l'électricité, à un cas où l'on admet, du moins pour les recherches mathématiques, que l'agent actif (c'est-à-dire l'électricité décomposée) ne remplit pas un espace solide, mais se trouve répandu sur une surface, nous aurons encore à établir un théorème important qui se rapporte à ce cas.

Par un point de la surface qui renferme l'agent, imaginons une normale à cette surface, et sur cette droite un point mobile p auquel se rapporte la fonction potentielle. Soit n la distance du point p à la surface, distance qui sera comptée comme positive d'un côté de celle-ci et comme négative de l'autre. Si nous formons le coefficient différentiel $\frac{dV}{dn}$ par rapport à cette droite, lequel représente la compo-

sante normale de la force, ce coefficient aura des valeurs différentes des deux côtés de la surface, tandis qu'il éprouvera un changement brusque de valeur au moment où le point traverse la surface, changement dont la grandeur dépend de la densité qui règne en ce lieu de la surface. Soit désignée par h la densité superficielle en ce lieu (de sorte qu'un élément de surface $d\omega$ y renferme une quantité $hd\omega$ de l'agent); soient, en outre, $\left(\frac{dV}{dn}\right)_{+0}$ et $\left(\frac{dV}{dn}\right)_{-0}$ les deux valeurs que prend le coefficient différentiel $\frac{dV}{dn}$, lorsque le point p s'approche du côté positif et du côté négatif jusqu'à la surface même; on aura l'équation :

$$(9) \quad \left(\frac{dV}{dn}\right)_{+0} - \left(\frac{dV}{dn}\right)_{-0} = -4\pi\epsilon h.$$

Si l'on applique cette équation à l'électricité, on devra poser, comme plus haut, $\epsilon = -1$, ce qui donne :

$$(10) \quad \left(\frac{dV}{dn}\right)_{+0} - \left(\frac{dV}{dn}\right)_{-0} = 4\pi h.$$

Si la surface considérée est celle d'un corps conducteur, on sait que dans l'intérieur de celui-ci la fonction potentielle V est constante jusqu'à la surface même. D'après cela, si l'on compte la normale comme positive vers l'extérieur et comme négative vers l'intérieur, ou aura :

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{-0} = 0,$$

et l'équation précédente deviendra, par suite :

$$(11) \quad \left(\frac{dV}{dn}\right)_{+0} = 4\pi h.$$

On connaît ainsi la relation qui existe entre la force normale qui agit à la surface d'un corps conducteur, et la densité électrique qui règne au même lieu.

§ 9. Recherchons maintenant dans quelques cas particuliers, de quelle manière l'électricité se distribue sur la surface d'un corps conducteur ¹⁾.

La condition au moyen de laquelle on devra déterminer cette distribution est toujours que la fonction potentielle de la quantité totale d'électricité doit être constante dans chaque corps conducteur, d'où il suit que la résultante de toutes les forces électriques est nulle.

Considérons d'abord le cas suivant comme étant le plus simple. Soit donné un corps conducteur de la forme d'une sphère; communiquons-lui une certaine quantité d'électricité Q , qui peut être positive ou négative, et supposons qu'il n'y ait dans le voisinage aucune quantité d'électricité décomposée qui puisse agir sur la première.

Dans ce cas, on peut conclure immédiatement de la symétrie de la sphère en tous sens que l'électricité doit se répandre uniformément sur sa surface. La grandeur de celle-ci étant $4\pi a^2$, a désignant le rayon, nous obtiendrons l'équation suivante, pour la densité superficielle que nous avons représentée par h :

$$(12) \quad h = \frac{Q}{4\pi a^2}.$$

Un second cas un peu plus général, qui renferme le précédent comme cas particulier et qui conduit également à un résultat fort simple, est celui où le corps conducteur a la forme d'un ellipsoïde. Poisson a donné dans ce cas, pour la détermination de la densité électrique aux différents points de la surface, la règle suivante dont il est facile de démontrer l'exactitude.

Si l'on imagine autour de l'ellipsoïde donné un second

¹⁾ Plusieurs des équations développées dans les pages qui suivent se trouvent déjà, quoiqu'en partie sous une forme un peu différente, dans un Mémoire que j'ai publié, en 1852, « Sur la distribution de l'électricité sur un seul plateau très-mince et sur les deux armatures du carreau de Franklin. » *Ann. de Pogg.*, t. LXXXVI, p. 161.

ellipsoïde semblable, concentrique et dont les axes aient même direction et ne diffèrent que très-peu des premiers en grandeur, de sorte qu'entre les deux ellipsoïdes se trouve renfermée une couche très-mince; et si l'on s' imagine cette couche comme uniformément remplie d'électricité; la quantité d'électricité qui se trouvera dans ces circonstances répandue sur un élément de surface sera égale à celle qui doit y exister dans l'état d'équilibre.

Il est aisé de déduire de cette règle l'expression mathématique de la densité superficielle en un lieu quelconque de la surface. Considérons un élément de surface $d\omega$ de l'ellipsoïde donné, et nommons γ l'épaisseur de la couche en ce lieu; $\gamma d\omega$ sera la partie infiniment mince de la couche qui se trouve au-dessus de cet élément de surface. Désignons en outre par h la densité en volume que l'on obtient en regardant la couche comme uniformément remplie de la quantité donnée d'électricité. La quantité d'électricité qui se trouve au-dessus de l'élément $d\omega$ sera $h\gamma d\omega$. D'un autre côté, en désignant par h la densité superficielle d'électricité en ce lieu, la quantité d'électricité qui se trouve sur l'élément de surface $d\omega$ sera représentée par $hd\omega$. De la comparaison de ces deux expressions résulte :

$$h = k\gamma.$$

Soient maintenant a , b , c les demi-axes de l'ellipsoïde donné; $a(1+\delta)$, $b(1+\delta)$, $c(1+\delta)$, où δ est une quantité très-petite, ceux de l'ellipsoïde concentrique. Du centre, menons un rayon vers le point considéré de la surface, et désignons par u sa longueur; prolongeons-le jusqu'à l'ellipsoïde concentrique; sa longueur jusqu'au point d'intersection avec cette surface sera $u(1+\delta)$. La partie du rayon comprise entre les deux surfaces a donc pour longueur $\delta \cdot u$. En multipliant cette longueur par le cosinus de l'angle que le rayon fait avec la normale à la surface au point considéré, on obtiendra l'épaisseur de la couche qui sera donc, en désignant cet angle par φ :

$$\gamma = \delta \cdot u \cos \varphi.$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on aura :

$$(13) \quad h = k\delta \cdot u \cos \varphi.$$

Commençons par déterminer le produit $k\delta$. Le volume de l'ellipsoïde donné est $\frac{4}{3}\pi abc$. De même celui de l'ellipsoïde concentrique est $\frac{4}{3}\pi abc(1+\delta)^3$, qu'on peut remplacer, puis-que δ est supposé très-petit, par $\frac{4}{3}\pi abc(1+3\delta)$. Retranchant le premier volume du second, on obtiendra le volume de la couche comprise entre les deux surfaces :

$$4\pi abc \cdot \delta.$$

Comme la densité en volume, à l'intérieur de cette couche, a été représentée par k , on peut écrire, en nommant Q la quantité d'électricité communiquée à notre ellipsoïde :

$$Q = 4\pi abc \cdot \delta \cdot k,$$

d'où résulte :

$$k\delta = \frac{Q}{4\pi abc}.$$

En substituant cette expression dans (13), on aura :

$$(14) \quad h = \frac{Q}{4\pi abc} u \cos \varphi.$$

Il reste encore à exprimer le produit $u \cos \varphi$. Soient x, y, z les coordonnées du point de la surface où l'on veut déterminer la densité; les cosinus des angles que le rayon fait avec les axes coordonnés seront :

$$\frac{x}{u}, \quad \frac{y}{u}, \quad \frac{z}{u}.$$

Les cosinus des angles que la normale fait avec les axes coordonnés sont exprimés par :

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}; \quad \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

$$\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

d'où résulte l'expression suivante du cosinus de l'angle φ que le rayon fait avec la normale :

$$\cos \varphi = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{u \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Le numérateur de cette fraction a une valeur très-simple. En effet, pour un point de la surface d'un ellipsoïde de demi-axes a, b, c , on a l'équation :

$$(15) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente et multipliant les deux membres par u , on aura :

$$u \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation (14), on obtiendra l'expression cherchée de la densité superficielle h :

$$(16) \quad h = \frac{Q}{4\pi abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

On peut encore éliminer l'une des coordonnées au moyen de l'équation (15), en posant, par exemple :

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

ce qui transforme l'équation précédente en :

$$(17) \quad h = \frac{Q}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2 - a^2}{a^4} x^2 + \frac{c^2 - b^2}{b^4} y^2}}.$$

§ 10. De ce qui précède, on peut encore déduire, comme cas particulier, un résultat qui présente un intérêt spécial.

On considère souvent le cas où le corps conducteur auquel on communique de l'électricité a la forme d'un plateau mince, et, comme limite, le cas où le plateau est infiniment mince. Il s'agit de savoir comment l'électricité se distribue sur un tel plateau. Pour ceux qui ont une forme elliptique, on peut déterminer immédiatement, au moyen de ce qui précède, la distribution de l'électricité, en considérant un plateau elliptique comme un ellipsoïde très-aplati.

Soit c le demi-axe qui est devenu très-petit; nous écrirons l'équation (17) sous la forme :

$$(18) \quad h = \frac{Q}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)}}.$$

En général, des deux quantités sous le radical

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \text{ et } c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right),$$

la seconde est très-faible vis-à-vis de la première, et ce n'est que dans le voisinage du bord, où celle-ci s'approche de zéro, que leurs valeurs sont comparables.

Si l'on regarde le plateau comme infiniment mince, de sorte que la quantité affectée du facteur c^2 est négligeable, on aura :

$$(19) \quad h = \frac{Q}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Dans ce cas extrême, la densité deviendrait infiniment grande au bord.

Si le plateau est circulaire, on doit poser $b = a$. En même temps, on pourra écrire, en désignant par r la distance du point considéré au centre, $x^2 + y^2 = r^2$; de sorte que les équations (18) et (19) deviennent :

$$(20) \quad h = \frac{Q}{4\pi a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^4}}}$$

$$(21) \quad h = \frac{Q}{4\pi a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}$$

§ 11. Après ces considérations sur des conducteurs isolés, nous passerons à l'examen d'un autre cas qui est d'une grande importance dans l'application : c'est celui où l'on a deux corps conducteurs, dont la forme et la position sont telles, qu'une grande partie de la surface de l'un est approximativement parallèle à une partie correspondante de la surface de l'autre et se trouve à une très-faible distance de celle-ci. C'est là, comme on le voit aisément, le cas du *condensateur*, du *carreau de Franklin* et de la *bouteille de Leyde*.

Je communiquerai d'abord, relativement à ce cas, l'analyse de Green et je donnerai ensuite aux équations une forme un peu plus générale.

Soient désignés par K_1 l'un des corps, et par V_1 la valeur constante de la fonction potentielle pour ce corps; de même, soient K_2 l'autre corps, et V_2 la valeur constante de la fonction potentielle pour celui-ci. Entre ces deux corps, cette fonction est variable, et nous la représenterons simplement par V .

Considérons un point à la surface du corps K_1 , et prenons-le pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires dont

l'axe des z soit la normale en ce point (comptée comme positive vers l'extérieur), et dont les axes des x et des y soient deux droites rectangulaires quelconques situées dans le plan tangent. Comme cette origine appartient encore au corps K_1 , la fonction potentielle y conserve la valeur V_1 qu'elle a dans le corps K_1 jusqu'à la surface. Mais si nous partons de ce point dans la direction de l'axe des z , la fonction potentielle variera; et au point où l'axe des z coupera la surface du corps K_2 , elle aura la valeur V_2 . Nous pourrons donc, en désignant par c la distance des deux surfaces, écrire d'après la formule de Taylor :

$$V_2 = V_1 + \frac{dV}{dz} c + \frac{d^2V}{dz^2} \cdot \frac{c^2}{1.2} + \frac{d^3V}{dz^3} \cdot \frac{c^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Or, comme par hypothèse, la distance c est une quantité très-petite si on la rapporte à une unité comparable aux dimensions du corps, nous pourrons nous borner aux premiers termes de cette série ordonnée suivant les puissances croissantes de c ; nous conviendrons de négliger les termes supérieurs au second ordre, et nous ne prendrons, en conséquence, que les trois premiers du second membre. En faisant passer V_1 dans le premier, nous pourrons donc écrire :

$$(22) \quad V_2 - V_1 = \frac{dV}{dz} c + \frac{d^2V}{dz^2} \frac{c^2}{2}.$$

En nous servant de l'équation

$$(23) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

qui a lieu pour tout l'espace situé entre les deux corps, nous pourrons réduire à un seul les deux coefficients différentiels du second membre. Je développerai cette analyse d'une manière un peu différente de celle de Green, et, me semble-t-il, un peu plus commode.

Imaginons que nous avançons de l'origine des coordonnées qui est située à la surface du corps K_1 , dans le plan des xz ,

vers un autre point infiniment voisin situé à l'extérieur du corps ou à sa surface, et dont les coordonnées sont dx et dz . La variation infiniment petite qui en résultera pour la fonction potentielle V sera représentée par :

$$dV = \frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dz} dz + \frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{2} + \frac{d^2V}{dx dz} dx dz + \frac{d^2V}{dz^2} \cdot \frac{dz^2}{2} + \text{etc.}$$

Pour particulariser davantage, admettons que cet autre point soit, comme l'origine des coordonnées, sur la surface du corps K_1 ; la fonction potentielle aura alors également la valeur V_1 , et la différentielle dV du premier membre sera nulle. En même temps on peut, dans ce cas, déduire de la forme de la courbe suivant laquelle le plan des xz coupe la surface du corps, une relation entre les différentielles dx et dz . Comme l'axe des x est la tangente à la courbe au point considéré, nous obtiendrons, en désignant par R le rayon de courbure de celle-ci en ce point, l'équation suivante :

$$dz = \mp \frac{1}{2R} dx^2 + \text{etc.}$$

dans laquelle on devra prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que la courbe est convexe ou concave du côté des z positifs, c'est-à-dire du côté extérieur du corps. En substituant cette valeur de dz dans l'équation qui précède, et posant en même temps le premier membre égal à zéro, nous aurons :

$$0 = \frac{dV}{dx} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2} \mp \frac{1}{R} \cdot \frac{dV}{dz} \right) dx^2 + \text{etc.}$$

Comme cette équation doit être vraie pour toutes les valeurs dx , il en résulte que les coefficients des différentes puissances de dx doivent être séparément nuls, ce qui donne :

$$\frac{dV}{dx} = 0; \quad \frac{d^2V}{dx^2} \mp \frac{1}{R} \cdot \frac{dV}{dz} = 0.$$

Nous mettrons la seconde de ces équations sous la forme :

$$(24) \quad \frac{d^2V}{dx^2} = \pm \frac{1}{R} \cdot \frac{dV}{dz}.$$

On obtiendra de même pour le plan des yz , en appelant R' le rayon de courbure de la courbe suivant laquelle il coupe la surface :

$$(25) \quad \frac{d^2V}{dy^2} = \pm \frac{1}{R'} \cdot \frac{dV}{dz}.$$

En substituant dans l'équation (23) ces valeurs de $\frac{d^2V}{dx^2}$ et $\frac{d^2V}{dy^2}$, on aura :

$$\left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) \frac{dV}{dz} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

ou :

$$(26) \quad \frac{d^2V}{dz^2} = \left(\mp \frac{1}{R} \mp \frac{1}{R'} \right) \frac{dV}{dz}.$$

Cette valeur de $\frac{d^2V}{dz^2}$, substituée dans l'équation (22), donnera :

$$(27) \quad V_2 - V_1 = \frac{dV}{dz} c \left[1 + \frac{c}{2} \left(\mp \frac{1}{R} \mp \frac{1}{R'} \right) \right].$$

On peut encore donner dans cette équation une autre expression au coefficient différentiel $\frac{dV}{dz}$. En effet, en désignant par h_1 la densité de l'électricité au point considéré de la surface du corps K_1 , on peut poser d'après (11) :

$$\frac{dV}{dz} = 4\pi h_1,$$

ce qui transformera l'équation précédente en :

$$(28) \quad V_2 - V_1 = 4\pi h_1 c \left[1 + \frac{c}{2} \left(\mp \frac{1}{R} \mp \frac{1}{R'} \right) \right].$$

§ 12. On trouvera une équation tout à fait analogue si, en partant d'un point de la surface du corps K_2 , on s'avance sur la normale élevée en ce point, jusqu'à la surface du corps K_1 .

On aura alors à écrire la différence $V_1 - V_2$ au lieu de $V_2 - V_1$, et h_2 au lieu de h_1 , en désignant par h_2 la densité de l'électricité à la surface du corps K_2 .

En outre, on devra mettre au lieu de c dans cette nouvelle équation la distance à parcourir sur la normale, à la surface du corps K_2 , pour arriver à la surface du corps K_1 . Si les deux surfaces sont exactement parallèles dans le lieu considéré, la normale à l'une le sera aussi à l'autre, et l'on pourra ne considérer qu'une seule et même normale. Mais si les surfaces ne sont pas exactement parallèles entre elles dans le lieu considéré, les deux normales élevées vis-à-vis l'une de l'autre ne coïncideront pas, et les distances comptées sur ces deux normales ne seront pas parfaitement égales. Si l'on suppose toutefois que le défaut de parallélisme soit tellement faible que l'angle des deux normales soit une quantité du même ordre que c , on verra aisément que la différence des distances mesurées sur les deux normales sera telle, que si l'une est désignée par c , l'autre pourra se représenter par une expression de la forme $c + mc^3$. Cette différence est donc une quantité du troisième ordre par rapport à c , et peut être négligée dans nos équations où nous nous arrêtons aux termes du second ordre.

Enfin, au lieu des rayons de courbure de la surface du corps K_1 , nous aurons à faire entrer dans la nouvelle équation ceux de la surface du corps K_2 . Si les deux surfaces sont parallèles dans tous les points considérés, ou du moins si, comme nous l'avons supposé plus haut, le défaut de parallélisme est très-faible, les rayons de courbure de la seconde surface ne différeront de ceux de la première (au point opposé et dans des plans correspondants), que de quantités du même ordre que c ; et comme le terme de la formule qui dépend de ces rayons est déjà affecté du facteur c^3 , les différences entre les rayons ne donneront que des termes du troisième ordre, que nous pourrions aussi négliger. Mais il y a une autre différence dont nous aurons à tenir compte. Les deux courbes suivant lesquelles un plan normal coupe les deux surfaces sont telles que si l'une est convexe vers l'extérieur, l'autre doit être con-

cave, et réciproquement. Si donc nous pouvons employer, dans la seconde équation, les mêmes valeurs que dans la première pour les rayons de courbure, nous devons leur donner des signes différents.

De ces considérations résulte que la seconde équation s'écrira :

$$(29) \quad V_1 - V_2 = 4\pi h_2 c \left[1 + \frac{c}{2} \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) \right].$$

Les équations (28) et (29) peuvent aussi s'écrire, en négligeant les termes d'ordre supérieur :

$$(30) \quad h_1 = \frac{V_2 - V_1}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{2} \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) \right];$$

$$(31) \quad h_2 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{2} \left(\mp \frac{1}{R} \mp \frac{1}{R'} \right) \right].$$

On voit par là que la densité électrique sur chacune des deux surfaces ne dépend, quant à son terme le plus important, que de la différence des deux valeurs de la fonction potentielle (ou plus simplement de la *différence de niveau potentiel* des deux corps), ainsi que de la distance des surfaces. Il s'ensuit que si une partie de l'une des surfaces est parallèle à la partie opposée de l'autre, et si par suite c a une valeur constante, la densité électrique sera aussi approximativement constante sur ces deux portions de surface. On voit, en outre, que les densités sur les deux portions de surface opposées sont à peu près égales et contraires, et que l'écart de l'égalité est, par rapport aux valeurs totales, une quantité du même ordre que c . On peut en effet (en négligeant toujours les termes d'ordre supérieur) déduire des deux équations précédentes celle qui suit :

$$(32) \quad h_2 = -h_1 \left[1 + c \left(\mp \frac{1}{R} \mp \frac{1}{R'} \right) \right].$$

La coïncidence devient encore plus grande si l'on établit la comparaison d'une manière un peu différente. Considérons à la surface du corps K_1 un élément de surface $d\omega_1$. Imaginons un nombre infini de normales élevées, le long de son péri-

mètre, à la surface; ces normales détermineront sur la surface du corps K_2 un élément que nous regarderons comme correspondant, et que nous désignerons par $d\omega_2$. Les quantités d'électricité qui se trouvent sur ces deux éléments sont $h_1 d\omega_1$ et $h_2 d\omega_2$. On sait par l'analyse que ces deux éléments de surface ont entre eux la relation suivante, en négligeant les termes d'ordre supérieur :

$$(33) \quad d\omega_2 = d\omega_1 \left[1 + c \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) \right].$$

Si l'on multiplie entre elles les équations (32) et (33), et que l'on néglige le terme affecté du facteur c^2 , on aura :

$$(34) \quad h_2 d\omega_2 = -h_1 d\omega_1,$$

c'est-à-dire que les quantités d'électricité qui se trouvent sur deux éléments de surface correspondants sont, abstraction faite du signe, égales entre elles à une quantité près, qui est de l'ordre de c^2 , relativement à la valeur totale.

Ce qui est vrai pour deux éléments de surface correspondants doit l'être aussi pour deux portions finies de surface qui sont telles, que les normales élevées sur le contour de l'une déterminent celui de l'autre. Les quantités d'électricité qui se trouvent sur ces portions finies de surface doivent aussi être égales entre elles à une quantité près, dont le rapport à la quantité totale n'est que du second ordre relativement à c .

§ 13. Les équations développées dans les deux paragraphes précédents sont celles que Green a déduites et appliquées à la bouteille de Leyde, en considérant les deux armatures de la bouteille comme les deux corps, dont les surfaces vis-à-vis l'une de l'autre sont à peu près parallèles et fort peu distantes entre elles. Mais en considérant la chose de plus près, on trouve que ces équations ne contiennent pas encore tout ce à quoi on doit avoir égard dans la bouteille de Leyde, de même que dans le carreau de Franklin et dans le condensateur.

Dans la suite, nous ne parlerons que de la *bouteille de Leyde*, parce que ce que nous en dirons s'appliquera également au car-

reau de Franklin et au condensateur, et deviendra même plus simple si, dans ces deux derniers, les deux plateaux métalliques sont supposés plans, parallèles, égaux, et exactement situés l'un vis-à-vis de l'autre sur une perpendiculaire commune.

Il s'agit surtout, dans l'analyse mathématique de ces appareils, de déterminer les quantités d'électricité qui se trouvent sur les armatures lorsque l'on donne leurs niveaux potentiels (c'est-à-dire les valeurs de la fonction potentielle pour ces armatures); ou, d'une manière plus générale, il s'agit de trouver les équations qui ont lieu entre les deux niveaux potentiels et les deux quantités d'électricité.

Les équations (30) et (31) de Green nous donnent les densités électriques h_1 et h_2 sur les deux faces des armatures tournées l'une vers l'autre; et si l'on forme au moyen de ces valeurs les produits $h_1 d\omega_1$ et $h_2 d\omega_2$, où $d\omega_1$ et $d\omega_2$ représentent les éléments des deux surfaces, et que l'on intègre ces expressions pour des portions finies de surface, on obtiendra les quantités d'électricité qui se trouvent sur celles-ci. Mais il est à remarquer que les équations (30) et (31) ne sont pas tout à fait générales. Nous avons déjà dit plus haut que ces équations ne sont applicables que si la distance des deux surfaces dans l'endroit considéré est très-faible relativement aux dimensions du corps, puisque nous y avons négligé les termes d'ordres supérieurs relativement à c . Dans le cas actuel, on doit encore tenir compte d'une autre circonstance. Les armatures d'une bouteille de Leyde sont de minces feuilles de métal terminées par des bords aigus. Sur ces bords, l'électricité se comporte d'une manière particulière, en ce que, pour une même valeur de la fonction potentielle, elle s'accumule beaucoup plus sur les bords que sur les portions de surface qui en sont éloignées. On ne peut donc appliquer ces équations qu'aux parties des faces des armatures tournées l'une vers l'autre, qui sont assez éloignées des bords de celles-ci pour qu'on puisse regarder l'éloignement du bord comme considérable vis-à-vis de la distance des armatures, ou vis-à-vis de l'épaisseur du verre, comme nous pouvons le dire plus simplement dans le cas de la bouteille de Leyde. On pourra

considérer la densité électrique comme constante sur ces parties, pour autant que l'épaisseur du verre soit supposée constante. Mais dans le voisinage des bords, la densité électrique aura des valeurs plus grandes.

On voit par là que les intégrales que l'on obtient en employant pour h_1 et h_2 simplement les valeurs (30) et (31), et en effectuant l'intégration pour les surfaces totales des armatures, que ces intégrales, disons-nous, doivent être affectées d'une inexactitude dont la grandeur dépend de l'étendue, de la forme et de la position des bords. En outre il faut encore remarquer qu'en effectuant l'intégration pour les surfaces des armatures, on suppose tacitement que ces deux armatures s'étendent également loin, de telle sorte que leurs bords se trouvent perpendiculairement l'un vis-à-vis de l'autre. Mais, en réalité, cette condition n'est pas toujours exactement remplie, et par suite de cette circonstance, il y aura également une erreur (à la vérité généralement assez faible) dans le résultat.

Green a commis une autre négligence importante. Il ne considère que les quantités d'électricité qui sont répandues sur les faces des deux armatures qui se trouvent l'une vis-à-vis de l'autre, et il ne tient pas compte des quantités d'électricité répandues sur les autres faces. Dans la charge ordinaire, ces dernières quantités sont, à la vérité, beaucoup moindres que les premières; toutefois, dans certains cas, elles ont de l'importance, en ce que ce sont elles surtout qui occasionnent la différence des quantités d'électricité répandues sur les deux armatures.

Les valeurs déduites des équations de Green devront donc être complétées par d'autres valeurs relatives aux circonstances précédentes, si l'on veut représenter exactement les quantités d'électricité répandues sur les armatures.

Dans mon Mémoire cité plus haut, « sur la distribution de l'électricité sur un seul plateau très-mince et sur les deux armatures du carreau de Franklin ¹⁾, » j'ai essayé de déterminer aussi exactement que possible, pour un carreau circu-

¹⁾ Annales de Pogg., t. LXXXVI, p. 161.

laire, non-seulement la grandeur des quantités d'électricité répandues sur les deux armatures, mais encore la distribution de l'électricité, c'est-à-dire la manière dont la densité augmente vers le bord. Je ne m'arrêterai pas ici à ces recherches particulières; mais j'envisagerai la question à un point de vue plus général; il en résultera sinon les valeurs déterminées de chacune des corrections, du moins certaines relations qui existent entre elles, et qui contribueront à simplifier les formules.

§ 14. Dans les recherches dont il s'agit, j'appliquerai un théorème que j'ai déduit il y a quelque temps, en m'occupant du développement mathématique de cette Introduction, d'un théorème connu de géométrie, mais qui doit déjà avoir été énoncé auparavant par Riemann, comme je l'ai vu dans un ouvrage tout récent de Betti ¹⁾. Il ne dit pas où Riemann a énoncé ce théorème, et je n'ai pu le trouver dans les écrits de ce dernier. En voici l'énoncé :

Soient donnés deux corps conducteurs A et B, qui peuvent être isolés ou mis en communication avec la terre par un conducteur; dans le voisinage de ceux-ci peuvent se trouver un nombre quelconque d'autres corps conducteurs mis en communication avec la terre au moyen de conducteurs. Tandis que B est en communication avec le sol et que A est isolé, ce dernier corps est chargé d'électricité jusqu'à un certain niveau potentiel K. Soit Q_b la quantité d'électricité accumulée par influence sur B dans ces circonstances. A est ensuite mis en communication avec le sol, tandis que B est isolé et chargé d'électricité jusqu'au même niveau potentiel K. Soit Q_a la quantité d'électricité accumulée par influence sur A dans ces circonstances. On devra avoir : $Q_a = Q_b$.

Afin de ne pas interrompre la marche des recherches que j'ai en vue, je ne donnerai la démonstration de ce théorème qu'à la fin de cette Introduction, § 20. Je ne doute pas que le fond de cette démonstration ne repose sur les mêmes consi-

¹⁾ Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton. Pisa, 1865, p. 83.

dérations que celles par lesquelles Riemann est arrivé au théorème, de même qu'elle concorde avec les développements donnés sous une autre forme par Betti.

Nous commencerons par appliquer ce théorème d'une manière générale à deux corps de forme quelconque, afin d'établir les équations qui ont lieu entre leurs niveaux potentiels et les quantités d'électricité répandue sur eux. Nous pourrons donner ensuite à ces équations les formes particulières qu'elles doivent prendre pour les deux armatures d'une bouteille de Leyde.

§ 15. Des deux corps conducteurs A et B (dans le voisinage desquels, comme il a été dit, peuvent se trouver un nombre quelconque d'autres corps conducteurs en communication avec la terre), mettons l'un A en communication avec le sol, et isolons l'autre B; dans ces circonstances, chargeons B d'électricité jusqu'au niveau potentiel K. Sur le corps A, dont le niveau potentiel doit rester nul à cause de sa communication avec le sol, il s'accumulera par influence une certaine quantité d'électricité qui sera dans tous les cas proportionnelle au niveau potentiel K, et que nous désignerons en conséquence par aK . Nous représenterons par $-bK$ la quantité d'électricité qui se trouve simultanément sur B, et qui doit être proportionnelle également au niveau potentiel K, et de signe contraire. Les facteurs a et b , qui entrent dans ces deux expressions, sont des constantes positives qui dépendent de la grandeur et de la forme des corps A et B, ainsi que de la position que chacun occupe par rapport à l'autre, et par rapport aux autres corps conducteurs (en communication avec le sol) qui se trouvent dans la sphère d'influence.

Après que cette charge est effectuée, qu'on s'imagine que la communication entre le corps A et le sol soit interrompue, de sorte que les deux corps A et B sont maintenant isolés. Dans ces circonstances, communiquons aux deux corps autant d'électricité de même nature qu'il est nécessaire pour que le niveau potentiel varie d'une quantité K' sur les deux corps. Ces quantités d'électricité sont les mêmes que celles

que l'on devrait employer si les deux corps isolés n'avaient pas été d'abord électrisés, et si l'on voulait les porter au même niveau potentiel K' . Comme ces quantités d'électricité sont proportionnelles au niveau potentiel K' et ont un signe contraire au sien, nous les représenterons par $-\alpha K'$ et $-\beta K'$, où α et β sont de nouveau deux constantes positives dépendant de la grandeur, de la forme et de la position des corps.

Les états des deux corps, résultant de ces deux opérations consécutives, peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Corps A} \left\{ \begin{array}{l} \text{Niveau potentiel : } K \\ \text{Quantité d'électricité : } aK - \alpha K'. \end{array} \right. \\ \text{Corps B} \left\{ \begin{array}{l} \text{Niveau potentiel : } K + K' \\ \text{Quantité d'électricité : } -bK - \beta K'. \end{array} \right. \end{array}$$

Admettons, comme cas particulier, que

$$\begin{array}{l} \text{d'où :} \\ K + K' = 0, \\ K' = -K; \end{array}$$

alors les états des corps, après les deux opérations, seront les mêmes que ceux qu'ils auraient pris, si le corps B avait été simplement mis en communication avec la terre, et maintenu ainsi au niveau potentiel zéro, tandis que l'on aurait isolé le corps A et qu'on l'aurait chargé d'électricité jusqu'au niveau potentiel $-K$. D'après le théorème précédent, la quantité d'électricité accumulée par influence, dans ces circonstances, sur B, doit être égale et de signe contraire à la quantité d'électricité aK , que prend le corps A lorsqu'il est en communication avec la terre, tandis que B est chargé jusqu'au niveau potentiel K . Nous pouvons donc, en remplaçant dans l'expression de la quantité d'électricité qui se trouve sur B, la quantité K' par $-K$, former l'équation suivante :

$$-bK + \beta K = -aK,$$

d'où résulte

$$(35) \quad b = a + \beta.$$

Nous avons ainsi déterminé l'une des quatre constantes introduites plus haut, et nous pouvons retourner maintenant au cas plus général, dans lequel K' n'est pas égal à $-K$, et remplacer b par la valeur trouvée, dans les expressions qui représentent les états des deux corps. Nous obtiendrons ainsi :

$$\begin{array}{l} \text{Corps A} \left\{ \begin{array}{l} \text{Niveau potentiel : } K'; \\ \text{Quantité d'électricité : } aK - \alpha K'. \end{array} \right. \\ \text{Corps B} \left\{ \begin{array}{l} \text{Niveau potentiel : } K + K'; \\ \text{Quantité d'électricité : } -aK - \beta(K + K'). \end{array} \right. \end{array}$$

Nous allons mettre sous une autre forme un peu plus commode le résultat des considérations précédentes, qui se trouve consigné dans ces expressions. Au lieu de conserver dans les formules les niveaux potentiels relatifs aux deux opérations successives, nous représenterons par une lettre le niveau potentiel final de chacun des deux corps. Soient F celui de A, et G celui de B. Nous aurons à poser :

$$\begin{array}{l} K' = F, \\ K + K' = G, \end{array}$$

et par suite :

$$K = G - F.$$

Désignons en outre par M et N les quantités d'électricité qui se trouvent définitivement sur les deux corps. Nous pourrons alors, d'après ce qui précède, former les deux équations suivantes, qui sont valables pour chaque couple de deux corps conducteurs soumis à leur influence mutuelle, tandis que tous les autres corps conducteurs, qui se trouvent dans la sphère d'influence, sont en communication avec la terre :

$$(36) \quad \begin{cases} M = a(G - F) - \alpha F. \\ N = a(F - G) - \beta G. \end{cases}$$

§ 16. Si nous appliquons ces équations aux deux armatures d'une bouteille de Leyde, nous pourrons déterminer, d'une

manière plus précise, les quantités a , α et β . Nous considérons l'armature intérieure comme étant le corps A, et l'extérieure comme étant le corps B.

Admettons d'abord que l'armature extérieure soit chargée jusqu'au niveau potentiel G, tandis que l'intérieure est en communication avec la terre. La quantité d'électricité qui se trouve, dans ces circonstances, sur l'armature intérieure, se trouvera par la première des équations (36), en y faisant $F = 0$; on aura donc :

$$(37) \quad M = aG.$$

En outre, on peut déterminer dans ce cas, par des considérations directes, la quantité d'électricité M avec un certain degré d'exactitude.

En effet, il n'y a sur l'armature intérieure que la quantité d'électricité qui est retenue par l'attraction de celle qui charge l'armature extérieure; on peut donc en conclure que l'électricité qui se trouve sur l'armature intérieure est concentrée tout entière sur la surface de celle-ci qui est tournée vers l'armature extérieure. On peut déterminer la densité de l'électricité sur cette surface au moyen de l'équation (30), en y faisant $V_2 = G$, et $V_1 = 0$. En même temps, nous écrirons simplement h au lieu de h_1 . Cette équation deviendra ainsi :

$$h = \frac{G}{4\pi c} \left[1 + \frac{c}{2} \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) \right].$$

Soit maintenant $d\omega$ un élément de la surface externe de l'armature intérieure, ou, pour nous exprimer plus simplement, un élément de surface de l'armature intérieure, en considérant comme égales entre elles, la surface interne et la surface externe d'une même armature. Multiplions les deux membres de l'équation précédente par cet élément de surface, et formons les intégrales, qui doivent être étendues à toute la surface de l'armature intérieure; nous obtiendrons ainsi l'équation :

$$(38) \quad \int h d\omega = \frac{G}{4\pi} \left[\int \frac{d\omega}{c} + \frac{1}{2} \int \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) d\omega \right].$$

On peut déterminer immédiatement la première des intégrales du second membre, dans le cas où l'épaisseur c du verre est constante. Si l'on représente par s la surface de l'armature intérieure, on aura :

$$(39) \quad \int \frac{d\omega}{c} = \frac{s}{c}.$$

Si l'épaisseur c du verre n'est pas constante, nous introduirons une valeur moyenne c_m , déterminée par l'équation :

$$(40) \quad \int \frac{d\omega}{c} = \frac{s}{c_m}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (38), celle-ci devient :

$$\int h d\omega = \frac{G}{4\pi} \left[\frac{s}{c_m} + \frac{1}{2} \int \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) d\omega \right].$$

ou bien :

$$(41) \quad \int h d\omega = G \frac{s}{4\pi c_m} \left[1 + \frac{c_m}{2s} \int \left(\pm \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right) d\omega \right].$$

Cette expression de l'intégrale $\int h d\omega$ n'est pas complètement identique à la quantité d'électricité M qui se trouve dans les circonstances mentionnées sur l'armature intérieure; elle s'en écarte un peu, parce que, dans le voisinage du bord, la densité électrique est plus grande que celle qui est donnée par l'expression de h . Mais, d'après ce qui a été dit au paragraphe 13, cet écart est une quantité telle, que, si on l'exprime comme une fraction de l'intégrale, elle décroît avec l'épaisseur de verre, de telle sorte qu'elle devient infiniment petite pour une épaisseur de verre infiniment mince (à supposer que le verre puisse s'amincir à ce point, sans perdre son pouvoir isolant). Comme il existe dans la pa-

l'armature intérieure, sera égal à zéro, et le coefficient β , relatif à l'extérieure, aura la valeur déterminée précédemment pour la somme. Si enfin, comme c'est le cas dans les bouteilles de Leyde ordinaires, l'une des armatures entoure l'autre en partie seulement, il est aisé de voir, en comparant ce cas aux deux autres, que le coefficient α , relatif à l'armature intérieure, doit être plus petit que le coefficient β relatif à l'extérieure.

§ 18. Revenons maintenant aux équations (36). Remplaçons le coefficient a par l'expression (43), et écrivons simplement c au lieu de c_m , en entendant par c l'épaisseur moyenne du verre, déterminée par l'équation (40). Nous ne changerons rien aux coefficients α et β . Nous aurons alors les deux équations suivantes, relatives à une bouteille de Leyde chargée :

$$(44) \quad \begin{cases} M = \frac{s}{4\pi c} (1 + \delta) (G - F) - \alpha F; \\ N = \frac{s}{4\pi c} (1 + \delta) (F - G) - \beta G. \end{cases}$$

Nous poserons, pour abrégér :

$$(45) \quad x = \frac{4\pi c}{1 + \delta};$$

d'où il résulte que cette quantité x dépend surtout de l'épaisseur du verre, et est approximativement égale à $4\pi c$. Nos deux équations prendront ainsi une forme plus simple :

$$(46) \quad \begin{cases} M = \frac{s}{x} (G - F) - \alpha F; \\ N = \frac{s}{x} (F - G) - \beta G. \end{cases}$$

Quand on fait usage des bouteilles de Leyde, l'armature extérieure est généralement en communication avec la terre. Dans ce cas, on doit poser $G = 0$, et les deux équations deviennent ainsi :

$$(47) \quad \begin{cases} M = - \left(\frac{s}{x} + \alpha \right) F; \\ N = \frac{s}{x} F. \end{cases}$$

Comme, dans ce dernier cas, il est utile de pouvoir comparer aussi simplement que possible la quantité d'électricité M , qui se trouve sur l'armature intérieure, avec la valeur F du niveau potentiel pour cette même armature, nous introduisons encore la lettre k , déterminée par l'expression suivante :

$$(48) \quad k = \frac{4\pi c}{1 + \delta + \alpha \frac{4\pi c}{s}} = \frac{x}{1 + \alpha \frac{x}{s}},$$

d'où résulte que k , comme x , est peu différent de $4\pi c$. En vertu de cette relation, on peut poser :

$$\frac{s}{x} = \frac{s}{k} - \alpha;$$

les équations générales (46) deviendront par là :

$$(49) \quad \begin{cases} M = \frac{s}{k} (G - F) - \alpha G, \\ N = \left(\frac{s}{k} - \alpha \right) (F - G) - \beta G, \end{cases}$$

et les équations plus particulières (47) :

$$(50) \quad \begin{cases} M = - \frac{s}{k} F, \\ N = \left(\frac{s}{k} - \alpha \right) F. \end{cases}$$

A l'aide des équations (46) ou des équations (49), qui n'en diffèrent que par la forme, on pourra, étant données deux des quatre quantités M , N , F et G , déterminer les deux autres. De même, dans le cas particulier où l'armature extérieure est en communication avec la terre, on pourra, à

l'aide des équations (47) ou (50), déterminer deux des quantités M , N et F en fonction de la troisième.

§ 19. Dans toutes les considérations qui précèdent, on doit supposer tacitement que la couche de verre qui se trouve entre les deux armatures n'agit que comme isolant, mais comme un isolant parfait. La même hypothèse subsiste dans le Mémoire suivant.

Mais il est probable que dans la charge d'une bouteille de Leyde, il se passe également dans l'état électrique de l'intérieur du verre certaines modifications qui exercent une réaction sur les armatures. Nous rechercherons, dans une Addition au Mémoire suivant, jusqu'à quel point cette circonstance modifiera les résultats qui ont été obtenus en la négligeant. On verra que les modifications qui ont lieu dans le verre peuvent fort bien être introduites postérieurement dans le calcul, de sorte que les équations que nous avons déduites, sans y avoir égard, conservent toute leur validité, malgré cette circonstance.

§ 20. Pour terminer cette Introduction, démontrons le théorème que nous avons énoncé, au paragraphe 14, de la manière suivante :

Soient donnés deux corps conducteurs A et B, qui peuvent être isolés ou mis en communication avec la terre par un conducteur; dans le voisinage de ceux-ci peuvent se trouver un nombre quelconque d'autres corps conducteurs mis en communication avec la terre ou moyen de conducteurs. Tandis que B est en communication avec le sol et que A est isolé, ce dernier corps est chargé d'électricité jusqu'à un certain niveau potentiel K. Soit Q_b la quantité d'électricité accumulée par influence sur B dans ces circonstances. A est ensuite mis en communication avec le sol, tandis que B est isolé et chargé d'électricité jusqu'au même niveau potentiel K. Soit Q_a la quantité d'électricité accumulée par influence sur A dans ces circonstances. On devra avoir : $Q_a = Q_b$.

La démonstration de ce théorème repose sur une équation

bien connue par les recherches de Green et dont je n'ai pas besoin de prouver l'exactitude. Je me contenterai de donner cette équation avec les éclaircissements nécessaires. La voici :

$$(51) \quad \int U \cdot \Delta V d\tau + \int U \frac{dV}{dn} d\omega = \int V \cdot \Delta U d\tau + \int V \frac{dU}{dn} d\omega.$$

U et V représentent deux fonctions des coordonnées, et nous supposons, parce que c'est sans influence sur le but que nous nous proposons, qu'à l'intérieur d'un espace fermé que nous considérerons, ni ces fonctions, ni leurs coefficients différentiels du premier et du second ordre, ne deviennent infiniment grands. ΔU et ΔV désignent abrégativement des expressions différentielles de la forme de celles du paragraphe 6, savoir :

$$\Delta U = \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2}.$$

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2}.$$

$d\tau$ désigne un élément de l'espace, et les deux intégrales qui renferment $d\tau$ s'étendent à tout l'espace considéré. $d\omega$ est un élément de la surface de cet espace, et n représente la normale élevée à cet élément. On la comptera comme positive vers l'intérieur de la surface, et l'on prendra pour $\frac{dU}{dn}$ et $\frac{dV}{dn}$

les valeurs du coefficient différentiel de U et V par rapport à n , que ces coefficients prennent près de la surface, vers l'intérieur de celle-ci. Les intégrales qui renferment $d\omega$ s'étendent à toute la surface de l'espace donné.

Nous allons appliquer cette équation de la manière suivante : Outre les deux corps conducteurs que nous avons nommés A et B dans l'énoncé précédent, et les autres corps conducteurs (en communication avec la terre) qui peuvent se trouver dans leur voisinage, imaginons une sphère décrite avec un très-grand rayon R, d'un point voisin de ces corps pris comme centre, et regardons l'espace compris entre cette

sphère et ces corps conducteurs comme l'espace considéré, de telle sorte que celui-ci soit limité par les surfaces de ces corps et par celle de la sphère.

U représente la fonction potentielle que l'on obtient lorsque le corps A est chargé d'électricité jusqu'au niveau potentiel K , tandis que tous les autres corps conducteurs sont en communication avec la terre, et V représente la fonction potentielle que l'on obtiendrait en chargeant le corps B jusqu'au niveau potentiel K , tandis que tous les autres seraient en communication avec la terre.

Ensuite de ces définitions et de ce qui a été dit au paragraphe 6, on peut immédiatement conclure que dans tout l'espace que nous considérons, nous aurons en chaque point :

$$\Delta U = 0 \text{ et } \Delta V = 0,$$

puisque dans les deux charges l'espace considéré reste vide d'électricité. Les intégrales qui contiennent ΔU et ΔV disparaissent donc de l'équation (51), et celle-ci se réduira à :

$$(52) \quad \int U \frac{dV}{dn} d\omega = \int V \frac{dU}{dn} d\omega.$$

Ces intégrales doivent s'étendre à toute la surface de l'espace considéré et, par suite, à celle de la sphère et à celles des conducteurs donnés.

Nous considérerons d'abord la partie des deux intégrales qui est relative à la sphère.

Désignons par M toute la quantité d'électricité qui se trouve répartie sur tous les conducteurs dans la première charge, et par N celle qui s'y trouve dans la seconde. Considérons un point quelconque p très-éloigné du centre de la sphère et, par suite, des conducteurs. Soit r sa distance au centre, on aura approximativement (et avec d'autant plus d'exactitude que r sera plus grand) les équations :

$$U = -\frac{M}{r}, \quad V = -\frac{N}{r},$$

et, par suite :

$$\frac{dU}{dr} = \frac{M}{r^2}, \quad \frac{dV}{dr} = \frac{N}{r^2}.$$

Imaginons maintenant que le point p soit à la surface de la sphère, nous aurons alors à poser $r = R$. En outre, il y a à remarquer, relativement aux coefficients différentiels $\frac{dU}{dr}$ et

$\frac{dV}{dr}$, que la droite sur laquelle est compté r a la direction d'un rayon, et, par suite, est normale à la sphère. Mais comme la normale n , qui entre dans les coefficients différentiels de l'équation (52), est comptée comme positive vers l'intérieur de la surface, c'est-à-dire dans le sens dans lequel r décroît, nous devons faire $dn = -dr$, d'où résulte que les coefficients différentiels pris par rapport à n seront égaux et de signe contraire aux coefficients par rapport à r . Pour un point situé à la surface de la sphère, nous aurons donc :

$$U = -\frac{M}{R}, \quad V = -\frac{N}{R};$$

$$\frac{dU}{dn} = -\frac{M}{R^2}, \quad \frac{dV}{dn} = -\frac{N}{R^2}.$$

Afin de distinguer la partie de l'intégrale relative à la surface de la sphère de l'intégrale totale, nous écrirons $d\omega_s$, au lieu de $d\omega$, en désignant par $d\omega_s$ un élément de la surface de la sphère. Nous aurons ainsi :

$$\int U \frac{dV}{dn} d\omega_s = \frac{MN}{R^3} \int d\omega_s = 4\pi \cdot \frac{MN}{R}.$$

$$\int V \frac{dU}{dn} d\omega_s = \frac{NM}{R^3} \int d\omega_s = 4\pi \cdot \frac{NM}{R}.$$

Ces expressions, qui sont d'autant plus exactes que le rayon R est plus grand, sont en premier lieu très-petites pour de très-grandes valeurs R ; en outre, elles sont égales entre elles, de sorte qu'elles se détruisent mutuellement dans l'équation (52). Or, comme nous pouvons donner une valeur arbi-

traire au rayon R et, par suite, le faire infini, ces parties des deux intégrales disparaîtront de l'équation.

Il ne reste donc plus à considérer que les parties des intégrales qui se rapportent aux surfaces des corps conducteurs donnés.

Considérons d'abord l'intégrale du premier membre :

$$\int U \frac{dV}{dn} d\omega,$$

et remarquons que U est la fonction potentielle pour le cas où le corps A est chargé jusqu'au niveau potentiel K, tandis que tous les autres conducteurs sont en communication avec la terre. U est donc constamment égal à K, à la surface du corps A, et nul sur les surfaces des autres corps. Il suffit donc que nous effectuions l'intégration pour la surface du corps A. Nous l'indiquerons en écrivant $d\omega_a$ au lieu de $d\omega$, $d\omega_a$ désignant un élément de surface du corps A. En posant immédiatement $U = K$, et faisant sortir K, qui est constant, du signe d'intégration, nous pourrons écrire, au lieu de l'intégrale du premier membre :

$$K \int \frac{dV}{dn} d\omega_a.$$

Celle du second membre se réduira, pour des raisons analogues, à

$$K \int \frac{dU}{dn} d\omega_b.$$

où $d\omega_b$ représente un élément de surface du corps B. En faisant disparaître le facteur K des deux membres de l'équation (52), celle-ci deviendra :

$$(53) \quad \int \frac{dV}{dn} d\omega_a = \int \frac{dU}{dn} d\omega_b.$$

Or, nous avons donné au paragraphe 8 l'équation (11), qui est applicable à un conducteur chargé d'électricité :

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{+0} = 4\pi h,$$

équation dans laquelle h représente la densité électrique en un lieu quelconque de la surface du corps; V la fonction potentielle; n la normale élevée en ce lieu à la surface et comptée comme positive vers l'extérieur; quant à l'indice $+0$, il indique qu'il s'agit de la valeur qu'a le coefficient différentiel du côté positif (extérieur) de la surface, dans le voisinage immédiat de celle-ci.

Des deux coefficients différentiels $\frac{dU}{dn}$ et $\frac{dV}{dn}$, qui entrent dans l'équation (53), chacun est la dérivée, relative à la direction normale, de la fonction potentielle pour chacune des deux charges; et le côté de la surface auquel se rapporte cette dérivée (c'est-à-dire le côté intérieur de l'espace compris entre les corps conducteurs et la sphère), est, pour le corps conducteur, le côté extérieur. On voit par là que les deux coefficients différentiels $\frac{dU}{dn}$ et $\frac{dV}{dn}$ de l'équation (53) ont

pour les deux charges la même signification que $\left(\frac{dV}{dn}\right)_{+0}$ dans l'équation précédente. Si donc nous désignons par h_b la densité électrique qu'on obtient en un lieu de la surface du corps B par la première charge (en chargeant A, tandis que B communique avec la terre); et par h_a la densité que l'on obtient en un lieu de la surface du corps A par la seconde charge (en chargeant B, tandis que A communique avec la terre), nous devons poser :

$$\frac{dU}{dn} = 4\pi h_b; \quad \frac{dV}{dn} = 4\pi h_a.$$

En substituant ces expressions dans l'équation (53), et supprimant le facteur 4π , nous aurons :

$$(54) \quad \int h_a d\omega_a = \int h_b d\omega_b.$$

Des deux intégrales qui entrent dans cette équation, la première représente évidemment la quantité d'électricité qui

se trouve sur le corps A, en vertu de la seconde charge; la seconde intégrale représente la quantité d'électricité qui se trouve sur le corps B, en vertu de la première charge; et comme nous avons désigné ces quantités d'électricité par Q_a et Q_b ; nous pourrons écrire :

(55)

$$Q_a = Q_b.$$

C. Q. F. D.



MÉMOIRE X.

SUR L'ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE
ÉLECTRIQUE, ET L'ÉCHAUFFEMENT QU'ELLE PRODUIT DANS
LE FIL CONDUCTEUR.

Lu à l'Académie de Berlin, mai 1852; *Ann. de Pogg.*, livraison de juillet 1852, t. LXXXVI, p. 337; *Scientific Memoirs, Natural Philosophy*, edited by John Tyndall and William Francis, p. 1.

De la même manière que l'on peut produire du travail mécanique au moyen de la chaleur, on peut aussi, comme on sait, produire au moyen de courants électriques, soit divers effets mécaniques, soit de la chaleur. Tous ces phénomènes présentent déjà en eux-mêmes un grand intérêt qui est encore considérablement accru par les applications que l'on en a faites ou que l'on peut en faire par la suite; à quoi il faut ajouter encore que ces effets mêmes peuvent être soumis à une analyse mathématique rigoureuse et paraissent se prêter ainsi à des recherches sur la dépendance qui les relie entre eux et avec la cause qui les produit.

Aussi ont-ils déjà fait plusieurs fois l'objet de semblables recherches; mais en général on a étudié particulièrement l'électricité *galvanique* et l'*électro-magnétisme* qui sont employés le plus souvent et sur la plus grande échelle à produire ces effets. Il me paraît cependant plus convenable de commencer dans des recherches de cette nature par l'*électricité statique*; car si elle présente plus de difficultés à l'*analyse mathématique*, elle est cependant plus simple en principe; puisqu'on n'y a affaire qu'à l'électricité elle-même et non à

des effets accessoires de l'action chimique et du magnétisme.

J'ai cherché, dans ce qui suit, à rapporter les effets produits par une décharge électrique à une mesure déterminée fournie par les principes de la mécanique; et j'ai comparé le résultat ainsi trouvé avec l'expérience, pour un certain nombre de cas simples. L'accord a été, comme on le verra, tellement satisfaisant, que le théorème que j'ai établi m'a paru non-seulement indubitable pour la théorie de l'électricité, mais encore propre à fournir une nouvelle confirmation de la théorie mécanique de la chaleur.

Soit donné un système de points matériels $m, m', m'', \text{etc.}$, dont les coordonnées rapportées à trois axes rectangulaires sont au temps t : $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', \text{etc.}$ Sur ces masses agit un système de forces données dont les composantes totales pour la masse m sont X, Y, Z ; pour m', X', Y', Z' , et ainsi de suite. Ces points peuvent être entièrement libres ou gênés dans leurs mouvements, soit parce qu'ils sont reliés entre eux d'une manière quelconque, soit parce qu'ils sont soumis à des conditions extérieures, comme par exemple à se mouvoir sur une surface ou une ligne donnée. Toutefois ces conditions ne doivent pas être de telle nature qu'elles puissent produire un mouvement sans aucune des forces données, ce qui serait le cas si la surface ou la ligne sur laquelle un point est assujéti à demeurer était elle-même en mouvement; elles ne doivent pas non plus être telles que le mouvement des masses données se communique à d'autres masses matérielles qui ne seraient pas comprises dans le système. Ou, en d'autres termes, toutes les forces motrices et toutes les masses mues par ces forces doivent être données explicitement. En représentant alors par $v, v', v'', \text{etc.}$, les vitesses des masses $m, m', m'', \text{etc.}$, au temps t , on a l'équation générale :

$$(1) \quad \frac{1}{2} \Sigma m d(v^2) = \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz),$$

dans laquelle les signes sommatoires se rapportent à toutes

les masses contenues dans le système, ainsi qu'aux coordonnées, aux forces et aux vitesses correspondantes.

Dans cette équation le premier membre est immédiatement intégrable; et le second, s'il ne l'est pas sous sa forme actuelle, le deviendra dans tous les cas si l'on regarde les quantités $x, y, z; x', y', z', \text{etc.}$, non comme des variables indépendantes, mais comme des fonctions d'une seule et même variable qui est le temps t , ce qu'elles sont en effet. On aura donc :

$$\frac{1}{2} \Sigma mv^2 = \int \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) + \text{const.},$$

ou en représentant par $v_0, v'_0, v''_0, \text{etc.}$, les vitesses initiales au temps t_0 , et en prenant ce temps pour limite inférieure de l'intégrale :

$$(2) \quad \frac{1}{2} \Sigma mv^2 - \frac{1}{2} \Sigma mv_0^2 = \int_{t_0}^t \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Les quantités qui entrent dans ces équations se rencontrent très-fréquemment en mécanique et ont reçu des noms particuliers. Le produit mv^2 du premier membre s'appelle la *force vive* de la masse m , et par suite Σmv^2 serait la *force vive* de tout le système. Mais il ne se présente ici que la moitié de cette quantité, et comme le même fait se reproduira toujours et se rencontre du reste aussi dans la plupart des recherches de la mécanique, nous nommerons, ainsi que d'autres auteurs l'ont déjà fait, la quantité $\frac{1}{2} \Sigma mv^2$ la *force vive* du système.

La quantité du second membre peut se mettre sous une forme plus simple. Soient ds l'élément de chemin que la masse m décrit pendant le temps dt , et dx, dy, dz ses projections sur les trois axes rectangulaires; soit en outre S la composante de la force totale qui agit sur m , estimée suivant la direction de ce mouvement; on aura :

$$Sds = Xdx + Ydy + Zdz;$$

la quantité Sds se nomme en mécanique le travail produit pendant le temps dt par la force qui agit sur m , travail qui sera positif ou négatif selon que l'élément de chemin ds sera dirigé dans le même sens que la force S ou en sens contraire.

Au moyen de ces dénominations les équations précédentes peuvent s'exprimer sous cette forme : l'accroissement de force vive du système après un certain temps est égal au travail effectué dans le système pendant le même temps.

La détermination du travail se simplifie beaucoup dans des cas particuliers qui se présentent fréquemment.

Si une partie des forces données consiste en attractions ou répulsions, qui sont exercées d'une manière invariable pendant tout le temps sur les points matériels donnés, par des points étrangers au système, mais nécessairement fixes, ou qui ont lieu entre les points mêmes du système; et si chacune de ces forces ne dépend, quant à sa grandeur, que de la distance des points qui agissent, quelle que puisse être leur position, cette grandeur étant du reste une fonction quelconque de la distance; alors la partie, relative à ces forces, de la somme totale, que nous représenterons par :

$$\Sigma_1 (Xdx + Ydy + Zdz),$$

n'est pas seulement une différentielle totale, parce que l'on peut regarder toutes les quantités qui y entrent comme fonctions de la seule variable t , mais elle le reste encore si l'on regarde les quantités $x, y, z; x', y', z'$, etc., comme variables indépendantes, pour autant que le permettent les conditions auxquelles le système peut être assujéti dans son mouvement. De là résulte que la valeur de l'intégrale :

$$\int \Sigma_1 (Xdx + Ydy + Zdz)$$

est complètement déterminée, si l'on connaît les valeurs initiales et finales de $x, y, z; x', y', z'$, etc., sans qu'il soit nécessaire de connaître la nature du mouvement, par lequel

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE. 49
les masses m, m' , etc., sont parvenues d'une position à l'autre.

Considérons le cas encore plus particulier où les forces extérieures proviennent en partie d'un système de masses fixes μ, μ', μ'' , etc., et sont inversement proportionnelles aux carrés des distances, de sorte que si ρ désigne la distance mutuelle des masses m et μ , $\pm \frac{m\mu}{\rho^2}$ sera la force qu'elles exercent l'une sur l'autre, force qui sera positive ou négative suivant qu'elle consistera en une attraction ou une répulsion. On aura alors pour cette partie Σ_2 de la somme totale :

$$(3) \quad \int \Sigma_2 (Xdx + Ydy + Zdz) = \Sigma \pm \frac{m\mu}{\rho} + \text{const.},$$

où le signe sommatoire du second membre se rapporte à toutes les combinaisons possibles de chacune des masses du système donné avec chacune de celles de l'autre système.

Supposons de même qu'une partie des actions mutuelles du système donné soient inversement proportionnelles aux carrés des distances; de sorte que si r désigne la distance entre m et m' , leur attraction ou répulsion mutuelle sera $\pm \frac{mm'}{r^2}$. Alors pour cette partie Σ_3 de la somme totale, on aura :

$$(4) \quad \int \Sigma_3 (Xdx + Ydy + Zdz) = \Sigma \pm \frac{mm'}{r} + \text{const.},$$

où le signe sommatoire du second membre se rapporte à toutes les combinaisons possibles deux à deux des masses du système donné entre elles.

Or, $\Sigma \pm \frac{m\mu}{\rho}$ est le potentiel du système des masses extérieures sur le système donné¹⁾ et $\Sigma \pm \frac{mm'}{r}$ est le potentiel du système de masses donné sur lui-même, et par suite, les deux dernières

1) La quantité $\pm \frac{\mu}{\rho}$, si ρ représente la distance de la masse μ à un

parties du travail que nous venons d'obtenir consistent simplement dans l'accroissement de ces potentiels.

A ces principes, qui sont connus en mécanique, mais que nous devons rappeler ici pour l'ensemble de la théorie, nous ajouterons encore le suivant : que la chaleur consiste dans un mouvement des plus petites particules des corps et qu'elle est la mesure de la force vive de ce mouvement ; de sorte que, s'il se produit de la chaleur dans le système donné, nous la ferons entrer dans le calcul comme un accroissement de sa force vive ; et nous passerons maintenant à l'étude de l'électricité.

Il n'est pas douteux que l'équation (2), que nous avons trouvée pour le mouvement de masses matérielles ¹⁾, ne soit également applicable au mouvement de l'électricité à l'intérieur de ces masses, comme Helmholtz l'a déjà exprimé d'une manière très-générale et comme il l'a même exécuté en par-

point o , est désignée habituellement, d'après Gauss, sous le nom de potentiel de cette masse sur ce point ; c'est-à-dire, que l'on rapporte le potentiel, non à la masse m , qui se trouve réellement en o , mais à une unité de masse que l'on imagine en ce point. Cette quantité $\pm \frac{\mu}{\rho}$ est sans doute d'une telle importance en mécanique qu'elle devrait recevoir un nom spécial ; mais, comme on le voit, la quantité $\pm \frac{m\mu}{\rho}$ est aussi très-importante, de sorte que le besoin d'une dénomination brève se fait également sentir pour elle ; c'est pourquoi on lui donne aussi quelquefois le nom de potentiel. Ce double sens du même mot pourrait aisément donner lieu à des malentendus ; j'ai donc proposé dans un Mémoire antérieur (Ann. de Pogg., t. LXXXVI, p. 163), afin d'éviter la confusion, de conserver à $\pm \frac{\mu}{\rho}$ l'ancienne dénomination de *fonction potentielle* qui lui a été donnée par Green, de sorte que le nom de *potentiel* est exclusivement réservé à la quantité $\pm \frac{m\mu}{\rho}$. [Une partie du Mémoire cité se trouve reproduite dans l'Introduction qui précède. J'ai traité ce sujet d'une manière plus complète, comme je l'ai dit, dans mon ouvrage « La fonction potentielle et le potentiel. » 1866.]

1) [Au lieu du mot *matériel* le mot *pondérable* serait ici plus propre. 1866.]

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE. 51

tie ¹⁾. Mais afin de donner à la quantité $\frac{1}{2} \Sigma mv^2$ qui se présente dans cette équation une signification tout à fait générale, qui convint tout à la fois au mouvement des masses matérielles et à l'électricité, nous devrions commencer par décider si l'électricité possède une force d'inertie, de telle sorte qu'on puisse aussi attribuer de la force vive à l'électricité en mouvement. Cette question est évidemment d'une grande importance pour toute la théorie de l'électricité ; mais nous ne la traiterons pas ici, parce que sa solution est sans influence sur la recherche que nous nous proposons.

Si l'on compare en effet le travail que l'électricité effectue par un changement dans sa distribution, avec ceux que nous avons énumérés précédemment, on voit aisément qu'il est compris dans le dernier de ceux-ci ; car les forces qui agissent pour produire ce travail ne consistent qu'en attractions ou répulsions mutuelles des particules d'électricité, et ces actions sont inversement proportionnelles au carré des distances. De là résulte immédiatement que ce travail est indépendant de la manière dont le changement s'effectue et ne dépend que de l'état initial et de l'état final ; et qu'il est mesuré par l'accroissement du potentiel de l'électricité totale sur elle-même ²⁾.

D'après cela, nous aurons à considérer par la suite, non l'état variable qui a lieu pendant une décharge, mais seulement les états constants qui la précèdent et la suivent ; et comme dans ces deux états l'électricité est en repos, nous n'a-

1) *Ueber die Erhaltung der Kraft**, Mémoire de physique du docteur H. Helmholtz, Berlin, chez G. Reimer, 1847. [Il y a eu dans les Ann. de Pogg. une discussion entre Helmholtz et moi sur quelques passages de cet ouvrage que je n'admets pas complètement ; mais il ne s'agissait que de quelques points qui sont d'une importance secondaire, à côté de la grande richesse de pensées de ce beau travail, dont certainement personne ne reconnaît plus que moi la valeur. 1866.]

2) Helmholtz, dans un cas qu'il choisit comme exemple (p. 40 de

* Sur la conservation de la force.

vons pas à nous occuper de la question si l'électricité en mouvement a de la force vive ¹⁾.

De même, il est inutile de décider ici s'il existe une ou deux électricités; car il est suffisamment démontré que les attractions et répulsions ont lieu *comme s'il existait* deux électricités; et ici, où il ne s'agit que de ces *forces*, nous pouvons toujours parler de deux électricités comme véhicules de ces forces, sans leur attribuer pour cela une existence réelle.

Outre le travail mentionné précédemment, qui est produit par les forces attractives ou répulsives de l'électricité elle-même, et qui se mesure par l'accroissement du potentiel, il se présente encore dans une décharge plusieurs autres effets dans lesquels des forces étrangères entrent en jeu, et dont je rappellerai quelques-uns des plus fréquents.

Il jaillit en un ou plusieurs endroits des étincelles électriques, et dans ce cas, une couche d'air, ou un autre corps non conducteur, est percé par l'électricité. — Si le courant électrique passe par un fil très-mince, celui-ci éprouve

son ouvrage), donne l'expression suivante pour le travail :

$$-\left(V + \frac{W_a + W_b}{2}\right),$$

tandis que, avec la même notation, l'accroissement du potentiel est exprimé par :

$$-(V + W_a + W_b).$$

Cette différence avec le théorème précédent ne provient que de ce qu'il a compté le potentiel d'une masse sur elle-même comme double de ce qu'il est en réalité. Dans la suite, lorsqu'il introduit au lieu de potentiels des quantités qui correspondent aux fonctions potentielles, ses formules sont d'accord avec les miennes.

1) [Nous pouvons également laisser ici de côté la question de savoir si la décharge électrique consiste en un courant unique se mouvant dans un sens déterminé, ou dans une succession de courants alternatifs; puisque nous n'avons pas à nous préoccuper de la manière dont se fait la décharge, mais seulement de l'état initial et de l'état final. 1866.]

des modifications mécaniques qui peuvent varier depuis de petites flexions à peine visibles, jusqu'à une pulvérisation complète. — Si le courant traverse des corps électrolytiques, il survient des décompositions chimiques. — Dans des corps qui se trouvent dans le voisinage du système, il peut surgir des courants d'induction ou des effets magnétiques, etc.

Relativement aux forces qui entrent en jeu dans tous ces effets, ceux-ci doivent être comptés comme un travail négatif, puisque leur essence consiste précisément en ce que les forces correspondantes doivent être *vaincues*, comme dans le premier cas la résistance de la couche d'air ou du corps percé, dans le second la ténacité du fil, etc.; d'où il résulte qu'il se produit des mouvements qui sont dirigés *en sens contraire* des forces. En ajoutant algébriquement toutes ces quantités de travail à l'accroissement du potentiel, on formera le second membre de l'équation (2) qui est :

$$\frac{1}{2} \Sigma mv^2 - \frac{1}{2} \Sigma mv_0^2 = \int_{t_0}^t \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz),$$

tandis que le premier membre représente l'accroissement de force vive produit par la décharge dans tout le système. Cet accroissement peut être de deux espèces. En premier lieu, les attractions et les répulsions électriques peuvent dans certaines circonstances produire du mouvement perceptible dans les masses matérielles du système; en second lieu, et surtout, le courant engendre de la chaleur dans les conducteurs.

En faisant passer dans le premier membre, comme positives, toutes les quantités de travail négatives que nous venons de mentionner, de sorte que le second ne renferme plus que l'accroissement du potentiel, nous pourrions exprimer le théorème renfermé dans cette équation sous cette forme très-concise :

La somme de tous les effets produits par une décharge électrique est égale à l'accroissement qui est survenu dans le potentiel de la quantité totale d'électricité sur elle-même.

Nous entendons dans cet énoncé, par décharge électrique,

toute modification qui se produit dans la distribution de l'électricité, et au moyen de laquelle l'équilibre s'établit totalement ou partiellement dans l'état électrique des différentes parties d'un système de corps conducteurs, parmi lesquels peut figurer la terre.

Appliquons ce théorème général, que nous désignerons simplement par la suite sous le nom de théorème fondamental, au cas particulier d'une bouteille de Leyde ou d'une batterie de ces bouteilles; ce cas a une importance spéciale à cause de ses fréquentes applications, et c'est celui qui offre le plus d'occasions de comparer la théorie avec l'expérience. Sous ce dernier point de vue, la série de recherches entreprises par Riess avec beaucoup de soin, de circonspection et de suite, fournit des matériaux aussi riches que sûrs; et leur comparaison avec le théorème fondamental se trouve fort simplifiée parce que Riess a lui-même déduit des faits qu'il a observés, des lois formulées d'une manière très-précise.

Commençons par déterminer d'une manière plus détaillée la *valeur du potentiel* dans une bouteille de Leyde ou dans une batterie.

Pour simplifier les idées, partons de la considération de quelques cas particuliers faciles, relativement à la forme de la bouteille, et faisons servir les formules que nous trouverons à la déduction de l'expression générale. Nous choisirons en premier lieu une forme qui ne peut pas se présenter dans la pratique, mais qui doit être assujettie au fond aux mêmes lois que les bouteilles de Leyde ordinaires, et qui conduira à des résultats extrêmement simples. Prenons pour vase de verre, une *sphère creuse entière*, et d'une épaisseur uniforme, et supposons toute sa surface intérieure et extérieure recouverte de tain. Soit communiquée d'une manière quelconque la quantité d'électricité Q à la surface intérieure; et soit prise pour unité la quantité d'électricité positive qui exerce, à l'unité de distance, l'unité de force répulsive sur une quantité égale d'électricité positive. Supposons l'armature extérieure en communication avec la terre, et soit Q' la quantité d'électricité qu'elle reçoit de celle-ci.

Dans ce cas, il est évident que Q ainsi que Q' doivent se répandre uniformément sur les deux surfaces, ce qui facilite beaucoup la détermination de la fonction potentielle et du potentiel.

La fonction potentielle V d'une quantité d'électricité Q relativement à un point O est en général déterminée par l'équation

$$V = - \int \frac{dq}{r},$$

dans laquelle dq est un élément d'électricité, r sa distance au point O , et où l'intégrale s'étend à toute la quantité Q . Mais dans le cas particulier où Q est uniformément répandu sur une sphère, nous n'avons pas besoin de cette équation générale, et il suffit que nous appliquions ces deux théorèmes connus.

1) A l'intérieur de la sphère la fonction potentielle est partout égale à

$$V = - \frac{Q}{r}$$

r désignant le rayon de la sphère. 2) En dehors de la sphère à une distance R du centre, la fonction potentielle est

$$V = - \frac{Q}{R}.$$

A la surface, ces deux expressions donnent la même valeur, et par suite les deux théorèmes sont simultanément applicables. Dans le cas dont nous nous occupons, les armatures forment deux surfaces sphériques concentriques dont nous nommerons les rayons a et $a + c$, c étant l'épaisseur du verre. Si nous considérons un point de l'armature intérieure, nous pourrions appliquer le premier théorème relativement aux deux surfaces sphériques, et nous obtiendrions en réunissant les fonctions potentielles des deux quantités d'électricité Q et Q' :

$$(3) \quad V = - \frac{Q}{a} - \frac{Q'}{a + c}.$$

En un point de l'armature extérieure, au contraire, c'est le

second théorème qui est applicable aux deux surfaces sphériques; et en désignant ici par V' la fonction potentielle, nous aurons :

$$(6) \quad V' = -\frac{Q}{a+c} - \frac{Q'}{a+c}.$$

La condition que l'armature extérieure est en communication avec la terre, nous fournit un moyen de déterminer la quantité d'électricité Q' . En effet, en vertu d'un théorème connu, lorsque plusieurs corps conducteurs sont en communication entre eux, l'équilibre électrique s'établit de telle sorte que la fonction potentielle a la même valeur à l'intérieur de tout le système. Or, comme dans la terre où il se trouve en général autant de quantités positives que de négatives, la fonction potentielle est nulle, il en doit être de même sur l'armature extérieure. On a donc

$$V' = 0,$$

et par suite, en vertu de (6) :

$$Q = -Q';$$

d'où résulte que (5) devient

$$(7) \quad V = -Q \frac{c}{a(a+c)},$$

ou bien, en développant la fraction suivant les puissances de c et représentant par S la surface $4a^2\pi$ de l'armature intérieure :

$$(7_a) \quad V = -\frac{Q}{S} 4\pi c \left(1 - \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - \text{etc.} \right).$$

Par là, nous pouvons aisément déterminer le potentiel de toute l'électricité sur elle-même. On sait en effet que le potentiel W d'une quantité donnée d'électricité sur elle-même est en général :

$$W = -\frac{1}{2} \iint \frac{dq dq'}{r},$$

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE. 57

où dq et dq' représentent deux éléments quelconques d'électricité, r leur distance mutuelle, et où les deux intégrales s'étendent à toute la quantité d'électricité donnée. Le facteur $\frac{1}{2}$ provient de ce que, dans l'intégrale double, chaque combinaison de deux éléments quelconques dq et dq' se présente deux fois. Or, comme

$$-\int \frac{dq}{r} = v,$$

on peut écrire au lieu de l'expression précédente :

$$(8) \quad W = \frac{1}{2} \int v dq.$$

Mais, comme nous l'avons vu, la fonction potentielle est constante dans tout corps conducteur continu, et peut sortir du signe d'intégration; et l'intégrale restante représente simplement la quantité d'électricité répandue sur le corps. En appliquant ce résultat aux deux armatures d'une bouteille de Leyde dont les fonctions potentielles sont V et V' , nous obtiendrons pour le potentiel total des deux quantités Q et Q' sur elles-mêmes :

$$(9) \quad W = \frac{1}{2} (Q \cdot V + Q' \cdot V'),$$

et si nous y faisons pour notre cas particulier $V' = 0$, et que nous substituons à V sa valeur (7) ou (7_a), nous obtiendrons le potentiel cherché pour une bouteille sphérique chargée :

$$(10) \quad W = -Q^2 \frac{c}{2a(a+c)},$$

ou :

$$(10_a) \quad W = -\frac{Q^2}{S} 2\pi c \left(1 - \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} - \text{etc.} \right).$$

Nous considérerons comme la seconde forme la plus simple de la bouteille de Leyde le *carreau de Franklin à armatures cir-*

culaires. J'ai déjà étudié particulièrement cette forme dans le Mémoire mentionné plus haut; je n'en rappellerai qu'un résultat, celui qui correspond à l'exemple précédent, et qui se rapporte au cas où l'une des armatures est en communication avec la terre, tandis que l'autre reçoit une quantité d'électricité Q . Alors la valeur de la fonction potentielle est naturellement nulle sur la première, tandis que sur la seconde elle est, d'après l'équation (68) [de ce Mémoire] où c représente l'épaisseur du verre et a le rayon du cercle :

$$V = -Q \frac{4c}{a^2} \left[1 - \frac{c}{a\pi} \left(\log \frac{17,68a}{c} + 2 \right) \right],$$

ou bien, en représentant par S la surface πa^2 d'une armature :

$$(11) \quad V = -\frac{Q}{S} 4\pi c \left[1 - \frac{c}{a\pi} \left(\log \frac{17,68a}{c} + 2 \right) \right].$$

Pour déduire de là le potentiel de la quantité totale d'électricité sur elle-même, nous aurons de nouveau à multiplier par $\frac{1}{2} Q$; donc :

$$(12) \quad W = -\frac{Q^2}{S} 2\pi c \left[1 - \frac{c}{a\pi} \left(\log \frac{17,68a}{c} + 2 \right) \right].$$

Si l'on compare les expressions (11) et (12) à (7_a) et (10_a), on voit que les termes principaux $-\frac{Q}{S} 4\pi c$ et $-\frac{Q^2}{S} 2\pi c$ sont les mêmes dans les deux cas, et que l'écart ne se manifeste que dans les termes qui sont d'un ordre supérieur au premier par rapport à c , et qui par suite peuvent être négligés si c est très-petit relativement aux dimensions des armatures. La même chose aura lieu, en général, comme on peut le démontrer aisément, pour toute autre bouteille de Leyde dans laquelle l'épaisseur du verre est partout égale, et par suite c constant. Si nous négligeons donc les termes d'ordre supérieur, nous obtiendrons les équations :

$$(13) \quad V = -\frac{Q}{S} 4\pi c$$

$$(14) \quad W = -\frac{Q^2}{S} 2\pi c,$$

au moyen desquelles on peut comparer entre elles des bouteilles de différentes formes, grandeurs et épaisseurs de verre, pourvu qu'elles satisfassent à la condition que l'épaisseur du verre c soit constante dans chacune d'elles, condition qui n'est qu'imparfaitement remplie dans les bouteilles ordinairement employées.

Si l'on n'emploie pas différentes bouteilles, mais une batterie composée de bouteilles égales entre elles, comme on le fait souvent, et si l'on ne fait varier la surface des armatures qu'en augmentant ou diminuant le nombre des bouteilles, on pourra comparer entre eux les différents cas, sans négliger les termes d'ordre supérieur, et sans faire d'hypothèse restrictive relativement à l'épaisseur du verre.

Quelle que soit, en effet, la forme de la bouteille, on peut poser, en représentant par s la surface de son armature intérieure, et par q la quantité d'électricité répandue sur cette armature :

$$(15) \quad V = -\frac{q}{s} k^1$$

$$(16) \quad W = -\frac{q^2}{s} \frac{k}{2},$$

où k est une constante qui dépend de la nature de la bouteille; cette constante n'est pas immédiatement connue; mais en tous cas, elle est la même pour toutes les bouteilles égales entre elles, et, en outre, elle est du premier ordre relativement à l'épaisseur moyenne du verre.

1) [Cette équation est la même que la première des équations (50) de l'Introduction précédente, p. 37, si l'on y remplace M et F par q et V . La signification de la quantité k est développée dans l'équation (48) de l'Introduction, p. 37: 1866.]

Soient prises n de ces bouteilles également chargées, dont toutes les armatures intérieures, ainsi que les extérieures, sont réunies entre elles. Si nous faisons abstraction de l'influence que les différentes bouteilles peuvent exercer les unes sur les autres si elles sont trop rapprochées, ainsi que de celle de l'électricité qui est répandue sur les pièces formant liaison, il ne se présentera dans la fonction potentielle aucune modification, due à la liaison, tandis que le potentiel aura dans toute la batterie une valeur n fois plus grande, que dans chaque bouteille isolée. En représentant par S la surface de l'armature intérieure commune, et par Q toute la quantité d'électricité qui y est répandue, il n'y aura, pour obtenir les quantités V et W pour toute la batterie, qu'à remplacer dans les équations précédentes q par sa valeur $\frac{Q}{n}$ et s par $\frac{S}{n}$, et à multiplier la seconde équation par n . Cette quantité disparaîtra dans les deux équations comme facteur commun, et il viendra de nouveau :

$$(17) \quad V = -\frac{Q}{S}k$$

$$(18) \quad W = -\frac{Q^2}{S} \cdot \frac{k}{2}$$

Si nous regardons d'après cela comme connu le potentiel d'une bouteille de Leyde ou d'une batterie chargée, nous pourrions déterminer l'accroissement du potentiel qui a lieu par la décharge, et par suite le travail produit par l'électricité. Si, en effet, la décharge n'est que partielle, et si on représente par W_1 le potentiel du résidu, le travail produit sera égal à

$$(19) \quad W_1 - W,$$

lequel est une quantité positive, puisque W et W_1 sont toujours négatifs, et que W_1 est plus petit que W en grandeur absolue. Si, au contraire, la décharge est complète, on doit poser $W_1 = 0$, et par suite le travail produit sera égal à

$$(20) \quad -W.$$

Examinons maintenant quels sont les effets produits par la décharge.

Imaginons que celle-ci soit due à ce que l'on rapproche l'une de l'autre, jusqu'à ce que l'étincelle jaillisse ou jusqu'au contact, les deux extrémités d'un circuit, formé de corps conducteurs allant d'une armature à l'autre, et qui était jusqu'alors interrompu. A la rigueur, pendant le rapprochement, l'électricité agit déjà accessoirement, puisque les extrémités du circuit s'attirent à cause de l'électricité qu'elles renferment, et facilitent ainsi le rapprochement. Mais cet effet est tellement faible dans ce cas-ci, où la plus grande partie de l'électricité est fixée sur les armatures et ne peut contribuer à cette attraction, que nous pouvons le négliger sans scrupule.

En outre, nous excluons, pour le moment, de notre recherche, pour plus de simplicité, la production de courants d'induction ou de magnétisme en dehors du système de corps considéré, ainsi que toutes les modifications persistantes de nature mécanique, chimique ou magnétique à l'intérieur de ce système; et nous admettrons que le travail qui est dépensé aux lieux où le circuit est interrompu et où doit jaillir une étincelle, ainsi que la chaleur engendrée dans tout le système soient les seuls effets qui se présentent. Alors, en vertu du théorème fondamental, la somme de ces deux effets doit être égale à l'accroissement du potentiel.

Supposons d'abord, que dans une série d'expériences, la grandeur de la décharge, c'est-à-dire l'accroissement du potentiel, reste la même, mais que l'on change le circuit, alors la somme des deux effets devra rester constante.

Pour ce qui concerne la production de chaleur, Riess a donné sur sa dépendance vis-à-vis du circuit ces deux théorèmes très-importants ¹⁾ :

1) Les quantités de chaleur produites par une même décharge dans deux fils continus différents, faisant partie du circuit, sont entre elles

1) Ann. de Pogg., t. XLIII et XLV.

comme les longueurs réduites de ces fils; en entendant par longueur réduite la quantité $\frac{\lambda}{\rho^2} x$, où λ est la longueur réelle, ρ le rayon, et x une quantité dépendant de la nature du fil, à laquelle Riess a donné le nom de force retardatrice, et qui répond à la valeur inverse de la conductibilité.

2) Si, les autres circonstances restant les mêmes, on allonge le circuit en y intercalant un fil de longueur réduite l , l'échauffement d'un autre fil faisant partie du circuit est diminué dans le rapport de $1 + bl : 1$, où b est une constante à déterminer par l'expérience.

Ces deux théorèmes peuvent se renfermer dans l'équation suivante ¹⁾ :

$$(21) \quad C = \frac{l}{1 + bl} A,$$

où l est la longueur réduite du fil considéré, C la chaleur qui est engendrée, tandis que b et l conservent leurs significations, et que A représente une quantité dépendant de la grandeur de la décharge; quantité qui est constante pour le cas actuel où nous n'avons affaire qu'à des décharges égales.

Cette équation confirme la conclusion que nous avons tirée précédemment. Le fil l intercalé est naturellement aussi échauffé par la décharge, et d'après l'équation précédente la

quantité de chaleur qu'il reçoit est $\frac{l}{1 + bl} A$. Pour que la somme des effets reste constante, il faudra donc que les autres éprouvent une diminution, et celle-ci est en effet démontrée par le second théorème de Riess et par l'équation. Nous devons nous contenter pour le moment de cette concordance générale. Il me paraît impossible, sans nouvelles données expérimentales, de rechercher si le décroissement de tous les autres effets réunis est réellement égal à cette quantité de chaleur exprimée par $\frac{l}{1 + bl} A$.

1) *Ann. de Pogg.*, t. XLV, p. 23.

Vorsselman de Heer déduit de cette équation (21) un théorème général qu'on pourrait regarder au premier abord comme une confirmation complète de notre résultat. D'après lui, la chaleur totale qui est produite dans tout le circuit par une décharge électrique, serait indépendante de la nature du circuit ¹⁾. Helmholtz donne aussi ce théorème comme concordant en effet avec la théorie ²⁾; cependant je ne puis admettre cette concordance, parce que le théorème renferme plusieurs inexactitudes.

D'abord, Vorsselman de Heer ne considère expressément que « l'arc qui relie les deux armatures de la batterie » ³⁾. Mais la production de chaleur s'étend aussi aux autres corps du système; une partie de celle-ci est engendrée à l'intérieur de la batterie elle-même; une autre partie, pour le cas où la batterie et le circuit ne sont pas isolés, mais mis en communication avec la terre, sera produite dans ce fil conducteur et dans la terre elle-même. Cette dernière partie sera, en général insignifiante, parce qu'il n'y a que l'excès de l'une ou l'autre électricité qui s'écoule dans la terre, et qu'il est faible, relativement à la quantité totale d'électricité; on pourrait même admettre qu'il en est ainsi de la première partie, à condition que le circuit ait une longueur réduite considérable. Mais il n'en serait plus de même pour un circuit très-court, et nous devons jusqu'à présent, en général, considérer cette partie comme inconnue.

Ensuite l'auteur regarde le circuit comme composé d'un fil continu. A ce sujet Riess déjà fait remarquer ⁴⁾ que son circuit était composé de plusieurs parties, et comme ses expériences se rapportaient à la chaleur produite dans des fragments de fils continus, et non à la chaleur engendrée dans les joints, il a rejeté le théorème, pour autant qu'il doive résulter immédiatement de ses expériences. Au point de vue

1) *Ann. de Pogg.*, t. XLVIII, p. 298.

2) V. son travail, p. 44.

3) *Ann. de Pogg.*, t. XLVIII, p. 297.

4) *Ibid.*, p. 320.

théorique, on pourrait comprendre dans le théorème général des joints où il y a en réalité contact métallique, et où l'électricité ne produit par son passage aucune modification mécanique, sans avoir besoin de connaître pour cela en particulier, les quantités de chaleur qui y sont développées. Mais, il en est autrement des interruptions du circuit, où jaillit une étincelle. Dans ce cas, il se produit un effet mécanique extérieur que l'on doit commencer par retrancher de l'effet total, comme travail consommé, pour obtenir la partie qui est réellement transformée en chaleur, à l'intérieur du système de corps considéré.

En ce qui regarde la grandeur de cette consommation de travail et son influence sur la production de chaleur, j'indiquerai d'abord une nouvelle confirmation de la théorie par l'expérience. Il est en effet évident que le travail consommé dépend de la résistance qu'oppose la couche non conductrice, qui forme l'interruption, et qu'il sera par conséquent plus considérable, si les extrémités du circuit sont séparées par un corps solide non conducteur, que si de l'air seul est interposé entre elles. De là résulte qu'un thermomètre électrique à air qui se trouve en un autre endroit du circuit doit s'échauffer moins dans le premier cas que dans le dernier, et c'est ce qui résulte en effet de la série d'expériences entreprises par Riess ¹⁾.

Au point d'interruption, il y avait soit deux petits disques, soit deux sphères, soit deux pointes en face l'une de l'autre, chaque fois à la distance de 0,2 de ligne. On intercalait entre elles successivement les corps énumérés dans la première colonne du tableau suivant; et dans des circonstances identiques, on a observé dans le thermomètre à air les échauffements indiqués dans les colonnes suivantes. Dans les cas où Riess donne plusieurs nombres, j'en ai pris la moyenne.

¹⁾ *Ann. de Pogg.*, t. XLIII, p. 82.

CORPS INTERCALÉS.	ÉCHAUFFEMENTS DANS LE THERMOMÈTRE À AIR, suivant que l'étincelle jaillissait entre		
	LES DISQUES.	LES SPHÈRES.	LES POINTES.
Couche d'air.....	15,9	15,4	15,1
Une carte.....	11,7	12,0	11,6
Deux cartes séparées par une couche de tain.	9,7	9,3	
Deux cartes.....	8,0	8,8	10,4
Feuille de mica.....	6,8	4,7	4,8

Dans ce tableau, on voit clairement ressortir l'influence de la solidité du corps intercalé qui doit être traversé par l'étincelle ¹⁾; et l'on voit en même temps par la grande différence des nombres, combien le travail consommé par l'étincelle peut devenir considérable dans des circonstances défavora-

¹⁾ Le cas seul où deux cartes étaient séparées par une couche de tain, forme une exception, puisque ces trois corps ont exercé un effet moindre que les deux cartes seules. D'après cela, on doit admettre que le tain, quoiqu'il ait été percé également, n'a pas augmenté la consommation de travail, mais l'a au contraire diminuée, ce qui paraît impliquer une contradiction. Je crois cependant que, quoiqu'on ne puisse pas expliquer pour le moment ce fait, on ne doit pas précisément le rejeter comme contradictoire; car, relativement à la consommation de travail, il ne s'agit pas seulement de savoir *quels* corps sont traversés, mais aussi *comment* ils le sont, et un corps conducteur intercalé produit en tous cas une modification sous ce rapport.

bles. Mais on ne pourrait pas encore déduire de là une mesure exacte de ce travail, et il me semble que jusqu'à présent nous ne possédons pas encore une telle mesure, même pour le cas le plus simple et le plus important, celui où l'étincelle jaillit à travers l'air seul.

Au premier abord, on pourrait peut-être croire que pour une égale densité de l'air, ce travail devrait être simplement proportionnel à l'épaisseur de la couche d'air traversée. Toutefois, si nous changeons la distance des corps entre lesquels jaillit l'étincelle, on modifie la charge de la batterie ou la nature du circuit, il se présente dans les étincelles de si grandes différences déjà reconnaissables à l'intensité de la lumière et de la crépitation, qu'il est impossible de regarder ces étincelles comme égales entre elles, relativement au travail qu'elles consomment.

En outre, on pourrait vouloir tirer de quelques expériences de Riess ¹⁾ la conclusion que le travail consommé par une étincelle qui jaillit à travers l'air est en général si faible, qu'on peut le négliger. Riess a en effet disposé ses expériences sur les petits disques et les sphères, de telle sorte qu'il les mettait d'abord en contact, et ensuite à différentes distances; dans le premier cas, l'électricité passait sans étincelles, dans le second avec étincelles; et il a observé dans les deux cas la chaleur produite dans le circuit, quand les autres circonstances restaient identiques. Cette chaleur s'est, en général, montrée très-peu moindre à distance qu'au contact, et même dans quelques cas un peu plus grande, ce qui était d'autant plus remarquable qu'à distance il restait de l'électricité dans la batterie, tandis qu'au contact la décharge était complète. Je crois cependant que ces observations ne justifient pas encore la conclusion précédente.

Pour ce qui regarde cette circonstance, qu'à distance il restait de l'électricité dans la batterie, on ne doit pas en exagérer l'importance. Ce résidu pourrait en effet, dans le cas

1) *Ann. de Pogg.*, t. XLIII, p. 78.

EQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE. 67
extrême (où la distance était la plus grande possible pour que la décharge ait encore lieu), comporter environ les $\frac{2}{13}$ de la charge totale ¹⁾. Mais l'effet total de la décharge en serait diminué non de $\frac{2}{13}$, mais seulement de $\left(\frac{2}{13}\right)^3$ ou environ de $\frac{1}{42}$. L'effet total est en effet égal, d'après notre théorème

fondamental, à l'accroissement du potentiel, et le potentiel est pour une batterie déterminée proportionnel au carré de la quantité d'électricité. Soient donc Q la quantité d'électricité de toute la charge et Q₁ celle du résidu, l'accroissement du potentiel sera :

$$W_1 - W = A(Q^2 - Q_1^2),$$

où A est un facteur indépendant de la quantité d'électricité; en posant successivement dans cette équation :

$$Q_1 = 0 \text{ ou } = \frac{2}{13} Q,$$

on en déduira

$$W_1 - W = AQ^2 \text{ ou } = AQ^2 \left[1 - \left(\frac{2}{13}\right)^2 \right]^3.$$

De plus, il faut remarquer qu'outre l'étincelle que l'on produisait à volonté en éloignant les disques ou les sphères, il y avait encore des étincelles qui tenaient déjà au mode de décharge. Afin de rendre les décharges aussi régulières que possible, Riess les produisait au moyen d'un appareil construit exprès ³⁾ et disposé de telle sorte qu'il jaillissait chaque fois deux étincelles. Il résulte d'autres expériences de Riess ⁴⁾

1) V. Riess, *Ann. de Pogg.*, t. LIII, p. 11.

2) Relativement à l'influence du résidu sur la grandeur de la décharge, voir l'Addition à ce Mémoire. 1866.]

3) *Ann. de Pogg.*, t. XL, p. 339.

4) *Ibid.*, t. LIII, p. 11.

qu'une interruption apportée dans le circuit amoindrit la distance explosive en un autre endroit : et, par suite, dans le cas actuel, en même temps que la nouvelle étincelle jaillit entre les disques ou les sphères, les deux autres doivent être raccourcies dans l'excitateur, d'où l'on peut conclure à une compensation partielle de la consommation de travail. Dans certains cas même, les deux dernières étincelles disparaissent complètement et « la décharge n'avait lieu qu'au contact des sphères de l'excitateur »¹⁾. Il s'était produit une nouvelle étincelle, et deux des précédentes avaient disparu, d'où l'on peut s'attendre à une diminution de travail consommé, et par conséquent à un accroissement de chaleur produite; et en effet, ce sont précisément ces cas dans lesquels Riess a observé une chaleur plus considérable dans le circuit. On voit donc qu'il n'est pas nécessaire, pour expliquer ces phénomènes, d'admettre que la grandeur du travail consommé par une étincelle est très-faible; au reste, les expériences ne me semblent pas permettre une conclusion certaine sur cette grandeur.

S'il est impossible, à cause des inconnues qui se présentent dans l'effet total, de prouver la concordance exacte quantitativement de l'équation (21) avec le théorème fondamental, on pourrait essayer, en les admettant et les combinant ensemble, de déterminer ces inconnues ou du moins leur somme, et la forme de l'équation semble y engager. Mais on doit remarquer que, comme elle est empirique, on ne peut pas lui accorder une exactitude absolue, comme le montrent du reste les nombres obtenus par Riess. Dans deux séries d'expériences, il a intercalé dans le circuit des fils de longueur et d'épaisseur différentes, ce qui ne changeait que la quantité l qui se trouve au dénominateur dans le second membre de l'équation (21); et il a chaque fois déterminé la constante b au moyen de l'échauffement observé. Les valeurs ainsi trouvées varient dans la première série entre 0,01358 et 0,01401

1) *Ann. de Pogg.*, t. XLIII, p. 79.

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE. 69

et dans la seconde entre 0,00000926 et 0,00000840¹⁾; et quoique ces différences puissent être regardées comme peu importantes à cause de la grande variété des fils intercalés et de la difficulté des expériences, elles méritent cependant qu'on y ait quelque égard, parce qu'elles ont lieu avec une certaine régularité. Dans les deux séries en effet les valeurs de b diminuent en général lorsque la longueur réduite l du fil augmente.

C'est pourquoi nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet, et nous passerons au second point de comparaison entre la théorie et l'expérience, c'est-à-dire au cas où le circuit reste le même, mais où la grandeur de la batterie et de la quantité d'électricité qui y est accumulée varie.

Ici encore se reproduit l'inconvénient dont nous venons de parler. Comme il y a une partie des effets de la décharge que nous ne connaissons pas, nous ne pouvons pas déterminer de quelle manière cette partie varie avec la grandeur de la batterie, et par suite nous ne pouvons pas encore conclure avec assurance de l'effet observé à un endroit du circuit à l'effet total. Seulement, relativement à la chaleur engendrée dans les parties continues du circuit, nous pouvons admettre comme certain que toute modification observée dans une partie aura lieu proportionnellement dans les autres.

Mais si le circuit a une grande longueur réduite, on pourra admettre que la plus grande partie de l'effet total est employée à l'échauffer, et dans ce cas, si même les autres effets s'écartent de cette proportionnalité, les différences qui en résulteront seront relativement faibles, de sorte que l'on pourra regarder avec assez d'exactitude les échauffements observés à un certain endroit comme proportionnels à l'effet total correspondant.

Or, d'après les équations (18) et (19), l'effet total pour une décharge incomplète est exprimé par

1) *Ann. de Pogg.*, t. XLIII, p. 68 et 73. La grande différence entre les nombres de la première et de la seconde série provient d'un choix différent des unités.

$$\frac{Q^2 - Q'^2}{S} \cdot \text{const.}$$

et pour une décharge complète telle qu'elle avait lieu dans les expériences de Riess, cet effet, d'après les équations (18) et (20), s'exprimait par

$$\frac{Q^2}{S} \cdot \text{const.}$$

Or c'est là précisément l'expression que Riess a trouvée expérimentalement pour l'échauffement dans le circuit, puisque l'équation (21) est sous sa forme complète ¹⁾.

$$(21_a) \quad C = \frac{a'}{1 + b'l} \cdot \frac{Q^2}{S},$$

où a désigne une constante ²⁾.

Les cas considérés jusqu'à présent se rapportaient à la décharge complète d'une batterie ordinaire. Nous examinerons encore deux autres cas, savoir la décharge incomplète d'une batterie ordinaire et la décharge complète d'une batterie à cascade (ou pile de bouteilles) de Franklin.

Pour le premier cas nous possédons des expériences de mesure de Riess ³⁾, qui déchargeait partiellement une batterie chargée, en reliant par deux circuits ses deux armatures aux armatures correspondantes d'une autre batterie non chargée, de sorte que les quantités d'électricité qui étaient d'abord accumulées sur la première batterie se répandaient sur toutes les deux. Il variait les expériences en composant les batteries de

1) *Ann. de Pogg.*, t. XLV, p. 23.

2) Helmholtz cite également cette confirmation de la théorie par l'expérience (v. p. 43 de son ouvrage), mais je ne comprends pas bien le développement de sa formule parce qu'il y introduit une grandeur qu'il appelle Ableitungsrösse (valeur de déduction) et dont il dit qu'elle est proportionnelle à la surface de l'armature de la batterie, mais sans s'expliquer davantage sur sa signification et sur la raison de cette proportionnalité.

3) *Ann. de Pogg.*, t. LXXX, p. 214.

différents nombres de bouteilles, et observait chaque fois l'échauffement soit dans l'un, soit dans les deux circuits. Les bouteilles de chaque batterie étaient naturellement égales entre elles, mais malheureusement les bouteilles de l'une n'étaient pas égales à celles de l'autre. Il trouve comme résultat de ses expériences que « la formule suivante représente parfaitement les échauffements observés à un endroit constant du circuit tant intérieur qu'extérieur » ¹⁾.

$$(22) \quad C = \frac{aQ^2}{\left(\frac{n}{n'} + \frac{s}{s'}\right)ns}$$

J'ai seulement un peu changé les lettres de cette formule pour pouvoir la comparer plus aisément avec les miennes. C y représente la chaleur observée; Q la quantité d'électricité employée; s la superficie de l'armature intérieure d'une bouteille de la première batterie, et n le nombre de ses bouteilles; s' et n' les quantités analogues pour la seconde batterie, et enfin a une constante qui devait être prise un peu plus grande pour le circuit intérieur que pour l'extérieur, ce qui s'explique par ce fait qu'il se trouvait un peu plus d'électricité sur l'armature intérieure que sur l'extérieure.

Comparons maintenant cet échauffement à l'accroissement du potentiel.

L'équation (18) donne l'expression suivante pour le potentiel de la première batterie avant la décharge, en désignant par Q la quantité d'électricité, et remplaçant la superficie totale S par sa valeur ns :

$$(23) \quad W = - \frac{Q^2}{ns}, \frac{k}{2}.$$

Pour déterminer maintenant de quelle manière la quantité totale d'électricité Q se répand sur les deux batteries par la décharge, on sait que sur les armatures reliées entre elles, la

1) *Ann. de Pogg.*, p. 217.

fonction potentielle doit avoir des valeurs égales. Soient après la décharge V_1 et V_1' les valeurs de la fonction potentielle sur les armatures intérieures; Q_1 et Q_1' les quantités d'électricité cherchées qui sont répandues sur elles; on aura d'après (17) :

$$V_1 = -\frac{Q_1}{ns}k$$

$$V_1' = -\frac{Q_1'}{n's'}k',$$

où k' représente pour les bouteilles de la seconde batterie la même quantité que k pour celles de la première. En égalant entre elles ces deux expressions, et observant que :

$$Q_1 + Q_1' = Q$$

on aura :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \frac{\frac{ns}{k}}{\frac{ns}{k} + \frac{n's'}{k'}} Q \\ Q_1' = \frac{\frac{n's'}{k'}}{\frac{ns}{k} + \frac{n's'}{k'}} Q \end{array} \right.$$

On déduira de là en représentant par W_1 le potentiel total des deux batteries après la décharge :

$$(25) \quad W_1 = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_1' V_1') = -\frac{\frac{1}{2} Q^2}{\frac{ns}{k} + \frac{n's'}{k'}}$$

et l'on obtiendra ainsi pour l'accroissement du potentiel :

$$(26) \quad W_1 - W = \frac{\frac{1}{2} \frac{k^2 s'}{k s} Q^2}{\left(\frac{n}{n'} + \frac{k s'}{k' s}\right) ns}$$

La quantité $\frac{1}{2} \frac{k^2 s'}{k' s}$ est constante pour toute la série des expériences et l'on peut donc écrire :

$$(27) \quad W_1 - W = \frac{AQ^2}{\left(\frac{n}{n'} + \frac{k s'}{k' s}\right) ns}$$

Si l'on compare cette expression avec celle (22) que Riess a donnée pour l'échauffement, on voit que, pour les rendre proportionnelles entre elles, il suffit d'admettre que pour les bouteilles des deux batteries, quoiqu'elles ne fussent pas égales, les quantités k et k' avaient à peu près les mêmes valeurs; on est d'autant plus fondé à l'admettre que Riess déclare sur bas¹⁾ avoir trouvé par des mesures directes qu'en faisant communiquer les deux batteries, l'électricité se répandait dans le rapport de leurs surfaces, ce qui ne pouvait avoir lieu d'après les équations (24) que si k était égal à k' ²⁾.

1) *Loc. cit.*, p. 220.

2) Comme les quantités k et k' dépendent surtout, d'après ce qui précède, des épaisseurs de verre des deux batteries, il m'a paru intéressant de connaître ces épaisseurs, et pendant l'impression de ce travail j'ai prié M. Riess de vouloir bien les mesurer; il a eu la bonté de me faire la communication suivante. Dans les petites bouteilles (celles de la seconde batterie) l'épaisseur varie considérablement, et est en moyenne de $1\frac{1}{2}$ ligne de Paris. Les grandes bouteilles (celles de la première batterie) n'ont pu être mesurées parce qu'elles sont fermées par le haut; mais il en a mesuré deux de la même espèce qu'on avait fabriquées en surcroît en même temps que celles qui étaient en usage; l'épaisseur du verre y est à peu près uniforme et égale à $1\frac{1}{3}$ ligne.

Comme on ne peut pas attendre une égalité absolue des épaisseurs de verre dans les circonstances que mentionne M. Riess, et qu'elle n'est du reste pas nécessairement exigée pour l'égalité supposée de k et de k' , qui dépendent en outre, quoiqu'à un degré moindre, de la forme et de la grandeur des bouteilles qui sont différentes dans les deux batteries, je crois qu'on peut regarder comme satisfaisante la concordance des nombres $1\frac{1}{2}$ et $1\frac{1}{3}$.

Riess a varié également ses expériences en allongeant le circuit, et il a observé le décroissement de chaleur qui se produisait à un endroit déterminé. Les résultats de ces expériences concordent en général avec ceux que nous avons donnés plus haut, et nous ne nous y arrêterons pas, non plus qu'à quelques autres expériences mentionnées dans le même travail.

Relativement à la batterie à cascade, nous possédons des expériences de mesure de Dove ¹⁾ et de Riess ²⁾. On sait qu'elle consiste en un certain nombre de bouteilles ou de batteries, qui sont isolées et ensuite réunies entre elles de telle sorte que l'armature extérieure de la première est en communication conductrice avec l'intérieure de la seconde, l'extérieur de celle-ci avec l'intérieur de la troisième, et ainsi de suite. L'armature intérieure de la première batterie et l'armature extérieure de la dernière sont libres, et sont traitées pendant la charge comme celles d'une batterie unique.

Les principes d'après lesquels on doit déterminer la charge d'une batterie ainsi composée ont déjà été donnés quant au fond par Green ³⁾. Désignons les quantités d'électricité qui se trouvent sur les deux armatures des différentes batteries, ainsi que les valeurs correspondantes de la fonction potentielle, suivant leur ordre respectif, par :

$$(28) \quad \begin{cases} Q_1, Q_1'; Q_2, Q_2'; Q_3, Q_3'; \text{ etc.} \\ V_1, V_1'; V_2, V_2'; V_3, V_3'; \text{ etc.} \end{cases}$$

Puisque, quand de l'électricité positive est transmise par un conducteur à l'armature intérieure de la première batterie, l'armature extérieure de celle-ci ne peut recevoir d'électricité négative que de l'armature intérieure de la seconde qui se trouve ainsi chargée positivement, on aura :

$$Q_1' = -Q_2;$$

1) *Ann. de Pogg.*, t. LXXII, p. 406.

2) *Ibid.*, t. LXXX, p. 349.

3) *An Essay on the Application of math. Analysis to the theories of Electr. and Magn.*, art. 8.

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE. 75

comme en outre, dans deux corps reliés par un conducteur la fonction potentielle doit avoir des valeurs égales, on a pour ces mêmes armatures :

$$V_1' = V_2;$$

pour tout autre couple de deux armatures reliées, on aura deux équations analogues, ce qui donnera la série d'équations suivantes :

$$(29) \quad \begin{cases} Q_1' = -Q_2; Q_2' = -Q_3; Q_3' = -Q_4; \text{ etc.} \\ V_1' = V_2; V_2' = V_3; V_3' = V_4; \text{ etc.} \end{cases}$$

En outre, pour chacune des batteries les quatre quantités Q, Q', V et V' sont telles que deux d'entre elles sont déterminées en fonction des deux autres. En effet, d'après les remarques qui se trouvent à la fin de mon précédent Mémoire ¹⁾, si l'on représente ces quatre quantités pour une seule bouteille par q, q', V et V' , l'équation (15) que nous avons posée pour le cas particulier où $V' = 0$, peut se transformer en l'équation plus générale qui suit, en y négligeant les termes d'ordre supérieur par rapport à k :

$$(30) \quad V - V' = -\frac{k}{s} \cdot \frac{q - q'}{2},$$

où l'on peut aussi écrire q ou $-q'$ au lieu de $\frac{q - q'}{2}$.

En outre on a en général l'équation :

$$(31) \quad q + q' = -(\alpha V + \beta V'),$$

où α et β désignent deux constantes positives qui dépendent comme k de la nature de la bouteille, et qui ont par conséquent partout la même valeur dans le cas actuel, puisque nous n'avons affaire qu'à des bouteilles égales. Pour une batterie de n bouteilles et de quantités d'électricité Q et Q' , ces deux équations deviennent :

1) [*Ann. de Pogg.*, t. LXXXVI, p. 204.]

$$(32) \quad V - V' = -\frac{k}{ns} \cdot \frac{Q - Q'}{2};$$

$$(33) \quad Q + Q' = -n(\alpha V + \beta V').$$

En combinant ces équations avec les équations (29), on pourra, connaissant deux des quantités (28), déterminer toutes les autres.

Les expériences de Dove, de même que celles de Riess, se composent de deux séries différentes. Dans la première le nombre des bouteilles était le même dans toutes les batteries reliées entre elles, mais le nombre de ces dernières variait; dans la seconde série le nombre des batteries employées était toujours de deux, mais le nombre des bouteilles variait dans chacune

1) [Si l'on remplace dans les équations (49) de l'Introduction (p. 37) M et N par q et q' et F et G par V et V', elles s'écrivent :

$$(a) \quad \begin{cases} q = \frac{s}{k} (V' - V) - \alpha V', \\ q' = \left(\frac{s}{k} - \alpha\right) (V - V') - \beta V'. \end{cases}$$

De là résulte :

$$(b) \quad \begin{cases} q - q' = -\frac{2s}{k} (V - V') + \alpha V - (2\alpha - \beta) V', \\ q + q' = -(\alpha V + \beta V'). \end{cases}$$

La seconde de ces équations est l'équation (31) du texte. La première ne se distingue de l'équation (30) que par les termes αV et $(2\alpha - \beta) V'$, qui sont par rapport à k d'un ordre supérieur à celui du terme $\frac{2s}{k}(V - V')$.

Pour une batterie de n bouteilles, on a les équations suivantes, analogues aux équations (a) :

$$(c) \quad \begin{cases} Q = n \frac{s}{k} (V' - V) - n\alpha V', \\ Q' = n \left(\frac{s}{k} - \alpha\right) (V - V') - n\beta V'; \end{cases}$$

on peut les employer au lieu des équations (32) et (33) du texte, si l'on ne veut point négliger les termes d'ordre supérieur relativement à k , 1866.]

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE. 77

de ces batteries; les deux séries offrent quelques difficultés dans leur comparaison avec la théorie, mais ces difficultés sont moindres dans la seconde que dans la première: c'est donc par celle-là que nous commencerons.

Les expériences ont été disposées de telle sorte que les deux batteries étaient isolées, et que l'armature intérieure de la première communiquait avec la machine électrique, l'armature extérieure de la seconde avec une bouteille de mesure de Lane*. De cette manière, la quantité d'électricité de la seconde armature extérieure était donnée par le nombre des étincelles de la bouteille de mesure; et en même temps on peut faire nulle la fonction potentielle sur cette armature, après que la dernière étincelle a jailli, puisqu'on ne néglige ainsi que la fonction potentielle de la quantité d'électricité qui reste dans la bouteille de mesure après chaque décharge.

Nous connaissons donc, comme nous l'avons dit plus haut, deux des quantités (28); et, pour en déduire les autres, nous pouvons successivement passer de la seconde armature extérieure à la seconde intérieure, puis à la première extérieure, et enfin à la première intérieure. Si l'on désigne par Q la quantité d'électricité déterminée au moyen de la bouteille de mesure; par n_1 et n_2 les nombres des bouteilles des deux batteries; et si l'on néglige tous les termes d'ordre supérieur au premier par rapport à k , on obtiendra de cette manière la série d'expressions suivantes :

$$(34) \quad \begin{cases} Q_2' = -Q & V_2' = 0; \\ Q_2 = \left(1 + \alpha \frac{k}{s}\right) Q & V_2 = -\frac{k}{n_2 s} Q; \\ Q_1' = -\left(1 + \alpha \frac{k}{s}\right) Q & V_1' = -\frac{k}{n_2 s} Q; \\ Q_1 = \left\{1 + \left[2\alpha + (\alpha + \beta) \frac{n_1}{n_2} \frac{k}{s}\right]\right\} Q; & V_1 = -\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \frac{k}{s} Q'. \end{cases}$$

* Nous traduisons littéralement cette expression à défaut d'un terme technique. On sait du reste que c'est la bouteille qui sert à mesurer la distance explosive. (Note du trad.)

1) [Si au lieu de s'arrêter à un terme dans les valeurs de la fonc-

Or, le potentiel de toute la batterie composée est :

$$(35) \quad W = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_1' V_1' + Q_2 V_2 + Q_2' V_2'),$$

ce qui devient :

$$(36) \quad W = - \left\{ 1 + \left[2\alpha + (\alpha + \beta) \frac{n_1}{n_2} \right] \frac{k}{s} \right\} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{k}{2s} Q^2,$$

ou, en négligeant le terme du second ordre relativement à k :

$$(37) \quad W = - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{k}{2s} Q^2.$$

Comme le potentiel est nul après la décharge, — W sera l'accroissement du potentiel qui a lieu par la décharge ; et si nous admettons comme précédemment que dans des circonstances semblables, l'échauffement en un point déterminé du circuit est proportionnel à l'effet total, nous pourrons écrire :

tion potentielle, on en développe les deux premiers, en se servant des équations (c) de la note précédente, on obtiendra les expressions :

$$V_2' = 0;$$

$$V_2 = - \left(1 + \alpha \frac{k}{s} \right) \frac{k}{n_2 s} Q;$$

$$V_1' = - \left(1 + \alpha \frac{k}{s} \right) \frac{k}{n_2 s} Q;$$

$$V_1 = - \left\{ 1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \left[2\alpha + (\alpha + \beta) \frac{n_1}{n_2} \right] \frac{k}{s} \right\} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{k}{s} Q.$$

1866.]

1) [On doit remplacer cette équation par celle que l'on obtient en substituant à V_1 au lieu de l'expression (34) donnée dans le texte, l'expression plus complète donnée dans la note précédente. On aura ainsi l'équation plus exacte :

$$W = - \left\{ 1 + \frac{n_1 + 2n_2}{n_1 + n_2} \left[2\alpha + (\alpha + \beta) \frac{n_1}{n_2} \right] \frac{k}{s} \right\} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{k}{2s} Q^2.$$

Ce changement n'a pas d'influence sur les équations suivantes dans lesquelles on ne tient compte que du terme du premier ordre relativement à k . 1866.]

$$(38) \quad C = A \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{Q^2}{2s},$$

où C désigne la chaleur produite, et A une constante.

Si nous comparons cette formule avec les résultats de l'expérience, nous verrons d'abord qu'ici, comme dans tous les autres cas, la proportionnalité de la chaleur produite au carré de la quantité d'électricité employée, se trouve confirmée. Mais quant à la dépendance qui existe entre cette chaleur et les nombres n_1 et n_2 des bouteilles, Dove donne une autre formule. Si nous désignons par S_1 et S_2 les surfaces totales des armatures des deux batteries, à savoir $n_1 s$ et $n_2 s$, l'équation (38) devient :

$$(39) \quad C = A \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) \frac{Q^2}{2},$$

au lieu de laquelle Dove donne la formule :

$$(40) \quad C = A \frac{Q^2}{\sqrt{S_1 S_2}}.$$

Les résultats de ses expériences concordent fort bien avec sa formule, tandis que ceux que Riess a établis postérieurement concordent mieux avec la mienne, comme le montrent les tableaux suivants.

Les deux expérimentateurs²⁾ ont d'abord laissé n_2 constant, et fait varier n_1 successivement de telle sorte que

$$n_1 = n_2, = 2n_2, = 3n_2 \text{ et } = 4n_2;$$

ensuite ils ont laissé n_1 constant et fait varier successivement n_2 de sorte que

$$n_2 = n_1, = 2n_1, = 3n_1 \text{ et } = 4n_1.$$

Afin de pouvoir mieux comparer les résultats, j'ai pris pour unité dans les deux cas l'échauffement observé dans la première expérience où n_1 était égal à n_2 , et j'y ai réduit les autres échauffements. J'ai pris la moyenne des deux valeurs

1) *Ann. de Pogg.*, t. LXXII, p. 419.

2) *Ibid.*, t. LXXII, p. 417, et t. LXXX, p. 356.

que Riess donne comme résultats de chacune de ses expériences.

(I.) n_1 VARIABLE, n_2 CONSTANT.

n_1	ÉCHAUFFEMENTS			
	CALCULÉS D'APRÈS		OBSERVÉS PAR	
	LA FORMULE DE DOVE.	LA FORMULE 59.	DOVE.	RIESS.
n_2	1	1	1	1
2 n_2	0,71	0,75	0,72	0,76
3 n_2	0,58	0,67	0,59	0,69
4 n_2	0,50	0,63	0,51	0,66

(II.) n_2 VARIABLE, n_1 CONSTANT.

n_2	ÉCHAUFFEMENTS			
	CALCULÉS D'APRÈS		OBSERVÉS PAR	
	LA FORMULE DE DOVE.	LA FORMULE 59.	DOVE.	RIESS.
n_1	1	1	1	1
2 n_1	0,71	0,75	0,71	0,78
3 n_1	0,58	0,67	0,60	0,72
4 n_1	0,50	0,63	0,50	0,68

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE. 81

On voit que, dans le premier tableau, il y a une concordance satisfaisante entre les nombres de la troisième et de la cinquième colonne. Dans le second tableau, les différences sont à la vérité plus considérables; mais si l'on réfléchit combien il serait difficile de réaliser complètement les conditions supposées dans la formule théorique, surtout celle d'une isolation parfaite, et qu'en outre, dans ce cas même, la formule n'est qu'approximativement exacte, on trouvera que ces différences ne sont pas telles qu'elles doivent faire rejeter la théorie; il faut encore remarquer que tous les nombres de la cinquième colonne sont plus grands que les résultats de ma formule, tandis que, pour s'approcher de ceux de la formule de Dove, ils devraient être plus petits.

La première des séries d'expériences mentionnées plus haut se prête moins à une comparaison exacte avec la théorie. Dans cette série on a employé, comme éléments, trois ou quatre batteries ou bouteilles égales qui, dans la charge, étaient toujours réunies en une batterie à cascade. La décharge, au contraire, se faisait soit par la première seule, soit par la première et la seconde, et ainsi de suite, et l'on observait chaque fois l'échauffement dans le circuit.

Ici se présentent quelques inconvénients dont les expériences antérieures n'étaient pas tout à fait dépourvues, mais qui ne pouvaient pas y exercer une influence aussi considérable. L'un de ceux qui méritent une mention plus particulière consiste en ce que chaque batterie nouvelle, ajoutée pour la décharge, allonge aussi le circuit. En effet, dans la première série d'expériences, lorsqu'on augmentait le nombre des bouteilles d'une batterie, les nouvelles bouteilles étaient introduites à côté des autres; et si le système de corps soumis à l'action de l'électricité était augmenté de ces bouteilles et de leurs fils conducteurs, cette augmentation ne devait pas compter toutefois comme un *allongement* du circuit lui-même; c'est pourquoi j'ai négligé plus haut cette circonstance, de même que la circonstance analogue qui s'est présentée antérieurement dans l'accroissement du nombre des bouteilles d'une seule batterie. Dans la série d'expériences actuelle, au con-

traire, chaque batterie ajoutée est placée à la suite des autres, de sorte que son fil conducteur et ses deux armatures font alors partie intégrante du circuit.

De là résulte que l'hypothèse que nous avons faite dans le cas d'un circuit *constant*, à savoir, que la production de chaleur en un lieu déterminé est proportionnel à l'effet total, ne peut plus être admise dans le cas où cet effet est augmenté par l'accroissement des éléments d'une batterie à cascade, mais que, dans ce cas, le rapport des productions de chaleur observées doit être un peu moindre. Or, comme les équations précédentes font voir que l'effet total, ou l'accroissement du potentiel, si l'on y néglige les termes d'ordre supérieur au premier, relativement à k , est proportionnel au nombre des éléments déchargés simultanément ¹⁾, on devra s'attendre à

1) [Si, dans la détermination des quantités d'électricité qui se trouvent sur les armatures, on s'arrête au premier terme qui renferme la plus faible puissance de k , on pourra regarder comme égales et désigner les quantités d'électricité qui se trouvent sur les deux armatures de chacune des batteries qui forment les éléments de la batterie à cascade. Il en résultera en outre, en tenant compte des équations (29), que toutes les quantités d'électricité qui se trouvent sur les armatures de ces batteries doivent être regardées comme égales et alternativement contraires, et pourront par suite se représenter toutes par $\pm Q$. Pour ce qui regarde les niveaux potentiels des différentes armatures, on peut, si l'on se borne au premier terme, les exprimer également d'une manière très-simple dans le cas actuel où toutes les batteries sont égales. Si l'on représente par S la surface totale d'une armature, on obtiendra en commençant par la dernière armature extérieure, la série des valeurs suivantes :

$$0, \quad -\frac{Q}{S}k; \quad -\frac{Q}{S}k, \quad -2\frac{Q}{S}k; \quad -2\frac{Q}{S}k, \quad -3\frac{Q}{S}k; \text{etc.}$$

Pour former le potentiel de la batterie à cascade chargée, on pourra d'abord former le potentiel séparément pour chacune des batteries réunies; on multipliera à cet effet les quantités d'électricité qui se trouvent sur leurs deux armatures par les niveaux potentiels correspondants, on ajoutera les deux produits et on divisera la somme par 2.

On obtiendra ainsi pour toutes les batteries la valeur commune $-\frac{Q^2 k}{S^2}$.

Or, comme le potentiel total de plusieurs batteries réunies en cascade

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE. 83

ce que, quand le nombre des éléments augmentera progressivement, les indications d'un thermomètre électrique qui se trouve dans le circuit restent un peu en dessous des nombres entiers consécutifs.

Cette différence ne se manifeste pas, à la vérité, dans les expériences de Dove ¹⁾, puisque, avec quatre batteries, il trouve précisément les nombres 1, 2, 3 et 4 pour les échauffements. Les expériences de Riess, au contraire ²⁾, manifestent un écart assez notable, puisque pour quatre batteries, les nombres, au lieu de croître de 1 à 4, ne vont jamais que de 1 à 3, et pour trois batteries de 1 à 2,5 seulement, au lieu de croître de 1 à 3. On ne peut naturellement pas énoncer de loi déterminée relativement à cette série de nombres, puisqu'elle doit dépendre de la constitution des batteries employées, ainsi que de celle des conducteurs qui les relient entre elles.

L'exactitude de l'hypothèse faite précédemment que chaque liaison entre deux éléments doit être considérée comme une partie intégrante du circuit, se vérifie du reste encore spécialement en ce que, d'après les observations des deux physiiciens, l'échauffement a lieu dans ces fils intermédiaires, à peu près comme dans le circuit principal, et en ce que l'introduction d'un mauvais conducteur dans l'une de ces liaisons diminue l'échauffement en un point quelconque du circuit principal, presque autant que si ce conducteur était introduit dans celui-ci même.

Dove paraît avoir interprété autrement que nous ne l'avons

est égal à la somme des potentiels des batteries séparées, suivant que la batterie employée se composera de 1, 2, 3, etc., éléments, son potentiel aura les valeurs suivantes :

$$-\frac{Q^2 k}{S^2}; \quad -2\frac{Q^2 k}{S^2}; \quad -3\frac{Q^2 k}{S^2}; \text{etc.}$$

Après la décharge le potentiel est égal à zéro, et l'accroissement du potentiel sera donc, comme il a été dit dans le texte, proportionnel au nombre des éléments. 1866.]

1) *Ann. de Pogg.*, t. LXXII, p. 408.

2) *Id.*, t. LXXX, p. 351.

fait, la circonstance que, dans les quatre fils conducteurs qui relient entre elles quatre batteries, on peut observer une plus grande production de chaleur que dans le fil conducteur d'une seule batterie. Après avoir dit que, pour quatre batteries, il a trouvé une distance explosive seize fois plus grande que pour une seule, mais que, si l'on interrompait simultanément dans deux fils conducteurs la liaison des batteries, la somme des deux distances explosives était encore plus faible que celle qui résultait d'une seule interruption dans l'un des fils, il ajoute¹⁾ : « Tandis que la production de chaleur, dans une batterie composée, est quadruple dans chacun des quatre fils conducteurs, la distance explosive, seize fois plus grande, n'est donc relative qu'à la totalité des fils qui constituent le circuit en un tout. » Ceci paraît signifier au fond que, dans les quatre fils ensemble, il se produit une chaleur seize fois plus grande. Cette idée est exprimée d'une manière encore plus claire, quoique sans chiffres déterminés, dans un autre passage où il rapporte que, par la décharge d'une batterie à cascade, on fond des fils d'autant plus longs que l'on a pris plus d'éléments pour la décharge. Il conclut, en effet, en ces termes²⁾ : Comme le nombre des fils intermédiaires croît avec celui des batteries combinées, on pourra, avec quatre batteries, fondre simultanément quatre longueurs de fils qui, prises séparément, sont plus grandes que celle qu'on peut fondre avec une seule batterie. »

Qu'en s'exprimant ainsi, Dove ait réellement eu ou non cette idée, toujours est-il qu'elle peut aisément naître chez ses lecteurs ; et comme, si elle était exacte, elle contredirait la théorie précédente, je crois devoir dire quelques mots à ce sujet.

La production de chaleur totale ne peut pas être plus grande que l'accroissement du potentiel qui a lieu par la décharge, et celui-ci est, comme nous l'avons déjà dit, environ quatre fois et non seize fois plus grand pour quatre batteries que pour

1) *Ann. de Pogg.*, t. LXXII, p. 415.

2) *Ibid.*, p. 412.

une seule. Or, si l'on introduit successivement, dans chacun des quatre fils conducteurs, un thermomètre électrique dont le fil a une grande longueur réduite, on observera, à la vérité, chaque fois une production de chaleur, qui, dans des circonstances favorables, sera à peu près quadruple de celle que produirait une seule batterie. Mais ceci n'aura plus lieu si l'on introduit simultanément de semblables thermomètres dans les quatre fils conducteurs, puisque l'effet total, qui était précédemment concentré en grande partie dans un seul thermomètre se répartit sur tous les quatre. C'est ce qui résulte, au reste, immédiatement de la remarque faite plus haut, qu'un mauvais conducteur, introduit dans l'une des liaisons, diminue aussi la production de chaleur dans les autres. D'après cela, lorsque l'on introduit simultanément quatre thermomètres, l'échauffement, dans chacun d'eux, doit être beaucoup moindre que s'il était seul, puisque les trois autres affaiblissent l'effet du courant par leur défaut de conductibilité ; il en sera de même naturellement de quatre fils que l'on introduit pour les faire fondre.

En jetant un coup d'œil d'ensemble sur le résultat de toutes les expériences faites jusqu'à présent, nous verrons que la plupart des cas sont, en général, trop compliqués pour se prêter à une comparaison rigoureuse avec la théorie ; mais pour autant que cette comparaison fût possible, elle a toujours été à l'avantage du théorème fondamental, et je ne connais aucun fait expérimental bien établi qui le contredise. Je pense donc que l'on peut regarder ce théorème comme confirmé par l'expérience, si tant est que cette confirmation soit encore nécessaire à côté de son fondement théorique.

ADDITION AU MÉMOIRE X (1866).

SUR LE CHANGEMENT D'ÉTAT INTÉRIEUR QUI A LIEU PENDANT LA CHARGE DANS LA COUCHE ISOLANTE D'UN CARREAU DE FRANKLIN OU D'UNE BOUTEILLE DE LEYDE, ET SUR L'INFLUENCE DE CE CHANGEMENT SUR LES PHÉNOMÈNES DE LA DÉCHARGE.

Dans le Mémoire précédent nous avons considéré la couche de verre, qui sépare l'une de l'autre les deux armatures d'une bouteille de Leyde, tout simplement comme une couche parfaitement isolante ; c'est-à-dire que nous avons admis que son état électrique ne varie pas par l'action de l'électricité qui se trouve sur les armatures, et par suite, qu'elle ne peut exercer aucune réaction électrique. Mais on doit conclure du phénomène connu de la formation du résidu, que cette hypothèse n'est pas entièrement remplie, mais que la couche isolante éprouve dans son intérieur un changement en vertu duquel il devient capable d'exercer un effet électrique particulier sur les armatures. C'est cet effet que nous nous proposons d'étudier ici, afin de voir quels sont les changements qu'il peut rendre nécessaires dans les formules précédentes.

Dans cette étude, je nommerai simplement, pour plus de concision, la couche isolante couche de *verre* ; mais il faut remarquer que les résultats ne seront pas applicables au verre seulement, mais aussi à toutes les matières isolantes.

On n'est pas encore d'accord sur la nature du changement d'état du verre. Les uns admettent qu'il consiste en ce que l'électricité pénètre peu à peu des armatures dans le verre. Les autres pensent que l'électricité qui se trouve sur les armatures n'agit que par influence sur l'intérieur du verre, et y produit un état de polarité qui peut réagir sur les armatures.

Mais on peut encore se représenter de différentes manières la production de cette polarité. D'abord, on peut s'imaginer que le verre, quoique non conducteur, renferme cependant de petits corpuscules qui

sont doués de quelque conductibilité. Il se produit dans ces corpuscules une décomposition par influence des deux électricités, de sorte qu'ils se chargent d'électricité négative du côté de l'armature électrisée positivement et d'électricité positive du côté de l'autre armature. Pour déterminer l'état électrique que prendrait un tel corpuscule conducteur, on ne doit pas seulement prendre en considération l'effet immédiat de l'électricité qui se trouve sur les armatures, mais encore l'effet que les autres corpuscules, qui ont également acquis une polarité électrique, exercent sur le premier.

En second lieu, on peut imaginer que ces corpuscules aient déjà une polarité électrique dans l'état naturel du verre, avant qu'il subisse une action électrique extérieure, mais que la disposition de ces particules soit tout à fait irrégulière, de sorte que les pôles positifs et négatifs soient dirigés également dans tous les sens, et que, par suite, ces particules ne puissent pas produire un effet commun dans un sens déterminé. Mais si le verre se trouve soumis à une force électrique, ces particules se dirigeront de telle sorte que les pôles positifs se tournent d'une manière prédominante d'un côté et les pôles négatifs de l'autre, ce qui rend naturellement possible une action commune. Cette direction régulière des particules sera d'autant plus complète et plus générale que la force électrique qui agit sera plus considérable.

Relativement aux forces qui agissent dans ce dernier cas, c'est-à-dire qui entrent en action lorsque les particules douées de polarité électrique, et d'abord disposées irrégulièrement, acquièrent une disposition régulière, on peut de nouveau faire deux hypothèses différentes. On peut admettre que la cohésion retient ces particules dans leur position primitive, de telle sorte qu'il naisse de la rotation d'une particule une réaction élastique qui cherche à la remettre dans sa position primitive, et que cette réaction, comme les autres forces élastiques, croît avec la grandeur de la rotation. Ou bien, on peut admettre que la résistance que la cohésion oppose à la rotation des particules n'est qu'une résistance passive de la nature d'un frottement considérable, de sorte qu'il n'en résulte aucune force qui tende à faire reprendre aux particules leur position primitive. Dans ce cas, la seule force qui tende à produire cet effet, résulterait de l'action électrique mutuelle des particules douées de polarité électrique et orientées.

Kohlrausch et von Bezold ont récemment exprimé leur opinion sur la question fondamentale, à savoir, si le résidu provient de ce que l'électricité qui se trouve sur les armatures a pénétré en partie dans le

Von Bezold qui, à côté d'autres travaux très-remarquables sur l'électricité, a aussi repris après Kohlrausch la question de la formation du résidu ¹⁾, arrive à une conclusion opposée : il trouve que le résidu doit s'expliquer par une pénétration réelle dans le verre de l'électricité qui se trouvait primitivement sur les armatures.

Mais je dois avouer que ses conclusions ne m'ont pas convaincu. Surtout il me semble qu'il a glissé un peu rapidement sur la question la plus importante, à savoir, si la formation d'un résidu qui reparait après quelque temps et forme une charge semblable à la charge primitive, mais seulement d'intensité moindre, peut s'expliquer par la pénétration de l'électricité. Il dit à ce sujet ²⁾ :

« Après que la décharge a eu lieu, on n'est pas obligé d'admettre que les particules du verre, au moyen d'une force répulsive qui leur est propre, expulsent de nouveau les deux électricités ; il suffit que l'on imagine que les quantités d'électricité de sens contraires répandues sur les plateaux, et qui ont été employées à rendre la valeur potentielle nulle, pénètrent de nouveau d'après la même loi, de sorte que l'on trouverait pour la reconstitution d'une charge les mêmes formules qui résultent de l'autre hypothèse. »

Je ne puis m'associer à cette manière de voir, et je pense qu'on ne peut pas expliquer par la pénétration de l'électricité la production d'une charge de même nature, qui a lieu d'elle-même après la décharge.

Imaginons que le carreau de Franklin, avec ses armatures A et B, soit chargé primitivement des quantités d'électricité $+Q$ et $-Q$, et que certaines parties de celle-ci aient pénétré après quelque temps dans le verre supposé un peu conducteur. Faisons passer par le milieu de la couche de verre un plan parallèle aux armatures, qui partagera la couche en deux parties égales ; toute l'électricité positive qui a pénétré et qui ne s'est pas combinée avec de l'électricité négative qui a pénétré en sens contraire, se trouvera dans la moitié tournée vers A, et toute l'électricité négative dans la moitié tournée vers B. Soient $+q$ et $-q$ ces quantités d'électricité encore décomposées qui se trouvent dans les deux moitiés du verre.

Si les deux armatures sont réunies pour un instant par un conducteur, de sorte que leurs niveaux potentiels deviennent nuls, tandis que les électricités qui se trouvent dans le verre ne varient pas de posi-

1) *Ann. de Pogg.*, t. CXIV, p. 404, et t. CXXV, p. 132.

2) *Id.*, t. CXIV, p. 425.

tion d'une manière sensible, il faudra que l'armature A, dans le voisinage de laquelle se trouve l'électricité positive intérieure, se charge d'un peu d'électricité négative, et que l'armature B, dans le voisinage de laquelle se trouve l'électricité négative intérieure, se charge d'un peu d'électricité positive. Soient $-q_1$ et $+q_1$ ces deux quantités d'électricité, qui chargent actuellement A et B, et qui sont évidemment plus petites en grandeur absolue que les quantités d'électricité intérieures.

Si le carreau de Franklin est abandonné à lui-même après la décharge, il y aura de nouveau des mouvements d'électricité dans le verre ; chaque particule d'électricité se mouvra dans la direction de la résultante de toutes les forces électriques pour le lieu qu'occupe cette particule. Si nous considérons la quantité d'électricité $+q$ qui se trouve dans la moitié de la couche tournée du côté de A, une partie de cette quantité d'électricité va également se mouvoir encore vers l'intérieur, en obéissant à l'attraction qu'exerce sur elle l'électricité qui se trouve dans l'autre moitié de la couche. Une autre partie au contraire obéira à l'attraction qu'exerce sur elle la quantité d'électricité $-q_1$ qui se trouve actuellement sur l'armature A, et se dirigera par suite vers l'extérieur. La quantité d'électricité $-q$ qui se trouve dans l'autre moitié se comportera de la même manière. De cette manière des électricités contraires se recombineront peu à peu, aussi bien au milieu de la couche que dans le voisinage des armatures, et l'état du carreau de Franklin s'approchera de plus en plus de l'état neutre parfait.

Mais je ne puis concevoir comment dans ces circonstances l'armature A, sur laquelle se trouvait immédiatement après la décharge de l'électricité négative, va se charger postérieurement d'électricité positive (ce que l'on devrait cependant admettre pour l'explication du résidu).

Je ne nie pas, le moins du monde qu'il ne puisse y avoir pénétration de l'électricité dans le verre, mais je ne pense pas que l'on puisse par là expliquer la formation du résidu. Il me semble bien plutôt que cette pénétration, si elle a lieu, doit avoir le même résultat que les pertes d'électricité occasionnées par d'autres défauts d'isolation, c'est-à-dire un affaiblissement graduel de la charge disponible, sans compensation postérieure.

Il faut remarquer aussi que les mesures effectuées par von Bezold se rapportent plutôt au décroissement graduel de la charge disponible qu'à la formation du résidu.

Relativement à celle-ci je regarde donc comme exacte la manière de

voir de Kohlrausch, du moins dans sa forme la plus générale. Sous cette forme elle peut s'exprimer de la manière suivante. Par l'influence des quantités d'électricité qui se trouvent sur les armatures, il se produit dans l'intérieur du verre un certain changement d'état, en vertu duquel la différence de niveau potentiel des armatures décroît, de sorte qu'au moment de la décharge une partie des quantités d'électricité qui se trouvent sur les armatures y est retenue. Après la décharge cette modification intérieure est de nouveau partiellement anéantie, et la plus grande partie des quantités d'électricité retenues auparavant sur les armatures redevient libre; il se présente de nouveau une différence de niveau potentiel de même nature que la première, ce qui rend possible une décharge nouvelle, mais beaucoup plus faible. Celle-ci peut, pour la même raison, être suivie d'une troisième, et ainsi de suite.

Les données d'observation dont on dispose ne me paraissent ni assez complètes ni assez sûres pour établir sur elles une théorie tout à fait spéciale du changement d'état qui a lieu dans l'intérieur du verre. Cependant, je crois qu'il ne sera pas sans intérêt d'essayer, en admettant une hypothèse déterminée, de montrer par le calcul quelle sera la nature de l'influence que la formation du résidu peut exercer sur les résultats du Mémoire qui précède.

J'admettrai donc l'hypothèse qu'il existe à l'intérieur du verre des corpuscules qui sont un peu conducteurs, mais qui sont séparés l'un de l'autre par des intervalles non conducteurs, de sorte que l'électricité ne peut que se mouvoir à l'intérieur de ces corpuscules et non passer de l'un à l'autre.

Nous avons mentionné plus haut l'hypothèse que les particules du verre ont d'avance une polarité électrique, et sont simplement orientées par la force qui provient des armatures. Si l'on admet en outre que le déplacement d'une particule de sa position primitive fasse naître une réaction élastique qui tende à faire reprendre à la particule sa première position; et si, de plus, on suppose que la polarité du verre provenant de l'orientation des particules, ainsi que la réaction élastique qu'elle occasionne soient proportionnelles à la force qui provient des armatures, les résultats de la première hypothèse pourront s'étendre également à la seconde.

Dans cette seconde hypothèse on peut, au contraire, admettre que la résistance que la cohésion oppose à la rotation des particules, est simplement de même espèce qu'un frottement considérable, de sorte qu'elle ne provoque aucune réaction qui tende à les faire tourner en sens contraire, et que par suite la seule force, qui tende à ramener les particules dans leur position irrégulière, est celle qui est déterminée par

l'action mutuelle des particules douées de la polarité électrique; mais si l'on adopte cette manière de voir, on devra traiter mathématiquement ce sujet d'une façon un peu différente. Il serait trop long de s'étendre sur la différence que la diversité des hypothèses introduirait dans le calcul; et je me bornerai, comme je l'ai dit, à l'hypothèse mentionnée plus haut, et dont j'ai fait choix surtout parce que son développement est considérablement facilité par des travaux connus.

Je ne m'occuperai pas des pertes d'électricité par l'air ni par le défaut d'isolation, parce que l'influence que ces pertes peuvent exercer sur le décroissement des effets de la décharge se comprend d'elle-même.

Comme on a admis qu'il existe dans le verre des corpuscules incomplètement conducteurs, dans lesquels l'électricité ne peut se mouvoir que lentement, ces corpuscules ne prendront pas immédiatement l'état électrique qui correspond aux forces agissantes, mais ils s'approcheront seulement peu à peu de cet état. Or, ce n'est pas l'état variable de cette modification que nous voulons connaître, mais l'état limite vers lequel tend le verre sous l'influence des forces électriques agissant de l'extérieur, ou, en d'autres termes, nous voulons considérer l'état d'équilibre correspondant à ces forces. Dans ces circonstances notre hypothèse est au fond la même que celle que Poisson et Green ont prise pour base de leur théorie du magnétisme; nous pourrions donc nous servir des équations fondamentales développées par ces géomètres, en appliquant à l'électricité positive ou négative ce qu'ils ont dit du fluide magnétique boréal ou austral; et nous n'aurons qu'à donner à ces équations la forme la plus appropriée à notre but.

Adoptons les notations suivantes pour l'instant où l'équilibre s'établit. Désignons par V la fonction potentielle des quantités d'électricité qui se trouvent en dehors du verre et qui agissent sur celui-ci, rapportée à un point quelconque des coordonnées x, y, z pris dans l'intérieur du verre; désignons pour ce même point par U la fonction potentielle des quantités d'électricité décomposée qui se trouvent dans le verre lui-même (c'est-à-dire des quantités d'électricité positive et négative qui sont séparées par influence dans les corpuscules conducteurs, et qui sont répandues sur les différentes parties de la surface de ces corpuscules); à cause de la petitesse de ces derniers, nous regarderons cette fonction U comme variant d'une manière continue. Lorsque nous aurons affaire à un point particulier p , dont les coordonnées

pourront se représenter par a, b, c , nous désignerons par V_p et U_p les valeurs correspondantes de ces deux fonctions potentielles. Nous appellerons r la distance du point x, y, z au point p . En considérant aux points x, y, z un élément de volume $d\tau$, on a l'équation suivante :

$$(a) \quad U_p = -\frac{3g}{4\pi(1-g)} \int \left[\frac{d(V+U)}{dx} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} + \frac{d(V+U)}{dy} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} + \frac{d(V+U)}{dz} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} \right] d\tau,$$

où l'intégrale s'étend à tout le volume de la masse de verre donnée.

La quantité g , qui figure dans la fraction qui précède le signe intégral, représente un coefficient qui dépend de la nature du corps considéré, et qui est par suite constant pour un corps homogène; sa valeur est comprise entre 0 et 1, et il indique jusqu'à quel degré le corps considéré peut être électrisé par influence. Pour acquérir sur la signification de cette quantité g une idée qui s'allie à notre hypothèse, nous pourrions nous imaginer que g représente la fraction de volume de la masse donnée qui est occupée par les corpuscules conducteurs. Il ne s'agit pas ici de la grandeur des corpuscules séparés (supposés très-petits), mais du volume total de tous les corpuscules qui se trouvent dans une unité de volume de la masse. La forme des corpuscules est également peu importante, pourvu que l'on admette que les corpuscules ne sont pas orientés de façon que les mêmes dimensions aient les mêmes directions, mais que celles-ci sont assez irrégulières pour que le corps, considéré dans son entier, se comporte de la même manière dans toutes les directions. Des corpuscules disposés d'une manière tout à fait irrégulière, de sorte qu'en chaque lieu, chaque position est également probable, agissent ensemble, lorsqu'ils sont électrisés par influence, de la même manière que s'ils étaient tous sphériques.

Si l'on imagine actuellement une masse qui n'a absolument pas de conductibilité, on devra poser pour cette masse $g=0$ et l'équation précédente deviendra par là $U_p = 0$. Si l'on imagine au contraire que les corpuscules conducteurs remplissent tout le volume de la masse, on devra faire $g=1$. Une semblable masse, en admettant même que l'électricité ne puisse pas passer d'un corpuscule à l'autre, se comporterait cependant, relativement à l'état électrique qu'elle acquerrait par influence, absolument comme si elle consistait en un corps conducteur dans tout l'intérieur de sa masse, et limité seulement à sa surface par des corps non conducteurs. Pour la substance que nous considérons

particulièrement, c'est-à-dire pour le verre qui sert d'isolant dans le carreau de Franklin et la bouteille de Leyde, on peut admettre que g est beaucoup plus proche de 0 que de 1.

Dans l'équation (a) on peut transformer le second membre de telle sorte que l'intégration relative au volume se ramène à une intégration relative à la surface.

On connaît en effet le théorème géométrique suivant. Si M et N représentent deux fonctions des coordonnées x, y, z , on a :

$$(b) \quad \int \left(\frac{dM}{dx} \cdot \frac{dN}{dx} + \frac{dM}{dy} \cdot \frac{dN}{dy} + \frac{dM}{dz} \cdot \frac{dN}{dz} \right) d\tau = - \int N \Delta M d\tau - \int N \frac{dM}{dn} d\omega \\ = - \int M \Delta N d\tau - \int M \frac{dN}{dn} d\omega,$$

où $d\tau$ représente comme plus haut un élément de volume, et où l'intégrale du premier membre s'étend à tout le volume du corps considéré. Dans les deux seconds membres, les premières intégrales sont également relatives au volume, et les notations ΔM et ΔN représentent les expressions différentielles que nous avons rencontrées plus haut, savoir :

$$\Delta M = \frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{d^2 M}{dy^2} + \frac{d^2 M}{dz^2}; \\ \Delta N = \frac{d^2 N}{dx^2} + \frac{d^2 N}{dy^2} + \frac{d^2 N}{dz^2}.$$

Dans les seconds intégrales qui figurent dans les deux seconds membres, $d\omega$ représente un élément de surface et $\frac{dM}{dn}$ et $\frac{dN}{dn}$ sont les coefficients différentiels de M et de N pris relativement à la normale élevée à la surface au point considéré; on y regardera la normale comme positive vers l'intérieur. Ces deux intégrales s'étendront à toute la surface du corps donné ¹⁾.

Dans le cas où les quantités M et N , ainsi que leur coefficients différentiels du premier et du second ordre, ont des valeurs finies pour toute l'étendue du volume considéré, les intégrales auront naturellement aussi des valeurs finies et déterminées. Mais si M et N , ou leurs coefficients différentiels du premier et du second ordre, deviennent in-

1) En égalant entre eux les deux seconds nombres on obtient l'équation (51) du paragraphe 20 de l'Introduction (p. 39), à part que M et N y sont remplacés par U et V .

finis en un point du volume considéré, nous aurons à discuter si les intégrales conservent néanmoins des valeurs finies et déterminées, ou non; et il va de soi que ce n'est que dans le premier cas que les équations seront applicables.

Si dans les équations (b) nous posons :

$$M = V + U \text{ et } N = \frac{1}{r},$$

nous pourrons les utiliser pour la transformation de l'intégrale qui se présente dans l'équation (a). Dans ce but on peut se servir de l'un ou de l'autre des deux seconds membres de l'équation (b). Green s'est servi du premier pour effectuer la transformation; mais pour notre objet il sera préférable de nous servir du second.

Il prendra la forme suivante, si nous y remplaçons M et N par les valeurs qui précèdent :

$$-\int (V + U) \cdot \Delta \left(\frac{1}{r} \right) d\tau - \int (V + U) \frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{dn} d\omega.$$

La première de ces intégrales a une valeur déterminée que nous pourrions trouver immédiatement; mais cette valeur est différente suivant que le point p , à partir duquel on mesure la distance r , se trouve à l'extérieur ou à l'intérieur du volume auquel s'étend l'intégration, et par conséquent pour notre recherche à l'extérieur ou à l'intérieur du verre. Comme nous n'avons affaire par la suite qu'au cas où le point p est à l'extérieur du verre, nous pourrions nous borner à considérer ce cas qui est le plus simple. Si p est à l'extérieur de l'espace donné, on aura pour tous les points situés à l'intérieur de celui-ci $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$, et par suite on devra poser :

$$\int (V + U) \cdot \Delta \left(\frac{1}{r} \right) d\tau = 0.$$

On démontre aisément, par des considérations particulières tirées de la théorie du potentiel, que cette équation reste valable quelque près que le point p soit de la surface qui limite le volume auquel s'étend l'intégration. Au moyen de cette équation, l'expression précédente se réduit à :

$$-\int (V + U) \frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{dn} d\omega.$$

En substituant cette expression à la place de l'intégrale de l'équation (a), on obtiendra l'équation beaucoup plus simple :

$$(c) \quad U_p = \frac{3g}{4\pi(1-g)} \int (V + U) \frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{dn} d\omega.$$

Appliquons cette équation au carreau de Franklin et supposons pour plus de simplicité qu'il soit muni d'armatures circulaires. Le plateau de verre à faces parallèles qui sépare les deux armatures est le corps à considérer; il est inutile que nous envisagions le plateau tout entier, et nous pouvons nous borner à en considérer la partie circulaire qui est entre les armatures; car la partie qui dépasse et qui forme le bord libre, ne subira par la charge des armatures qu'une modification très-faible de son état intérieur, et par conséquent ne contribuera que très-peu à changer la valeur de la fonction potentielle U . La surface à laquelle doit s'étendre l'intégration est donc celle d'un cylindre à bases circulaires et d'une faible hauteur.

Le point p pour lequel nous avons à déterminer d'abord la valeur de U désignée par U_p sera choisi de la manière suivante. Imaginons une normale élevée vers l'extérieur au centre du cercle sur lequel se trouve l'armature A, plaçons p sur cette normale, et tellement près du cercle que sa distance à celui-ci soit infiniment petite relativement aux dimensions du plateau. Le point p ainsi déterminé se nommera simplement le milieu de l'armature A.

Afin d'effectuer l'intégration indiquée dans l'équation (c), et relative à la surface du cylindre de verre, nous pourrions partager cette surface en trois parties : 1) le cercle qui est recouvert de l'armature A, 2) le cercle opposé qui est recouvert par l'armature B, 3) la surface latérale du cylindre.

Pour les deux cercles, l'intégration est très-facile à effectuer, parce que sur chacune des armatures la fonction potentielle totale, représentée par la somme $V + U$, doit avoir une valeur constante.

Pour effectuer le calcul relativement au cercle recouvert de l'armature A, nous supposerons d'abord que le point p , au lieu d'être infiniment voisin de la surface, soit à une distance arbitraire l de celle-ci, sur la partie extérieure de la normale élevée au centre. Imaginons maintenant en un autre point quelconque du cercle, distant du centre d'une quantité ρ , une normale élevée à sa surface et pénétrant dans le verre d'une quantité n . En représentant par r la distance de l'extrémité de cette normale au point p , on aura :

$$r = \sqrt{\rho^2 + (l+n)^2}.$$

D'où résulte

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = - \frac{l+n}{[\rho^2 + (l+n)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on y pose $n=0$, comme on doit le faire quand le coefficient différentiel est relatif à la surface du verre, il viendra :

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = - \frac{l}{(\rho^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Représentons actuellement par K la valeur constante qu'a la somme $V + U$ sur ce cercle, et nommons a le rayon de celui-ci ; nous obtiendrons pour la partie de l'intégrale relative à ce cercle, et que nous distinguerons de l'intégrale totale en affectant de l'indice 1 l'élément de surface $d\omega$ qui se trouve sous le signe :

$$\begin{aligned} \int (V+U) \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\omega_1 &= -2\pi K \int_0^a \frac{l\rho d\rho}{(\rho^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -2\pi K \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}\right). \end{aligned}$$

Imaginons maintenant, comme nous l'avons dit plus haut, que le point p , que nous avons pris à une distance arbitraire l de la surface, se rapproche de celle-ci de telle sorte que l devienne infiniment petit relativement aux dimensions du plateau ; l'équation précédente deviendra alors :

$$(d) \quad \int (V+U) \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\omega_1 = -2\pi K.$$

Formons de la même manière la seconde partie de l'intégrale qui est relative au cercle recouvert de l'armature B , et choisissons immédiatement le point p infiniment voisin de la surface du premier cercle. En un point du second, distant du centre de la quantité ρ , élevons-lui une normale qui pénètre dans le verre de la quantité n ; nous aurons,

en désignant par n la distance de l'extrémité de la normale au point p , et par c la distance des deux cercles, l'équation :

$$r = \sqrt{\rho^2 + (c-n)^2}$$

d'où résulte :

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{c-n}{[\rho^2 + (c-n)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

ou, si nous posons $n=0$ dans cette expression, afin qu'elle se rapporte à la surface même du cercle :

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{c}{(\rho^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soit K' la valeur constante qu'a la somme $V + U$ sur ce cercle ; nous obtiendrons pour la seconde partie de l'intégrale, que nous distinguerons de l'intégrale totale en affectant de l'indice 2 l'élément $d\omega$, l'expression

$$\begin{aligned} \int (V+U) \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\omega_2 &= 2\pi K' \int_0^a \frac{c\rho d\rho}{(\rho^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2\pi K' \left(1 - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right). \end{aligned}$$

Si l'on développe cette expression suivant les puissances de $\frac{c}{a}$, et que l'on néglige les termes d'ordre supérieur au premier, il vient :

$$(e) \quad \int (V+U) \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\omega_2 = 2\pi K' \left(1 - \frac{c}{a}\right).$$

Nous avons enfin à considérer encore la surface latérale du cylindre. En un point de cette surface distant de la quantité z de la circonférence du premier cercle, imaginons une normale de longueur n élevée vers l'intérieur ; la distance r de son extrémité au point p sera déterminée par l'équation :

d'où résulte :

$$r = \sqrt{(a-n)^2 + z^2},$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{a-n}{[(a-n)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}},$$

ou en posant $n = 0$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} = \frac{a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La valeur de la somme $V + U$ n'est pas partout la même sur la surface du cylindre, mais varie le long d'une génératrice. Si la distance c des deux cercles est faible relativement à leur rayon a , on peut admettre avec une grande approximation que la valeur de la somme $V + U$ varie uniformément le long d'une génératrice ; et l'on pourra par conséquent poser pour un point distant de la première circonférence de la quantité z :

$$V + U = K + \frac{K' - K}{c} z.$$

D'après cela on obtiendra pour la partie de l'intégrale relative à la surface latérale du cylindre et que nous distinguerons en affectant $d\omega$ de l'indice 3 :

$$\int (V + U) \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\omega_3 = 2\pi a \int_0^c \left(K + \frac{K' - K}{c} z\right) \frac{adz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \left[K \frac{c}{a} + (K' - K) \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{c} \right].$$

En développant cette expression suivant les puissances de $\frac{c}{a}$ et négligeant les termes d'ordre supérieur au premier, elle devient :

$$(f) \quad \int (V + U) \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\omega_3 = \pi (K + K') \frac{c}{a}.$$

En réunissant les trois parties de l'intégrale données par les expressions (d), (e), (f), nous obtiendrons :

$$\int (V + U) \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\omega = -2\pi K + 2\pi K' \left(1 - \frac{c}{a}\right) + \pi (K + K') \frac{c}{a},$$

ou bien :

$$(g) \quad \int (V + U) \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} d\omega = 2\pi (K' - K) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right).$$

La valeur de cette intégrale substituée dans l'équation (c) donnera :

$$(h) \quad U_p = \frac{3g}{2(1-g)} (K' - K) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right).$$

Il sera bon d'introduire ici quelques changements de notation. Comme nous n'aurons à considérer les fonctions potentielles V et U que pour le milieu des deux armatures, nous désignerons simplement par V et U les valeurs des fonctions potentielles pour le milieu de l'armature A, et par V' et U' leurs valeurs pour le milieu de l'armature B, conformément à la notation employée dans le Mémoire précédent. Nous aurons donc à poser :

$$K = V + U,$$

$$K' = V' + U',$$

et en même temps comme le point p doit se trouver au milieu de l'armature A :

$$U_p = U.$$

Par là l'équation (h) devient :

$$(i) \quad U = \frac{3g}{2(1-g)} (V' + U' - V - U) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right).$$

Afin d'obtenir l'équation correspondante pour le cas où le point p se trouve au milieu de l'armature B, il suffira d'intervertir les accents dans l'équation précédente, ce qui donnera :

$$(k) \quad U' = \frac{3g}{2(1-g)} (V + U - V' - U') \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right).$$

En soustrayant ces deux équations l'une de l'autre, on obtient :

$$U - U' = \frac{3g}{1-g} (V + U - V' - U') \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right),$$

d'où résulte l'équation suivante qui sert à déterminer la différence de niveau potentiel $U - U'$;

$$(l) \quad U - U' = -\frac{3g}{1+2g} \left(1 - \frac{1-g}{2(1+2g)} \cdot \frac{c}{a} \right) (V - V').$$

Nous ferons usage par la suite de cette équation.

Nous avons encore une remarque essentielle à faire. La différence $V - V'$ qui entre dans cette équation n'a pas, pour un carreau de Franklin chargé, exactement la même valeur que l'on obtiendrait dans le cas où les deux armatures seraient chargées des mêmes quantités d'électricité, mais où le verre n'aurait acquis aucune polarité électrique. Cette polarité produit en effet, sur les armatures, une disposition de l'électricité un peu différente de celle qu'elle prendrait sans cette polarité. Mais cette différence ne peut être que très-faible.

En effet, dans le cas même où le verre agirait simplement comme isolant, l'électricité se répandrait sur les deux faces d'une manière tellement uniforme, qu'à l'exception des points qui sont dans le voisinage immédiat du bord, la densité en un point quelconque ne diffé-

rait de la densité moyenne que d'une quantité de l'ordre $\frac{c}{a}$ par rapport à la densité totale. Or, la polarité du verre ne peut produire d'autre effet que de répandre l'électricité sur les armatures encore plus uniformément que cela n'aurait lieu sans cette polarité; les modifications qui en résultent dans la densité ne peuvent donc être que des quantités de l'ordre $\frac{c}{a}$. Le changement que ces petites modifications dans la distribution de l'électricité occasionnent dans la différence de niveau potentiel $V - V'$ ne pourra donc être qu'une quantité du même ordre, à savoir de l'ordre $\frac{c}{a}$ relativement à sa valeur totale.

Dans les calculs qui précèdent, nous avons tenu compte des termes du premier ordre en $\frac{c}{a}$ dans les développements en série, et nous avons négligé les termes d'ordre supérieur. Mais si nous nous contentons d'un moindre degré d'exactitude et si nous négligeons également les termes du premier ordre, nous pourrions regarder la valeur de $V - V'$ dans l'équation ainsi simplifiée comme concordant avec celle que l'on obtiendrait au moyen des mêmes quantités d'électricité, sans polarité électrique du verre.

En outre, on peut dire que cette équation ainsi simplifiée ne s'applique pas seulement à un carreau de Franklin à armatures circulaires,

mais encore à ceux dont les armatures ont une autre forme, ainsi qu'aux bouteilles de Leyde. On voit en effet par les calculs précédents que les termes relatifs à la circonférence, et qui dépendent seuls de la forme circulaire que nous avons admise, sont de l'ordre $\frac{c}{a}$; et l'on peut dire en général que les termes qui dépendent de la forme des armatures sont de l'ordre $\frac{c}{\sqrt{s}}$, en représentant par s la superficie des armatures. Pour ce qui regarde les termes qui dépendent de la courbure des faces, ils ne pourront non plus être que de l'ordre $\frac{c}{\sqrt{s}}$, pourvu que les courbures ne soient pas tellement fortes que les rayons de courbure soient très-petits par rapport à \sqrt{s} . Il résulte de là qu'en négligeant les termes de l'ordre $\frac{c}{\sqrt{s}}$, on obtient une équation qui est indépendante de la forme et de la courbure des armatures.

L'équation (l) ainsi simplifiée prend la forme :

$$(m) \quad U - U' = -\frac{3g}{1+2g} (V - V').$$

Nous pouvons immédiatement joindre à cette équation celle qui exprime la différence totale de niveau potentiel des deux armatures qui existe réellement. La fonction potentielle totale de toutes les quantités d'électricité décomposée (aussi bien de celles qui se trouvent sur les armatures que de celles qui se trouvent sur les particules de verre polarisées) est, à l'intérieur de la première armature, $V + U$, et à l'intérieur de la seconde, $V' + U'$; la différence totale de niveau potentiel entre les deux armatures sera donc $V + U - V' - U'$. Nous obtiendrons cette quantité en ajoutant $V - V'$ aux deux membres de l'équation précédente, ce qui donnera

$$(n) \quad V + U - V' - U' = \frac{1-g}{1+2g} (V - V').$$

Cette équation exprime que la différence de niveau potentiel qui surgit dans la charge d'un carreau de Franklin ou d'une bouteille de Leyde, est plus petite, dans le rapport de $\frac{1-g}{1+2g}$ à 1, que celle que l'on obtiendrait en employant les mêmes quantités d'électricité, si le verre n'acquerrait aucune polarité, mais agirait simplement comme isolant.

On peut encore transformer les deux équations précédentes en introduisant dans le second membre, au lieu de $V - V'$, une des quantités d'électricité considérées. Pour le degré d'exactitude dont nous nous contentons, nous pouvons regarder les quantités d'électricité qui se trouvent sur les deux armatures comme égales entre elles en valeur absolue, et par suite les représenter par Q et $-Q$. Pour déterminer Q nous emploierons l'équation suivante, dans laquelle se transforme la première des équations (44) de l'introduction (p. 36), si l'on y néglige δ vis-à-vis de 1, ainsi que le terme qui ne renferme pas c au dénominateur :

$$(o) \quad Q = -\frac{s}{4\pi c} (V - V').$$

Au moyen de cette équation les deux précédentes se changent en :

$$(p) \quad U - U' = \frac{4\pi c}{s} \cdot \frac{3g}{1+2g} Q.$$

$$(q) \quad V + U - V' - U' = -\frac{4\pi c}{s} \cdot \frac{1-g}{1+2g} Q.$$

Nous avons encore à rechercher maintenant comment l'état électrique déterminé par les équations précédentes se modifie par la décharge.

Imaginons que celle-ci soit produite en réunissant les deux armatures pendant un temps très-court par un conducteur, de sorte que leur différence de niveau potentiel devienne nulle; et admettons que la polarité intérieure du verre ne varie pas d'une manière sensible pendant ce court intervalle. Il s'agit de déterminer quelles sont les quantités d'électricité qui se trouvent encore sur les armatures après la décharge.

Si, après la décharge, il ne se trouvait absolument pas d'électricité décomposée sur les armatures, à cause de la polarité du verre la différence de niveau potentiel $U - U'$ persisterait entre celles-ci. Pour que la différence de niveau potentiel soit en réalité nulle, il faut qu'il y ait encore sur les armatures des quantités d'électricité qui occasionneraient par elles-mêmes la différence de niveau potentiel $-(U - U')$. En appelant ces quantités d'électricité Q_1 et $-Q_1$ nous aurons pour les déterminer l'équation suivante, qui correspond à l'équation (o) :

$$(r) \quad Q_1 = \frac{s}{4\pi c} (U - U');$$

ou bien, en remplaçant $U - U'$ par sa valeur donnée dans (p) :

$$(s) \quad Q_1 = \frac{3g}{1+2g} Q.$$

Si l'on abandonne le carreau ou la bouteille pendant quelque temps à eux-mêmes, la polarité du verre diminue jusqu'à ce qu'elle devienne égale à celle qui peut être maintenue par les quantités d'électricité qui se trouvent encore sur les armatures. La différence de niveau potentiel correspondant à cette moindre polarité, et que nous nommerons $U_1 - U_1'$, doit être avec les quantités d'électricité Q_1 et $-Q_1$ dans le même rapport que la différence de niveau potentiel $U - U'$, correspondant à la polarité primitive, avec les quantités d'électricité primitives Q et $-Q$. Nous pourrions donc écrire conformément aux équations (p) et (s) :

$$(t) \quad U_1 - U_1' = \frac{4\pi c}{s} \cdot \frac{3g}{1+2g} Q_1 = \frac{4\pi c}{s} \left(\frac{3g}{1+2g} \right)^2 Q.$$

Si l'on opère de nouveau une décharge, en réunissant les deux armatures pendant un temps très-court, il restera sur celles-ci les quantités d'électricité Q_2 et $-Q_2$ qui seront avec la différence $U_1 - U_1'$ dans le même rapport que Q_1 et $-Q_1$ avec la différence $U - U'$. D'après cela, nous aurons, conformément aux équations (s) et (t) :

$$(u) \quad Q_2 = \frac{s}{4\pi c} (U_1 - U_1') = \left(\frac{3g}{1+2g} \right)^2 Q.$$

On obtiendra de même les équations suivantes pour la différence de niveau potentiel $U_2 - U_2'$ correspondant à la polarité qui persiste encore quelque temps après la seconde décharge, ainsi que pour les quantités d'électricité Q_3 et $-Q_3$ qui restent encore sur les armatures après la troisième décharge :

$$(v) \quad Q_3 = \frac{s}{4\pi c} (U_2 - U_2') = \left(\frac{3g}{1+2g} \right)^3 Q,$$

et ainsi de suite.

Les équations précédentes prennent une forme plus simple, si l'on y introduit la quantité m déterminée par

$$(w) \quad m = \frac{3g}{1+2g}$$

et que nous appellerons *coefficient de résidu*. Ces équations s'écriront alors :

$$(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \frac{s}{4\pi c} (U - U') = mQ; \\ Q_2 = \frac{s}{4\pi c} (U_1 - U_1') = m^2Q; \\ Q_3 = \frac{s}{4\pi c} (U_2 - U_2') = m^3Q; \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Il reste encore à déterminer le potentiel de toute l'électricité sur elle-même dans ces différents états successifs.

D'après ce que nous avons dit dans le Mémoire précédent, on obtiendra ce potentiel en multipliant chaque élément d'électricité par le niveau potentiel correspondant, en effectuant l'intégration relative à toutes les quantités d'électricité décomposée existantes, et en multipliant l'intégrale par $\frac{1}{2}$.

Nous effectuerons d'abord cette détermination pour l'état qui a lieu après la charge primitive, c'est-à-dire avant la première décharge. Les quantités d'électricité auxquelles doit s'étendre l'intégration sont d'abord les quantités Q et $-Q$ qui se trouvent sur les armatures, et en second lieu toutes les petites quantités d'électricité qui se trouvent sur les particules de verre polarisées.

Ces dernières peuvent s'éliminer très-simplement. En effet, lorsqu'une particule de verre conductrice a été polarisée électriquement par influence jusqu'à ce qu'elle ait atteint l'état d'équilibre, le niveau potentiel est constant dans cette particule. Comme, en outre, les quantités d'électricité décomposée qui y sont répandues se partagent également en positives et en négatives, la partie de l'intégrale relative à ces quantités d'électricité sera nulle. Il en sera de même pour toutes les particules conductrices, et par suite on peut immédiatement élever à zéro toute la partie de l'intégrale qui est relative aux quantités d'électricité décomposée répandues sur les particules conductrices du verre.

Il ne reste donc plus à considérer que les quantités d'électricité Q et $-Q$ qui se trouvent sur les armatures. Comme, sur chacune d'elles, le niveau potentiel est constant, à savoir $V + U$ sur l'une, et $V' + U'$ sur l'autre, la partie de l'intégrale dont il s'agit se réduira pour chacune de ces deux quantités d'électricité à un simple produit, qui sera $Q(V + U)$ pour la première et $-Q(V' + U')$ pour la seconde; on obtiendra ainsi pour le potentiel de toute l'électricité sur elle-même, que nous appellerons W , l'équation :

$$(y) \quad W = \frac{1}{2} Q (V + U - V' - U').$$

Au moyen de l'équation (y), qui s'écrira après y avoir remplacé la fraction $\frac{1-g}{1+2g}$ par la différence $1 - m$ en vertu de (w) :

$$V + U - V' - U' = -\frac{4\pi c}{s} (1 - m) Q,$$

on obtiendra :

$$(z) \quad W = -\frac{2\pi c}{s} (1 - m) Q^2.$$

Si le verre ne s'était pas polarisé, mais agissait simplement comme isolant, les niveaux potentiels des deux armatures seraient V et V' , et les quantités d'électricité Q et $-Q$ qui se trouvent sur les armatures seraient les seules quantités d'électricité décomposée existantes. Le potentiel de toute l'électricité sur elle-même serait donc alors :

$$\frac{1}{2} (QV - QV') = \frac{1}{2} Q(V - V').$$

Si l'on y met pour $V - V'$ la valeur donnée par (o), l'on aura :

$$-\frac{2\pi c}{s} Q^2.$$

On obtient la même expression si dans (z) l'on fait $m = 0$. On voit en comparant entre elles ces deux expressions que la polarité du verre a rendu le potentiel plus petit, dans le rapport de $1 - m$ à 1, qu'il ne l'eût été pour une même charge, s'il n'y avait pas eu de polarité.

Avant de poursuivre, et de rechercher comment le potentiel de toute l'électricité sur elle-même se modifie par les décharges, il sera utile de donner encore quelque développement à ce qui précède, en décomposant en certaines parties la valeur de ce potentiel déterminée par l'équation (z).

A cet effet, nous partagerons l'électricité qui se trouve sur chaque armature en deux parties, la quantité Q en Q_1 et ${}_1Q$, et de même $-Q$ en $-Q_1$ et $-{}_1Q$. Les quantités Q_1 et $-Q_1$ sont celles que nous avons déjà considérées plus haut, c'est-à-dire celles qui par elles-mêmes occasionneraient la différence de niveau potentiel $-(U - U')$. Pour déterminer ces quantités, nous avons les équations (r) et (s), qui s'écrivent en y introduisant la lettre m :

$$(aa) \quad Q_1 = \frac{s}{4\pi c} (U - U') = mQ.$$

Les deux autres quantités ${}_1Q$ et $-{}_1Q$ sont celles qui occasionneraient par elles-mêmes la différence de niveau potentiel $V + U - V' - U'$, et elles seront de même déterminées par les équations :

$$(bb) \quad {}_1Q = -\frac{s}{4\pi c} (V + U - V' - U') = (1 - m)Q.$$

Imaginons maintenant que toutes les quantités d'électricité décomposée existantes soient partagées en deux systèmes. Le premier système S_1 renfermera les deux quantités Q_1 et $-Q_1$, et en outre toutes les quantités d'électricité décomposée qui sont à l'intérieur du verre, c'est-à-dire celles qui se trouvent sur les particules de verre polarisées. Le second système ${}_1S$ ne renfermera que les deux quantités ${}_1Q$ et $-{}_1Q$.

D'après cela, le potentiel de toute l'électricité sur elle-même, représenté par W , se divisera dans les trois parties suivantes :

1) Le potentiel du système S_1 sur lui-même, que nous appellerons W_1 ;

2) Le potentiel du système ${}_1S$ sur lui-même, que nous appellerons ${}_1W$;

3) Le potentiel du système S_1 sur le système ${}_1S$ que nous appellerons ${}_1W_1$;

Nous pourrons donc poser :

$$W = W_1 + {}_1W + {}_1W_1.$$

La valeur du potentiel ${}_1W_1$ du second membre peut se déterminer immédiatement. Nous l'obtiendrons en multipliant chacun des éléments d'électricité qui appartiennent au système ${}_1S$ par la valeur de la fonction potentielle du système S_1 pour le point considéré, et en intégrant relativement à tous les éléments d'électricité qui appartiennent au système ${}_1S$, par suite, relativement aux quantités ${}_1Q$ et $-{}_1Q$. Ces quantités d'électricité se trouvent sur les deux armatures. Or, le système S_1 est précisément déterminé de telle sorte que la différence de niveau potentiel des armatures est nulle pour ce système; car les quantités d'électricité décomposée qui se trouvent sur les particules polarisées du verre occasionneraient par elles-mêmes la différence de niveau potentiel $U - U'$, et les quantités d'électricité Q_1 et $-Q_1$ occasionneraient par elles-mêmes la différence de niveau potentiel $-(U - U')$, qui est égale et de signe contraire à la précédente; et par conséquent

la détruit. D'après cela, l'intégrale dont il est question plus haut doit aussi donner zéro pour résultat, et nous aurons ainsi :

$${}_1W = 0.$$

Par là, l'équation précédente devient :

$$W = W_1 + {}_1W,$$

que nous écrirons sous la forme suivante :

$$(cc) \quad W_1 = W - {}_1W.$$

Des deux potentiels du second membre, le premier est déterminé par l'équation (x) qui donne :

$$W = -\frac{2\pi c}{s} (1 - m)Q^2.$$

Le second, c'est-à-dire le potentiel du système composé des deux quantités ${}_1Q$ et $-{}_1Q$ sur lui-même, sera déterminé par l'équation suivante, puisque la différence de niveau potentiel correspondante à ces deux quantités d'électricité, est $V + U - V' - U'$:

$${}_1W = \frac{1}{2} {}_1Q (V + U - V' - U'),$$

équation qui, au moyen de (bb), devient :

$${}_1W = -\frac{2\pi c}{s} (1 - m)^2 Q^2.$$

Substituant ces valeurs de W et de ${}_1W$ dans l'équation (cc), on aura :

$$(dd) \quad W_1 = -\frac{2\pi c}{s} (1 - m) m Q^2.$$

Après cette détermination, il est très-aisé d'indiquer les changements que subit le potentiel de toute l'électricité sur elle-même pendant chaque décharge et après celle-ci.

Immédiatement après la première décharge, il se trouve sur les garnitures les quantités d'électricité Q_1 et $-Q_1$, et la polarité du verre reste invariable. Toutes les quantités d'électricité décomposée existantes après la première décharge forment donc précisément le système S_1 , et le potentiel de ces quantités sur elles-mêmes a, par suite, la valeur W_1 déterminée précédemment.

Si on laisse s'écouler quelque temps après la première décharge, la polarité du verre diminue de manière à correspondre à la quantité moindre d'électricité décomposée qui se trouve sur les garnitures. On obtiendra la valeur W_2 du potentiel de toute l'électricité sur elle-même en ce moment, si l'on substitue dans l'expression de W donnée par (z) la quantité d'électricité Q_1 à la place de Q ; on aura ainsi :

$$W_2 = -\frac{2\pi c}{s}(1-m)Q_1^2,$$

et si l'on remplace Q_1 par sa valeur mQ donnée dans (x), il viendra :

$$(ee) \quad W_2 = -\frac{2\pi c}{s}(1-m)m^2Q^2.$$

Si nous imaginons maintenant qu'on effectue une seconde décharge, et si nous nommons W_3 le potentiel immédiatement après celle-ci, le rapport de W_3 à W_2 devra être précisément le même que celui de W_1 à W . Quelque temps après cette décharge, le potentiel qui persiste encore W_4 devra être avec W_3 dans le même rapport que W_2 avec W_1 ; et ainsi de suite. On obtiendra de cette manière pour le potentiel de toute l'électricité sur elle-même, la série suivante de valeurs que je réunirai en un tableau, en répétant pour le compléter les valeurs qui ont déjà été déterminées plus haut.

$$(ff) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{avant la première décharge } W = -\frac{2\pi c}{s}(1-m)Q^2 \\ \text{après } - - - W_1 = -\frac{2\pi c}{s}(1-m)mQ^2 \\ \text{avant la deuxième } - - W_2 = -\frac{2\pi c}{s}(1-m)m^2Q^2 \\ \text{après } - - - W_3 = -\frac{2\pi c}{s}(1-m)m^3Q^2 \\ \text{avant la troisième } - - W_4 = -\frac{2\pi c}{s}(1-m)m^4Q^2 \\ \text{après } - - - W_5 = -\frac{2\pi c}{s}(1-m)m^5Q^2 \\ \text{et ainsi de suite.} \end{array} \right.$$

Si nous calculons au moyen de ces formules les accroissements que subit le potentiel pendant les différents intervalles de temps consécutifs, nous obtiendrons les valeurs suivantes :

$$(gg) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{pendant la première décharge } W_1 - W = \frac{2\pi c}{s}(1-m)^2Q^2 \\ \text{entre la 1^{re} et la 2^{me} } - - W_2 - W_1 = \frac{2\pi c}{s}(1-m)^2mQ^2 \\ \text{pendant la 2^{me} } - - W_3 - W_2 = \frac{2\pi c}{s}(1-m)^2m^2Q^2 \\ \text{entre la 2^{me} et la 3^{me} } - - W_4 - W_3 = \frac{2\pi c}{s}(1-m)^2m^3Q^2 \\ \text{pendant la 3^{me} } - - W_5 - W_4 = \frac{2\pi c}{s}(1-m)^2m^4Q^2 \\ \text{et ainsi de suite.} \end{array} \right.$$

Ces accroissements du potentiel représentent les quantités de travail effectuées par les forces électriques pendant les différents intervalles de temps; ces quantités de travail, pour autant qu'elles ne soient pas employées à des effets mécaniques particuliers, auront pour conséquence une production de chaleur. Il y a à remarquer à ce sujet que les quantités de travail effectuées pendant les décharges sont produites à l'extérieur du verre, et celles qui sont effectuées pendant les intervalles à l'intérieur de celui-ci; et par suite, c'est à l'intérieur également que doit avoir lieu la production de chaleur dans ce dernier cas. Nous obtiendrons donc, en tout, pour le travail effectué à l'extérieur du verre, la valeur :

$$(hh) \quad \frac{2\pi c}{s}(1-m)^2(1+m^2+m^4+\text{etc.})Q^2 = \frac{2\pi c}{s} \cdot \frac{(1-m)^2}{1-m^2} Q^2 \\ = \frac{2\pi c}{s} \cdot \frac{1-m}{1+m} Q^2,$$

et pour le travail effectué à l'intérieur du verre la valeur :

$$(ii) \quad \frac{2\pi c}{s}(1-m)^2(m+m^3+m^5+\text{etc.})Q^2 = \frac{2\pi c}{s} \cdot \frac{(1-m)^2m}{1-m^2} Q^2 \\ = \frac{2\pi c}{s} \cdot \frac{1-m}{1+m} m Q^2.$$

Imaginons qu'après la première décharge la communication entre les garnitures ne soit pas interrompue comme nous l'avons supposé jusqu'à présent, et qu'elle soit permanente; le travail total se partage alors un peu autrement. Immédiatement après la décharge le potentiel a encore la valeur W_1 , et après quelque temps il est devenu nul. Après la décharge il s'effectuera donc encore le travail des forces électriques déterminé par l'accroissement de potentiel $-W_1$. On peut ad-

mettre que ce travail se partage entre le circuit conducteur et le verre d'après le rapport de leur résistance à la conductibilité ; et si l'on regarde celle du verre comme très-grande relativement à celle du circuit, on pourra regarder toute la dernière partie du travail comme effectuée dans le verre. On obtiendra ainsi :

$$(kk) \left\{ \begin{array}{l} \text{Travail à l'extérieur du verre} = W_1 - W = \frac{2\pi c}{s} (1 - m)^2 Q^2 \\ \text{— l'intérieur — — — — } W_1 = \frac{2\pi c}{s} (1 - m) m Q^2. \end{array} \right.$$

Si nous comparons les résultats que nous venons d'obtenir à ceux des calculs effectués dans le Mémoire précédent, nous en concluons ce qui suit. Nous y avons établi pour le potentiel de toute l'électricité sur elle-même une expression (16) qui, si l'on y remplace k par la valeur simplifiée $4\pi c$ et q par Q , prend la forme déjà rappelée plus haut :

$$W = - \frac{2\pi c}{s} Q^2,$$

et nous y avons considéré en outre le travail total qui répond à l'accroissement de ce potentiel jusqu'à la valeur 0, c'est-à-dire le travail

$$\frac{2\pi c}{s} Q^2$$

comme effectué à l'extérieur du verre. D'après les résultats que nous venons d'obtenir au contraire, si nous supposons que la décharge a lieu sans que la communication soit interrompue, le travail effectué à l'extérieur du verre est seulement :

$$\frac{2\pi c}{s} (1 - m)^2 Q^2.$$

La valeur adoptée plus haut est donc à diminuer dans le rapport constant de $(1 - m)^2$ à 1 (rapport qui dépend de la nature du verre), dans le cas où l'on veut tenir compte, comme nous venons de le faire, des modifications qui se présentent dans le verre. Or, comme toutes les comparaisons que nous avons établies précédemment avec l'expérience se rapportaient aux valeurs *relatives* et non aux valeurs *absolues* du travail effectué par les forces électriques, les conclusions que nous en avons déduites seront encore valables dans le cas de l'analyse plus complète du phénomène.

Je suis loin de vouloir donner l'analyse exposée dans cette addition comme une théorie complète de la formation du résidu. Les développements précédents ont pour base une hypothèse déterminée sur l'existence ou la probabilité de laquelle les avis peuvent être partagés. Moi-même je ne voudrais pas me rendre garant, sous sa forme absolue, de l'hypothèse que le verre renferme des corpuscules conducteurs qui seraient séparés les uns des autres par des intervalles absolument dépourvus de conductibilité. Je n'y ai attaché une plus grande importance que celle que je lui aurais attribuée sans cela, qu'à cause de cette circonstance, qu'en y ajoutant une supposition accessoire définie plus haut, ces résultats conviennent également à l'autre hypothèse d'après laquelle les particules du verre sont déjà polarisées d'avance électriquement, et sont simplement orientées par la force extérieure qui agit sur elles.

Quoi que l'on puisse penser, du reste, de l'hypothèse qui sert de base à ces calculs, ils pourront toujours servir à donner une idée de la nature de l'influence que peut exercer une modification qui aurait lieu dans l'intérieur du verre, sur les états électriques successifs du carreau ou de la bouteille, et par suite sur les effets de la décharge.

Mais en même temps, à cause de l'incertitude qui règne encore sur la modification qui a lieu dans le verre, on reconnaîtra que les développements effectués dans le Mémoire précédent ne perdent pas de leur valeur parce qu'on a négligé cette modification. Dans des circonstances où il se présente un effet accessoire de cette nature qui est encore inconnu, il est toujours utile de se faire une idée claire des résultats auxquels on arriverait sans cet effet. Si l'on parvient plus tard à le déterminer plus exactement, on pourra alors chercher à en tenir compte dans le calcul. Dans le cas actuel, comme nous l'avons vu par l'analyse particulière qui précède, les modifications que l'on doit introduire dans les formules relatives à l'hypothèse simplifiée, pour les rendre applicables aux phénomènes réels un peu plus compliqués, ne sont que de peu d'importance. En outre, elles sont d'une nature telle, qu'il est aisé de les introduire postérieurement, et qu'elles n'apportent aucun changement essentiel aux résultats fondamentaux qui ont été déduits de l'hypothèse simplifiée.

où k désigne le pouvoir conducteur du corps, et V une fonction qui ne dépend que des coordonnées, aussitôt que le courant est arrivé à l'état stationnaire.

En effet, en chaque point du conducteur parcouru par le courant, doit agir une force qui maintient l'électricité en mouvement malgré la résistance qu'elle a continuellement à vaincre; et le coefficient différentiel $\frac{dV}{dN}$ représente évidemment la composante de cette force estimée suivant la direction de la normale N . Mais, à part ce point, la signification physique de la fonction V était auparavant douteuse. Ohm nomme la quantité représentée par cette fonction la *force électroscopique*, et il la définit la *densité de l'électricité* au point considéré du conducteur ¹⁾. Mais Kirchhoff ²⁾ a objecté avec raison que cette manière de voir est en contradiction avec un théorème connu d'électrostatique. D'après elle, en effet, l'électricité devrait rester en repos dans un conducteur si elle était répandue, dans tout son volume, avec la même densité; tandis qu'il est bien connu que l'électricité libre d'un corps, la seule dont il puisse être ici question, puisqu'elle est la seule qui exerce une action ³⁾, que cette électricité, disons-nous, à l'état de repos, n'est répandue que sur la surface du corps.

1) *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet* von D^r G. S. Ohm *, p. 95 et autres.

2) *Ann. de Pogg.*, t. LXXVIII, p. 506; et *Phil. Mag.*, v. 37, p. 463.

3) [Il ne sera pas inutile de définir, d'une manière précise, ce que nous entendons par *électricité libre*. Si l'on part de l'hypothèse qu'il existe deux électricités, et qu'un corps à l'état neutre renferme dans chacun de ses éléments la même quantité de l'une et de l'autre, tandis qu'à l'état électrique il renferme l'une ou l'autre en excès, c'est cet excès que nous appelons l'électricité libre. Si l'on part, au contraire, de l'hypothèse qu'il n'existe qu'une seule électricité, et qu'à l'état neutre un corps renferme dans chacun de ses éléments une certaine quantité normale d'électricité dont la force est compensée par une force contraire émanant des particules du corps, tandis qu'à l'état électrique il renferme trop ou trop peu d'électricité, on devra entendre par *électricité libre*, la différence qui existe en plus ou

* *Théorie mathématique de la chaîne galvanique* par Ohm.

Cette objection pourrait faire naître des doutes sur l'exactitude théorique de la loi d'Ohm; toutefois Kirchhoff lui-même a démontré que cette loi peut parfaitement se mettre en harmonie avec les principes de l'électrostatique, et il a fait voir quelle est la signification que l'on doit attribuer, dans ce but, à la fonction V .

Comme nous l'avons dit, $\frac{dV}{dN}$ représente la composante de la force accélératrice agissant au point considéré, estimée suivant la direction de la normale N ; de même, les composantes de cette force suivant les trois axes seront naturellement représentées par $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$ et $\frac{dV}{dz}$. Cela indique que cette force provient d'attractions et de répulsions exercées par des points fixes, et dont l'intensité ne peut être fonction *que de la distance*, et non de la direction dans laquelle se trouve le point agissant; mais la loi de cette action reste encore arbitraire. Cette loi peut se déduire d'autres raisons, puisque ces attractions et répulsions ne peuvent être exercées, dans le cas qui nous occupe, que par l'électricité elle-même; et que pour cette force les attractions et les répulsions sont *inversement proportionnelles au carré de la distance*. De là résulte que la fonction V doit être simplement considérée comme la *fonction potentielle de la quantité totale d'électricité libre* ¹⁾.

L'objection mentionnée plus haut est donc levée; car, au moyen de cette signification de la fonction V , l'équation $V = \text{const.}$, qui exprime, en vertu de (1), qu'il n'y a pas de

en moins entre la quantité d'électricité existante et la quantité normale.

Comme l'expression d'*électricité libre* est quelquefois employée dans un autre sens, il eût peut-être mieux valu employer ici celle d'*électricité décomposée*. 1866.]

1) C'est pourquoi j'ai employé pour représenter cette fonction, que Ohm et Kirchhoff désignent par u , la lettre V , par laquelle j'ai représenté la fonction potentielle dans mon précédent Mémoire; j'ai également dû changer le signe, afin de rendre complète la concordance avec la notation précédente.

courant, est la même que l'équation de condition que donne l'électrostatique pour l'état d'équilibre.

En outre, au moyen de ces significations de V , il est facile, comme Kirchoff l'a montré, de déterminer où se trouve l'électricité libre dans le cas d'un courant stationnaire. En effet, pour que le courant soit stationnaire, il faut que la quantité d'électricité contenue dans chaque élément de volume soit constante; et, par suite, la quantité d'électricité qui entre dans un élément de volume pendant un certain temps doit être égale à celle qui sort de cet élément pendant le même temps. Si nous considérons un élément $dx dy dz$ en un point (x, y, z) , nous aurons, d'après l'équation (1), pour la quantité d'électricité qui entre dans cet élément par la première des deux faces $dy dz$

$$k dy dz \frac{dV}{dx},$$

et pour la quantité qui sort par l'autre face

$$k dy dz \left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2} dx \right);$$

l'excès de la seconde sur la première sera donc

$$k dx dy dz \frac{d^2V}{dx^2}.$$

Pour les deux faces $dx dz$ on obtiendra de même l'excès

$$k dx dy dz \frac{d^2V}{dy^2},$$

et pour les deux faces $dx dy$:

$$k dx dy dz \frac{d^2V}{dz^2}.$$

La somme de ces trois expressions donne l'excès de toute la quantité d'électricité qui sort de l'élément sur celle qui y entre; et comme cet excès doit être nul, on aura :

$$(2) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Or, d'après un théorème connu sur la fonction potentielle, cette équation prouve que le point (x, y, z) est *extérieure* à la masse dont V est la fonction potentielle; et comme ce résultat s'applique à tous les points du conducteur, il s'ensuit que l'électricité libre ne peut pas se trouver à l'intérieur de celui-ci, et que, dans un courant stationnaire, comme à l'état d'équilibre, elle est accumulée à la surface.

La circonstance que l'électricité en mouvement dans l'intérieur du conducteur n'exerce ni attraction ni répulsion, doit s'expliquer différemment suivant qu'on suppose qu'il existe *deux* électricités ou qu'il n'en existe *qu'une seule*. Dans la première hypothèse on doit admettre qu'il se trouve à chaque instant dans chaque élément de volume à l'intérieur du conducteur la même quantité des deux électricités, et que celles-ci se meuvent en deux courants égaux dans des directions opposées. Dans l'autre hypothèse on suppose, comme on sait, qu'un élément de volume d'un corps qui renferme une certaine quantité normale d'électricité n'exerce aucune action sur une autre particule d'électricité, parce que la répulsion de l'électricité est compensée par une certaine autre force, et, d'un autre côté, qu'il ne se présente de répulsion ou d'attraction effective que quand l'élément de volume renferme trop ou trop peu d'électricité; dans cette hypothèse on doit admettre, pour le cas d'un courant stationnaire, que chaque élément de volume à l'intérieur du conducteur renferme constamment la quantité d'électricité normale.

Ce n'est pas ici le lieu de discuter la probabilité intrinsèque de l'une ou de l'autre hypothèse; car, pour la validité des conclusions qui suivent, il est indifférent que nous nous décidions pour la première ou la seconde; nous pourrions donc choisir celle qui nous offrira le plus de facilité. Dans mes précédents Mémoires sur l'électrostatique j'ai adopté, pour simplifier les idées, la première hypothèse; dans celui-ci, le même but me fera adopter la seconde. Pour traduire les con-

sidérations suivantes dans la première hypothèse, au lieu d'admettre un seul courant qui transporte pendant l'unité de temps à travers une surface donnée la quantité d'électricité Q dans une seule direction, on n'aura qu'à admettre deux courants qui transportent les quantités d'électricité $\frac{1}{2}Q$ et $-\frac{1}{2}Q$ en sens contraires, et à appliquer à ces deux courants séparément les résultats qui se rapportent ici au courant unique.

Cherchons maintenant à déterminer le travail effectué par la force qui agit, à l'intérieur du conducteur, dans le mouvement de l'électricité.

Considérons un élément d'électricité dq en mouvement sur le chemin s . La composante de la force accélératrice estimée suivant la direction du chemin sera, en chaque point de celui-ci, $\frac{dV}{ds}$; et, par suite, celle de la force motrice qui agit

sur dq sera $dq \cdot \frac{dV}{ds}$ (1). Le travail effectué par cette force le long du chemin ds sera donc égal à :

$$(3) \quad dq \cdot \frac{dV}{ds} ds,$$

et, par suite, le travail effectué le long du chemin compris entre s_0 et s_1 sera égal à :

$$(4) \quad dq \int_{s_0}^{s_1} \frac{dV}{ds} ds = (V_1 - V_0) dq,$$

où V_0 et V_1 désignent les valeurs de V correspondantes à s_0 et s_1 .

On voit d'abord par là que ce travail est complètement déterminé par les valeurs initiales et finales de la fonction po-

1) [Ce que nous nommons ici la composante de la force estimée suivant la direction du chemin est, en même temps, la force totale, puisque chaque particule d'électricité doit se mouvoir suivant la direction de la force qui agit au point qu'elle occupe. 1866.]

CHALEUR ENGENDRÉE PAR UN COURANT STATIONNAIRE. 121

tentielle qui répondent aux extrémités du chemin, sans qu'il soit nécessaire de connaître le chemin lui-même. En outre le produit $V \cdot dq$ est le *potentiel* (1) de l'électricité libre sur l'élément dq , de sorte que l'expression précédente représente l'accroissement qu'a subi ce potentiel depuis s_0 jusqu'à s_1 ; et comme cette même expression s'applique à tout autre élément d'électricité et peut s'étendre, par suite, à une quantité finie d'électricité, on aura le théorème suivant :

Le travail, effectué pendant un mouvement déterminé d'une quantité d'électricité, par la force qui agit dans le conducteur, est égal à l'accroissement qu'a acquis, pendant ce mouvement, le potentiel de cette quantité d'électricité et de l'électricité libre l'une sur l'autre.

Dans ce qui précède nous nous sommes représenté le mouvement de l'électricité comme si une quantité déterminée de celle-ci parcourait tout le chemin considéré; mais il se peut faire que ce mouvement affecte un tout autre caractère. Si l'on suppose, par exemple, que chaque molécule matérielle soit pourvue d'une certaine quantité d'électricité, et si l'on imagine un nombre de molécules semblables 1, 2, 3, 4, etc., disposées à la suite les unes des autres, le mouvement de l'électricité pourra se faire de telle sorte qu'une petite quantité passe de 1 à 2, qu'une autre quantité égale passe de 2 à 3, une autre égale de 3 à 4, et ainsi de suite. Mais, pour la validité du théorème précédent, il est indifférent que l'on admette l'un ou l'autre de ces mouvements, car il suffit que toutes les parties du chemin total soient parcourues par une quantité égale, et non par la même quantité d'électricité.

Au moyen de ce théorème il sera facile de déterminer le travail effectué pendant l'unité de temps dans une portion quelconque d'un conducteur parcouru par un courant stationnaire.

Soit donnée une surface fermée limitant une partie de

1) Je fais ici entre *fonction potentielle* et *potentiel* la distinction que j'ai établie dans mes précédents Mémoires. [V. p. 49.]

l'espace occupé par le conducteur; il suffira de déterminer l'accroissement du potentiel pour chaque particule d'électricité qui traverse cet espace fermé pendant l'unité de temps; ou bien, ce qui revient au même, on n'aura qu'à multiplier cette quantité d'électricité par les valeurs que prendra la fonction potentielle aux points d'entrée et de sortie, et à soustraire ces deux produits l'un de l'autre. La somme de toutes ces différences donne la quantité de travail cherchée, et l'on peut la représenter aisément sous la forme suivante Soient $d\omega$ un élément de surface de l'espace fermé, et $id\omega$ la quantité d'électricité qui le traverse pendant l'unité de temps, quantité qui sera positive ou négative suivant qu'elle sort de cet espace ou qu'elle y entre; enfin, soit W le travail effectué à l'intérieur de cet espace; on aura :

$$(I.) \quad W = \int Vid\omega,$$

où l'intégrale doit s'étendre à toute la surface. Si l'on y fait, d'après (4) :

$$= k \frac{dV}{dN},$$

où la normale N est positive vers l'extérieur, on pourra écrire cette équation sous la forme :

$$(Ia.) \quad W = k \int V \frac{dV}{dN} d\omega.$$

A ces équations se relie immédiatement celles qui déterminent la *chaleur produite* à l'intérieur de l'espace fermé.

Le travail effectué dans celui-ci doit, en effet, être accompagné d'un égal accroissement de force vive. Ce travail est représenté complètement dans le cas actuel par l'équation (I.) ou (Ia.), puisque nous avons exclu tous les autres effets dans lesquels se présente un travail, comme, par exemple, l'électrolyse. Dans la force vive, nous devons à la rigueur considérer non-seulement la masse matérielle du conducteur, mais encore l'électricité. Les particules d'électricité peuvent être,

en effet, accélérées ou retardées sur leur trajectoire, car la condition de l'état stationnaire exige bien que la vitesse soit invariable en chaque lieu du conducteur, mais non qu'elle soit la même en différents lieux. Si, par exemple, le courant parcourt un conducteur de sections très-différentes, le mouvement de l'électricité peut être plus rapide dans les sections étroites que dans les plus larges, de même que l'eau d'un fleuve coule plus rapidement aux lieux où son lit se rétrécit. Toutefois, comme il n'est pas certain que l'électricité soit douée d'inertie, ni par suite qu'elle ait de la force vive lorsqu'elle est en mouvement; comme, de plus, en admettant même qu'il en soit ainsi, il ne s'agit pas ici de toute la force vive, mais seulement de ses variations, nous pouvons pour le moment les laisser de côté ¹⁾. Nous n'avons donc à considérer que la force vive de la masse du conducteur; et comme par hypothèse il ne se produit aucun mouvement appréciable dans sa masse, il ne reste que l'accroissement ou la diminution de la quantité de chaleur. Ce résultat peut s'exprimer brièvement comme suit : tout le travail est employé à vaincre la résistance à la conductibilité, et il a pour résultat la production d'une quantité de chaleur équivalente, absolument comme le travail qui est employé à vaincre le frottement.

En appelant A l'équivalent calorifique de l'unité de travail et H la chaleur produite pendant l'unité de temps dans l'espace fermé, on aura :

$$(5) \quad H = A \cdot W,$$

et, par suite, en vertu de (I.) et (Ia.) :

1) Je ferai remarquer ici que nous en avons agi de même tacitement en admettant la loi d'Ohm. Car si l'équation (1) $i = k \frac{dV}{dN}$ est exacte, la vitesse de l'électricité en un point donné ne dépend en grandeur et en direction que de la force qui agit en ce point, et par suite l'inertie de l'électricité doit être ou nulle ou tellement faible, que la force nécessaire pour produire les accélérations qui ont lieu dans le conducteur, est négligeable à côté de celle qui est nécessaire pour vaincre la résistance à la conductibilité.

$$(II.) \quad H = A \cdot \int Vid\omega$$

$$(IIa.) \quad H = A \cdot k \int V \frac{dN}{dN} d\omega.$$

Les intégrales qui se présentent dans les équations (I.), (Ia.), (II.) et (IIa.) se simplifient généralement beaucoup dans l'application.

Si la surface qui ferme l'espace considéré est en partie celle du conducteur, et si nous négligeons la faible partie d'électricité que celui-ci cède à l'air ambiant à côté de la quantité d'électricité qui le parcourt, nous n'aurons pas à tenir compte dans l'intégration de cette partie de la surface. Si le conducteur, comme c'est ordinairement le cas, est un corps fort étendu en longueur, et que l'électricité parcourt dans le sens de celle-ci, et si nous considérons par exemple une partie de ce corps comprise entre deux sections, nous n'aurons à étendre les intégrales qu'aux surfaces de ces deux sections.

Si, en outre, le conducteur a une forme approximativement prismatique ou cylindrique au lieu où se trouve l'une de ces sections, de sorte qu'on peut admettre que les particules d'électricité se meuvent toutes parallèlement à l'axe, la force motrice devra avoir cette même direction. Si l'on choisit donc un système de coordonnées rectangulaires tel que l'axe des x soit parallèle à l'axe du conducteur, $\frac{dV}{dx}$ représentera

toute la force motrice, et $\frac{dV}{dy}$ ainsi que $\frac{dV}{dz}$ seront nuls. Il s'en suit que, si la section est normale à l'axe, V doit être constant à l'intérieur de celle-ci, et l'on peut donc écrire :

$$\int Vid\omega = V \int id\omega.$$

L'intégrale $\int id\omega$, prise négativement ou positivement, suivant que cette section est la première ou la seconde rela-

CHALEUR ENGENDRÉE PAR UN COURANT STATIONNAIRE. 125
tivement à la direction du courant, représente toute la quantité d'électricité qui traverse cette section pendant l'unité de temps; cette quantité s'appelle habituellement l'intensité du courant, et nous la représenterons par J , de sorte que l'expression précédente deviendra :

$$\pm V \cdot J.$$

Admettons maintenant que les mêmes conditions soient remplies pour l'autre section et désignons respectivement par V_0 et V_1 les valeurs de V correspondantes à la première et à la seconde section, le travail effectué à l'intérieur de toute cette portion du conducteur sera :

$$(6) \quad W = (V_1 - V_0) \cdot J,$$

et la chaleur produite :

$$(7) \quad H = A(V_1 - V_0) \cdot J.$$

Or d'après la loi d'Ohm :

$$(8) \quad J = \frac{V_1 - V_0}{l},$$

où l désigne la résistance à la conductibilité de la portion comprise entre les deux sections; de sorte que les deux équations précédentes deviendront :

$$(9) \quad V = l \cdot J^2$$

$$(10) \quad H = A \cdot l \cdot J^2.$$

La dernière de ces équations renferme les deux lois trouvées par Joule et confirmées par Lenz et Becquerel, que nous avons mentionnées au commencement de notre travail.

MÉMOIRE XII.

SUR L'APPLICATION DE LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR AUX PHÉNOMÈNES THERMO-ÉLECTRIQUES.

Lu à l'Académie de Berlin en novembre 1853, publié dans les *Ann. de Pogg.*,
livraison de décembre 1853, t. XC, p. 513.

Dans le Mémoire précédent, nous n'avons étudié les effets d'un courant supposé stationnaire qu'à l'intérieur d'un conducteur *homogène*; nous avons admis en outre 1) que celui-ci n'éprouve de la part du courant aucune modification ni mécanique ni chimique, et 2) qu'il ne se présente aucun effet d'induction entre lui et d'autres conducteurs ou aimants. Dans ce cas nous n'avions à considérer que la force qui surmonte la résistance à la conductibilité; nous avons déterminé le travail effectué par cette force, ainsi que la production de chaleur liée à ce travail, et nous avons démontré la concordance de nos résultats avec l'expérience.

Dans le présent Mémoire nous conserverons les deux dernières conditions précédentes; mais au lieu d'un conducteur homogène, nous en supposons un composé de plusieurs substances conductrices sans électrolyse; et c'est surtout sur les phénomènes qui se passent aux surfaces de contact de deux de ces substances que nous devons porter notre attention.

On regarde habituellement comme un fait suffisamment démontré par des expériences électroscopiques, qu'au contact de deux substances différentes, il naît entre elles une différence de tension électrique, qui provient de ce qu'elles se

partagent inégalement l'électricité. D'après cela, on doit admettre, pour l'état d'équilibre, que la fonction potentielle, constante à l'intérieur de chaque substance, a des valeurs différentes dans deux substances en contact¹⁾; et pour l'état qui correspond à un courant continu, on devra admettre que la fonction potentielle varie d'une manière continue à l'intérieur de chaque substance, et d'une manière brusque à la surface de contact.

Nous admettons provisoirement ce fait comme certain, et nous chercherons les conséquences qui en découlent. La comparaison de ces dernières avec l'expérience nous servira à son tour à vérifier l'exactitude de ce fait. Si donc nous désignons par V_1 et V_2 les valeurs de la fonction potentielle à l'intérieur de la première et de la seconde substance, nous aurons pour deux points situés respectivement de chaque côté de la surface de contact, très-voisins et vis-à-vis l'un de l'autre, l'équation

$$(1) \quad V_2 - V_1 = E,$$

où E est une quantité qui dépend de la nature des deux substances en contact, et que nous nommerons simplement, par la suite, la *différence de niveau potentiel**.

On ne peut naturellement pas regarder cette variation

1) Dans les recherches électrostatiques, on prend généralement pour base ce théorème que dans un système de conducteurs reliés entre eux, qu'il se trouve en équilibre, la fonction potentielle a partout la même valeur; ce n'est pas à dire que l'on nie les différences produites par la diversité des substances, on les néglige seulement à cause de leur petitesse, parce que dans l'électrostatique ou à habituellement affaire à des différences beaucoup plus considérables.

* L'auteur emploie dans le texte l'expression de *différence électrique*; mais il ajoute, dans une note datée de 1866, que l'expression de *différence de niveau potentiel*, dont il s'est déjà servi plus haut (p. 90) conviendrait mieux; c'est pourquoi, de son consentement, nous avons remplacé la première par la seconde. Nous croyons devoir avertir ici que souvent nous dirons simplement, pour abrégé, *différence de niveau*; de même que nous emploierons, quand il n'y aura pas de doute possible, *résistance* pour *résistance à la conductibilité*.

(Note du traduct.)

subite de la fonction potentielle comme étant, dans un sens rigoureusement mathématique, un saut qui aurait lieu dans une surface idéale, mais seulement comme une variation très-rapide dans le voisinage de cette surface. Pour l'expliquer, on doit admettre, comme on l'a déjà fait plusieurs fois, et comme Helmholtz surtout l'a exprimé récemment d'une manière précise¹⁾, qu'il existe des deux côtés de la surface de contact deux couches électriques opposées, c'est-à-dire une disposition analogue à celle d'une bouteille de Leyde chargée, ou d'un carreau de Franklin.

Or, puisque ces deux couches ne sont séparées par aucun corps non conducteur, il s'agit maintenant de savoir quelle est la force qui les empêche d'équilibrer leurs états électriques, et qui, même dans le cas où l'électricité peut s'équilibrer par une autre voie, fait constamment passer une nouvelle quantité d'électricité du côté négatif au côté positif, et donne ainsi naissance à un courant continu.

Dans son ouvrage « *über die Erhaltung der Kraft* * », Helmholtz s'exprime de la manière suivante (p. 47) : « En effet, tous les phénomènes qui se passent dans les conducteurs de la première classe (c'est-à-dire dans ceux où le courant a lieu sans électrolyse), peuvent évidemment se déduire de l'hypothèse que les différentes substances chimiques exercent des attractions différentes sur les deux électricités²⁾, et que ces attractions n'agissent qu'à des distances inappréciables, tandis que les deux électricités agissent aussi l'une sur l'autre à de plus grandes distances. D'après cela, la force de contact consisterait dans la différence des attractions que les particules de métal les plus voisines de la surface de contact

1) *Ann. de Pogg.*, t. LXXXIX.

* *Sur la conservation de la force.*

2) Il importe peu que l'on admette l'hypothèse d'une ou de deux électricités. Si, pour plus de facilité, comme je l'ai fait dans le Mémoire précédent, je ne parle par la suite que d'une seule électricité, cela n'exercera aucune influence sur les résultats puisque, comme je l'ai dit, toutes les conclusions peuvent aisément se traduire d'une hypothèse dans l'autre.

exercent sur les électricités de cette surface, et l'équilibre s'établirait lorsqu'une particule électrique qui passe de l'une à l'autre des deux particules métalliques, ne perd ni ne gagne de force vive. »

Les idées de la plupart des autres physiciens concordent, autant que je sache, avec cette explication, quoiqu'ils s'expriment à ce sujet d'une manière moins claire et moins précise; néanmoins, je crois devoir la combattre, du moins en partie. Nous pouvons laisser provisoirement indécise la question de savoir s'il existe différentes attractions exercées sur l'électricité par différentes substances chimiques, et qui produisent une différence de niveau potentiel de la manière qui vient d'être indiquée; mais que l'on en puisse déduire, comme on l'affirme, tous les phénomènes qui se passent dans les conducteurs de la première classe, c'est ce que je ne puis accorder. Pour l'explication des courants thermo-électriques et de la production de chaleur et de froid occasionnée au contact de deux substances par un courant électrique, et découverte par Peltier, il ne suffit pas d'admettre cette hypothèse, mais on est obligé d'adopter la suivante : *que la chaleur elle-même agit dans la formation et dans la conservation de la différence de niveau potentiel au contact, en ce que le mouvement moléculaire que nous nommons chaleur, pousse l'électricité d'une substance vers l'autre, et que son action ne peut être contre-balancée par l'action contraire des deux couches électriques ainsi produites, lorsque celles-ci ont atteint une certaine densité.*

Pour le démontrer au moyen des courants thermo-électriques, imaginons une chaîne formée de deux substances que nous pouvons supposer métalliques. Si toute la chaîne se trouve à la même température, les différences de niveau potentiel aux deux contacts opposés sont égales, et, par suite, la fonction potentielle peut avoir une valeur constante dans chaque métal, comme cela doit être pour l'équilibre. Mais si les températures sont différentes aux deux contacts, il naîtra un courant, et l'on doit en conclure qu'il a surgi relativement à la distribution de l'électricité des conditions particulières qui ne peuvent être remplies par aucun état d'équilibre.

Ces conditions ne peuvent pas se déduire de l'hypothèse que les différences de niveau potentiel ne seraient produites que par celles des attractions exercées sur l'électricité par des substances chimiquement différentes. D'abord il est très-peu probable que ces attractions varient avec la température; et s'il n'en est pas ainsi, la distribution de la chaleur ne peut exercer aucune influence sur celle de l'électricité. Mais en laissant même de côté cette objection, et en regardant comme possible la dépendance entre les attractions et la température, on n'y aura rien gagné pour l'explication d'un mouvement continu de l'électricité; car, alors, chaque partie de la chaîne attirerait simplement la quantité d'électricité qui correspondrait à sa force attractive actuelle, et la conserverait aussi longtemps que les températures resteraient les mêmes dans la chaîne. On peut également exprimer la même conclusion de la manière suivante. Si une substance exerçait différentes attractions sur l'électricité à différentes températures, deux parties inégalement chaudes de la même substance se comporteraient sous ce rapport l'une vis-à-vis de l'autre de la même manière que deux substances différentes à la même température, de sorte qu'il devrait naître également entre elles une différence de niveau potentiel. D'après cela, une différence de température entre les parties d'un chaîne thermo-électrique agirait précisément comme un accroissement de diversité de substances à la même température, lequel peut bien produire une variation dans l'état d'équilibre électrique, mais jamais un courant électrique persistant.

Il en est autrement, si l'on admet que la chaleur elle-même intervient dans la formation des différences de niveau potentiel aux points de contact. D'après cette hypothèse, il est non-seulement possible, mais encore très-probable que la grandeur des différences dépende des températures qui existent aux contacts; et il n'en résulte cependant en aucune manière qu'il doive naître également des différences de niveau potentiel correspondantes entre les parties d'une seule et même substance qui auraient des températures différentes. Cette hypothèse présente donc ce caractère particulier que, d'un

côté, l'inégalité des différences de niveau potentiel aux deux contacts fait que la fonction potentielle a nécessairement des valeurs différentes dans les différentes parties de chacune des substances, et que, d'un autre côté, l'état électrique tend à s'équilibrer à l'intérieur de chaque substance, de telle sorte que, dans toutes les parties de celle-ci, la fonction potentielle prenne la même valeur. Ces deux conditions ne peuvent pas être remplies simultanément par un état d'équilibre; au contraire, elles exigent un courant continu, ce qui est entièrement conforme à l'expérience.

Abordons maintenant le second des phénomènes mentionnés plus haut, découvert par Peltier, c'est-à-dire la production de chaleur ou de froid occasionnée à la surface de contact de deux substances par un courant électrique. Nous pouvons naturellement dire de cet effet, comme nous l'avons dit de la variation de la fonction potentielle, qu'il ne peut pas être limité à une surface mathématique, mais qu'il doit se distribuer dans le volume d'une couche, quelque mince du reste qu'elle soit. Nous donnerons à cette couche qui renferme, outre les deux couches électriques mentionnées plus haut, l'espace compris entre elles, le nom de *couche intermédiaire*. Pour expliquer la production ou la destruction de chaleur qui a lieu dans cette couche, il faut démontrer qu'il y a un travail mécanique correspondant, positif ou négatif, qui est effectué par une certaine force.

Avant d'aborder l'étude particulière de ce travail, il sera utile à la clarté de l'exposition, que je commence par quelques remarques générales sur le travail mécanique, et sur sa dépendance vis-à-vis de la force. On sait que, lorsqu'un point se meut sous l'influence d'une force, on appelle travail le produit du chemin parcouru par la projection de la force sur sa direction. Mais dans la détermination de ce travail, il me paraît utile de le rapporter *expressément* autant que possible, et plus qu'on ne le fait habituellement, à la force considérée; car il arrive souvent qu'un point soit sollicité simultanément par plusieurs forces que l'on veut étudier isolément, et non dans leur résultante commune; c'est ainsi qu'en particulier,

dans les mouvements produits par des machines, on a presque toujours affaire à deux forces différentes, la puissance et la résistance. Dans des cas semblables, il existe dans un même mouvement plusieurs quantités de travail qui doivent être rigoureusement distinguées, et dans lesquelles une indétermination de l'expression conduirait facilement à des erreurs. — En outre, on regarde le travail comme *positif* ou *négalif*, suivant que le mouvement a lieu dans le même sens que la composante effective de la force, ou en sens contraire. Mais je trouve que pour relier d'une manière plus commode le travail à la force, et en général pour donner plus de clarté à l'exposition, il serait désirable de pouvoir exprimer cette différence par le verbe lui-même; dans ce but, je proposerai de dire dans le premier cas que le travail est *effectué* par la force, dans le second qu'il est *subi* par elle; de sorte que l'expression « la force subit un travail, » a le même sens que celle-ci, « la force effectue un travail négatif. »

Avant de considérer les phénomènes qui se passent dans la couche intermédiaire, commençons d'abord par y appliquer l'hypothèse de Helmholtz. D'après celle-ci, deux forces différentes agissent sur une particule d'électricité renfermée dans cet espace : en premier lieu, une force purement électrique, provenant de ce que la particule située entre les deux couches électriques est attirée par l'une, et repoussée par l'autre; en second lieu, une force moléculaire, provenant de ce que la particule est attirée avec une intensité différente par les molécules de différentes substances qui se trouvent des deux côtés de la couche intermédiaire. Lorsque l'équilibre s'est établi, ces deux forces agissent en sens contraire avec une même intensité, de sorte que, dans la transmission de la particule, l'une subit un travail égal à celui qui est effectué par l'autre; par suite, comme Helmholtz le déclare lui-même, il n'y a ni perte ni gain de force vive. Dans un courant, au contraire, la force électrique est un peu plus grande ou plus petite que la force moléculaire, de sorte que la particule d'électricité doit obéir à l'une ou à l'autre. La manière la plus simple d'exprimer ce rapport consiste à regarder comme in-

riables les deux forces égales qui agissent dans l'équilibre, et à y ajouter en outre une troisième force électrique dirigée dans l'un ou dans l'autre sens, et précisément capable de vaincre la résistance à la conductibilité dans la couche intermédiaire, et à maintenir ainsi l'électricité en mouvement. Cette force est identique à celle qui doit exister dans chaque couche d'un conducteur homogène doué de la même résistance, dans le cas d'une égale intensité du courant; et par conséquent, le travail effectué par cette force, et la chaleur produite ne peuvent pas être différents de ceux qui ont lieu dans cette couche homogène, et que nous pouvons négliger ici à cause de la faiblesse de la résistance d'une couche aussi mince. Le phénomène *particulier* qui a lieu au contact et qui a été observé par Peltier reste donc inexplicé dans cette hypothèse.

Parton maintenant de l'autre hypothèse, d'après laquelle c'est la chaleur qui tend à faire passer l'électricité d'un côté à l'autre de la couche intermédiaire, et qui agit ainsi en sens contraire de la force électrique. Dans l'état d'équilibre cette tendance est exactement compensée par la force électrique; dans un courant, au contraire, cette dernière, comme nous l'avons dit plus haut, est un peu augmentée ou diminuée, ce qui produit la transmission d'électricité dans l'un ou l'autre sens. La force électrique effectue ou subit alors un certain travail, qui ne peut pas être compensé par le travail d'une autre force, puisque, par hypothèse, il n'existe pas de seconde force, et que les effets que l'on croyait devoir lui attribuer sont produits par la chaleur, c'est-à-dire par un mouvement. D'après cela, tout le travail doit avoir pour conséquence une augmentation ou une diminution équivalente de la force vive, et nous obtenons ainsi la production de chaleur ou de froid constatée par Peltier, puisque la force vive ne se manifeste ici que sous forme de chaleur.

Je crois pouvoir comparer l'état de la couche intermédiaire avec celui d'un gaz maintenu par une pression extérieure dans une enveloppe extensible que le mouvement calorifique de ses molécules cherche à dilater. Si la force extérieure,

qui faisait précisément équilibre à la tension produite par la chaleur, devient un peu plus forte ou plus faible, elle comprime le gaz ou le laisse se dilater; elle effectue ou subit alors un certain travail, et en même temps une quantité de chaleur équivalente est produite ou anéantie dans le gaz 1).

Nous avons donc trouvé que, si l'on admet au contact de deux substances une différence de niveau potentiel produite par la chaleur, il en résultera nécessairement une production de chaleur ou de froid, selon la direction du courant. Nous pourrions donc réciproquement considérer ce dernier phénomène comme une preuve de l'existence, et en même temps comme une mesure de cette différence de niveau. Mais il y a un autre fait qui paraît être en contradiction avec cette hypothèse. Car, comme c'est entre le bismuth et l'antimoine qu'à lieu la plus grande production de chaleur ou de froid, on doit en conclure que c'est aussi entre ces métaux que la différence de niveau potentiel est la plus grande; mais des expériences électroscopiques constatent de plus grandes différences entre

1) Dans mes Mémoires sur la force motrice de la chaleur, où j'ai traité avec plus de détails cette manière d'être du gaz, j'ai déterminé autrement le sens positif et le sens négatif du travail. J'y ai considéré la tension produite par la chaleur qui agit sur les parties mobiles de l'enveloppe, sur un piston par exemple, à la manière d'une force motrice, comme étant pour nous la force utile; et c'est à elle, et non à la pression opposée, que j'ai rapporté les quantités de travail; par suite, je devais regarder une dilatation qui a lieu en surmontant la pression comme un travail positif, et une compression comme un travail négatif. C'est ce qui a donné lieu à cette manière de dire, comme mode sous certains rapports, qu'une production de travail consomme de la chaleur et *vice versa*, de sorte que la somme de la chaleur et du travail est constante. Dans mes recherches sur l'électricité, au contraire, où il ne s'agissait pas d'une force motrice exercée par la chaleur même, mais d'une augmentation ou diminution de chaleur produite par d'autres forces, c'est à celles-ci que j'ai dû rapporter le travail, et j'ai conservé cette détermination dans le présent Mémoire; c'est pourquoi l'expression précédente a naturellement dû se transformer en celle-ci, qu'un travail positif a pour conséquence un accroissement, et un travail négatif une diminution de force vive ou de chaleur.

d'autres métaux, comme le cuivre et le zinc, qu'entre le bismuth et l'antimoine. Cette contradiction peut s'expliquer de deux manières différentes.

En premier lieu on peut admettre, qu'outre la différence de niveau occasionnée par la chaleur, il en existe simultanément une autre qui, dans l'explication de Helmholtz, ne serait produite que par la différence des attractions moléculaires, et que cette dernière différence de niveau, quoiqu'elle n'exerce aucune influence sur les phénomènes thermo-électriques, a son plein effet dans les phénomènes électroscopiques, et s'y montre même, en général, la plus considérable des deux. En second lieu on peut admettre que la différence observée dans les expériences électroscopiques ne résulte pas du contact immédiat des deux substances, le cuivre et le zinc par exemple, et n'appartient même pas, en général, au nombre des phénomènes qui ont lieu au contact de conducteurs de la première classe seulement, mais, au contraire, au nombre de ceux qui sont dus à l'action de conducteurs de la seconde classe (c'est-à-dire de ceux qui conduisent l'électricité par électrolyse). Sous ce rapport on peut remarquer que dans une expérience électroscopique, même lorsque les métaux que l'on y soumet ne sont en contact avec aucun corps étranger, comme la main, mais seulement entre eux, l'action de substances étrangères ne peut cependant pas être complètement exclue; car les métaux mêmes sont couverts à leur surface d'une couche de gaz comprimés, et peut-être aussi de vapeurs condensées, qui empêchent le contact métallique réel entre des pièces qui ne sont pas soudées, mais seulement pressées l'une contre l'autre, et modifient essentiellement par leur interposition les phénomènes électroscopiques.

Nous ne rechercherons plus ici laquelle de ces deux explications est préférable; parce que c'est indifférent pour l'étude des courants thermo-électriques et de leurs effets. Pour celles-ci, il suffit que l'on admette, conformément à la conclusion précédente, l'existence d'une différence de niveau potentiel occasionnée par la chaleur; car ce n'est qu'à celle-ci

que nous avons affaire; et quand, par la suite, il sera simple-
ment question de la différence de niveau potentiel, c'est tou-
jours de celle-là qu'il s'agira, qu'il en existe du reste une
autre à côté d'elle ou non.

Ces considérations générales exposées, si nous voulons
trouver les formules qui déterminent le travail effectué et la
chaleur produite à l'intérieur de la couche intermédiaire,
nous pourrons appliquer précisément les mêmes conclusions,
que celles que j'ai développées dans mon précédent Mémoire
relativement aux phénomènes qui ont lieu à l'intérieur d'un
corps homogène. Il en résulte que dans la couche intermé-
diaire aussi le travail effectué par le passage d'une quantité donnée
d'électricité est exprimé par l'accroissement du potentiel de cette
quantité d'électricité et de l'électricité libre l'une sur l'autre. Re-
présentons par J la quantité d'électricité qui passe pendant
l'unité de temps, et par E , comme dans l'équation (1), la dif-
férence des valeurs de la fonction potentielle des deux côtés
de la couche intermédiaire, ou simplement la différence de
niveau potentiel, prise en retranchant la première valeur de
la seconde; le travail effectué pendant l'unité de temps sera :

$$(2) \quad W = E \cdot J,$$

et par suite la chaleur produite :

$$(3) \quad H = A \cdot E \cdot J,$$

où A représente l'équivalent calorifique de l'unité de travail.

Puisque, d'après cela, le travail suit dans les couches in-
termédiaires la même loi que dans les conducteurs homo-
gènes, on pourra le déterminer dans tous les deux par un
seul calcul, et l'on pourra étendre ainsi l'application des
formules développées dans mon précédent Mémoire, p. 122
et suivantes. Soit, en effet, donnée une portion de conduc-
teur de forme quelconque, et qui, au lieu d'être homogène,
comme on l'a supposé plus haut, peut être composée de plu-
sieurs substances conductrices; la loi précédente permettra
de déterminer le travail effectué dans cette portion du con-

ducteur pendant l'unité de temps; on n'aura simplement qu'à
chercher l'accroissement du potentiel pour chaque particule
d'électricité qui la traverse pendant l'unité de temps, qu'elle
ait passé, dans l'intervalle, d'une substance à une autre ou
non; et pour cela, il suffira de multiplier la masse de cette
particule par les valeurs de la fonction potentielle à l'entrée
et à la sortie, et de retrancher le premier produit du se-
cond. Soit donc $d\omega$ un élément de la surface qui renferme
la portion considérée du conducteur, V la valeur de la fonc-
tion potentielle en ce lieu, et $id\omega$ la quantité d'électricité qui
traverse l'élément pendant l'unité de temps, et qu'on pren-
dra comme positive ou négative, suivant qu'elle sort de l'es-
pace considéré ou qu'elle y entre; le travail effectué dans la
portion de conducteur sera :

$$(4) \quad W = \int V id\omega,$$

où l'intégrale doit s'étendre à toute la surface. Désignons
par k le pouvoir conducteur de la substance dans laquelle se
trouve l'élément $d\omega$, et par N , la normale à cet élément,
comptée comme positive vers l'extérieur; on aura :

$$i = k \frac{dV}{dN},$$

et par suite :

$$(4a) \quad W = \int kV \frac{dV}{dN} d\omega.$$

De même, la chaleur produite pendant l'unité de temps dans
la portion du conducteur sera :

$$(5) \quad H = A \int V id\omega,$$

$$(5a) \quad H = A \int kV \frac{dV}{dN} d\omega.$$

Ces équations ne diffèrent de celles du précédent Mémoire

qu'en ce que la quantité k qui était constante, puisqu'il ne s'agissait que d'une substance, a ici des valeurs diverses pour les diverses substances, et, par suite, doit figurer sous le signe d'intégration au lieu d'être un simple facteur constant.

Considérons maintenant dans son ensemble une chaîne thermo-électrique, et choisissons-en d'abord une qui n'est composée que de deux métaux. Nommons ceux-ci a et b , et leurs deux lieux de contact c et c' . Pour représenter d'une manière complète les différences de niveau en ces deux lieux par une notation simple qui permette de reconnaître à la fois leur grandeur absolue et leur sens, nous devons déterminer une certaine direction du courant comme positive, et former les différences en ces deux lieux dans le même ordre, par exemple, que nous l'avons fait dans l'équation (1), c'est-à-dire en retranchant la première valeur de la fonction potentielle de la seconde. Soient respectivement E et E' les différences de niveau ainsi déterminées; l'intensité J du courant qu'elles occasionnent sera représentée d'après la loi d'Ohm par l'expression

$$(6) \quad J = - \frac{E + E'}{L},$$

où L représente la résistance à la conductibilité ¹⁾. La somme négative $-(E + E')$ est la quantité qu'on appelle, d'après Ohm, la force électro-motrice de la chaîne. Si la température est la même aux deux contacts, les différences E et E' sont numériquement égales, mais de signes contraires, de sorte que leur somme est nulle; si, au contraire, les températures ne sont pas les mêmes, nous pourrons, d'après ce qui précède, regarder aussi ces différences comme inégales, et nous obtiendrons par

1) Il est aisé de déduire cette expression de la partie de la loi d'Ohm qui se rapporte à un conducteur homogène unique, et que j'ai déjà appliquée dans mon précédent Mémoire. Désignons en effet les valeurs particulières que prend la fonction potentielle dans le voisinage immédiat des deux surfaces de contact, par V_a et V_a' pour le conducteur a , et par V_b et V_b' pour b ; soit l_a la résistance du conducteur a entre les deux surfaces du contact, et de même l_b pour b ; on obtiendra pour

suite une somme d'une grandeur assignable, ce qui doit être d'après l'équation pour qu'un courant se produise.

L'équation (6) donne immédiatement le travail effectué et la chaleur produite dans les différentes parties de la chaîne. Pour les couches intermédiaires, nous n'aurons qu'à remplacer J par sa valeur dans l'équation (2); et pour les parties homogènes a et b , nous appliquerons le théorème établi par l'expérience, et démontré théoriquement dans mon précédent Mémoire, savoir: que le travail effectué dans un conducteur pendant l'unité de temps est exprimé par le produit de la résistance et du carré de l'intensité du courant. Nous obtiendrons ainsi les trois quantités de travail suivantes:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dans la couche intermédiaire en } c : - E \cdot \frac{E + E'}{L}, \\ \text{dans la couche intermédiaire en } c' : - E' \cdot \frac{E + E'}{L}, \\ \text{dans les conducteurs homogènes } a \text{ et } b : \frac{(E + E')^2}{L}; \end{array} \right.$$

et si l'on multiplie ces expressions par l'équivalent calorifique A du travail, on obtiendra les quantités de la chaleur engendrées dans les espaces correspondants.

l'intensité du courant dans le sens $acbc'a$ dans les deux conducteurs isolément les expressions:

$$\begin{aligned} \text{Intensité dans } a &= \frac{V_a - V_a'}{l_a}; \\ \text{intensité dans } b &= \frac{V_b - V_b'}{l_b}. \end{aligned}$$

Comme ces deux intensités doivent être égales entre elles, il en résulte:

$$\frac{V_a - V_a'}{l_a} = \frac{V_b - V_b'}{l_b}.$$

Si l'on compare cette équation à celles qui résultent immédiatement de la définition de E et E' , savoir $V_b - V_a = E$, et $V_a' - V_b' = E'$, et que l'on fasse en même temps $l_a + l_b = L$, on aura comme dans (6):

$$\frac{V_a - V_a'}{l_a} = \frac{V_b - V_b'}{l_b} = \frac{V_a - V_a' + V_b' - V_b}{l_a + l_b} = - \frac{E + E'}{L}.$$

La somme des deux premières expressions est toujours négative, puisqu'elle peut se réduire à une fraction dont le numérateur est un carré négatif, et dont le dénominateur est essentiellement positif de sa nature. Ce résultat pouvait aussi se conclure immédiatement de la simple inspection de l'équation (6). Le signe — qui figure au second membre fait voir, en effet, que le courant prend toujours la direction pour laquelle la somme des deux différences de niveau est négative, et qui est par suite opposée aux forces électriques qui agissent dans les couches intermédiaires, si l'on compose ces deux forces en une seule. Ce mouvement peu naturel, en apparence, de l'électricité, dans lequel les forces électriques subissent un travail, est produit par la chaleur, comme nous l'avons dit plus haut. — La dernière expression est essentiellement positive à cause du carré qu'elle renferme, ce qui est conforme à la nature de la chose; car, dans les conducteurs homogènes, la force électrique n'a à vaincre que la résistance à la conductibilité, qui peut être comparée à un frottement et qui ne peut, par suite, engendrer aucun mouvement en sens contraire de la force électrique.

Si l'on fait la somme des trois expressions, on obtient pour résultat zéro, et il en est naturellement de même relativement aux quantités de chaleur. Il est aisé de reconnaître l'exactitude de ce résultat, auquel on peut du reste arriver d'une manière plus directe. Il n'est pas nécessaire pour cela de considérer isolément les phénomènes qui ont lieu dans les différentes parties de la chaîne; mais il suffit d'appliquer à la chaîne tout entière le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail; c'est de cette manière que Helmholtz¹⁾ et W. Thomson²⁾ ont déduit le même résultat, sous une

1) *Ueber die Erhaltung der Kraft*, p. 59.

2) *On a Mechanical Theory of Thermo-Electric Currents*. *Phil. Mag.* s. 4, vol. 3, p. 529. Ce travail n'est qu'un extrait d'un mémoire lu à la Société royale d'Édimbourg, mais qui n'a pas été publié en entier, que je sache. [Thomson a publié plus tard deux mémoires étendus sur les courants thermo-électriques, et sur les propriétés électro-dynamiques des métaux. 1866.]

forme peu différente, pour le faire servir de base à des développements ultérieurs. En effet, si la force électrique effectuait ou subissait un travail pendant un certain temps à l'intérieur de la chaîne considérée en entier, ce ne pourrait être que par une modification dans la distribution de l'électricité, modification qui est exclue par l'hypothèse que le courant est stationnaire. Les quantités de travail doivent donc se compenser mutuellement dans les différentes parties de la chaîne. Mais en outre, puisque le courant, par hypothèse, n'agit pas par induction à l'extérieur, mais que tout son effet reste limité à la chaîne elle-même, que celle-ci ne doit subir aucune modification mécanique ou chimique, de sorte que les quantités de chaleur seules sont variables dans ses différentes parties, il en résulte que tout travail effectué ou subi par la force électrique doit avoir pour conséquence la production ou la destruction d'une quantité de chaleur correspondante; et ces quantités de chaleur doivent se compenser de même que les quantités de travail. Ce dernier résultat peut aussi s'exprimer simplement sous la forme suivante. Le courant lui-même est produit par la chaleur, par suite il y a de la chaleur consommée; mais l'effet du courant consiste dans une reproduction de chaleur; par conséquent, puisqu'en tout, dans ces circonstances, il ne peut y avoir ni perte ni gain de chaleur, celle qui est produite par le courant doit être égale à celle qui a été consommée.

Ces parties de la chaîne thermo-électrique dans lesquelles la chaleur agit elle-même, soit en imprimant à l'électricité un mouvement dans un certain sens, soit en s'opposant à son mouvement, c'est-à-dire, dans le cas simple actuel, les deux couches intermédiaires en c et c' , peuvent se comparer à une machine parfaite mue par la chaleur. De même, par exemple, que la machine soulève un poids, c'est-à-dire le met en sens contraire de la pesanteur, auquel cas la pesanteur subit un travail, de même ici l'électricité est forcée à se mouvoir en sens contraire de la force électrique, de sorte que celle-ci subit aussi un travail. De même également qu'on peut laisser retomber le poids en l'abandonnant à l'ac-

tion de la pesanteur, auquel cas celle-ci effectue un travail précisément égal à celui qu'elle a subi, travail qu'on peut utiliser à la production de différents effets, de même ici l'électricité retourne au point de départ, en obéissant à l'intérieur des conducteurs homogènes à la force électrique, et le travail que celle-ci effectue dans ce cas peut de même être employé à la production de différents effets, puisque les courants électriques peuvent engendrer un effort mécanique. Si, pour rendre la concordance encore plus parfaite, nous introduisons dans la machine des conditions limitatives analogues à celles auxquelles nous avons soumis plus haut les effets du courant, nous devons admettre que tout le travail de la machine n'est utilisé qu'à vaincre du frottement. Dans ce cas, le frottement engendre précisément autant de chaleur que la machine en consomme; et si, pour avoir un système comparable à la chaîne complète, nous regardons les corps frottants comme faisant partie de la machine, il n'y aura dans ce système ni perte ni gain de chaleur.

Nous n'avons considéré plus haut, dans le travail mécanique, que la *production* ou la *destruction* de chaleur qui est liée à ce travail. Mais dans tous les cas où une certaine force subit un travail au moyen de la chaleur, et où l'opération est conduite de telle sorte que le corps, par l'intermédiaire duquel cet effet se produit, se trouve à la fin de celle-ci dans le même état qu'au commencement, outre la variation qui se produit dans la quantité totale de chaleur existante, il y a encore une *transmission de chaleur d'un corps chaud à un corps froid*, et entre la grandeur de cette transmission et celle du travail produit, il existe un rapport déterminé par la loi de Carnot. Ceci nous amène naturellement à penser que cette loi s'applique aussi aux phénomènes thermo-électriques, et peut nous conduire à de nouvelles conséquences relativement à ces phénomènes, comme elle nous y a conduit déjà relativement aux gaz et aux vapeurs. C'est Thomson qui a le premier traité la chaîne thermo-électrique à ce point de vue; il donne, dans le travail cité plus haut, une équation générale qui exprime la loi de Carnot pour toute chaîne, quelque

compliquée qu'elle soit. Mais il dit qu'il lui reste encore quelque doute sur l'exactitude de l'application de cette loi, parce que le phénomène qui se passe dans un courant thermo-électrique n'est pas complètement réversible, ce qui serait nécessaire pour la démonstration. Il serait trop long de discuter ici jusqu'à quel point il est possible de démontrer rigoureusement le théorème de Carnot pour la chaîne thermo-électrique. Mais comme j'ai fait voir plus haut que l'effet que la chaleur exerce sur l'électricité dans les couches intermédiaires est essentiellement de même nature que ses effets *mécaniques*, tels par exemple que la dilatation d'un gaz, je pense que l'on peut admettre sans la moindre hésitation, et sans qu'il soit nécessaire de le démontrer pour ce cas particulier, qu'il est soumis également à ce principe tout à fait général. Au surplus, l'expérience me semble confirmer cette opinion dans tous les cas où elle conduit à des résultats déterminés d'une manière assez complète.

En nous arrêtant à ce dernier point de vue, recherchons d'abord d'une manière générale s'il existe réellement dans la chaîne une transmission de chaleur d'un corps chaud à un corps froid. Considérons, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, une chaîne composée de deux substances homogènes seulement, et où la chaleur n'agit que dans les deux couches intermédiaires. Nous avons montré plus haut que l'expression de la chaleur engendrée dans les deux couches à la fois est négative; on ne peut pas conclure de là qu'il en est de même dans chaque couche prise isolément, mais on doit plutôt, du moins pour de faibles différences de température, admettre comme règle que les deux expressions de la chaleur engendrée sont de signes contraires. En effet, à températures égales, les différences de niveau sont égales et contraires aux deux contacts; si la température varie dans l'un d'eux, la différence de niveau variera aussi, et comme cette variation a lieu d'une manière continue, elle ne peut du moins pas produire tout d'abord un changement de signe; et aussi longtemps que ceci n'aura pas lieu, les différences de niveau conserveront des signes contraires, de même que les

quantités de travail et de chaleur qui y sont liées. Nous supposerons qu'il en est ainsi dans notre chaîne, et nous reviendrons plus tard sur les exceptions qui peuvent se présenter pour de grandes différences de température. Comme par hypothèse l'état de la chaîne entière doit être stationnaire, et que par suite les températures des deux contacts, que nous appellerons t et t' , doivent être constantes, imaginons que ceci soit dû à ce que les deux contacts sont mis en communication avec deux corps maintenus aux températures t et t' , et dont l'un restitue à l'un des contacts la chaleur détruite, tandis que le second absorbe celle qui est engendrée à l'autre. De cette manière l'un des corps éprouve une perte, l'autre un gain de chaleur, et nous obtenons ainsi une transmission réelle de chaleur, effectuée par la chaîne, d'un corps à un autre.

Il s'agit de savoir si cette transmission satisfait également à la condition de s'effectuer d'un corps chaud à un corps froid, ou si elle ne suit peut-être pas la voie inverse. Considérons sous ce rapport les deux substances dont on a le plus étudié les effets thermo-électriques, et qui par suite laissent le moins de prise au doute, c'est-à-dire le bismuth et l'antimoine; c'est en effet dans le premier sens que s'effectue la transmission, car dans une chaîne composée de ces deux substances, le courant va, au contact le plus chaud, du bismuth à l'antimoine, et au plus froid de l'antimoine au bismuth; et, d'un autre côté, l'on sait qu'un courant qui traverse les lieux de contact dans le premier sens détruit de la chaleur, et que celui qui les traverse en sens inverse en produit. Il en résulte, comme cela doit être, que le corps le plus chaud éprouve une perte, et le plus froid un gain de chaleur. Les autres substances sur lesquelles on a fait des expériences conduisent également au même résultat. On voit aisément combien il rend plus parfaite encore l'analogie que nous avons établie plus haut entre une chaîne thermo-électrique et une machine mue par la chaleur; car évidemment le contact maintenu chaud correspond à la partie chauffée de la machine, et celui qui est maintenu froid au condenseur de la machine à

vapeur ou à la partie dans laquelle l'air froid est comprimé, il s'agit d'une machine à air chaud. Après avoir ainsi établi l'existence de la transmission de chaleur, appliquons-y le principe de Carnot. Admettons pour cela que les deux températures t et t' ne diffèrent que d'un infiniment petit l'une de l'autre, de sorte que nous pourrions poser $t' = t + dt$; nous obtiendrons entre le travail que la force électrique a subi pendant l'unité de temps dans les deux couches intermédiaires à la fois, et la quantité de chaleur transmise, la relation suivante :

$$(8) \quad \frac{\text{Travail subi}}{\text{Chaleur transmise}} = \frac{dt}{C},$$

où C est une fonction de la température qui est la même pour tous les cas, et qui se nomme fonction de Carnot. Dans mon Mémoire sur la force motrice de la chaleur, j'ai prouvé qu'en admettant pour les gaz permanents une hypothèse qui, par des raisons que je développe, est probablement exacte au même degré que les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, on peut déterminer complètement cette fonction, et lui donner la forme très-simple :

$$(9) \quad C = A(a + t),$$

où t désigne la température comptée à partir du point de congélation de l'eau, et où $a = 273^\circ$ cent. environ, tandis que A est, comme de coutume, l'équivalent calorifique du travail ¹⁾. Par là l'équation (8) devient :

1) [V. première partie de cette collection, p. 46 de la traduction française.] L'hypothèse consiste en ce qu'un gaz permanent, qui se dilate à température constante, n'absorbe que la quantité de chaleur consommée par le travail extérieur qu'il effectue. (Dans la première impression du présent Mémoire cette note était plus longue à cause des raisons nouvelles que j'apportais à l'appui de cette hypothèse qui n'était pas encore généralement reconnue comme exacte; mais comme ce sujet a été fréquemment traité dans la première partie, j'ai cru pouvoir laisser ici de côté le reste de la note. 1866.]

$$(8_a) \quad \frac{\text{Travail subi}}{\text{Chaleur transmise}} = \frac{dt}{A(a+t)}.$$

Le travail subi dans les deux couches intermédiaires à la fois pendant l'unité de temps est représenté par la somme des deux premières des expressions (7), comme nous l'avons dit plus haut; seulement nous laissons le signe *moins* de côté, parce que dans notre relation le travail *subi* est regardé comme positif. Nous aurons donc :

$$\text{Travail subi} = \frac{(E + E')^2}{L}.$$

Comme les valeurs absolues de E et de E' sont les valeurs d'une seule et même fonction correspondantes aux températures t et $t + dt$, mais que leurs signes doivent être contraires, on peut écrire :

$$E' = - \left(E + \frac{dE}{dt} dt \right),$$

et par suite :

$$(10) \quad E + E' = - \frac{dE}{dt} dt.$$

On obtient ainsi :

$$(11) \quad \text{Travail subi} = \frac{1}{L} \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 dt^2.$$

La chaleur transmise ou, ce qui revient au même, la chaleur produite au lieu de contact le plus froid, est représentée par la première des expressions (7), après qu'on l'a multipliée par A ; donc :

$$\text{Chaleur transmise} = - AE \frac{E + E'}{L},$$

ou, si l'on tient compte de l'équation (10) :

$$(12) \quad \text{Chaleur transmise} = \frac{A}{L} E \frac{dE}{dt} dt.$$

En substituant les expressions (11) et (12) respectivement dans (8) et (8_a), l'on obtient :

$$(13) \quad \frac{dE}{E} = \frac{Adt}{C}$$

$$(13_a) \quad = \frac{dt}{a+t},$$

et en intégrant :

$$(14) \quad \int \frac{Adt^2}{C}.$$

$$E = \epsilon. e$$

$$(14_a) \quad = \epsilon(a+t),$$

où ϵ est une constante qui dépend de la nature des deux substances en contact, et e la base des logarithmes népériens.

De cette manière on obtient donc, pour les différences de niveau qui surviennent dans les diverses combinaisons qu'on peut faire avec des substances quelconques prises deux à deux, une loi commune, à savoir, qu'elles varient toutes d'après une seule et même fonction de la température; et si l'on regarde comme exacte l'équation plus déterminée (14 a), cette fonction a une forme extrêmement simple, et la loi peut s'exprimer en disant que toute différence de niveau potentiel varie proportionnellement à la température comptée à partir de -273° centigr.

Si l'on compare ce résultat à l'expérience, on trouve, sous plusieurs rapports, une concordance manifeste. Étant donné une chaîne composée de plusieurs substances a, b, c, \dots, h , et représentant les différences de niveau aux contacts dans le même ordre par $E_{ab}, E_{bc}, \dots, E_{ha}$, et la résistance totale à la

1) Thomson a donné la même expression, non à la vérité pour la différence de niveau dont il est question dans ce Mémoire, mais pour la chaleur ou le froid produit au lieu de contact par un courant, lesquels, d'après ce que nous avons vu, sont proportionnels à cette différence de niveau.

conductibilité par L , on obtiendra pour l'intensité du courant l'expression suivante, analogue à l'équation (6) :

$$(15) \quad J = - \frac{E_{ab} + E_{bc} + \dots E_{ha}}{L}.$$

Si toute la chaîne est à la même température, il n'y a pas de courant, et par suite on a dans ce cas :

$$(16) \quad E_{ab} + E_{bc} + \dots E_{ha} = 0.$$

Si maintenant la température de la chaîne varie uniformément, chacune des différences de niveau variera aussi; mais comme pour chaque température nouvelle il en est de même que pour la température initiale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de courant, il s'ensuit que la variation des diverses différences de niveau doit s'effectuer de telle sorte que l'équation (16) soit toujours satisfaite. Cette condition est déjà remplie par la forme même de l'expression (14), sans qu'il soit nécessaire de connaître la fonction de la température qui est multipliée par le

facteur constant. Si l'on pose en effet $e \int \frac{Adt}{C} = \varphi(t)$, et que l'on désigne respectivement par ε_{ab} , ε_{bc} , ε_{ha} les facteurs constants correspondants à E_{ab} , E_{bc} E_{ha} , l'équation (16) devient :

$$(17) \quad (\varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} + \dots + \varepsilon_{ha}) \varphi(t) = 0,$$

et si cette expression est nulle pour une certaine température, sans que $\varphi(t)$ le soit, elle le sera pour toutes les autres.

Les comparaisons qui suivent sont relatives à la fonction de la température elle-même; et pour plus de simplicité je me servirai toujours de la dernière des équations (14) et (14a); car, en admettant même que la fonction C soit réellement différente de $A(a+t)$, la différence ne peut pas être tellement importante que nous ayons à en tenir compte ici où il s'agit de démontrer, non une concordance numérique exacte, mais seulement une concordance approchée. Cette équation

conduit aux conclusions suivantes, qui me paraissent propres à une comparaison avec l'expérience.

1) D'après (14a) les différences de niveau croissent avec la température. Pour vérifier l'exactitude de cette conclusion, rap-pelons-nous que le courant prend toujours la direction suivant laquelle la somme des différences de niveau est négative, et par suite, dans le cas où il n'y a que deux différences, la direction suivant laquelle la plus grande des deux est négative. Pour prouver que c'est au contact le plus chaud que la différence de niveau est la plus grande, il suffit donc de montrer qu'elle est négative relativement à la direction du courant; et c'est ce que nous avons vu plus haut, puisque l'expérience prouve qu'au contact le plus chaud il y a destruction de chaleur.

2) D'après (14a) les variations de chaque différence de niveau sont proportionnelles aux variations de température correspondantes. Il en résulte que dans toute chaîne composée de deux substances homogènes, la force électromotrice¹⁾ doit être proportionnelle à la différence de température qui a lieu entre les deux contacts; ce que l'on peut regarder en général comme la règle dans le cas où les différences de température ne sont pas trop considérables.

3) D'après (14a) les différences de niveau qui croissent le plus rapidement avec la température doivent aussi être celles dont la valeur est la plus considérable. Si nous nommons en effet E_1 et E_2 , les différences de niveau qui ont lieu dans deux combinaisons différentes de deux substances quelconques, et ε_1 et ε_2 , les facteurs constants correspondants, on a :

$$E_1 = \varepsilon_1 (a + t) \text{ et } E_2 = \varepsilon_2 (a + t),$$

d'où résulte pour une température quelconque :

$$E_1 : E_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2;$$

1) On ne pourrait pas remplacer simplement ici la force électromotrice par l'intensité du courant, parce que cette dernière dépend aussi de la résistance à la conductibilité, laquelle varie avec la température.

mais on a aussi :

$$\frac{dE_1}{dt} = \varepsilon_1 \text{ et } \frac{dE_2}{dt} = \varepsilon_2,$$

et par suite :

$$(18) \quad E_1 : F_2 = \frac{dE_1}{dt} : \frac{dE_2}{dt}.$$

Cette conclusion est également confirmée par l'expérience; les combinaisons de substances qui donnent les plus forts courants à une différence de température déterminée, comme celle de bismuth et d'antimoine, présentent en effet aussi ce caractère qu'un courant qui passe par leurs contacts y engendre ou y détruit plus de chaleur; la première de ces propriétés conduit à une valeur considérable du coefficient différentiel $\frac{dE}{dt}$, la seconde à une valeur considérable de la fonction E elle-même.

Ces confirmations, jointes à la probabilité intrinsèque du principe de Carnot, ne permettent pas de douter que l'expression donnée dans les équations (14) et (14_a) ne présente pas simplement, comme une formule empirique, entre certaines limites, une ressemblance extérieure peut-être accidentelle avec la loi que suivent les différences de niveau, mais qu'elle est fondée sur la nature même des choses. Néanmoins à elle seule elle ne représente pas encore les phénomènes avec une exactitude complète; en analysant ceux-ci, surtout dans les cas où il se présente de hautes températures, on trouve en effet des écarts notables, qui montrent que dans la production de ces phénomènes il y a des circonstances accessoires qui agissent, et dont il n'a pas été tenu compte dans la déduction de ces expressions. Ce fait se manifeste surtout dans une chaîne composée de fer et de cuivre : on sait que, lorsqu'on chauffe progressivement l'un des contacts, l'intensité du courant, au lieu d'augmenter constamment, décroît à partir d'une certaine température, et qu'à la chaleur rouge il y a même un renversement du courant.

Thomson ¹⁾ a tiré de ces écarts la conclusion que les effets thermiques du courant, découverts par Peltier, et dont le caractère essentiel consiste en ce que pour des courants contrairement ils sont également de sens contraire, n'ont pas seulement lieu aux contacts de substances différentes, mais « qu'un courant électrique produit des effets thermiques différents suivant qu'il passe, dans un même métal, du chaud au froid, ou du froid au chaud. » D'après l'explication que nous avons donnée plus haut des effets thermiques qui ont lieu aux contacts, nous devons induire de cette conclusion qu'à l'intérieur d'un seul et même métal, dont les différentes parties sont à des températures différentes, la chaleur tend aussi à mouvoir l'électricité dans une direction déterminée, et que, par suite, lorsque l'équilibre s'est établi, la fonction potentielle n'a pas partout la même valeur dans le métal, mais qu'il existe également des différences de niveau entre les diverses parties du même métal.

Pour autant que cela signifie seulement qu'il y a des cas où il se présente à l'intérieur d'un seul métal des différences de niveau dues à la différence des températures, je regarde également cette conclusion comme fondée; car c'est le seul moyen de maintenir le principe de Carnot. Si l'on voulait par exemple expliquer la production du courant dans la chaîne fer-cuivre au moyen des seules différences de niveau qui ont lieu aux contacts, on devrait conclure qu'à la température à laquelle s'effectue le renversement du courant, la différence de niveau au contact le plus chaud serait redevenue précisément égale à celle qui existe à l'autre contact, et se trouverait ainsi à un point où elle passe d'une valeur plus grande à une plus petite ou *vice versa*. Dans ce changement de valeur, elle garderait évidemment tout d'abord son signe, et par suite, dans le renversement du courant, les effets thermiques de celui-ci aux deux contacts devraient également se renverser, de telle sorte que si d'abord la chaleur passait d'un corps chaud à un corps froid, ce serait actuellement la transmission inverse qui aurait

1) *Phil. Mag.*, s. 4, v. 3, p. 529.

lieu, résultat qui est en contradiction manifeste avec le principe de Carnot; on est donc obligé d'admettre que dans l'intérieur des deux métaux réunis dans la chaîne, ou de l'un d'entre eux, il a surgi des différences de niveau qui concourent comme forces électro-motrices à la production du courant; et la condition que le principe de Carnot doit toujours se vérifier, fournit en même temps un moyen de typer du moins une certaine conclusion sur le rapport qui doit exister entre ces diverses différences de niveau.

Mais cela ne veut pas dire que toute différence de température, par cela seul qu'elle existe, doive être nécessairement accompagnée d'une différence de niveau; je pense au contraire que, pour expliquer les écarts observés jusqu'aujourd'hui, il suffit de considérer la différence de niveau qui a lieu dans l'intérieur d'un métal comme étant seulement un effet secondaire de la différence de température, qui se produit lorsque le changement de température d'une de ses parties occasionne un changement dans l'état moléculaire de celle-ci, de sorte que cette dernière partie du métal, et celle qui n'a pas subi le changement, se comportent comme des métaux différents l'une par rapport à l'autre.

Dans plusieurs cas on peut prouver avec assez de certitude qu'il se présente des modifications de ce genre dans une mesure considérable; nous citerons comme exemple l'acier, dans lequel les effets de la chaleur sont particulièrement remarquables. L'acier trempé et l'acier doux se comportent, dans leurs propriétés les plus importantes, comme la dureté, l'élasticité et la fragilité, comme deux métaux tout à fait différents; et l'on sait qu'à leur contact il se produit une différence de niveau, puisqu'on peut en composer une chaîne thermo-électrique, et même, par une multiplication convenable, une pile thermique assez puissante. Or comme toute la différence qui existe entre eux n'a pour cause que la rapidité plus ou moins grande du refroidissement, on doit admettre que la combinaison du fer avec le carbone qui a lieu à une température élevée, et l'état moléculaire corrélatif de toute la masse, tendent à se modifier pendant le refroidissement,

mais que cette modification a besoin d'un certain temps, et que par suite elle peut être arrêtée en tout ou en partie par la rapidité du refroidissement, tandis qu'elle s'effectue par un refroidissement lent. Conformément à ce résultat, on peut conclure de la différence observée entre l'acier refroidi lentement et l'acier refroidi brusquement, à une différence correspondante entre l'acier refroidi lentement et l'acier chaud; et, en effet, Seebeck a tiré cette conclusion de ses expériences thermo-électriques ¹⁾.

Au reste, tous les courants thermo-électriques que l'on obtient par l'emploi d'un seul métal, en en échauffant des parties isolées, témoignent de la fréquence ainsi que de l'influence électrique de ces différences dans l'état moléculaire. Elles sont surtout considérables dans des métaux qui offrent une texture cristalline bien caractérisée. C'est ainsi que Seebeck ²⁾ a observé qu'un anneau d'antimoine fondu d'une pièce se comportait comme s'il était formé de deux métaux différents, dont les limites pouvaient se déterminer exactement. Lorsqu'il fut brisé, on constata que l'une des parties avait une structure stelliforme, tandis que l'autre était formée d'un grain fin, et une recherche subséquente assigna comme cause de cette différence l'inégale rapidité de leur refroidissement. Des expériences faites récemment avec beaucoup de soin par Magnus ³⁾ sur les métaux ductiles l'ont également conduit à ce résultat que les courants qui naissent dans un seul métal ont pour cause une différence dans l'état de ses parties, et surtout dans leur dureté. Or, si la manière dont on traite les différentes parties d'un métal peut occasionner, d'une façon permanente, une différence d'état telle que ces parties se comportent comme des métaux différents quant

1) *Ueber die magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz*, von Dr. T. J. Seebeck. *Mém. de l'Acad. de Berlin* pour 1822 et 1823; et *Ann. de Pogg.*, t. VI, § 47.

2) *Loc. cit.*, § 46.

3) *Mém. de l'Acad. de Berlin* pour 1851, et *Ann. de Pogg.*, t. LXXXIII, p. 469.

à la formation des courants thermo-électriques, on pourra admettre comme une hypothèse assez probable qu'une différence de température peut aussi produire, d'une manière passagère, une différence d'état analogue.

Supposons que ce cas se présente dans une chaîne thermo-électrique, c'est-à-dire qu'une partie de l'un des métaux change d'état moléculaire; il surgira d'abord, comme nous venons de le dire, entre cette partie et celle qui n'a pas changé d'état, une différence de niveau qui ne se présentait pas précédemment; en outre, au lieu où cette partie est en contact avec un autre métal, la différence de niveau qui existe déjà éprouvera une variation qui n'est pas comprise dans l'équation (14), et que l'on devra introduire en outre dans le calcul; or ces deux circonstances se réunissent dans leur action sur le courant. Pour rester d'accord avec le principe de Carnot dans des cas semblables, on n'aura qu'à décomposer en deux parties les effets électriques produits par la chaleur dans la chaîne, les effets immédiats, et ceux qui sont occasionnés par des changements dans l'état moléculaire; on traitera ces derniers comme s'ils étaient dus à des différences réelles de substances; quant aux premiers, l'équation (14) y est applicable sans modification; et il suffira de l'appliquer également après chaque modification de l'état moléculaire à la chaîne dans son état varié, de la même manière qu'on l'a appliquée précédemment à la chaîne dans son état primitif. Que le changement dans l'état moléculaire se fasse subitement à une température déterminée, ou qu'il y ait un passage continu d'un état à l'autre, cela n'occasionnera aucune différence essentielle; dans ce dernier cas, en effet, au lieu d'une différence de niveau finie, on n'aura qu'à admettre une série infinie de différences infiniment petites.

Si l'on voulait réellement appliquer ce procédé à tous les phénomènes thermo-électriques isolés qui ont leur cause dans de semblables modifications de l'état moléculaire, et les expliquer complètement de cette manière, on éprouverait certainement de grandes difficultés, parce que d'un côté ces phénomènes thermo-électriques; et de l'autre côté ces modi-

fications de l'état moléculaire devraient être mieux connus qu'ils ne le sont jusqu'à présent. Cette entreprise dépasserait également de beaucoup les limites de ce travail. Comme dans toute branche de la science on doit d'abord poser une base certaine pour l'explication des phénomènes qui se représentent habituellement, et que l'on peut considérer comme la règle, avant de pouvoir aborder l'étude des exceptions isolées, j'ai cru devoir, dans cet essai d'une théorie mécanique des phénomènes thermo-électriques, n'envisager d'abord ces derniers que sous cette forme régulière. Les exceptions n'avaient besoin d'être mentionnées que pour autant qu'il fût nécessaire de démontrer qu'elles ne sont pas en contradiction avec les principes établis.

MÉMOIRE XIII.

SUR LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DANS LES ÉLECTROLYTES.

Ann. de Pogg., livraison de juillet 1857, t. CI, p. 338; *Phil. Mag.*, 4^{me} série,
vol. XV, p. 94 1).

4. Dans un Mémoire précédent ²⁾ j'ai étudié les effets d'un courant galvanique à l'intérieur d'un conducteur de la première classe (c'est-à-dire qui conduit l'électricité sans électrolyse), et je n'ai pas eu égard au mode de production du courant. Il est résulté de cette étude que les lois d'après lesquelles la production de chaleur a lieu dans ces conducteurs sont une conséquence immédiate de la loi d'Ohm, et du principe de l'équivalence de la chaleur et du travail. Si l'on considère en lui-même, abstraction faite des autres parties de la chaîne, un conducteur de la seconde classe, qui conduit par électrolyse, on pourra déduire d'une manière analogue des conséquences, en partie rigoureusement fondées, en partie au moins probables, qui me semblent intéressantes et que je me propose de développer dans ce Mémoire.

2. D'abord, quant aux lois de la production de chaleur, les conclusions du précédent Mémoire peuvent s'étendre sans

1) [Ce Mémoire s'appuie sur une hypothèse qui n'est développée que dans le Mémoire XIV qui suit. Mais comme il appartient, par son sujet, à ceux qui traitent de l'électricité, je l'ai placé à la suite de ces derniers, avant le Mémoire sur lequel il s'appuie.]

2) Sur le travail effectué et la chaleur produite dans le conducteur par un courant stationnaire [Mémoire XI de cette collection.]

CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DANS LES ÉLECTROLYTES. 157

aucune modification aux conducteurs de la seconde classe, si l'on admet que la loi d'Ohm leur est applicable, et si l'on suppose en outre, comme plus haut, que le courant est stationnaire, et qu'il n'exerce ni n'éprouve du dehors aucun effet d'induction électro-magnétique ou dynamique.

Pour maintenir l'électricité en mouvement malgré la résistance à la conductibilité, il faut qu'en chaque lieu du conducteur agisse une force qui tende à mouvoir dans une direction déterminée l'électricité qui l'occupe, ou qui, dans le cas où l'on admet deux électricités, tende à mouvoir l'électricité positive dans un sens, et la négative, avec la même intensité, dans le sens opposé. Cette force est exercée par de l'électricité libre qui se trouve, comme Kirchoff l'a démontré, non à l'intérieur du conducteur, mais seulement à sa surface, ou à la surface de séparation de deux conducteurs différents. Pour l'intérieur d'un conducteur homogène, on peut appliquer à ceux de la seconde classe ce que l'on a dit de ceux de la première; c'est-à-dire que, si l'on part de l'hypothèse qu'il y a deux électricités qui se meuvent en sens contraires, on doit admettre que dans chaque volume appréciable de l'intérieur du conducteur il existe toujours des quantités égales des deux électricités, et si l'on n'admet qu'une électricité, qu'il se trouve toujours dans chaque volume la quantité d'électricité normale pour laquelle ce volume est à l'état neutre.

Le travail effectué par la force motrice peut se déterminer dans le cas actuel de la même manière que dans mon précédent Mémoire; je me contenterai donc d'indiquer le résultat du calcul sans le développer. Imaginons une portion quelconque isolée à l'intérieur du conducteur et limitée par une surface fermée; désignons par $d\omega$ un élément de cette surface, par V la valeur de la fonction potentielle de l'électricité libre en cet élément, par N la normale à celui-ci, comptée comme positive vers l'extérieur, par k enfin le pouvoir conducteur de la substance; le travail W , effectué pendant l'unité de temps dans cette portion du conducteur, sera déterminé par l'équation :

$$W = k \int v \frac{dV}{dN} d\omega,$$

où l'intégrale doit s'étendre à toute la surface de la portion considérée du conducteur.

3. Si l'on voulait actuellement déterminer la *chaleur* produite par le courant, il pourrait sembler au premier abord qu'il doit y avoir sous ce rapport une différence entre les conducteurs de la première classe et ceux de la seconde. Dans ceux de la première, les molécules matérielles restent invariablement dans leur position, et l'électricité seule est en mouvement; dans ceux de la seconde, au contraire, les parties constituantes des molécules matérielles sont aussi mises en mouvement, et il se produit des décompositions et des recompositions dans lesquelles, sans aucun doute, les forces moléculaires que les parties constituantes exercent les unes sur les autres développent une activité considérable. Mais en examinant le phénomène de plus près, on se convainc toutefois aisément que, dans la détermination de la chaleur produite, on n'a pas à tenir compte des quantités de travail effectuées par les forces moléculaires, quelque importantes qu'elles puissent être isolément, parce qu'elles se compensent mutuellement.

Si, tandis que le conducteur est parcouru par un courant stationnaire, l'on examine, au commencement et à la fin d'une unité de temps, l'état de la portion considérée, limitée par une surface fermée, on verra qu'il n'a subi pendant ce temps aucune modification essentielle. A la vérité, les parties constituantes électro-positives d'un grand nombre de molécules se sont séparées des électro-négatives avec lesquelles elles étaient combinées, mais en revanche elles se sont combinées avec d'autres parties entièrement semblables, et le travail que les forces moléculaires effectuent dans cette combinaison est indubitablement aussi grand que celui qu'elles subissent (ou qu'elles effectuent négativement) dans la décomposition. De même, autant il est sorti d'un côté de particules matérielles de cet espace, autant il en est entré de

l'autre, de sorte que toute la masse qui se trouve à la fin de cette unité de temps dans l'espace considéré a la même densité, la même composition et la même disposition moléculaires qu'au commencement. Sans connaître les quantités de travail effectuées par les forces moléculaires dans chacun des phénomènes particuliers, on peut donc conclure avec certitude que la somme algébrique de ces quantités est nulle. Il ne reste donc que le travail effectué par la force motrice de l'électricité pour vaincre la résistance à la conductibilité, travail qui doit s'être transformé en force vive, puisqu'il ne s'est produit aucune modification persistante dans le conducteur, et par conséquent en chaleur, puisqu'il ne se présente pas d'autre force vive dans le phénomène.

D'après cela, si l'on représente par H la quantité de chaleur produite pendant l'unité de temps dans cet espace, et par A l'équivalent calorifique du travail, on pourra écrire, en suite de l'équation précédente :

$$H = Ak \int v \frac{dV}{dN} d\omega.$$

Cette équation renferme comme cas particulier, ainsi que je l'ai montré dans mon précédent Mémoire, les lois trouvées expérimentalement pour un conducteur linéaire, à savoir, que la quantité de chaleur produite est proportionnelle à la résistance et au carré de l'intensité du courant.

4. Étudions maintenant plus particulièrement la manière dont on doit se représenter la conductibilité électrique à l'intérieur d'un électrolyte.

Les molécules de l'électrolyte sont décomposées par le courant en deux parties constituantes qui peuvent être, ou des atomes simples, ou même aussi des molécules composées de plusieurs atomes; c'est ainsi que, dans le sulfate de cuivre, l'une des parties constituantes Cu est simple, tandis que l'autre SO_4 est composée. Je nommerai ces parties constituantes, qu'elles se composent d'un ou plusieurs atomes, les *molécules partielles*, et une molécule entière de l'électrolyte,

dans le cas où la distinction sera nécessaire, la *molécule totale*.

De la manière dont la décomposition de l'électrolyte est liée à la conductibilité, on doit conclure que les deux molécules partielles ont dans leur combinaison en une molécule totale des états électriques opposés qui persistent après leur séparation. Si l'on part de l'hypothèse de deux électricités, on doit donc admettre que l'une des molécules partielles a un excès d'électricité positive, et l'autre un excès égal d'électricité négative; en partant au contraire de l'hypothèse d'une seule électricité, on devra admettre que l'une des molécules partielles a plus, et l'autre moins d'électricité qu'à l'état neutre.

On imagine aisément que deux molécules de nature différente puissent prendre au contact des états électriques opposés. De même il n'y a aucune difficulté à imaginer que les états persistent après la séparation, pourvu que l'on admette qu'en aucun lieu à l'intérieur du conducteur il n'y ait une accumulation de molécules partielles positives ou négatives séparées, mais qu'au contraire les deux espèces de molécules sont répandues uniformément, de sorte qu'il en existe un nombre égal des deux espèces dans tout volume appréciable. Dans ce cas, en effet, les actions que la quantité d'électricité inhérente à une molécule partielle éprouve de la part des quantités d'électricité des molécules partielles qui l'environnent, ne peuvent, à cause des effets opposés des molécules partielles positives et négatives, avoir une résultante capable de mouvoir cette première quantité d'électricité dans un sens déterminé, et par suite de la séparer de sa molécule, si le mouvement de celle-ci était empêché.

Si, au contraire, il y avait dans un certain volume un grand nombre de molécules qui fussent toutes chargées de la même électricité, la quantité d'électricité de l'une d'entre ces molécules serait repoussée par les quantités d'électricité de toutes les autres, et ces forces, si la molécule n'était pas précisément au centre de la masse, pourraient par leur réunion produire une force considérable agissant de l'intérieur vers

l'extérieur. Comme les quantités d'électricité inhérentes aux autres molécules seraient soumises à des effets tout à fait analogues, puisque chacune d'elles serait poussée vers l'extérieur par l'action totale de toutes les autres, il y aurait dans l'état électrique de toute la masse une tension qui ne pourrait rester invariable que si cette masse n'était absolument pas conductrice. Mais, si elle l'était, l'électricité libre de toutes les molécules se répandrait avec plus ou moins de rapidité vers l'extérieur, suivant le degré de conductibilité, d'abord à la surface de la masse, et de là, si la masse n'était pas complètement isolée, dans les corps environnants.

5. Considérons maintenant le phénomène de la décomposition lui-même, tel qu'il a lieu dans le liquide qui sert d'électrolyte ou qui renferme celui-ci en dissolution; on peut d'abord regarder comme établi que ce ne sont pas les molécules partielles devenues libres à l'une des électrodes qui se meuvent jusqu'à l'autre à travers le liquide, mais que dans toute la masse de liquide qui se trouve entre les deux électrodes il y a partout des décompositions et de nouvelles combinaisons, de sorte que les molécules partielles positives qui arrivent à la cathode pendant l'unité de temps, sont bien égales en nombre à celles qui partent de l'anode, mais ne sont pas les mêmes; il en est ainsi également des molécules partielles négatives qui arrivent à l'anode.

Mais il faut encore déterminer d'une façon plus précise la manière dont les décompositions qui ont lieu dans les différentes couches du fluide sont reliées entre elles; et, tout d'abord, nous avons en particulier à exclure une explication qui semble assez naturelle, mais qui est complètement inexacte.

On pourrait en effet imaginer que la décomposition part de l'une des électrodes, de l'anode par exemple; que les molécules partielles négatives des molécules totales décomposées y sont retenues, que les positives au contraire passent à la couche voisine de liquide et y opèrent une nouvelle décomposition, en ce qu'elles se combinent avec les molécules partielles négatives de cette couche, et rendent les positives

parties constituantes de chaque molécule totale, qui sont douées d'électricités contraires, se tourneraient du côté vers lequel elles sont poussées par la force motrice.

En outre, cette force chercherait à séparer les deux molécules partielles qui constituent une molécule totale, et à les mouvoir en sens contraires; puis, lorsque ce mouvement se produirait, la molécule partielle positive d'une molécule totale irait rencontrer la molécule partielle négative de la suivante, et se combiner avec elle. Or, pour séparer les molécules partielles combinées, il faut que l'attraction qu'elles exercent l'une sur l'autre soit vaincue, et pour cela il faut une force d'une intensité déterminée; on est ainsi amené à cette conclusion *que, aussi longtemps que la force agissante ne possède pas cette intensité, il ne peut y avoir aucune décomposition des molécules; qu'au contraire lorsque la force aura atteint cette intensité, un grand nombre de molécules devront se décomposer à la fois, puisqu'elles sont toutes sous l'influence de la même force, et qu'elles occupent à peu près la même position les unes par rapport aux autres.* Relativement au courant électrique, on peut énoncer cette conclusion sous la forme suivante, en supposant que le conducteur ne puisse conduire que par électrolyse: *Aussi longtemps que la force motrice qui agit dans le conducteur est en dessous d'une certaine limite, elle ne produit pas de courant; mais lorsqu'elle a atteint cette limite, il naît tout à coup un courant intense.*

Mais cette conclusion est tout à fait en contradiction avec l'expérience. La moindre force ¹⁾ produit déjà un courant qui se propage par des décompositions et des recompositions

1) Je ferai encore une fois remarquer expressément qu'ici, comme dans tout ce Mémoire, il ne s'agit pas des forces qui agissent aux électrodes, où les produits de la décomposition se dégagent et où la polarisation doit être vaincue, mais exclusivement de la force qui agit à l'intérieur de l'électrolyte lui-même, où chaque molécule partielle, séparée de la molécule partielle avec laquelle elle était combinée jusqu'alors, se recombine aussitôt avec une autre molécule partielle de même espèce, de sorte que la masse reste invariable dans son essence, et qu'il n'y a à vaincre que la résistance à la conductibilité.

alternatives, et l'intensité de ce courant croît, d'après la loi d'Ohm, proportionnellement à la force.

D'après cela l'hypothèse précédente, consistant en ce que les molécules partielles d'un électrolyte sont combinées d'une manière stable en molécules totales, et en ce que celles-ci ont une disposition régulière déterminée, doit être inexacte. On peut encore exprimer ce résultat d'une manière plus générale sous la forme suivante. Toute hypothèse qui consiste en ce que l'état naturel d'un liquide électrolytique est un état d'équilibre dans lequel chaque molécule partielle positive est liée d'une manière stable à une molécule négative, et en ce qu'en outre, pour faire passer ce liquide de cet état d'équilibre à un autre, qui est semblable en essence au précédent, et n'en diffère qu'en ce qu'un certain nombre de molécules partielles positives sont combinées avec d'autres molécules négatives que celles avec lesquelles elles l'étaient dans le premier état, il faut une force d'une intensité déterminée agissant sur les molécules qui subissent ce changement, toute hypothèse de cette nature, disons-nous, est en contradiction avec la loi d'Ohm.

Mais je pense que l'hypothèse suivante, qui ne prête pas à cette objection, et qui me semble aussi conciliable avec les autres faits connus, mérite d'être prise en considération.

7. Dans mon Mémoire « sur la nature du mouvement que nous nommons chaleur ¹⁾, » j'ai exprimé l'idée que les molécules des fluides n'occupent pas des positions d'équilibre déterminées, autour desquelles elles oscillent, mais qu'au contraire leurs mouvements sont tellement rapides, qu'elles se rencontrent dans des positions qui varient sans cesse et toujours nouvelles, et qu'elles se meuvent irrégulièrement les unes parmi les autres.

Commençons par imaginer qu'il se trouve dans le liquide électrolytique une molécule partielle isolée, par exemple une molécule électro-positive, dont nous supposerons que l'état électrique est encore tout à fait le même qu'au moment

1) [Mémoire XIV de cette collection.]

où elle s'est séparée de la molécule totale. Je pense que, tandis que cette molécule partielle se meut entre les molécules totales, parmi toutes les positions qu'elle peut prendre, il s'en trouve dans lesquelles elle attire la molécule partielle négative d'une molécule totale avec une force plus intense que celle avec laquelle s'attirent en ce moment les deux molécules partielles qui en constituent une totale, et qui du reste n'occupent pas l'une par rapport à l'autre une position invariable. Aussitôt que la molécule considérée occupe l'une de ces positions, elle se combine avec cette molécule partielle négative, et la molécule partielle positive qui était combinée jusqu'alors avec elle redevient libre. Celle-ci, à son tour, se meut seule, et décompose après un certain temps, de la même manière, une autre molécule totale, et ainsi de suite; tous ces mouvements et ces décompositions ont du reste lieu tout aussi irrégulièrement que les mouvements de la chaleur qui les occasionnent.

Si nous considérons en outre la manière dont les molécules totales se comportent les unes par rapport aux autres, je pense qu'ici également il arrive parfois que la molécule partielle positive d'une molécule totale se trouve dans une position plus favorable vis-à-vis de la molécule négative d'une autre molécule totale, que vis-à-vis de la sienne propre à ce même instant. Alors ces deux molécules, jusqu'à présent étrangères l'une à l'autre, se combineront en une molécule totale, et les deux molécules partielles rendues libres (la négative de la première et la positive de la seconde), ou se combineront également entre elles, ou, si le mouvement de la chaleur les en empêche, elles se mêleront aux autres molécules totales, et y produiront des décompositions semblables à celles que nous avons décrites plus haut pour une molécule isolée.

La fréquence de ces décompositions mutuelles dans un liquide dépendra d'abord de la nature de celui-ci, de la liaison plus ou moins intime des parties des molécules totales entre elles, et ensuite de la rapidité du mouvement moléculaire, c'est-à-dire de la température.

8. Considérons actuellement un liquide dont les molécules ont déjà d'elles-mêmes un semblable mouvement, dans lequel il s'opère un échange irrégulier de molécules partielles, et supposons qu'à l'intérieur de ce liquide agisse une force électrique, qui tende à mouvoir toutes les molécules partielles positives dans un sens, et les négatives en sens contraires; on verra aisément quelle est la différence qu'elle doit apporter dans la nature du mouvement moléculaire.

Une molécule libre ne suivra plus alors entièrement les directions irrégulières et variables dans lesquelles elle est entraînée par les mouvements de la chaleur, mais elle changera la direction de son mouvement dans le sens de la force agissante, de sorte qu'entre les directions des molécules partielles positives libres, tout irrégulières qu'elles sont encore, il y a une certaine direction prédominante, et que les molécules négatives se meuvent de même d'une manière prépondérante dans la direction opposée. En outre, dans l'action d'une molécule partielle sur une molécule totale, et de deux molécules totales l'une sur l'autre, les décompositions qui permettront aux molécules partielles d'obéir également à la force électrique seront facilitées, et deviendront par suite plus fréquentes qu'elles ne le seraient sans cette force, de façon que, dans des cas où la position des molécules n'est pas encore assez favorable pour que la décomposition puisse avoir lieu d'elle-même, l'action de la force électrique peut l'occasionner. Réciproquement, les décompositions, dans lesquelles les molécules partielles devraient se mouvoir en sens contraire de la force électrique, sont contrariées par cette force et par là deviennent plus rares.

Si l'on considère à l'intérieur de ce liquide, tandis que la force électrique agit, une petite portion de surface normale à la direction de cette force, elle sera traversée pendant l'unité de temps par plus de molécules partielles positives dans le sens positif que dans le sens négatif, et par plus de molécules partielles négatives dans le sens négatif que dans le sens positif. Or comme pour chaque espèce de molécules partielles deux passages qui s'effectuent en sens inverse se compensent mutuellement

quant à leur effet, et que nous n'avons par suite à considérer que l'excès des passages qui s'effectuent dans l'une des directions, on peut donner à l'énoncé précédent cette forme plus simple : *la portion de surface est traversée dans le sens positif par un certain nombre de molécules positives, et dans le sens négatif par un certain nombre de molécules négatives*. Ces deux nombres ne doivent pas nécessairement être égaux, parce qu'ils dépendent non-seulement de la force électrique qui a la même grandeur pour les molécules partielles positives et négatives, mais encore du degré de mobilité qui peut être différent, pour plusieurs raisons, dans des molécules d'espèces différentes.

Ces mouvements opposés des deux espèces de molécules partielles forment le courant galvanique à l'intérieur du fluide. Pour déterminer l'intensité du courant, il n'est pas nécessaire de connaître séparément le nombre des molécules partielles positives qui traversent la portion de surface dans le sens positif, et le nombre des molécules partielles négatives qui la traversent dans le sens négatif, mais il suffit d'en connaître la somme. Que l'on parte en effet de l'hypothèse qu'il existe deux électricités, et qu'une molécule partielle électro-négative est douée d'une certaine quantité d'électricité libre négative; ou que l'on suppose qu'il n'existe qu'une électricité, et qu'une molécule électro-négative en possède une quantité moindre que celle qui convient à l'état neutre, on devra admettre dans les deux cas que l'accroissement d'un courant galvanique est tout aussi considérable par le mouvement d'une molécule partielle électro-positif dans le sens du courant, que par celui d'une égale molécule partielle électro-négative en sens contraire. Par suite, pour le cas où le mouvement moléculaire serait de telle nature, que le mouvement des molécules partielles positives fût prépondérant dans un sens, et qu'il en passât n pendant l'unité de temps à travers la portion de surface dans le sens positif, si nous désignons par C_n l'intensité du courant produit par le mouvement, nous devons de même, pour un mouvement dans lequel il passe simultanément n molécules partielles positives

dans le sens positif, et n' négatives dans le sens négatif, désigner l'intensité du courant par $C(n + n')$.

9. Dans cette manière de concevoir l'état du liquide, la difficulté mentionnée plus haut disparaît. On voit aisément que l'influence que la force électrique exerce sur les décompositions et les mouvements de molécules qui ont déjà lieu d'eux-mêmes, mais qui sont encore irréguliers, ne se fera pas sentir seulement lorsque cette force aura atteint une certaine intensité, mais que la moindre force, agissant de la manière décrite plus haut, exercera sur eux un effet, et que la grandeur de celui-ci croîtra avec l'intensité de cette force. Tout le phénomène concorde donc très-bien avec la loi d'Ohm.

On n'a pas encore pu expliquer d'une manière satisfaisante pourquoi le pouvoir conducteur électrique, qui dépend de la facilité avec laquelle les décompositions des molécules ont lieu à l'intérieur du liquide, est si différent dans différents liquides; pourquoi, par exemple, les décompositions des molécules du sulfate hydrique ont lieu beaucoup plus aisément que celles des molécules d'eau; ni d'où provient l'influence considérable que le délaïement de l'acide sulfurique exerce sur le degré de conductibilité; mais je ne vois dans cette difficulté rien qui puisse être regardé comme étant en contradiction avec la théorie précédente.

Au contraire, cette théorie explique d'une manière très-naturelle l'accroissement du pouvoir conducteur avec la température, dans les conducteurs de la seconde classe, puisque la rapidité plus grande du mouvement intérieur doit contribuer à faciliter les décompositions mutuelles des molécules.

Comparons l'ancienne théorie de Grotthuss avec celle que nous venons de développer; dans celle-là, on admet que le mouvement n'est produit que par la force électrique, et n'a lieu que dans deux directions déterminées, puisque les décompositions se propagent régulièrement de molécule à molécule; dans celle-ci au contraire les mouvements déjà existants sont seulement modifiés, et non de telle sorte qu'ils deviennent

complètement réguliers, mais de manière que, dans la grande variété de mouvements qui existe encore, les deux directions déterminées sont prédominantes.

10. Après avoir écrit ces idées sur la manière dont se comportent les fluides électrolytiques, j'appris, dans un entretien avec un chimiste, que des idées semblables sur la manière dont se comportent les composés liquides et gazeux avaient déjà été exprimées par Williamson dans un Mémoire sur la théorie de la formation de l'éther ¹⁾. On y lit entre autres ²⁾ : « Nous sommes ainsi conduits à admettre que dans un agrégat de molécules de chaque combinaison, il s'effectue un échange perpétuel entre les éléments qu'elle contient. Supposons par exemple qu'un vase renfermant de l'acide chlorhydrique soit rempli d'un grand nombre de molécules de composition C/H ; les considérations que nous avons exposées nous conduiraient à admettre que chaque atome d'hydrogène ne reste pas en repos dans sa position relative par rapport à l'atome de chlore, avec lequel il était d'abord combiné, mais qu'il change perpétuellement de place avec d'autres atomes d'hydrogène. »

D'après cela Williamson semble admettre, dans le groupement des molécules partielles, plus de mobilité qu'il n'est nécessaire pour l'explication de la conductibilité électrique. Il parle de l'échange perpétuel d'un atome d'hydrogène avec d'autres atomes semblables, tandis qu'il suffit, pour l'explication de la conductibilité électrique, d'admettre que, dans les rencontres des molécules totales, il se présente un certain nombre de fois, relativement peut-être assez rare, un échange des molécules partielles.

Williamson cite à l'appui de sa manière de voir le fait suivant : lorsque deux combinaisons, dont les parties constituantes électro-positives et négatives sont différentes, se trouvent en dissolution dans un liquide, les deux combinai-

1) *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. LXXVII, p. 37. Lu à la séance de la *British Association* à Edimbourg.

2) *Ibid.* p. 46.

sons primitives ne persistent pas simplement, et il ne survient pas non plus une autre disposition de telle nature que la partie constituante électro-positif de l'une d'elles se combine exclusivement avec l'une des deux parties constituantes électro-négatives, et l'autre partie électro-positif avec l'autre partie électro-négative, mais les quatre combinaisons possibles se forment dans un certain rapport, d'où il résulte que, si l'une des quatre est insoluble, elle se précipitera. Je pense aussi que ce phénomène s'explique très-naturellement par ce fait, que les combinaisons des molécules partielles deux à deux ne sont pas stables, mais variables, et qu'une molécule partielle positive ne peut pas seulement déplacer une molécule partielle positive de même espèce, mais peut encore en déplacer une d'espèce différente; et c'est également ce phénomène que j'ai eu en vue en avançant la théorie exposée plus haut. Toutefois je ne crois pas non plus qu'il soit ici nécessaire que toutes les molécules se trouvent dans un échange perpétuel; mais il suffit, ce me semble, qu'il s'effectue çà et là de ces échanges; car si même le nombre des échanges est faible relativement à celui des chocs, il peut cependant être très-considérable en lui-même, et produire en un temps très-court une modification considérable dans la nature de la combinaison primitive.

Comme je suis arrivé à la conclusion relative à l'échange qui s'effectue entre les molécules partielles à l'intérieur d'un fluide, d'une manière tout à fait indépendante et par une voie toute différente de celle de Williamson, j'ai cru, même après avoir eu connaissance de son Mémoire, pouvoir publier mes idées sans y rien modifier; du reste, on s'apercevra ainsi d'autant mieux jusqu'à quel point nos deux manières de voir se confirment mutuellement.

11. On a récemment agité plusieurs fois la question de savoir si, dans les conducteurs de la seconde classe, à côté de la conductibilité par électrolyse, il en existe encore une de la même nature que celle qui existe dans les conducteurs de la première classe.

Au point de vue théorique, il n'y a rien qui me paraisse

contraire à l'hypothèse que les deux espèces de conductibilité puissent exister simultanément dans le même corps. Mais à cause du manque de faits bien établis, qui pourraient servir de base à des déductions théoriques, on devra laisser jusqu'à présent à l'expérience de déterminer quel est le rapport des deux espèces de conductibilité dans des cas particuliers.

Pour les corps sur lesquels on a fait des expériences dans ce sens, et qui sont les plus importants à cause de la fréquence de leurs applications, il est établi que la conductibilité sans électrolyse, pour autant qu'elle existe, est en tout cas très-faible; et par suite il ne sera pas nécessaire de nous arrêter à cette espèce de conductibilité, qui du reste ne nous offrirait rien d'essentiellement neuf pour la théorie.

12. Pour terminer, il nous reste encore à mentionner un phénomène, qui, dans plusieurs cas, est lié à la conductibilité électrique, c'est le transport du liquide dans la direction du courant positif, pendant que le courant traverse une paroi poreuse.

Ce phénomène a surtout été analysé avec soin par Wiedemann ¹⁾; il est arrivé à une série de lois très-importantes pour la théorie de ce phénomène; plusieurs d'entre elles sont condensées vers la fin de son Mémoire dans cette proposition : « Qu'une tension électrique, qui existe aux deux côtés d'une paroi poreuse plongée dans un liquide quelconque, transporte le fluide du côté positif au négatif avec une force égale à une pression hydrostatique directement proportionnelle à cette tension. »

Ce que Wiedemann appelle ici la tension électrique est exprimé mathématiquement, la différence des valeurs de la fonction potentielle de l'électricité libre sur les deux faces de la paroi poreuse; et si l'on tient compte de la manière dont la force électrique, qui agit à l'intérieur de la paroi, et qui produit le courant électrique, dépend de cette même différence, on trouvera que l'on peut énoncer cette proposition

1) *Ann. de Pogg.*, t. LXXXVII, p. 321; et t. XCIX, p. 177.

d'une manière plus simple sous cette forme : *La force qui transporte le liquide à travers la paroi est proportionnelle à la force qui transporte l'électricité elle-même.*

Cette proposition est tellement simple, que l'on serait peut-être engagé par là à lui attribuer une valeur générale, et à croire que, dans la conductibilité électrique dans les électrolytes, il existe en général une relation déterminée entre la force qui transporte l'électricité à l'intérieur du liquide, et celle qui transporte le liquide lui-même, et que par suite une explication de la conductibilité électrique, dans laquelle on ne tiendrait pas compte de cette dernière force, devrait nécessairement être incomplète. Mais cette manière de voir serait inexacte. La proposition ne peut s'appliquer qu'aux cas pour lesquels Wiedemann l'a trouvée. Le liquide doit se trouver dans une paroi poreuse; et si l'on emploie plusieurs de celles-ci pour les comparer entre elles, elles doivent être de même substance. On peut conclure de plusieurs faits connus, et Breda et Logeman ¹⁾ ont récemment démontré, par des expériences spéciales, que dans une masse de liquide continue cette seconde force ou n'existe absolument pas, ou du moins est insensible. Nous avons donc ici affaire à une force qui n'est pas généralement liée à la conductibilité électrique, mais qui n'agit qu'à l'intérieur d'une paroi poreuse, ou, en d'autres termes, qui n'agit que quand le liquide, au lieu de former une masse continue, est partagé en un grand nombre de canaux très-étroits.

Jusqu'aujourd'hui on n'a pas encore réussi à expliquer ce phénomène ²⁾, et l'idée que je m'en suis faite moi-même est encore trop hypothétique pour que je croie convenable de m'y arrêter. Pour le but du présent Mémoire il suffit que l'on admette que, dans les considérations précédentes sur la

1) *Biblioth. univ.*, t. XXX, p. 1; et *Ann. de Pogg.*, t. C, p. 149.

2) [Plus tard a paru sur ce sujet un beau travail de Quincke (*Ann. de Pogg.*, t. CXIII, p. 513, 1861), dont les résultats, comme on le reconnaîtra aisément, concordent parfaitement avec les remarques précédentes. 1866.]

manière dont la conductibilité électrique a lieu à l'intérieur d'une masse continue d'un liquide électrolytique, il n'était pas nécessaire de tenir compte de ce phénomène.

13. Je crois devoir toutefois examiner encore brièvement ce phénomène sous un seul point de vue, celui de la production de travail et de chaleur qui y est liée.

D'abord il n'y a pas de doute que le mouvement du liquide à travers la paroi est dû à la même électricité libre qui produit le courant électrique à l'intérieur de cette paroi. En outre, d'après ce que l'on sait du reste de l'action de l'électricité, on doit admettre que la force qui réside dans l'électricité libre ne peut agir que sur de l'électricité, et n'agit sur des molécules matérielles que pour autant qu'elles soient électrisées. Nous pouvons donc dire : l'effet immédiat de l'effort exercé par l'électricité libre ne consiste qu'à mouvoir l'électricité, et le mouvement des masses matérielles est un effet secondaire lié au mouvement de l'électricité.

D'après cela, tout le travail effectué par l'électricité à l'intérieur d'une paroi poreuse peut se déterminer aussi aisément qu'on le fait dans d'autres conducteurs. Il est représenté par l'accroissement du potentiel de l'électricité motrice libre sur l'électricité qui traverse la paroi.

Mais les effets de ce travail, transportés aux masses matérielles, diffèrent en partie, dans une paroi poreuse, de ceux qui se présentent dans une masse liquide continue. Une partie, et même dans la plupart des cas la partie de beaucoup la plus considérable du travail, est employée à vaincre la résistance à la conductibilité, tout à fait de la manière ordinaire, au moyen de décompositions et de recompositions des molécules, ainsi que de mouvements opposés des molécules partielles. Cette partie du travail est entièrement transformée en chaleur à l'intérieur de la paroi. Une autre partie du travail au contraire est employée à mouvoir tout le liquide ; et, relativement à cette dernière, il peut se présenter un double mode d'action.

Il s'agit de savoir si le liquide, en traversant la paroi, a ou n'a pas à vaincre une contre-pression, que l'on peut regarder

comme une pression hydrostatique. Si le liquide n'éprouve pas de contre-pression, il n'y aura à vaincre que le frottement dans la paroi, et cette partie du travail sera aussi entièrement transformée en chaleur. Mais s'il existe une contre-pression, qui n'est toutefois pas assez considérable pour empêcher le mouvement du liquide, le travail consommé par ce mouvement sera déjà moindre en lui-même, parce qu'il passera moins de liquide, et il n'y aura qu'une partie de ce travail qui sera transformée en chaleur, tandis que l'autre sera employée à vaincre la pression hydrostatique, ou, en d'autres termes, sera compensée par le travail négatif de cette contre-pression. Si celle-ci enfin est assez considérable pour faire équilibre à la force motrice, et qu'il n'y ait aucun mouvement du liquide, la partie du travail qui se rapporte à ce mouvement sera aussi nulle.

On peut comprendre ces différents cas dans l'énoncé suivant. Dans les deux cas extrêmes, où il n'y a pas de contre-pression, ou bien où celle-ci est assez grande pour empêcher tout mouvement du liquide, tout le travail effectué par la force électrique est transformé en chaleur ; dans les cas intermédiaires, au contraire, une partie du travail est employée à vaincre la contre-pression hydrostatique.

14. Il est aisé de déterminer la quantité de travail qui est employée à mouvoir le liquide, et celle qui est consommée à vaincre la contre-pression. Si l'on représente la force qui pousse le liquide à travers la paroi, et que l'on peut remplacer également par une pression hydrostatique, par un certain poids sur l'unité de surface, il suffira de multiplier ce nombre par le volume de liquide qui traverse la paroi pendant un certain temps, pour obtenir le travail effectué pendant ce temps par la force qui meut le liquide. De même on obtiendra le travail négatif de la contre-pression en la multipliant par le volume de liquide.

Afin de nous faire une idée approchée de la valeur de ces quantités de travail, admettons par exemple que la force motrice soit telle qu'elle puisse vaincre une contre-pression hydrostatique d'une atmosphère. Cette force, exprimée en

kilog. par mètre carré, sera égale à 40333; et, pour obtenir le travail en kilogrammètres, on devra multiplier ce nombre par le volume, en mètres cubes, du liquide qui a traversé la paroi. Considérons un intervalle de temps pendant lequel un litre ou 0,001 *m. c* du liquide la traverse, nous obtiendrons pour le travail correspondant

$$40333. 0,001 = 40,333 \text{ km.}$$

Ce travail, transformé en chaleur, donnerait

$$\frac{40,333}{423,55} = \frac{1}{41} \text{ calorie,}$$

donc la quantité de chaleur nécessaire pour élever de

$$\frac{1}{41} \text{ degré cent.}$$

la température d'un litre d'eau, qui pèse un kilogramme, ou pour élever de

$$\frac{1}{41. \text{ c. s}} \text{ degré cent.}$$

la température d'un litre du liquide qui a traversé la paroi, si *c* représente la chaleur spécifique, et *s* le poids spécifique de ce liquide.

On peut immédiatement généraliser ce résultat, dans lequel nous n'avons employé des chiffres déterminés que pour la facilité de la comparaison. Supposons que la force qui pousse le liquide à travers la paroi, si on la regarde comme remplacée par une pression hydrostatique, soit exprimée en atmosphères par *p*, le travail effectué par cette force pour faire passer un certain volume du liquide sera tel que, s'il était transformé en chaleur, il pourrait élever la température de ce volume du liquide de

$$\frac{p}{41. \text{ c. s}} \text{ degré cent.}$$

Ce travail est donc si faible que, dans la plupart des cas,

il ne peut former qu'une petite partie du travail total effectué par la force électrique à l'intérieur de la paroi poreuse. Ce n'est que dans des liquides très-peu conducteurs qu'elle pourrait devenir relativement plus considérable, parce qu'à égale intensité du courant il passe à travers la paroi une plus grande quantité d'un liquide mauvais conducteur que d'un bon.

D'après la manière dont le mouvement de l'électricité dans une paroi poreuse est lié au mouvement du liquide, il me paraît probable que, si la différence des valeurs de la fonction potentielle qui ont lieu aux deux côtés de la paroi reste invariable, la quantité d'électricité, qui traverse la paroi pendant l'unité de temps, sera un peu moindre si le mouvement du liquide est empêché par une contre-pression hydrostatique que si cette contre-pression n'existe pas; ou, en d'autres termes, qu'en empêchant le mouvement du liquide, on augmente un peu la résistance à la conductibilité de la paroi. Mais pour des liquides qui ne sont pas très-mauvais conducteurs, la différence ne peut être que faible, par les raisons précédemment exposées.

NOTICE

SUR LE RAPPORT QUI EXISTE ENTRE L'ACTION CHIMIQUE QUI A LIEU
DANS UNE PILE VOLTAÏQUE, ET LES EFFETS PRODUITS PAR LE
COURANT.

Extrait des *Archives des sciences physiques et naturelles*, bibl. univ. de Genève,
t. XXXVI, p. 119; 1837.

[Lorsqu'un courant électrique est produit par une pile voltaïque, il se passe dans celle-ci une action chimique, qui ne développe pas immédiatement la chaleur qu'elle pourrait développer si elle avait lieu dans d'autres circonstances. Nommons simplement *travail consommé* celui qui est effectué dans cette action par les forces moléculaires, et qui, au lieu de produire immédiatement de la chaleur, engendre le courant électrique. Le courant de son côté, en surmontant la résistance à la conductibilité, engendre de la *chaleur* dans les conducteurs. Pour autant qu'il ne produise pas d'effets extérieurs, la *chaleur produite* est équivalente au *travail consommé*.

Si au contraire le courant doit produire un effet extérieur, comme par exemple mettre en mouvement une machine électro-magnétique, l'intensité du courant décroît, et par là, d'un côté l'action chimique et la consommation de travail qui y est liée, d'un autre côté la chaleur produite en surmontant la résistance à la conductibilité, deviennent moindres. Il s'agit de savoir quel est le rapport de ces deux quantités entre elles, et si la chaleur produite est encore équivalente au travail consommé, ou bien si, en appliquant les lois de l'électricité, on peut démontrer qu'il y a dans la pile un excès de travail consommé, qui peut être considéré comme l'équivalent des effets extérieurs produits.

Quoique la chose ne fût plus neuve, j'ai publié sur ce sujet, à cause d'une différence d'opinion entre M. Soret et moi, quelques remarques dans les *Archives des sciences phys. et nat.* de 1857; je les reproduis ici parce qu'elles font saisir d'une manière simple et aisée, me semble-t-il, le point essentiel dont il s'agit. 1866.]

Lorsque l'intensité du courant décroît dans un certain rapport, tandis qu'il effectue un travail extérieur, l'action chimique décroît suivant la simple puissance, et la chaleur produite suivant le carré de ce rapport. Par conséquent la chaleur produite doit devenir moindre que le travail consommé. Il reste donc dans la pile un excès de travail consommé, qui est l'équivalent du travail extérieur effectué.

Ce fait deviendra encore plus clair au moyen de quelques simples formules.

Soit a la quantité de zinc qui est dissoute pendant l'unité de temps, dans un élément galvanique, par un courant d'une intensité égale à l'unité. Si Z représente la quantité de zinc qui est dissoute, pendant l'unité de temps, dans une pile de n éléments, par un courant de l'intensité I , nous aurons l'équation :

$$(1) \quad Z = an I.$$

Les autres actions chimiques, qui accompagnent la dissolution du zinc, sont différentes dans les différents éléments galvaniques, et il en est par suite de même du travail consommé dans ces éléments. Soit e le travail consommé pour l'unité de poids du zinc, quantité de travail qui diffère d'après les éléments, et qui est plus grande, par exemple, dans un élément de Grove que dans un élément de Daniell. Soit en outre W le travail qui est consommé pendant l'unité de temps dans toute la pile lorsque le courant a l'intensité I ; on aura l'équation :

$$(2) \quad W = eZ = aen I.$$

La quantité de chaleur H qui est produite par le même courant, tandis qu'il surmonte la résistance à la conductibilité, est déterminée par l'équation :

$$(3) \quad H = AI^2,$$

où l représente la résistance du circuit, et A une constante dont j'ai démontré ¹⁾ qu'elle n'est autre chose que l'équivalent calorifique du travail, à supposer que l'intensité du courant et la résistance soient mesurées en unités mécaniques.

Si un circuit qui renferme une pile galvanique se trouve dans des circonstances telles qu'il n'exerce ni ne subisse aucune action extérieure, le courant prendra de lui-même l'intensité nécessaire pour que la chaleur produite soit équivalente au travail consommé. Si donc W_1 et H_1

1) Voir le Mémoire XI.

sont les valeurs particulières de W et H qui répondent à ce cas, on aura :

$$(4) \quad H_1 = AW_1,$$

équation qui sert à déterminer l'intensité I_1 du courant qui naît dans ces circonstances. En effet, elle devient, au moyen des équations (2) et (3) :

$$(5) \quad A\lambda I_1^2 = A aen I_1,$$

d'où résulte :

$$(6) \quad I_1 = \frac{aen}{t}.$$

La quantité aen qui entre dans cette équation est ce que l'on nomme habituellement la force électro-motrice de la pile.

Supposons maintenant que le courant effectue un travail extérieur, et que par là son intensité décroisse de i . Pour plus de simplicité nous admettons que ce décroissement soit constant, car, s'il était variable, nous devrions, au lieu de l'unité de temps, n'en considérer qu'un élément. L'intensité actuelle du courant est donc :

$$I = I_1 - i.$$

En substituant cette valeur dans les équations (2) et (3), l'on obtient :

$$(7) \quad W = aen (I_1 - i)$$

$$(8) \quad H = A t (I_1 - i)^2 \\ = A [I_1 (I_1 - i) - i (I_1 - i)].$$

Mettant dans cette dernière pour I_1 sa valeur tirée de (6), on pourra écrire :

$$H = A [aen (I_1 - i) - i (I_1 - i)],$$

et en suite, en vertu de (7) :

$$(9) \quad H = A [W - i (I_1 - i)].$$

On voit par cette équation que la chaleur produite est trop petite pour être équivalente au travail consommé. *L'excès de ce dernier, à savoir la quantité*

$$i (I_1 - i),$$

représente la consommation qui répond au travail extérieur effectué.

On trouve de même que, dans le cas où l'intensité du courant est

accrue par une influence extérieure, la valeur produite surpasse le travail consommé dans la pile. Il suffit, pour ce cas, de donner le signe *plus* à la quantité i , et l'on obtiendra ainsi au lieu de (9) :

$$(10) \quad H = A [W + i (I_1 + i)].$$

Si le circuit, dans lequel le courant i est induit, ne renferme pas de source de courant propre, on devra poser $W = 0$ et $I_1 = 0$, ce qui changera la dernière équation en :

$$H = A i^2,$$

équation qui est, pour un courant induit, la même que l'équation (3) pour un courant quelconque.

NOTICE

SUR L'ACCROISSEMENT DE LA RÉSISTANCE A LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DES MÉTAUX SIMPLES AVEC LA TEMPÉRATURE

Ann. de Pogg., livraison d'août 1858, t. CIV, p. 650 ; *Phil. Mag.*, 4^{me} série vol. XVI, p. 400.

Dans la livraison de mai de ces annales ¹⁾ se trouve un intéressant Mémoire de Arndtsen sur la résistance des métaux à la conductibilité à différentes températures ; l'auteur arrive à cette conclusion que pour les métaux simples sur lesquels il a expérimenté, à l'exception du fer, la résistance croît uniformément avec la température ²⁾, et en outre que l'accroissement relatif est peu différent pour les différents métaux. Si l'on appelle 100 la résistance à la conductibilité pour le

1) [*Ann. de Pogg.*, t. CIV, p. 1.]

2) [Tandis que, pour les autres métaux simples, l'accroissement observé de la résistance peut se représenter par un terme, qui a pour facteur la température t , on doit encore ajouter pour le fer un autre terme affecté du facteur t^2 . Mais le coefficient de t^2 est si petit que, pour de faibles différences de température, on peut le négliger, et assimiler le fer aux autres métaux relativement à la forme de l'expression. 1866.]

point de congélation, les nombres qui en représentent l'accroissement pour 1° cent. sont compris entre 0,327 et 0,413 pour les six métaux soumis à l'expérience, y compris le fer ¹⁾; et Arndtsen ajoute que si l'on employait des métaux chimiquement purs, et si l'on donnait une plus grande précision aux expériences, on trouverait peut-être des nombres tout à fait concordants.

En voyant ces nombres, il m'est venu l'idée qu'ils sont peu éloignés du coefficient de dilatation des gaz permanents. Si l'on néglige le terme de la seconde puissance que l'on trouve pour le fer, et que l'on prenne la moyenne de tous les coefficients de la première puissance de t , on obtiendra pour la résistance à la conductibilité w_t à la température t , comparée à la résistance w_0 au point de congélation, la formule:

$$w_t = w_0 (1 + 0,00366 \cdot t),$$

d'où résulterait que la résistance des métaux simples à l'état solide serait à peu près proportionnelle à la *température absolue* ²⁾.

Quoique le nombre des métaux sur lesquels Arndtsen a expérimenté soit encore trop faible, et la concordance trop imparfaite pour permettre d'en tirer une conclusion certaine, je pense que cette remarque ne sera pas dépourvue d'intérêt, et pourra engager peut-être à faire de nouvelles recherches sur ce sujet.

1) Les nombres trouvés par M. Mathiessen pour le potassium et le sodium à l'état solide tombent aussi entre ces limites.

2) [En lisant le résultat trouvé par Arndtsen, que l'accroissement relatif de la résistance avec la température était peu différent pour les différents métaux, l'idée me vint immédiatement que, si cet accroissement est indépendant de la nature de la substance, et ne dépend que de la température, il doit nécessairement se trouver dans un rapport simple avec la température *absolue*; et j'ai trouvé la confirmation de cette idée, de la manière indiquée dans le texte, en considérant de plus près les nombres donnés. 1866.]

MÉMOIRES

SUR

LES MOUVEMENTS MOLÉCULAIRES

ADMIS POUR

L'EXPLICATION DE LA CHALEUR

MÉMOIRE XIV.

SUR LA NATURE DU MOUVEMENT AUQUEL NOUS DONNONS LE NOM DE CHALEUR.

Ann. de Pogg., livraison de mars 1857, t. C, p. 353; *Phil. Mag.*, 4^e série, vol. XIV, p. 408; *Archives des sciences phys. et nat.*, Bibl. univ. de Genève, t. XXXVI, p. 293.

1. Avant d'écrire mon premier Mémoire sur la chaleur, Mémoire dont la publication remonte à l'année 1850, et dans lequel la chaleur est considérée comme un mouvement, je m'étais déjà fait une idée précise sur la nature de ce mouvement, et je l'avais appliquée à des recherches et à des calculs de diverses espèces. C'est avec intention que je n'ai pas mentionné jusqu'à présent cette idée dans mes Mémoires; je désirais séparer les résultats qui peuvent se déduire de certains principes généraux, de ceux qui supposent une nature déterminée du mouvement, et j'espérais pouvoir rassembler plus tard dans un Mémoire spécial mes vues sur la nature de ce mouvement, ainsi que les conséquences particulières qui en découlent. Mais je n'ai pas pu réaliser ce plan aussitôt que je l'avais espéré d'abord: d'un côté, la difficulté du sujet, d'un autre côté différents travaux ne m'avaient pas permis de donner à ce sujet tout le développement qui me semblait nécessaire pour en entreprendre la publication.

Krönig a récemment publié sous le titre « *Grundzüge einer Theorie der Gase* » un Mémoire ¹⁾ dans lequel j'ai retrouvé

* *Éléments d'une théorie des gaz.*

1) Publié d'abord à Berlin chez A. W. Hayn; ensuite dans les *Ann. de Pogg.*, t. XCIX, p. 315.

une partie de mes propres idées. Je suis très-loin de vouloir revendiquer la moindre priorité vis-à-vis de Krönig qui est arrivé de lui-même tout aussi bien que moi à ces idées, et qui les a publiées avant moi. Mais comme ce Mémoire a éveillé l'attention sur ce sujet, je crois devoir publier également la partie de mes idées que je n'y ai pas trouvée. Je me bornerai toutefois pour le moment à traiter brièvement quelques points fondamentaux, me réservant de développer plus tard ce sujet d'une manière plus complète ¹⁾.

1) Je crois à propos de mentionner ici que dans une conversation que j'ai eue il y a assez longtemps à Berlin avec M. William Siemens de Londres, j'ai appris que M. Joule a aussi exprimé des idées analogues dans les Mémoires de la *Société litt. et phil. de Manchester*. C'était pour moi une raison de hâter moins que je ne l'eusse fait sans cette circonstance, la publication de mes idées, puisqu'elles n'étaient plus entièrement neuves. Je n'ai pu me procurer jusqu'à présent ce Mémoire de Joule, et je ne sais pas jusqu'où il a poursuivi ce sujet, ni si ses idées concordent de tous points avec les miennes. Il serait à désirer que M. Joule publiât son Mémoire dans un journal plus répandu.

[M. Joule a bien voulu répondre aux vœux que j'exprimais en faisant réimprimer son Mémoire dans le *Phil. Mag.*, 4^e sér., vol. XIV, p. 211; il m'a rendu par là un grand service ainsi qu'à beaucoup d'autres physiciens. Depuis lors, j'ai appris qu'avant Joule et Krönig plusieurs auteurs avaient exprimé des idées analogues sur l'état gazeux. J'ai mentionné en note ce qui est arrivé à ma connaissance sur ce sujet dans un Mémoire publié en 1862 (Mém. XVI de cette collection). Il me paraît plus utile pour la suite des idées de transcrire ici ce que j'ai dit dans cette note.

Je rappelle d'abord que Joule lui-même cite déjà Hérapath comme l'ayant précédé, et je continue en ces termes: « Un peu plus tard, P. du Bois-Reymond a fait observer que Daniel Bernoulli a déjà exprimé la même idée dans son *Hydrodynamique* et l'a développée jusqu'à un certain point. Plus récemment, mon attention a été appelée sur un ouvrage édité par Prévost (*Deux Traités de Physique mécanique*, publiés par Pierre Prévost, Genève et Paris 1818); cet ouvrage renferme deux Mémoires, l'un de G. L. Le Sage publié après sa mort par Prévost, l'autre de Prévost lui-même, dans lequel il développe les vues de Le Sage. Ces Mémoires expriment et traitent aussi cette idée que les molécules des gaz sont soumises à des mouvements de translation, et quoique relativement à la naissance et à la conservation de ces mouvements, il y ait dans ces Mémoires des vues qui s'écartent

2. Krönig admet que les molécules d'un gaz n'oscillent pas autour de positions d'équilibre déterminées, mais qu'elles se meuvent uniformément en ligne droite jusqu'à ce qu'elles rencontrent d'autres molécules gazeuses ou une paroi impénétrable. Je partage complètement cette manière de voir et je pense aussi que la force expansive du gaz est le résultat de ce mouvement. Mais d'après moi ce mouvement n'est pas le seul qui ait lieu.

D'abord il paraît naturel d'admettre à côté du mouvement de translation un mouvement de rotation, puisque, du choc de deux corps, à moins qu'il ne soit central et direct, résulte un double mouvement de translation et de rotation.

En outre, je pense qu'à l'intérieur des différentes masses

fort des miennes, cependant la manière dont ils expliquent la force expansive des gaz est au fond la même. Le Sago cite à son tour une série d'auteurs qui ont eu avant lui des idées analogues; il dit textuellement p. 126: « On trouve des vestiges de cette opinion sur la nature de l'air, et même de quelques autres fluides, dans divers auteurs qui m'ont précédé. Lucrèce, liv. II, vers 111-140. Gassendi, dans la première section de sa *Physique*, au milieu du 8^e chapitre du 4^e livre, et au commencement du 4^e chapitre du 6^e livre. Boyle dans ses *Nouvelles Expériences physico-mécaniques sur la force élastique de l'air et sur ses effets*, ainsi que dans son *Traité sur la fluidité et la dureté*. Parent, dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences de Paris*, pour 1708, à la suite de variations observées dans la règle de Mariotte sur la dilatation de l'air. *Phoronomie* de Herman, liv. II, chap. 6. Dan. Bernoulli, dans la 10^e section de son *Hydrodynamique*. Enfin Dan. et Jean Bernoulli, dans une des pièces qui ont eu part au prix de l'Acad. des Sc. de Paris, en 1746. »

J'ai à peine besoin de faire observer que quand j'ai écrit mon Mémoire, je ne connaissais rien de ces essais antérieurs d'explication de l'état gazeux, sans quoi je n'aurais pas manqué de les citer à côté de ceux de Krönig et de Joule. Dans le grand nombre d'auteurs dont il est déjà fait mention et auxquels on en adjoindra peut-être d'autres, mais qui, comme je le présume, quoique je n'aie pas lu les anciens, se seront en partie exprimés d'une manière assez vague, il serait difficile de déterminer avec certitude, quel est celui à qui l'on doit attribuer la première idée de cette hypothèse; et l'on pourra seulement décider combien les différents auteurs ont contribué à transformer cette idée vague en une théorie physique acceptable. » 1866.]

qui sont animées d'un mouvement de translation, il existe également une vibration. On peut se représenter ces vibrations de différentes manières. Si l'on se borne même à considérer des atomes pondérables, et qu'on les regarde comme absolument rigides, encore est-il possible qu'une molécule qui se compose de plusieurs atomes ne forme pas également une masse absolument rigide, mais que les différents atomes de cette molécule soient mobiles entre de certaines limites, et par suite, puissent osciller l'un par rapport à l'autre.

Je ferai remarquer en même temps qu'en attribuant un mouvement aux atomes pondérables eux-mêmes, on n'exclut pas la possibilité de l'existence d'une substance plus subtile qui entourerait chaque atome pondérable et qui, sans se séparer de lui, pourrait se mouvoir dans son voisinage.

A la fin de ce Mémoire on démontrera par l'analyse mathématique que la force vive du mouvement de translation est trop faible pour représenter à elle seule toute la chaleur contenue dans le gaz; on est donc forcé, abstraction faite de toute autre probabilité, d'admettre encore un ou plusieurs autres mouvements. L'excès de toute la force vive sur celle du mouvement de translation seule est, d'après ce calcul, particulièrement important pour les gaz d'une composition chimique compliquée, dans lesquels une molécule est composée d'un grand nombre d'atomes.

3. Le mouvement de translation de toutes les molécules ainsi que les différents mouvements qu'ont en outre les parties constituantes des molécules, et que je nommerai simplement *les mouvements des parties constituantes*, seront toujours entre eux, pour un gaz déterminé, dans un rapport constant.

Imaginons un certain nombre de molécules dont les parties constituantes ont un mouvement rapide, mais sans mouvement de translation; celui-ci naîtra de lui-même, puisque deux molécules qui se touchent se repoussent à cause du mouvement de leurs parties constituantes, et le mouvement de celles-ci devra naturellement éprouver une perte de force vive correspondant au mouvement de translation produit.

Réciproquement, si un certain nombre de molécules douées d'un mouvement de translation n'étaient soumises à aucun mouvement de leurs parties constituantes, celui-ci naîtrait bientôt du choc des molécules entre elles et contre des parois fixes. Ce n'est que quand tous les mouvements qui peuvent se produire auront l'un par rapport à l'autre un certain rapport dépendant de la constitution des molécules, qu'ils ne pourront plus s'accroître ou se diminuer mutuellement¹⁾.

Si deux molécules, dont les parties constituantes sont en mouvement, se choquent, elles ne se repousseront pas suivant les lois ordinaires de l'élasticité, comme le feraient deux sphères élastiques; mais la grandeur et la direction des vitesses avec lesquelles elles se quittent dépendront, non-seulement du mouvement que les molécules entières avaient avant le choc, mais encore du mouvement dont sont animées, au moment du choc, les parties constituantes qui sont, à cet instant, les plus rapprochées les unes des autres. Cependant, lorsque les différents mouvements se seront égalisés de telle sorte qu'en somme le mouvement de translation n'est plus ni accru ni diminué par les mouvements des parties constituantes, on pourra négliger, dans la recherche de l'effet total d'un grand nombre de molécules, les irrégularités qui se présentent dans les chocs particuliers, et admettre que les molécules obéissent, quant au mouvement de translation, aux lois ordinaires de l'élasticité.

4. L'explication de la force expansive du gaz et de sa dépendance vis-à-vis du volume et de la température, telle qu'elle a été donnée par Krönig, n'éprouve pas de modification essentielle par l'introduction des autres mouvements. La pression du gaz contre une paroi fixe provient de ce que ses mo-

1) [On ne veut pas dire ici que pour *chaque molécule isolée* ce rapport déterminé entre les différents mouvements doit avoir lieu et rester invariable pendant les chocs subséquents; il ne s'agit que des valeurs moyennes, relatives à un très-grand nombre de molécules, des forces vives de ces mouvements. 1866.]

lécules choquent incessamment en grand nombre contre cette paroi et en sont repoussées. La force qui doit en résulter sera, en premier lieu, pour une même vitesse, inversement proportionnelle au volume de la masse de gaz donnée, et, en second lieu, à volume égal directement proportionnelle à la force vive du mouvement de translation, sans que les autres mouvements aient à intervenir immédiatement.

D'un autre côté, on sait par la loi de Gay-Lussac, que la pression d'un gaz parfait sous volume constant croît proportionnellement à la température comptée à partir de -273° centigrades, et que nous nommons température absolue; il résulte donc de ce que nous venons de dire, que la température absolue est proportionnelle à la force vive du mouvement de translation des molécules. Puisqu'en outre, comme nous l'avons remarqué plus haut, les différents mouvements sont entre eux dans un rapport constant pour un gaz déterminé, la force vive du mouvement de translation formera une partie aliquote de la force vive totale, et la température absolue sera donc aussi proportionnelle à toute la force vive existante dans le gaz. Ce sont ces considérations jointes à quelques autres qui s'y rattachent et que je mentionnerai plus bas qui m'ont engagé dans mon Mémoire « sur la force motrice de la chaleur » à exprimer l'idée que la chaleur spécifique des gaz est constante ¹⁾, quoique cette idée fût en contradiction avec les expériences faites jusqu'alors. La quantité de chaleur que l'on doit communiquer à un gaz sous volume constant pour élever sa température doit être considérée comme l'accroissement de la force vive existante dans le gaz, puisqu'il n'effectue dans ce cas aucun travail qui puisse consommer de la chaleur. La chaleur spécifique *sous volume constant* est donc pour un gaz parfait la quantité que Rankine appelle la *vraie* chaleur spécifique ²⁾. Lorsque l'on

1) [1^{re} partie de cette collection, p. 46 (de la traduction française).]

2) [Dans une note du Mém. VI, 1^{re} partie, p. 269 (de la traduction française) j'ai proposé l'expression de « vraie capacité calorifique » au lieu de celle de « vraie chaleur spécifique. » 1866.]

dit donc que la vraie [capacité calorifique] des gaz est constante, cela signifie simplement que : *toute la force vive existante dans le gaz est dans un rapport constant avec la force vive du mouvement de translation que nous prenons comme mesure de la température.* Pour ce qui regarde la chaleur spécifique sous pression constante, j'ai démontré dans le Mémoire cité plus haut, en me servant d'une hypothèse qui résulte des mêmes considérations, qu'elle ne diffère que par une constante de la vraie [capacité calorifique].

3. Ce que nous venons de dire ne s'applique qu'aux gaz permanents, et encore d'une manière approchée seulement. Il est facile d'apercevoir, au moins en général, la raison des petits écarts qui se produisent.

Pour que les lois de Mariotte et de Gay-Lussac et celles qui s'en déduisent fussent rigoureusement applicables à un gaz, celui-ci devrait satisfaire aux conditions suivantes relativement à son état moléculaire.

1) L'espace que les molécules du gaz remplissent réellement doit être négligeable à côté de l'espace total occupé par le gaz.

2) La durée du choc, c'est-à-dire le temps qu'emploie une molécule lorsqu'elle choque une autre molécule ou une paroi fixe pour modifier son mouvement de la même manière qu'il est modifié par le choc, doit être négligeable à côté du temps qui s'écoule entre deux chocs.

3) L'influence des forces moléculaires doit être négligeable, ce qui implique deux conditions. En premier lieu, la force avec laquelle toutes les molécules s'attirent encore mutuellement à leurs distances moyennes, doit être négligeable à côté de la force expansive qui provient du mouvement. Or, les molécules ne se trouvent pas toujours à leurs distances moyennes l'une de l'autre, mais, pendant le mouvement, une molécule arrive souvent dans le voisinage immédiat d'une autre ou d'une paroi fixe composée également de molécules actives, et, dans ces moments, les forces moléculaires entrent naturellement en action. De là résulte la seconde condition suivante : les parties du chemin décrit par une molécule, sur

lesquelles ces forces agissent en modifiant, d'une manière sensible, le mouvement de la molécule en grandeur ou en direction, doivent être négligeables à côté des parties de ce chemin sur lesquelles l'action de ces forces peut être regardée comme insensible.

Si ces conditions ne sont pas remplies pour un gaz, celui-ci s'écartera des lois simples qui régissent les gaz, en différents sens et d'une manière d'autant plus sensible que son état moléculaire répondra moins à ces conditions.

Lorsque j'ai eu connaissance des célèbres recherches de Regnault, sur les écarts que manifestent les gaz relativement aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac, j'ai essayé, à l'aide des principes que je viens d'indiquer, de déduire des écarts que Regnault a trouvés pour des gaz particuliers, quelques conclusions sur leur état moléculaire. Mais l'exposition de ce procédé serait trop longue et les résultats sont trop peu certains, à cause de quelques difficultés que l'on éprouve en voulant effectuer réellement le calcul, pour que je puisse m'y arrêter ici.

Lorsque, par la suite, je parlerai d'un gaz, j'entendrai donc parler, comme jusqu'à présent, d'un gaz qui remplit *parfaitement* les conditions précédentes et que Regnault appelle un gaz *idéal*, parce que les gaz réels n'atteignent qu'approximativement à cet état.

6. Après ces considérations sur l'état *gazeux* se présente naturellement la question de savoir en quoi l'état *solide* et l'état *liquide* se distinguent de l'état gazeux. Quoiqu'une définition de ces états convenable à tous les cas particuliers exige une connaissance beaucoup plus complète que nous ne la possédons de l'état des différentes molécules, je crois, cependant, que l'on peut indiquer avec une assez grande probabilité, quelques différences fondamentales.

Il y a dans les trois états un mouvement des molécules.

Dans l'état *solide*, le mouvement est de telle nature que les molécules oscillent autour de certaines positions d'équilibre sans les abandonner complètement aussi longtemps que des forces étrangères n'agissent pas sur ces molécules. Ce mouve-

ment peut donc être considéré, dans les corps solides, comme un mouvement vibratoire. Néanmoins, il peut être encore d'une nature très-compiquée. En premier lieu, les parties constituantes d'une molécule peuvent vibrer entre elles; en second lieu, les molécules peuvent elles-mêmes vibrer, et ces dernières vibrations peuvent consister, soit en un mouvement oscillatoire du centre de gravité, soit en un mouvement oscillatoire de rotation autour de ce centre. Dans des cas où des forces extérieures agissent sur le corps, par exemple dans le cas d'ébranlements, les molécules peuvent prendre d'autres positions persistantes.

Dans l'état *liquide*, les molécules n'ont plus une position d'équilibre déterminée. Elles peuvent tourner complètement autour de leur centre de gravité, et celui-ci peut sortir entièrement de sa position. Mais l'effet de ce mouvement pour écarter les molécules n'est pas assez fort, relativement à leur attraction qui agit en sens contraire, pour pouvoir séparer entièrement les molécules l'une de l'autre. Une molécule n'est plus liée à des molécules voisines déterminées, toutefois elle ne s'en sépare pas d'elle-même, mais seulement sous l'action des forces qu'elle éprouve de la part d'autres molécules relativement auxquelles elle prend alors la position qu'elle avait par rapport aux molécules voisines antérieures. Dans un liquide il y a donc un mouvement d'oscillation, de rotation et de translation des molécules; mais ce mouvement est tel qu'il ne sépare pas les molécules l'une de l'autre, mais qu'elles se maintiennent même sans pression extérieure dans les limites d'un certain volume.

Dans l'état *gazeux*, enfin, les molécules ont été écartées par le mouvement tout à fait en dehors de leurs sphères d'attraction mutuelle, et continuent à se mouvoir en ligne droite, d'après les lois ordinaires du mouvement. Quand deux de ces molécules se choquent dans leur mouvement, elles s'éloignent en général l'une de l'autre avec autant d'énergie qu'elles se sont rapprochées, ce qui peut avoir lieu d'autant plus aisément qu'une molécule est attirée par une autre molécule unique avec beaucoup moins de force qu'elle ne l'est dans

l'état liquide ou solide par toute la masse de molécules qu'elle a dans son voisinage.

7. Un phénomène qui me semblait présenter un intérêt tout particulier est celui de la *vaporisation*, et j'ai cherché à m'en rendre compte de la manière suivante ¹⁾.

Nous avons dit plus haut que dans les liquides une molécule reste pendant son mouvement dans les sphères d'attraction des molécules voisines, et qu'elle ne quitte celles-ci que pour se placer dans une position analogue, par rapport à d'autres molécules voisines. Mais ceci n'est relatif qu'à la valeur moyenne des mouvements; et comme ceux-ci sont tout à fait irréguliers, on doit admettre que les vitesses d'une molécule déterminée s'écartent entre des limites assez étendues de part et d'autre de la vitesse moyenne.

Si nous considérons d'abord la surface d'un liquide, j'admetts que dans la variété des mouvements qui ont lieu en tous sens, il peut se faire qu'une molécule, par un concours favorable du mouvement de translation, d'oscillation et de rotation, est écartée avec tant de violence des molécules voisines qu'avant d'avoir perdu toute sa vitesse par la force attractive de celles-ci, elle a déjà quitté leur sphère d'action et continue à se mouvoir dans l'espace situé au delà du liquide.

Supposons cet espace limité et d'abord vide; il se remplira de plus en plus des molécules entraînées. Celles-ci se comporteront dans l'espace absolument comme un gaz, et iront dans leurs mouvements choquer contre les parois. Or, l'une de ces parois est formée par le liquide lui-même, et celui-ci, lorsqu'une molécule viendra le choquer, ne la repoussera pas en général, mais la retiendra et se l'assimilera par l'at-

¹⁾ [L'explication suivante de la vaporisation n'a été, que je sache, donnée avant moi par personne; Joule et Krönig n'en parlent pas, et je n'ai trouvé aucune de mes idées sur le phénomène de la vaporisation chez les auteurs, qui, comme je l'ai appris plus tard, avaient déjà exprimé sur l'état gazeux des idées analogues à celles de Joule et de Krönig et aux miennes. 1866.]

traction que les autres molécules exercent immédiatement sur elle lorsqu'elle s'en approche. L'équilibre s'établira donc lorsqu'il se sera répandu dans l'espace supérieur un nombre de molécules tel que pendant l'unité de temps il y ait en moyenne autant de molécules qui choquent la surface du liquide et qui soient retenues par celui-ci, qu'il y en a d'autres qui sont émises par lui. Cet état d'équilibre n'est donc pas un état de repos dans lequel la vaporisation a cessé, mais un état dans lequel il y a continuellement une vaporisation et une condensation également fortes et qui se compensent.

La densité de la vapeur, qui est nécessaire pour cette compensation, dépend du nombre des molécules qui sont émises par la surface du liquide pendant l'unité de temps; et ce nombre lui-même dépend évidemment de la rapidité du mouvement à l'intérieur du liquide, c'est-à-dire de la température de ce dernier. Je n'ai pas réussi jusqu'à présent à déduire de ces considérations la loi suivant laquelle la pression de la vapeur doit croître avec la température.

Ce que nous avons dit plus haut de l'action de la surface du liquide sur la vapeur qui est en contact avec elle s'applique d'une manière analogue aux autres parois qui limitent l'espace rempli de vapeur. D'abord il s'y condense un peu de vapeur; cette vapeur condensée est alors elle-même soumise à la vaporisation, et il doit à la fin se présenter un état dans lequel la vaporisation et la condensation sont égales entre elles. La quantité de la vapeur qui doit être condensée sur la surface pour que cet état ait lieu, dépend de la densité de la vapeur dans l'espace clos, de la température de la vapeur et de celle de la paroi, et de la force avec laquelle les molécules de vapeur sont attirées par la paroi. Le maximum qui puisse se présenter sous ce rapport aura lieu quand la paroi sera complètement mouillée par le liquide condensé, et alors elle se comportera précisément comme une surface du même liquide.

8. Ceci explique immédiatement pourquoi une autre espèce de gaz en contact avec le liquide ne peut pas empêcher la vaporisation de celui-ci.

La pression du gaz sur le liquide ne consiste qu'en ce que des molécules du premier viennent choquer çà et là la surface du liquide. Mais partout ailleurs l'espace qui est en contact avec le liquide, doit être considéré comme libre et comme pénétrable aux molécules de celui-ci, puisque les molécules gazeuses n'en remplissent en réalité qu'une très-faible partie. En général, les molécules émises par le liquide ne choqueront les molécules gazeuses qu'à des distances relativement considérables de la surface et elles se comporteront alors vis-à-vis d'elles comme les molécules d'un autre gaz quelconque mélangé avec le gaz donné. On doit donc conclure que le liquide émettra aussi ses molécules dans l'espace rempli de gaz, et que la masse de la vapeur mêlée au gaz croîtra également dans ce cas jusqu'à ce qu'il y ait en moyenne autant de molécules de vapeur qui choquent la surface et sont retenues par elle, qu'il y en a d'émisses; et le nombre des molécules de vapeur qui devront remplir l'unité d'espace pour que cela ait lieu sera absolument le même, que cet espace renferme, en outre, un autre gaz ou n'en renferme pas.

Mais la pression du gaz exerce un autre effet sur l'intérieur du liquide. En ces points mêmes ou en ceux où la masse du liquide est limitée par la paroi d'un vase, il peut se faire que les molécules s'écartent avec une telle violence l'une de l'autre, que la continuité de la masse soit rompue pour un moment. Mais le petit espace vide qui naîtra est entouré de toute part de masses impénétrables aux molécules en mouvement; cet espace ne s'agrandira donc en bulle de vapeur et ne pourra se maintenir comme telle que si les parois intérieures du liquide émettent continuellement un nombre de molécules tel que la pression de la vapeur qui en résulte puisse faire équilibre à la pression extérieure qui tend à comprimer cette bulle. La force expansive de la vapeur renfermée doit donc être d'autant plus grande que la pression à laquelle le liquide est soumis est plus considérable; et ceci explique la relation qui existe entre la température d'ébullition et la pression.

Si le gaz qui est en contact avec le liquide peut lui-même

se condenser et former un liquide qui se mélange au premier, les phénomènes se compliqueront naturellement en ce que la tendance des deux matières à se mêler intervient comme une nouvelle force. Mais je ne m'arrêterai pas à ces phénomènes.

De même que pour les liquides, on voit également la possibilité de la vaporisation des corps solides; toutefois il n'en résulte pas qu'il doive y avoir une vaporisation à la surface de tous les corps. Il est possible que les molécules d'un corps soient reliées entre elles d'une manière tellement stable qu'aussi longtemps que sa température ne dépasse pas une certaine limite, la combinaison la plus favorable des différents mouvements moléculaires n'est pas capable de rompre la continuité.

9. L'explication de la *production* et de la *consommation de chaleur*, dans les modifications de l'état d'agrégation et du volume des corps, résulte immédiatement, d'après l'analyse précédente, de la considération du travail positif ou négatif effectué par les forces agissantes.

Considérons d'abord le travail *intérieur*.

Lorsque les molécules d'un corps changent de position les unes par rapport aux autres, ce changement peut avoir lieu, soit dans le sens suivant lequel les forces inhérentes aux molécules tendent à les mouvoir, soit dans le sens opposé. Dans le premier cas, les molécules pendant leur passage d'une position à l'autre, reçoivent une certaine vitesse dont la force vive se transforme aussitôt en chaleur; dans le dernier cas, pour autant que nous fassions abstraction pour le moment, de certaines forces étrangères toutes spéciales, c'est la chaleur qui fait mouvoir les molécules dans des directions opposées aux forces intérieures, et la diminution de vitesse qu'elles éprouvent par l'action des forces contraires apparaît comme une diminution du mouvement calorifique.

Dans le passage de l'état solide à l'état liquide, les molécules ne s'éloignent pas, à la vérité, en dehors de leurs sphères d'action mutuelle, mais d'après l'hypothèse précédente, elles passent d'une position déterminée satisfaisant aux forces

moléculaires à d'autres positions irrégulières, et les forces qui cherchent à les retenir dans cette première position, doivent être vaincues.

Dans la vaporisation, les molécules se séparent complètement une à une du reste de la masse, ce qui exige de nouveau que les forces qui s'opposent à cette séparation soient vaincues.

Quant aux corps gazeux, d'après ce qui a été dit sur les conditions de l'état gazeux parfait, on voit aisément que lorsqu'un gaz a atteint cet état, il n'y a plus d'attractions moléculaires à vaincre pour le dilater davantage, et que, par conséquent, il n'y a pas de travail intérieur effectué dans les changements de volume d'un gaz idéal.

10. Outre le travail intérieur, nous avons à considérer le travail *extérieur* et la variation correspondante de la quantité de chaleur.

Occupons-nous, d'abord, des variations de chaleur d'un gaz permanent qui est comprimé ou qui se dilate en surmontant une contre-pression ; Krönig, à la fin de son travail, a déjà conclu, relativement à ce cas, que, si l'une des parois choquées par les molécules du gaz est elle-même en mouvement, ces molécules ne seront pas repoussées avec la vitesse même qu'elles avaient immédiatement avant le choc. Si la paroi se meut à l'encontre des molécules, la vitesse des molécules, après le choc, sera en général plus grande qu'avant ; et plus petite si la paroi se meut dans le même sens qu'elles. On prouve sans difficulté, par l'analyse mathématique, que l'accroissement ou la diminution de force vive qui en résulte doit être équivalent au travail extérieur effectué par la force expansive du gaz ; toutefois, il n'est pas même nécessaire de démontrer ce théorème d'une manière spéciale, puisqu'il est une conséquence immédiate de la loi générale de l'équivalence de la force vive et du travail.

Si la paroi se meut assez lentement pour que la pression du gaz contre elle soit aussi grande que contre une paroi fixe, on n'aura pas à tenir compte, pour la détermination du travail, de la vitesse de cette paroi, mais seulement du chemin total

qu'elle aura parcouru. Si, au contraire, sa vitesse est assez grande pour qu'il se produise dans son voisinage un accroissement ou une diminution dans la densité du gaz, on devra toujours tenir compte, dans le calcul, de la pression réellement exercée par le gaz pendant le mouvement.

Lorsqu'il se produit un écoulement entre deux vases qui sont remplis de gaz de densités différentes ou dont l'un est d'abord vide, il n'y aura en tout aucun travail effectué, et, par suite, il ne peut se produire aucune variation dans la quantité totale de chaleur qui existait primitivement. Ce n'est pas à dire qu'il ne puisse y avoir de variation de la quantité de chaleur dans chacun des deux vases ; car une masse gazeuse, dont les molécules ont des mouvements qui affectent une direction prépondérante déterminée, se comporte, vis-à-vis d'autres masses gazeuses qui la limitent, de la même manière qu'une paroi mobile ; et lorsque la masse gazeuse en mouvement choque des parois fixes, la quantité de force vive, perdue par le mouvement de translation commun à toute la masse, apparaît, tout entière comme mouvement calorifique.

De même que dans les changements de volume des corps gazeux, on doit également, dans les autres cas, tenir compte du travail extérieur ; comme, par exemple, du travail qui est employé, dans la vaporisation d'un liquide, à repousser, par pression de la vapeur qui se forme, un obstacle extérieur. Dans les corps solides et liquides qui n'éprouvent que de faibles changements de volume, le travail extérieur est également faible en général ; toutefois, il peut se présenter des circonstances dans lesquelles l'influence de ce travail doit être prise en considération.

11. Il reste encore à mentionner un phénomène dont l'application me paraît avoir une grande importance ; je veux parler du phénomène suivant : *lorsque deux gaz ou un gaz et un autre corps se combinent entre eux, et que leur combinaison est gazeuse, le volume du composé est dans un rapport simple avec les volumes de ses composants considérés à l'état gazeux.*

Krönig a déjà démontré que la pression qu'un gaz exerce

sur l'unité de surface de son enveloppe doit être proportionnelle au nombre des molécules contenues sous l'unité de volume et à la force vive que ces molécules ont chacune en vertu du mouvement de translation, le seul que Krönig ait considéré.

Si l'on applique ce résultat aux gaz simples, et que l'on adopte l'hypothèse, très-probable d'ailleurs pour d'autres motifs, que ces gaz renferment sous le même volume le même nombre d'atomes si la pression et la température sont les mêmes, il s'ensuit que les atomes de différents gaz doivent avoir une égale force vive en vertu de leur mouvement de translation.

Recherchons maintenant si cette proposition restera valable dans le cas où on l'appliquera aux molécules des gaz composés.

12. Comparons d'abord entre eux les gaz composés; prenons pour exemple deux gaz dont les composants sont entre eux en volume dans le rapport de 1 à 1, et de 1 à 2, comme le deutoxyde et le protoxyde d'azote.

On sait que des quantités de ces deux gaz qui renferment autant d'oxygène l'une que l'autre occupent le même volume, quoique les molécules de l'un se composent de deux atomes et celles de l'autre de trois; il y aura donc le même nombre de molécules de ces deux gaz dans des espaces égaux; et par suite on doit en conclure que ces molécules, quoique constituées différemment, ont une égale force vive en vertu de leur mouvement de translation.

On arrive à la même conclusion pour le mouvement moléculaire des autres gaz composés, et dans les cas où cette règle n'est pas applicable, il ne me semble pas impossible de rendre compte des écarts, soit parce que le gaz considéré n'était pas suffisamment éloigné de son point de condensation dans la détermination de son volume, soit parce que sa formule chimique actuelle ne représente pas exactement la manière dont les atomes se sont réunis en molécules.

Si l'on compare au contraire les gaz composés aux gaz simples, la règle précédente n'est évidemment plus applicable, puisqu'un atome du gaz simple n'occupe pas le même volume

qu'une molécule du gaz composé. Lorsque deux gaz simples se combinent en volumes égaux, on sait qu'il ne se présente pas de diminution de volume, tandis que d'après cette règle le volume aurait dû décroître dans le rapport de 2 à 1. Lorsqu'un volume d'un gaz se combine avec deux ou trois volumes d'un autre gaz, la combinaison occupe deux volumes, tandis que d'après cette règle elle n'en devrait occuper qu'un, et ainsi de suite.

13. En cherchant la raison de ce phénomène remarquable, et en même temps une loi générale relative aux rapports des volumes des gaz, je me suis enfin arrêté à l'idée suivante qui me paraît la plus probable; je crois pouvoir la soumettre aux savants tout au moins comme une hypothèse qui mérite d'être vérifiée ultérieurement.

J'admets que la force qui donne naissance aux combinaisons chimiques, et qui consiste probablement en une espèce de polarité des atomes, agit déjà dans les corps simples, et que *dans ceux-ci même une molécule est composée de plusieurs atomes.*

Le cas le plus simple et par suite le plus probable d'une telle combinaison serait celui dans lequel deux atomes forment une molécule, et ce cas donne l'explication des rapports de volume qui ont été cités plus haut comme s'écartant de la règle.

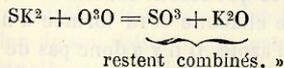
Soient donnés par exemple deux volumes égaux d'oxygène et d'azote. Si l'on forme un mélange de ces deux gaz, celui-ci contiendra un certain nombre de molécules qui seront composées soit de deux atomes d'oxygène, soit de deux atomes d'azote. Imaginons maintenant que ce mélange se transforme en une combinaison chimique; celle-ci renfermera tout autant de molécules qui seront seulement constituées différemment en ce que chacune sera formée d'un atome d'oxygène et d'un atome d'azote. Il n'y a donc pas de raison pour que le volume varie. Si l'on se donne au contraire un volume d'oxygène et deux volumes d'azote, chaque molécule sera composée de deux atomes dans le mélange et de trois atomes dans la combinaison. Par suite de la combinaison chimique le nombre des molécules a donc diminué dans le rapport de 3

à 2, et par conséquent le volume devait aussi diminuer dans le même rapport ¹⁾.

On sait qu'il existe quelques corps simples qui n'occupent pas à l'état gazeux le volume auquel on s'attendrait d'après leur poids atomique et d'après le volume de leurs combinaisons, mais qui occupent au contraire un autre volume en général plus petit et

1) [Dans un extrait de ce Mémoire publié dans les *Ann. de Chim. et de Phys.*, ainsi que dans la traduction qui en a paru dans les *Archives des Sciences phys. et nat.*, ce passage est accompagné de notes de MM. Verdet et Marignac; on y rappelle que Dumas, Laurent et Gerhardt ont déjà exprimé l'idée que *les molécules des gaz simples se composent de plusieurs atomes*. Il m'a naturellement été très-agréable de voir appeler mon attention sur cette circonstance qui m'était inconnue; et ces deux Messieurs ont eu la bonté de m'indiquer les passages qui renferment l'expression de cette idée. J'ai vu en les lisant que les conclusions les plus précises à ce sujet se trouvent dans Gerhardt (t. IV de sa *Chimie inorganique*); il est arrivé par de tout autres raisons, purement chimiques, à l'idée que l'hydrogène libre doit être regardé comme un hydrure d'hydrogène (H, H) et le chlore libre comme un chlorure de chlore (Cl, Cl). (V. §§ 2451 et 2457 de l'ouvrage cité). Une telle coïncidence de résultats déduits de considérations différentes est d'autant plus heureuse que le sujet auquel ils se rapportent est plus difficile et plus obscur.

Gerhardt s'exprime d'une manière moins précise sur la composition des molécules de l'oxygène. Le passage qui s'y rapporte le plus particulièrement se trouve dans le § 2452. Après avoir dit que la transformation du sulfure de potassium en sulfate de potasse par le grillage doit être considérée comme une double décomposition entre l'oxygène et le sulfure de potassium, il ajoute : « La molécule de l'oxygène libre étant composée de plusieurs atomes (de deux au moins), il se forme, par double décomposition, de l'acide sulfurique anhydre et de l'oxyde de potassium; mais ces deux produits demeurent unis et peuvent ultérieurement être séparés, comme dans le cas de la liqueur de Hollands :



Dans cette équation chimique la formule O^2O représente évidemment la molécule d'oxygène libre composée de plusieurs atomes qu'il a mentionnée plus haut. Dans un autre passage (§ 2457) où l'oxygène se trouve mentionné très-brièvement à côté d'autres corps, on trouve la formule OO comme représentant l'oxygène libre sans qu'il soit men-

qui est dans un rapport simple avec le précédent. Ce ne serait pas ici le lieu d'étudier ces corps d'une manière particulière; deux d'entre eux en effet, le soufre et le phosphore, montrent sous d'autres rapports, par la diversité des états qu'ils peuvent prendre, une manière d'être si frappante que l'on peut attendre de la chimie, relativement à ces corps, des résultats nouveaux qui expliqueront peut-être, en même temps que les autres irrégularités, celles du volume des vapeurs ¹⁾. Je voudrais cependant rappeler une circonstance qui contribuera peut-être dans quelques cas à cette explication; c'est que l'hypothèse précédente, d'après laquelle les molécules des corps simples sont composées chacune de deux atomes, est à la vérité la plus simple, mais n'est pas la seule possible.

Si l'on compare entre eux tous les cas des gaz simples et composés, on ne peut pas s'attendre à trouver immédiatement partout une concordance parfaite; mais je pense que, vu l'incertitude qui règne encore sur la constitution intime de plusieurs corps et particulièrement de corps d'une composition chimique compliquée, on ne doit pas attacher trop d'importance à quelques exceptions; et je regarde comme probable qu'à l'aide de l'hypothèse faite sur les molécules des corps simples, tous les rapports de volume des gaz pourront se ramener à ce théorème que *les molécules de*

tionné aucune raison de la différence entre cette formule et la précédente. Il semble par là que Gerhardt ait eu des doutes sur la constitution des molécules de l'oxygène libre. Chez les autres auteurs je ne trouve pas non plus de données précises sur le nombre d'atomes que doit renfermer une molécule d'oxygène. Dans ma théorie au contraire, j'admets comme positif que la molécule de l'oxygène ordinaire se compose de deux atomes et je dois attacher d'autant plus d'importance à ce fait qu'il est le point de départ de l'explication que je donnerai plus bas de l'ozone. 1866.]

1) [D'après les recherches de Ste-Claire Deville et Troost, publiées quelques années plus tard (en 1859), le volume de la vapeur de soufre à des températures très-élevées est autre qu'aux températures qui ne sont pas fort éloignées de son point d'ébullition, et répond à la valeur théorique déterminée au moyen du poids atomique. 1866.]

tous les gaz ont toutes la même force vive relativement à leur mouvement de translation.

ADDITIONS MATHÉMATIQUES.

14. Commençons par chercher l'expression qui indique de quelle manière la pression d'un gaz contre les parois du vase dépend du mouvement de ses molécules.

Comme la forme du vase importe peu, nous la choisirons de la manière la plus convenable pour notre analyse. Admettons que ce vase soit très-plat et terminé de deux côtés par deux parois planes parallèles assez rapprochées pour que leur distance soit négligeable vis-à-vis des autres dimensions du vase. Nous n'aurons pas alors à considérer les cas dans lesquels les molécules choquent contre l'une des petites parois latérales; et nous pourrions admettre que chaque molécule se meut en ligne droite jusqu'à ce qu'elle aille choquer une autre molécule ou l'une des grandes parois parallèles. Du reste la considération des parois latérales ne modifierait absolument en rien le résultat final et ne ferait que compliquer l'analyse.

Considérons une seule des deux grandes parois; elle éprouvera pendant l'unité de temps un certain nombre de chocs de la part de molécules dont les mouvements peuvent avoir toutes les directions possibles, pourvu qu'elles se rapprochent de sa surface. Déterminons d'abord quel est le nombre de ces chocs et combien il y en a en moyenne dans chaque direction.

15. Si le gaz est un gaz idéal, ce que nous supposons toujours par la suite, en faisant abstraction des irrégularités qui résultent d'un état gazeux imparfait, on pourra, dans la détermination de la pression, comme l'a déjà fait Krönig, au lieu de considérer le mouvement tel qu'il a réellement lieu, introduire quelques simplifications.

Le nombre total des chocs qu'éprouve la paroi ne variera pas si l'on admet que les molécules ne se troublent pas l'une

l'autre dans leurs mouvements, et que chacune d'elles continue à se mouvoir en ligne droite jusqu'à ce qu'elle rencontre une paroi.

En outre, il n'est pas en réalité nécessaire, comme cela aurait lieu d'après les lois ordinaires de l'élasticité pour des sphères élastiques choquant une paroi parfaitement rigide, qu'une molécule soit repoussée par la paroi sous le même angle et avec la même vitesse qu'elle avait en la choquant; mais, d'après les règles de la probabilité, on peut admettre qu'il y a autant de molécules dont l'angle de réflexion est compris dans un certain intervalle, par exemple entre 60° et 61° , que de molécules dont l'angle d'incidence tombe dans cet intervalle; et de même il n'y aura, en somme, rien de changé par la paroi à la vitesse des molécules. Le résultat final restera donc le même si l'on admet que pour chaque molécule l'angle et la vitesse de réflexion sont respectivement égaux à ceux d'incidence. D'après cela une molécule se mouvrait dans les mêmes directions que celles que suit un rayon lumineux entre deux miroirs plans et irait alternativement de l'une à l'autre des grandes parois jusqu'à ce qu'elle rencontrât une paroi latérale; puis, repoussée par celle-ci, elle recommencerait la même série de mouvements alternatifs, et ainsi de suite.

Enfin il existe certainement, dans la réalité, la différence la plus variée dans la vitesse des diverses molécules. Mais dans notre analyse nous pourrions attribuer à toutes les molécules une certaine vitesse moyenne. Comme on le verra par les formules suivantes, il faudra, pour obtenir la même pression, choisir cette vitesse de telle sorte que la force vive de toutes les molécules soit la même pour cette vitesse moyenne que pour les vitesses réelles.

16. Cela posé, il est facile de déterminer combien de fois une molécule choquera pendant l'unité de temps la paroi considérée. Ce nombre sera égal au nombre de fois qu'elle pourra pendant l'unité de temps aller en vertu de son mouvement propre de cette paroi à l'autre et revenir de celle-ci à la première. Soit h la distance des deux parois, θ l'angle que la direction du mouvement fait avec la normale (an-

gle que nous ne compterons que de 0 à 90°) ; $\frac{h}{\cos \theta}$ sera la longueur du chemin décrit d'une paroi à l'autre, et par suite, si u désigne la vitesse de la molécule, le nombre des chocs contre la paroi sera :

$$(1) \quad \frac{u \cos \theta}{2h}.$$

Quant à la direction du mouvement des diverses molécules, nous devons admettre qu'en moyenne toutes les directions sont également fréquentes. De là résulte que le nombre des molécules dont les directions forment avec la normale des angles compris entre θ et $\theta + d\theta$ est au nombre total des molécules dans le même rapport que la surface d'une zone sphérique, dont les cercles répondent aux angles θ et $\theta + d\theta$ est à la surface de la demi-sphère, donc comme

$$2 \pi \sin \theta d\theta : 2 \pi.$$

D'après cela, si n représente le nombre total des molécules, le nombre de celles qui répondent à l'intervalle angulaire compris entre θ et $\theta + d\theta$ sera

$$n \sin \theta d\theta,$$

et le nombre des chocs produits par ces molécules :

$$(2) \quad \frac{nu}{2h} \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

17. Pour déterminer l'intensité du choc, nous devons décomposer la vitesse suivant deux directions, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à la paroi. La première composante n'est pas altérée par le choc et par conséquent n'intervient pas dans la détermination de son intensité ; la seconde au contraire, qui est représentée en grandeur par $u \cos \theta$, est transformée par le choc en une vitesse égale et de direction opposée. L'effet de la paroi sur la molécule consiste donc en ce qu'elle lui enlève dans un sens la vitesse $u \cos \theta$ dans la di-

rection de la normale, et qu'elle lui communique la même vitesse en sens contraire, ou ce qui revient au même, qu'elle lui communique dans ce dernier sens la vitesse $2 u \cos \theta$. De là résulte pour la quantité de mouvement qui est communiquée à la molécule en représentant par m sa masse.

$$(3) \quad 2 mu \cos \theta.$$

En appliquant ce résultat à toutes les molécules qui sont comprises dans l'intervalle compris entre θ et $\theta + d\theta$ nous obtiendrons, pendant l'unité de temps,

$$\frac{nu}{2h} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

fois cette action, et la quantité de mouvement communiquée à ces molécules pendant l'unité de temps sera donc :

$$(4) \quad \frac{nm u^2}{h} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Il suffira d'intégrer cette expression depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour obtenir la quantité de mouvement que la paroi communique à toutes les molécules qui la choquent pendant l'unité de temps, à savoir :

$$(5) \quad \frac{nm u^2}{3h}.$$

Si nous supposons la paroi mobile, il faudra, pour qu'elle ne soit pas repoussée par les chocs des molécules, qu'il y ait une pression exercée sur l'autre face, et l'on pourra, à cause du grand nombre des chocs et de la faiblesse de chacun d'eux, regarder cette force opposée comme continue. On détermine la grandeur de cette force en exprimant qu'elle doit pouvoir produire, pendant l'unité de temps, la quantité de mouvement précédente. Mais, comme la quantité de mouvement, que peut produire une force pendant l'unité de temps, est la mesure même de cette force, l'expression précédente représente évi-

demment la force cherchée et, par suite, la pression exercée par le gaz à laquelle elle fait équilibre.

En appelant α la surface de la paroi, et p la pression sur l'unité de surface, nous aurons :

$$p = \frac{nm\mu^2}{3\alpha h}.$$

Le produit αh représente la capacité du vase ou le volume du gaz. Si nous le désignons par v , il viendra :

$$(6) \quad p = \frac{nm\mu^2}{3v}.$$

On arrive à la même formule si l'on suppose pour plus de simplicité, comme l'a fait Krönig, qu'un tiers des molécules se meut perpendiculairement à la paroi, et les deux autres tiers suivant deux directions parallèles à cette paroi. Toutefois, j'ai cru convenable de déduire la formule de la pression sans recourir à cette hypothèse ¹⁾.

1) Quoique l'analyse précédente ne s'appuie pas sur l'hypothèse que les molécules ne se meuvent que suivant trois directions, nous en avons admis quelques autres destinées à la faciliter. Nous avons en effet attribué au vase une forme déterminée et nous avons admis, quant au mouvement des molécules, qu'elles allaient d'une paroi à l'autre sans se troubler mutuellement. Pour montrer que le résultat est tout à fait indépendant de ces suppositions, il ne sera peut-être pas hors de propos de traiter dans cette note le même sujet d'une manière encore plus générale.

Imaginons d'abord dans l'intérieur de l'espace rempli par le gaz une couche infiniment mince limitée par deux plans parallèles infiniment rapprochés, et soit dx l'épaisseur de cette couche. Si nous considérons une portion de cette couche répondant à l'unité de surface des deux plans, le volume de cette portion sera également représenté par dx . Si nous désignons par N le nombre des molécules contenues dans l'unité de volume, le nombre de celles qui se trouvent à un instant quelconque dans cette portion de la couche infiniment mince sera Ndx . Ces molécules se meuvent dans toutes les directions possibles, de sorte que chaque direction est aussi probable que les autres. D'après cela, le nombre des molécules dont les directions forment avec la normale aux deux plans considérés des angles compris entre θ et $\theta + d\theta$, sera

Si l'on écrit la dernière équation sous la forme :

$$(6a) \quad \frac{3}{2} p v = \frac{nm\mu^2}{2},$$

au nombre total des molécules comme la zone sphérique correspondant à l'intervalle compris entre θ et $\theta + d\theta$ est à la surface de la sphère, donc comme $2\pi \sin \theta d\theta : 4\pi$. Ce nombre sera donc représenté par :

$$\frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} N dx = \frac{1}{2} N \sin \theta d\theta dx.$$

Connaissant ainsi le nombre des molécules de directions déterminées qui se trouvent simultanément dans la portion considérée de la couche, il sera aisé de trouver le nombre des molécules qui parcourent cette portion de la couche dans ces mêmes directions et qui traversent par suite l'unité de surface des deux plans pendant l'unité de temps. Une molécule dont la direction forme avec la normale l'angle θ et dont la

vitesse est u , emploie pour parcourir la couche le temps $\frac{1}{u} \frac{dx}{\cos \theta}$, et nous pourrions compter ce même temps pour toutes les molécules qui correspondent à l'intervalle angulaire compris entre θ et $\theta + d\theta$; nous pourrions faire abstraction du signe du cosinus puisque nous n'aurons affaire par la suite qu'à des angles inférieurs à 90° , dont le cosinus est positif. Imaginons d'abord que chacune des molécules considérées emploie exactement une unité de temps pour parcourir la couche, il y aurait alors simultanément dans cette couche autant de ces molécules qu'il y en a qui la parcourent pendant l'unité de temps. Si au contraire le temps employé à parcourir la couche est plus petit, le nombre des molécules qui y sont simultanément devra être plus petit dans le même rapport, relativement au nombre des molécules qui traversent la couche pendant l'unité de temps. Ces deux nombres devront donc être dans ce cas dans le rapport de $\frac{1}{u} \frac{dx}{\cos \theta}$ à 1. En tenant compte du

nombre trouvé précédemment des molécules qui se trouvent simultanément dans la portion considérée de la couche (et nous bornant toujours aux molécules comprises dans cet intervalle infiniment petit des angles) nous obtiendrons pour le nombre de celles qui traversent la couche pendant l'unité de temps, la valeur :

$$\frac{1}{2} N \sin \theta d\theta dx \cdot \frac{u \cos \theta}{dx} = \frac{1}{2} Nu \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Cette expression représente en même temps, comme nous l'avons dit, le nombre des molécules correspondant à cet intervalle qui traversent pendant l'unité de temps, l'unité de surface de chacun des deux plans

le second membre représente la *force vive du mouvement de*

limites. Or, comme un plan quelconque qui coupe le gaz peut être regardé comme la limite d'une couche infiniment mince, l'expression précédente sera applicable à chacun de ces plans.

Si, au lieu de l'unité de surface, on veut considérer un élément de surface $d\omega$, il suffira de multiplier la valeur précédente par $d\omega$. D'après cela, l'expression

$$\frac{1}{2} Nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\omega$$

représente le nombre des molécules qui traversent pendant l'unité de temps l'élément d'une surface quelconque donnée dans le gaz, suivant des directions qui font avec la normale des angles compris entre θ et $\theta + d\theta$.

Ce que nous venons de dire d'un élément de surface donné dans le gaz, peut s'appliquer avec une légère modification, à un élément de paroi du vase. Imaginons en effet une normale élevée à l'élément de la paroi, et considérons pour la détermination des angles la portion de cette normale qui est dirigée de l'intérieur vers l'extérieur. Alors tous les angles que forment avec la normale les directions des mouvements des molécules qui rencontrent la paroi seront plus petits que 90° . Après la réflexion au contraire, les directions des molécules formeront avec la normale des angles plus grands que 90° . Si l'on compare une paroi à une surface donnée dans l'intérieur du gaz, on pourra donc dire : Les molécules qui traversent cette surface sous des angles plus petits que 90° , correspondent aux molécules qui choquent la paroi ; et celles qui se meuvent dans des directions opposées, et qui traversent par suite la surface sous des angles plus grands que 90° , correspondent aux molécules réfléchies par la paroi. Or, comme nous n'avons à compter qu'une seule fois une molécule qui choque la paroi et qui est réfléchiée par elle, nous pourrions nous borner à considérer les angles compris entre θ et 90° . Du reste, tout ce qui précède peut s'appliquer ici, et la dernière expression représente par conséquent le nombre des molécules qui choquent un élément $d\omega$ de la paroi sous des angles compris entre θ et $\theta + d\theta$.

A partir de ce point, le développement du calcul est le même que dans le texte, et je me bornerai à le résumer brièvement.

Une molécule de masse m qui choque la paroi sous l'angle θ et qui est réfléchiée comme une sphère élastique, reçoit de la paroi la quantité de mouvement :

$$2 mu \cos \theta.$$

Toutes les molécules qui choquent pendant l'unité de temps l'élément

translation des molécules du gaz ¹⁾. Or, d'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, on a, en désignant par T la température absolue

$$pv = T. \text{ Const.}$$

on pourra donc écrire

$$\frac{nmv^2}{2} = T. \text{ Const.}$$

Il en résulte, comme nous l'avons dit plus haut, que la force vive du mouvement de translation est proportionnelle à la température absolue.

de surface $d\omega$ sous des angles compris entre θ et $\theta + d\theta$ recevront donc la quantité de mouvement :

$$\frac{1}{2} Nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\omega. 2 mu \cos \theta,$$

ou, en réduisant :

$$Nm u^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\omega.$$

En intégrant cette expression depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtiendra la pression que le gaz exerce sur l'élément de surface $d\omega$; et si l'on désigne cette pression par $pd\omega$, on aura :

$$p = Nm u^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} Nm u^2.$$

Ce résultat est le même que celui qui est donné dans le texte sous l'équation (6) ; car si l'on désigne par n , le nombre des molécules qui se trouvent dans un volume quelconque v , et par N le nombre des molécules renfermées dans l'unité de volume, on devra poser $N = \frac{n}{v}$, et l'on

obtiendra ainsi l'équation (6). 1866.]

1) J'appelle force vive, comme on le fait souvent aujourd'hui et comme je l'ai fait jusqu'à présent dans mes Mémoires, non pas tout le produit, mais la *moitié* du produit de la masse par le carré de la vitesse ; en la définissant ainsi, on peut en effet évaluer respectivement un travail et l'accroissement ou la diminution correspondante de la force vive sans qu'il soit nécessaire d'introduire aucun coefficient.

18. Commençons par appliquer les équations trouvées à un problème intéressant, c'est-à-dire à la détermination de la vitesse u avec laquelle se meuvent les molécules du gaz.

Le produit nm représente la masse de toute la quantité de gaz donnée. Afin de ramener cette quantité au poids du gaz, nous aurons à diviser celui-ci par l'accélération de la pesanteur g . En appelant le poids q , nous aurons :

$$nm = \frac{q}{g},$$

et, en substituant cette valeur dans l'équation (6), nous pourrions en tirer la suivante :

$$(7) \quad u^2 = \frac{3gv}{g}.$$

Choisissons pour unité de longueur le mètre, et pour unité de poids le kilogramme, et soit donné un kilogramme d'un certain gaz sous la pression d'une atmosphère ou de 10333 kilogrammes par mètre carré. On a dans ce cas :

$$g = 9^m,80896$$

$$p = 10333$$

$$q = 1.$$

Pour déterminer v on sait, d'après Regnault, qu'un kilogramme d'air atmosphérique sous la pression d'une atmosphère et à la température de 0° occupe un volume de 0^m,7733. Par suite, si ρ désigne le poids spécifique du gaz considéré, son volume à 0° sera :

$$\frac{0,7733}{\rho},$$

et à la température absolue T , en admettant que la température absolue de la glace fondante soit de 273°, ce volume sera :

$$\frac{0,7733}{\rho} \cdot \frac{T}{273}.$$

D'après cela, on aura :

$$u^2 = 3 \cdot 9,80896 \cdot 10333 \cdot 0,7733 \cdot \frac{T}{273 \cdot \rho}$$

$$= 235130 \frac{T}{273 \cdot \rho},$$

et par suite :

$$(8) \quad u = 485^m \sqrt{\frac{T}{273 \cdot \rho}}.$$

De là résultent, par exemple, pour la température de la glace fondante, les nombres suivants :

pour l'oxygène	461 ^m
» l'azote	492 ^m
» l'hydrogène	1844 ^m

Ces nombres sont ces vitesses moyennes qui donnent pour toutes les molécules ensemble la même force vive que les vitesses réelles. Mais il est possible que ces dernières s'écartent notablement de ces valeurs moyennes.

19. Enfin, nous chercherons encore, au moyen des équations trouvées plus haut, *quel est le rapport de la force vive du mouvement de translation à la force vive totale du gaz, c'est-à-dire à la chaleur contenue dans ce gaz.*

Pour la concordance des résultats, supposons que la quantité de chaleur soit mesurée non au moyen de l'unité habituelle de chaleur, mais au moyen de l'unité mécanique de la force vive ou, ce qui revient au même, au moyen de l'unité de travail. A cet effet, il suffit de diviser la quantité de chaleur rapportée à l'unité habituelle, par l'équivalent calorifique de l'unité de travail que je nommerai A , comme précédemment. Soit H , la quantité de chaleur ainsi déterminée.

Désignons, en outre, par c la chaleur spécifique du gaz sous volume constant ou sa vraie [capacité calorifique]; l'accroissement de la quantité de chaleur contenue dans la masse de gaz q pour l'élévation de température dT sera :

$$dH = \frac{qc}{A} dT.$$

En intégrant cette équation, on obtiendra :

$$(9) \quad H = \frac{qc}{A} T.$$

Il est inutile d'ajouter une constante, puisque, comme nous l'avons dit plus haut, la quantité de chaleur contenue dans le gaz est proportionnelle à la force vive de son mouvement de translation, et par suite à la température absolue.

Le second membre de cette équation peut se mettre sous une autre forme plus appropriée au but que nous avons en vue.

La quantité de chaleur que l'on doit communiquer à la masse q de gaz pour augmenter sa température de dT et son volume de dv est exprimée par

$$\frac{qc}{A} dT + p dv,$$

où le premier terme représente l'accroissement de la chaleur contenue dans le gaz, et le second la chaleur consommée par le travail. Si nous supposons que l'échauffement ait lieu sous pression constante, le rapport entre dT et dv sera déterminé. On a en effet :

$$pv = T \cdot \text{Const.}$$

Si l'on différencie cette équation en supposant p constant, on aura :

$$p dv = dT \cdot \text{Const.}$$

et en éliminant la constante indéterminée au moyen de l'équation précédente

$$dv = \frac{v}{T} dT.$$

Substituons cette valeur de dv dans l'expression qui précède. En désignant par c' la chaleur spécifique du gaz sous pression constante, nous pourrions représenter pour ce cas par $\frac{qc'}{A} dT$ toute la quantité de chaleur communiquée au gaz. Nous obtiendrons ainsi l'équation

$$\frac{qc'}{A} dT = \frac{qc}{A} dT + \frac{pv}{T} dT,$$

d'où résulte :

$$(10) \quad \frac{q(c' - c)}{A} T = pv.$$

A l'aide de cette équation, (9) devient

$$(11) \quad H = \frac{c}{c' - c} pv.$$

20. Revenons à l'équation précédente (6_a) et désignons pour abrégé par K la force vive du mouvement de translation, nous aurons :

$$K = \frac{3}{2} pv.$$

En combinant cette équation avec la précédente, nous obtiendrons :

$$(12) \quad \frac{K}{H} = \frac{3}{2} \left(\frac{c'}{c} - 1 \right).$$

Le rapport de la force vive du mouvement de translation, à la force vive totale, se trouve ainsi ramené au rapport des deux chaleurs spécifiques.

Pour comparer entre elles les valeurs que prend le rapport $\frac{K}{H}$ pour différents gaz, il est préférable d'introduire dans la formule précédente au lieu des chaleurs spécifiques en poids, les chaleurs spécifiques en volume que nous représenterons par γ et γ' . Cette équation deviendra alors :

$$(13) \quad \frac{K}{H} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma}.$$

En faisant abstraction des écarts qui ont leur raison d'être dans l'imperfection de l'état gazeux, et en supposant que tous les gaz se trouvent à l'état idéal, la différence $\gamma' - \gamma$ sera la même pour tous les gaz, comme je l'ai démontré dans mon

Mémoire « sur la force motrice de la chaleur » ¹⁾. Il en résulte que le rapport $\frac{K}{H}$ est inversement proportionnel à la vraie [capacité calorifique] des gaz rapportée au volume.

Pour les gaz simples qui n'affectent aucune irrégularité relativement à leur volume, et pour les gaz composés qui n'ont subi aucune diminution de volume dans la combinaison, γ et par suite $\frac{K}{H}$ ont la même valeur. Pour ces gaz, on a approximativement :

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = 1,421$$

d'où résulte

$$\frac{K}{H} = 0,6315.^2)$$

Pour les gaz composés dont le volume a décreu par la combinaison γ est plus grand et par suite $\frac{K}{H}$ plus petit ; et l'écart est d'autant plus considérable que le volume de la combinaison est plus petit par rapport à la somme des volumes des composants, ceux-ci étant tous supposés à l'état gazeux.

Il se confirme donc, comme nous l'avons dit plus haut, que la force vive du mouvement de translation seule ne représente pas toute la chaleur contenue dans le gaz, et que la différence est d'autant plus grande qu'il entre plus d'atomes dans chaque molécule de la combinaison. On doit donc en conclure qu'outre le mouvement de translation des molécules elles-mêmes, il existe encore d'autres mouvements de leurs parties constituantes, mouvements dont la force vive forme également une partie de la chaleur du gaz.

1) [Partie 1. de cette collection, p. 49 de la trad. franç.]

2) [J'ai adopté récemment pour le rapport $\frac{\gamma'}{\gamma}$ la valeur 1,410 au lieu de 1,421 ce qui fait que $\frac{K}{H}$ devient égal à 0,615. 1866.]

MÉMOIRE XV.

SUR LES LONGUEURS MOYENNES DES CHEMINS QUI SONT PARCOURUS PAR LES MOLÉCULES DANS LE MOUVEMENT MOLÉCULAIRE DES CORPS GAZEUX.

Ann. de Pogg., livraison d'octobre 1838, t. CV, p. 239; *Phil. Mag.*, 4^e série, vol. XVII, p. 81.

1. La livraison de février de ces Annales ¹⁾ contient un Mémoire de Buys-Ballot « sur la nature du mouvement que nous nommons chaleur et électricité ; » dans ce Mémoire, l'auteur élève quelques objections contre les vues que Joule, Krönig et moi nous avons émises sur les mouvements moléculaires des corps gazeux ; la principale de ces objections est la suivante. Si les molécules se mouvaient en ligne droite, il en résulterait, dit-il, un mélange rapide de masses gazeuses qui sont en contact l'une avec l'autre, ce qui n'a pas lieu en réalité. A l'appui de cette dernière affirmation, il cite, page 250, les faits suivants : « Comment se fait-il que la fumée de tabac se répand si longtemps dans les chambres en traînées immobiles ? » Il rappelle aussi le même phénomène relativement au nuage de fumée à l'air libre. Et plus bas : « Lorsque l'on développe dans un coin d'une chambre de l'acide sulfhydrique ou du chlore, il s'écoule plusieurs minutes avant que l'odeur s'en répande dans l'autre coin, tandis que les particules de gaz auraient dû parcourir la chambre des centaines de fois en

1) [*Ann. de Pogg.*, t. CIII, p. 240.]

une seule seconde. » Enfin : « Comment de l'acide carbonique pourrait-il séjourner si longtemps dans un vase ouvert ? »

Comme ces objections peuvent paraître très-frappantes au premier abord, il me semble nécessaire de démontrer d'une manière spéciale que les faits invoqués peuvent fort bien s'accorder avec la théorie du mouvement rectiligne des molécules. Les objections de M. Buys-Ballot me sont même d'autant plus agréables qu'elles me fournissent l'occasion de compléter cette partie de la théorie, que j'ai peut-être traitée un peu brièvement dans mon précédent Mémoire, et d'éviter par là d'autres malentendus pour l'avenir.

2. Ces objections supposent que les molécules parcourent des espaces considérables en ligne droite, ce qui ressort surtout à l'évidence de la seconde où l'on affirme qu'une molécule aurait dû parcourir plusieurs fois la chambre en une seule seconde. Mais cette hypothèse ne peut pas le moins du monde être considérée comme une conséquence nécessaire des vues que j'ai émises sur l'état des gaz. Entre les conditions qui devraient être satisfaites, si les lois de Mariotte et de Gay-Lussac étaient rigoureusement applicables à un gaz, j'ai énoncé la suivante : « Que les parties du chemin décrit par une molécule, sur lesquelles les forces moléculaires agissent en modifiant d'une manière sensible le mouvement de la molécule en vitesse ou en direction, sont négligeables à côté des parties de ce chemin sur lesquelles l'action de ces forces peut être regardée comme insensible. » Or, dans la réalité, les lois de Mariotte et de Gay-Lussac ne sont pas applicables aux gaz en toute rigueur, mais seulement d'une manière approximative; et de là résulte que pour eux ces premières parties du chemin sont à la vérité très-petites par rapport au chemin total, mais ne doivent pas précisément être négligeables. Et comme une des conditions fondamentales sur lesquelles repose toute la théorie est que les forces moléculaires ne sont sensibles qu'à de faibles distances des molécules, un chemin qui est grand relativement à la sphère d'action d'une molécule peut néanmoins être encore très-petit en grandeur absolue.

Au moyen de quelques simples considérations, on peut se

faire une idée approchée de la grandeur moyenne des chemins parcourus par les molécules; et c'est là l'objet que je me suis proposé dans ce qui suit.

3. Il sera utile de présenter d'abord quelques observations sur la manière dont on peut se représenter les forces moléculaires, et sur le sens que l'on devra attacher, en conséquence, à la sphère d'action. Ces observations ne doivent pas être considérées comme une partie essentielle de l'analyse suivante, mais ne serviront qu'à fixer les idées.

Si nous faisons abstraction des forces de l'affinité chimique, et si nous ne considérons que des molécules qui sont chimiquement indifférentes l'une à l'autre, je pense que l'on devra encore distinguer deux genres de forces; c'est-à-dire que quand deux molécules s'approchent l'une de l'autre, il naît d'abord une force attractive, qui commence déjà à devenir sensible à quelque distance, et qui croît à mesure que celle-ci diminue; mais qu'ensuite, lorsque les molécules sont devenues immédiatement voisines, il surgit une force qui cherche à les séparer l'une de l'autre. Il est indifférent pour l'objet que nous nous proposons que l'on se représente cette force comme agissant immédiatement au contact, ce qui arrive, par exemple, dans les cas des corps élastiques qui, après avoir été comprimés l'un contre l'autre avec une certaine force, se repoussent avec la même force, ou bien qu'on la regarde comme naissant déjà avant le contact réel des molécules. De même, nous pouvons laisser de côté la question de savoir si l'on doit attribuer ces deux forces aux particules pondérables elles-mêmes, ou si l'on doit attribuer l'une d'elles à une substance plus ténue dont les particules de matière pondérable peuvent être pourvues.

Imaginons maintenant deux molécules qui se meuvent dans des directions telles que, si elles les conservaient invariablement, elles ne se choqueraient pas, mais passeraient à quelque distance l'une de l'autre; il pourra se présenter plusieurs cas. Si la distance est très-faible, les molécules qui sont de plus en plus attirées l'une vers l'autre par la force attractive, qui agit déjà à quelque distance, se rapprocheront tellement que

la force répulsive agira, et qu'elles se repousseront mutuellement. Si la distance est un peu plus grande, les trajectoires des molécules ne subiront qu'une certaine déviation due à la force attractive, sans que la force répulsive puisse produire d'effet. Enfin, à des distances encore plus considérables l'influence des molécules l'une sur l'autre est entièrement négligeable.

Si l'on avait même une connaissance exacte des forces moléculaires, on ne pourrait néanmoins pas déterminer d'une manière générale quelles doivent être ces distances pour que l'un ou l'autre effet se produise, parce que l'on doit tenir compte également de la vitesse des molécules et de l'inclinaison mutuelle de leurs trajectoires; mais on pourrait du moins déterminer les valeurs moyennes de ces distances. Nous admettrons donc que l'on donne comme valeur moyenne une distance ρ qui forme la limite entre le premier et le second cas, et dont nous déterminerons encore un peu plus exactement la signification de la manière suivante. Si les centres de gravité de deux molécules se meuvent dans des directions telles, qu'en continuant à se mouvoir en ligne droite dans ces directions, elles passeraient à une distance plus grande que ρ l'une de l'autre, les directions de leurs trajectoires seulement seront un peu modifiées par leur attraction mutuelle, sans que la force répulsive puisse agir; si, au contraire, cette distance est plus petite que ρ , cette dernière force agira aussi, et les molécules se repousseront mutuellement.

Si, par choc de deux molécules, nous n'entendons que ce second cas, et que nous laissons de côté les changements de direction qui sont produits par l'attraction à des distances plus grandes, nous pourrions, pour le but proposé, imaginer une sphère décrite du centre de gravité de la molécule avec le rayon ρ , et la regarder comme la *sphère d'action* de la molécule.

Je rappellerai encore que les hypothèses particulières qui sont faites ici sur la nature des forces moléculaires ne doivent pas être regardées comme une condition nécessaire à la validité des développements qui suivent, mais qu'elles ne

doivent servir qu'à fixer, en quelque sorte, la représentation, et à faciliter ainsi l'étude. Quelle que soit l'idée que l'on se fasse des forces au moyen desquelles les molécules exercent une action mutuelle sur la direction de leurs mouvements, du moment que l'on accorde que leurs effets ne sont sensibles qu'à des distances très-petites, on pourra toujours admettre qu'il existe une certaine limite de distance au delà de laquelle les effets de ces forces peuvent être négligés, tandis qu'on doit en tenir compte en deçà de cette limite; et l'on peut désigner une sphère décrite avec cette distance pour rayon comme la sphère d'action de ces forces.

4. Imaginons maintenant, dans un espace donné, un grand nombre de molécules qui se meuvent d'une manière irrégulière, et considérons-en une particulièrement; elle choquera tantôt l'une, tantôt l'autre des molécules environnantes et sera repoussée par elle; il s'agit de savoir quelles seront les longueurs moyennes des chemins parcourus entre deux chocs successifs, ou, plus exactement, *combien la molécule peut se mouvoir en moyenne jusqu'à ce que son centre de gravité arrive dans la sphère d'action d'une autre molécule.*

Nous ne traiterons toutefois pas cette question sous la forme précédente, mais nous en poserons une un peu plus simple, qui s'y lie de telle sorte que la solution de l'une pourra se relier à celle de l'autre.

Admettons que les molécules qui se trouvent dans l'espace donné ne se meuvent pas toutes, et considérons-en une seule en mouvement, tandis que les autres restent fixes; dans ces conditions, la molécule mobile choquera encore tantôt l'une, tantôt l'autre des molécules environnantes, et nous pourrions comparer le nombre des chocs qu'elle éprouve, dans ce cas, pendant l'unité de temps, au nombre de ceux qu'elle éprouverait dans le cas du mouvement général des molécules. En considérant attentivement le phénomène, on voit aisément que le nombre des chocs qui ont lieu entre des molécules en mouvement doit être plus grand qu'entre des molécules en repos, ou, ce qui revient au même, que la longueur moyenne des chemins que la molécule considérée parcourt

entre deux chocs consécutifs doit être plus petite dans le premier cas que dans le second. Le rapport de ces deux longueurs moyennes peut se calculer exactement dès que l'on connaît la vitesse des autres molécules, relativement à celle de la molécule considérée. Le cas le plus intéressant, pour nos recherches, est celui dans lequel les vitesses de toutes les molécules sont égales en *moyenne*; dans ce cas, en ne considérant que les vitesses *moyennes*, nous pourrions admettre plus simplement que toutes les molécules ont la même vitesse, et nous obtiendrions alors le résultat suivant. *Les longueurs moyennes des chemins, pour les deux cas où les autres molécules ou bien se meuvent avec la même vitesse que la molécule considérée, ou bien se trouvent en repos, sont entre elles dans le rapport de 3/4 à 1.*

Il ne serait pas difficile de démontrer l'exactitude de ce rapport; toutefois, il n'est pas nécessaire de nous y arrêter ici; dans notre étude sur le chemin moyen, il ne s'agit pas, en effet, d'en déterminer la valeur exacte, mais seulement de nous en faire une idée approchée, de sorte que la connaissance précise de ce rapport n'est pas nécessaire. Il suffit, pour notre objet, de pouvoir regarder comme certain que le chemin moyen, dans le cas de molécules en mouvement, ne peut pas être plus grand que dans le cas de molécules en repos, ce que l'on admettra sans doute immédiatement. Cela posé, nous nous bornerons à traiter la question dans le cas où la molécule considérée est en mouvement, tandis que toutes les autres sont en repos ¹.)

1) Pour être plus complet je donnerai ici la démonstration du théorème énoncé dans le texte; à savoir que les longueurs moyennes des chemins pour les deux cas où les autres molécules se meuvent avec la même vitesse que la molécule considérée ou bien se trouvent en repos, sont entre elles dans le rapport de $\frac{3}{4}$ à 1. J'ai déjà publié une démonstration analogue dans le *Phil. Mag.*, livr. de juin 1860, démonstration qui avait été provoquée par une affirmation contradictoire de Maxwell.

Lorsque la molécule considérée, que nous nommerons *m* pour la

En outre, nous pourrions, sans rien changer à la chose, substituer un simple point à la molécule en mouvement,

distinguer des autres, se meut avec la vitesse *u* entre des molécules en repos, si l'on représente par *adt* la probabilité qu'elle rencontrera l'une de ces molécules pendant un temps infiniment petit *dt*, il est évident que *a* doit être proportionnel à la vitesse *u*; on peut donc poser :

$$a = \alpha u,$$

où α est un coefficient qui dépend du nombre des molécules et de la grandeur de leurs sphères d'action.

Considérons maintenant le cas où les autres molécules sont aussi en mouvement et supposons qu'elles se meuvent toutes avec une même vitesse *v*.

En outre, nous admettrons provisoirement que toutes les molécules se meuvent dans une même direction qui forme avec celle de la molécule *m* un angle φ . Alors *m* aura par rapport à toutes les autres molécules la même vitesse relative *r*, déterminée par la formule :

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi}.$$

Si nous appelons *bdt* la probabilité que *m* rencontre dans ces circonstances une autre molécule pendant le temps *dt*, la vitesse relative *r* jouera dans la détermination de *b* le même rôle que la vitesse *u* dans la détermination de *a*, et nous aurons donc à poser :

$$b = \alpha r.$$

Abandonnons maintenant l'hypothèse provisoire que toutes les autres molécules se meuvent dans la même direction, et supposons qu'elles se meuvent dans toutes les directions possibles, de sorte que chaque direction de l'espace est également probable pour chaque molécule. Alors *m* aura des vitesses relatives différentes par rapport aux différentes molécules. Supposons formée la moyenne arithmétique de ces vitesses relatives, et représentons-la par \bar{r} . En appelant *c*dt la probabilité que *m* rencontre une autre molécule dans ces circonstances pendant le temps *dt*, nous n'aurons pour déterminer *c* qu'à mettre \bar{r} à la place de *r* dans l'expression de *b*. Nous aurons ainsi :

$$c = \alpha \bar{r},$$

et de la comparaison de cette expression avec celle de *a* résulte la proportion :

$$c : a = \bar{r} : u.$$

La valeur moyenne \bar{r} pourra se déterminer au moyen des considé-

puisque nous n'avons à nous occuper que de son centre de gravité.

5. Soit donc donné un espace dans lequel se trouve une grande quantité de molécules sans arrangement régulier, mais avec la condition que la densité soit partout la même, c'est-à-dire que dans des portions égales de cet espace, il se trouve un nombre égal de molécules. Nous pour-

rons imaginer ces molécules disposées en couches parallèles et perpendiculaires à la direction de ce mouvement, et nous déterminerons quelle est la probabilité que le point parcouru librement une couche d'épaisseur x , sans rencontrer la sphère d'action d'aucune molécule.

Si un point se meut en ligne droite à travers cet espace, nous imaginerons celui-ci partagé en couches parallèles et perpendiculaires à la direction de ce mouvement, et nous déterminerons quelle est la probabilité que le point parcouru librement une couche d'épaisseur x , sans rencontrer la sphère d'action d'aucune molécule.

rons déterminer cette densité d'une manière qui s'accorde avec nos recherches, en indiquant la distance qui séparerait deux molécules voisines, si les molécules étaient disposées cubiquement, c'est-à-dire si elles occupaient toutes les sommets de cubes très-petits, égaux entre eux, dans lesquels tout l'espace serait divisé. Nous désignerons cette distance, ou le côté de l'un des petits cubes, par λ , et nous l'appellerons la distance moyenne de deux molécules voisines.

Si un point se meut en ligne droite à travers cet espace, nous imaginerons celui-ci partagé en couches parallèles et perpendiculaires à la direction de ce mouvement, et nous déterminerons quelle est la probabilité que le point parcouru librement une couche d'épaisseur x , sans rencontrer la sphère d'action d'aucune molécule.

Considérons d'abord une couche d'épaisseur 1, et désignons par a , qui est une fraction de l'unité, la probabilité que le point ne rencontre, en la parcourant, aucune sphère d'action; la probabilité correspondante pour une couche d'épaisseur 2 sera égale à a^2 ; car si l'on imagine cette couche partagée en deux couches d'épaisseur 1, on devra multiplier la probabilité

autres molécules se meuvent avec la même vitesse que m et celui où elles sont en repos, la proportion suivante :

$$c : a = \frac{4}{3} : 1.$$

Le rapport suivant lequel la probabilité que la molécule m en rencontre une autre pendant le temps infiniment petit dt est plus grande dans l'un des cas que dans l'autre, doit aussi être le rapport suivant lequel le nombre de ces rencontres pendant l'unité de temps est plus grand dans l'un des cas que dans l'autre. De plus, les longueurs moyennes de chemin de cette molécule doivent être entre elles pour ces deux cas dans un rapport inverse à celui des nombres de ces rencontres pendant l'unité de temps; et nous aurons donc pour les longueurs moyennes de chemin le rapport :

$$\frac{3}{4} : 1,$$

énoncé dans le théorème précédent. 1866.]

raisons suivantes. Le nombre des molécules dont les directions font avec la direction de m des angles compris entre φ et $\varphi + d\varphi$ est au nombre total des molécules, comme une zone sphérique d'angle polaire φ et de largeur $d\varphi$ est à la surface de la sphère, donc comme

$2\pi \sin \varphi d\varphi : 4\pi$, ou comme $\frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi : 1$. Pour obtenir la vitesse moyenne relative, on devra donc multiplier la valeur précédente de r par $\frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi$ et intégrer entre 0 et π ; d'où :

$$\bar{r} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \varphi} \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

L'intégration donne d'abord :

$$\bar{r} = \frac{1}{6uv} \left[(u^2 + v^2 + 2uv)^{\frac{3}{2}} - (u^2 + v^2 - 2uv)^{\frac{3}{2}} \right],$$

et de là résulte si $v < u$:

$$\bar{r} = \frac{1}{6uv} \left[(u+v)^3 - (u-v)^3 \right] = u + \frac{1}{3} \cdot \frac{v^2}{u},$$

et si $v > u$:

$$\bar{r} = \frac{1}{6uv} \left[(u+v)^3 - (v-u)^3 \right] = v + \frac{1}{3} \cdot \frac{u^2}{v}.$$

Dans le cas particulier où $v = u$, ces deux expressions prennent une valeur commune, à savoir :

$$\bar{r} = \frac{4}{3} u.$$

Si nous substituons cette valeur dans la proportion précédente, nous obtiendrons pour les deux cas que nous avons à comparer, celui où les

que le point parcourt librement la première couche, et arrive à la seconde, par la probabilité qu'il parcourra cette dernière. De même, on obtiendra pour une couche d'épaisseur 3 la probabilité a^3 , et ainsi de suite; et pour une couche d'une épaisseur quelconque x , on obtiendra de même a^x . Nous transformerons cette expression en écrivant, au lieu de a , $e^{-\alpha}$, où e représente la base des logarithmes naturels, et où

$-\alpha = \log. \text{ nat. } a$, logarithme qui doit être négatif, puisque a est plus petit que 1. En appelant W la probabilité que le point parcourt librement une couche d'épaisseur x , nous aurons l'équation

$$(1) \quad W = e^{-\alpha x},$$

où il s'agit encore de déterminer la constante α .

A cet effet, considérons une couche d'une épaisseur tellement mince que nous puissions négliger les puissances de l'épaisseur supérieures à la première. Appelons δ cette épaisseur et W_δ la probabilité correspondante, l'équation précédente deviendra :

$$(2) \quad W_\delta = e^{-\alpha\delta} = 1 - \alpha\delta.$$

D'un autre côté, nous pouvons dans ce cas déterminer directement la probabilité par des considérations particulières. Choisissons dans la couche un plan quelconque parallèle aux deux plans qui la limitent, et supposons toutes les molécules, dont les centres sont dans la couche, transportées suivant son épaisseur, de telle sorte que leur centre tombe dans ce plan; nous n'aurons qu'à chercher quelle est la probabilité que le point en traversant cette couche ne rencontre aucune sphère d'action; et cette probabilité peut se déterminer d'une manière simple par le rapport de deux surfaces. Une certaine partie de la portion du plan comprise dans l'espace donné est couverte par les grands cercles des sphères d'action dont il renferme les centres, tandis que l'autre partie peut être traversée librement, et la probabilité de ce dernier fait sera donc exprimée par le rapport de la partie libre du plan à sa surface totale.

De la manière dont la densité a été déterminée au commencement de cet article il résulte que, dans une couche d'épaisseur λ , il doit y avoir un nombre de molécules tel que, si on les suppose transportées dans un même plan parallèle aux plans qui la limitent, et disposées en carrés dans ce plan, le côté de l'un des petits carrés aux sommets desquels se trouveraient les centres des molécules serait égal à λ . Il s'ensuit que la partie du plan qui serait couverte par les grands cercles des sphères d'action, serait à la surface totale du plan comme un grand cercle au carré du côté λ , rapport qui est représenté par

$$\frac{\pi\rho^2}{\lambda^2}.$$

Pour obtenir le rapport correspondant pour une couche d'épaisseur δ , il suffit de multiplier le précédent par $\frac{\delta}{\lambda}$; on aura ainsi

$$\frac{\pi\rho^2}{\lambda^3} \delta^2,$$

1) [Si l'on ne veut pas déterminer la densité du gaz de la même manière que dans le texte, et qu'on préfère l'exprimer simplement par le nombre des molécules qui se trouvent dans l'unité de volume, on pourra donner à ce passage la forme suivante.

Considérons une partie de la couche très-mince d'épaisseur δ , correspondante à l'unité de surface des plans qui limitent cette couche et du plan parallèle; le volume de cette partie de la couche sera aussi représenté par δ . Si l'on désigne par n le nombre des molécules contenues dans l'unité de volume, il y aura $n\delta$ molécules dans cette partie de la couche. Imaginons que les centres de gravité de ces molécules soient transportés dans le plan parallèle, les grands cercles de leurs sphères d'action y occuperont la surface représentée par le produit $\pi\rho^2 n\delta$ qui est équivalent à l'expression $\frac{\pi\rho^2}{\lambda^3} \delta$ du texte.

Du reste, on peut, si on le préfère, remplacer toujours dans les formules suivantes la fraction $\frac{1}{\lambda^3}$ par n . Je n'ai employé la disposition cubique des molécules pour déterminer la densité que parce que la quantité λ que l'on obtient ainsi, et que j'ai appelée la distance

et si l'on retranche cette quantité de 1, la différence représentera la partie libre du plan rapportée à sa surface totale prise pour unité.

B'après cela, la probabilité que le point traverse notre plan, ou, ce qui revient au même, une couche d'épaisseur δ sans rencontrer de sphère d'action, sera représentée par l'équation:

$$(3) \quad W_\delta = 1 - \frac{\pi \rho^2}{\lambda^3} \delta.$$

En comparant cette expression de W_δ avec celle qui est donnée dans (2), on voit que

$$(4) \quad \alpha = \frac{\pi \rho^2}{\lambda^3};$$

ce qui fait que l'équation générale (1) devient

$$(5) \quad W = e^{-\frac{\pi \rho^2}{\lambda^3} x}.$$

6. Au moyen de cette équation, nous pourrons déterminer la valeur moyenne des chemins que le point a à parcourir jusqu'à ce qu'il rencontre une sphère d'action.

Admettons qu'un grand nombre N de points soient lancés dans une même direction à travers l'espace, et partageons celui-ci en couches très-minces perpendiculaires à la direction du mouvement; un petit nombre de ces points rencontreront déjà les sphères d'action dans la première couche; d'autres dans la seconde, la troisième, et ainsi de suite. En multipliant chacun de ces nombres partiels par les longueurs de chemin correspondantes, faisant la somme des produits, et la divisant par le nombre total N , on obtiendra pour quotient la longueur moyenne de chemin cherchée.

moyenne de deux molécules voisines, se prête très-bien à la comparaison avec le rayon d'une sphère d'action d'une part, et avec les longueurs moyennes de chemin d'autre part. 1866.]

D'après l'équation (5), le nombre des points qui atteignent, à partir du point de départ, à la distance x , ou qui la dépassent, est représenté par

$$N e^{-\frac{\pi \rho^2}{\lambda^3} x};$$

de même le nombre des points qui atteignent ou dépassent la distance $x + dx$ sera donné par

$$N e^{-\frac{\pi \rho^2}{\lambda^3} (x + dx)} = N e^{-\frac{\pi \rho^2}{\lambda^3} x} \left(1 - \frac{\pi \rho^2}{\lambda^3} dx \right).$$

La différence de ces deux expressions

$$-\frac{\pi \rho^2}{\lambda^3} x \cdot \frac{\pi \rho^2}{\lambda^3} dx$$

représente le nombre des points qui rencontrent des sphères d'action entre x et $x + dx$. Nous pourrons représenter le chemin que ces points auront parcouru par x , en négligeant des différences infiniment petites; c'est donc par cette longueur que nous aurons à multiplier l'expression précédente pour obtenir l'un des produits mentionnés plus haut, savoir :

$$N e^{-\frac{\pi \rho^2}{\lambda^3} x} \cdot \frac{\pi \rho^2}{\lambda^3} x dx.$$

Pour effectuer la somme de tous les produits de cette nature qui répondent aux différentes couches d'épaisseur dx , nous devons intégrer cette expression, puisque les couches sont infiniment minces. En l'intégrant donc depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, nous obtiendrons :

$$N \frac{\lambda^3}{\pi \rho^2}.$$

En divisant enfin cette valeur par N , nous obtiendrons la longueur moyenne cherchée que nous désignerons par l' :

$$(6) \quad l' = \frac{\lambda^3}{\pi \rho^2}.$$

Dans le cas où ce n'est pas une molécule unique qui se meut tandis que toutes les autres sont en repos, mais où toutes les molécules se meuvent avec la même vitesse, la longueur moyenne, comme nous l'avons dit plus haut, est les $\frac{3}{4}$ de la précédente. En la représentant par l pour ce cas, nous aurons donc :

$$(7) \quad l = \frac{3}{4} \frac{\lambda^3}{\pi \rho^3}.$$

Si nous écrivons cette équation sous la forme suivante :

$$(7a) \quad \frac{l}{\rho} = \frac{3}{4} \frac{\lambda^3}{\pi \rho^3},$$

il en résultera un théorème très-simple. Il suit de la manière dont nous avons déterminé la densité que la partie de l'espace donné qui est remplie par les sphères d'action des molécules est à cet espace tout entier comme une sphère d'action est à un cube de côté λ , donc comme

$$\frac{4}{3} \pi \rho^3 : \lambda^3.$$

D'après cela, l'équation précédente peut s'énoncer de cette manière : *La longueur moyenne de chemin d'une molécule est au rayon des sphères d'action comme l'espace total occupé par le gaz est à la partie de cet espace qui est réellement remplie par les sphères d'action des molécules*¹⁾.

1) [Je rappellerai ici que d'après la définition précédente, nous entendons par *sphère d'action* une sphère ayant son centre au centre de gravité de la molécule, et d'un rayon tel que le centre de gravité d'une autre molécule puisse s'approcher de la première jusqu'à la surface de cette sphère avant d'en être repoussée. Si l'on veut comparer les molécules à des sphères élastiques qui peuvent s'approcher l'une de l'autre jusqu'au contact, le rayon de l'une de ces sphères est moitié moindre que le rayon de notre sphère d'action. On doit tenir compte de cette différence dans l'application de notre théorème à des sphères élastiques. 1866.]

7. Pour traiter un exemple numérique déterminé, admettons que les sphères d'action des molécules soient si petites qu'elles n'occupent en nombre rond que la millième partie de l'espace occupé par le gaz, et que tout le reste de cet espace soit libre pour le mouvement.

Dans ce cas, on a :

$$\frac{\lambda^3}{\frac{3}{4} \pi \rho^3} = 1000,$$

d'où résulte

$$(8) \quad \frac{\lambda}{\rho} = 16,12.$$

En substituant cette valeur dans (6) et (7), on obtient :

$$(9) \quad l' = 1333 \rho = 83 \lambda.$$

$$(10) \quad l = 1000 \rho = 62 \lambda.$$

Les premières expressions fournies par ces deux équations montrent que dans l'hypothèse que nous avons admise, le chemin moyen a une longueur considérable par rapport aux rayons des sphères d'action, et que par suite, pour autant qu'on veuille avoir égard à l'influence de cette circonstance, les lois de Mariotte et de Gay-Lussac peuvent s'appliquer au gaz avec une grande approximation. On peut établir, par quelques calculs simples, que le rapport de 1000 à 1 est complètement suffisant même pour les approximations que Regnault a trouvées dans ses expériences sur les gaz permanents. Quoique la grandeur des sphères d'action, prise pour exemple, ait été choisie arbitrairement, on peut donc la regarder, du moins, comme renfermée dans les limites de ce qui est possible.

Mais, si nous comparons cette même longueur moyenne de chemin, non aux dimensions moléculaires, mais à nos unités de longueur habituelles, nous obtiendrons de tout autres rapports. Dans toutes les recherches physiques et chimiques où l'on a l'occasion de tirer des conclusions sur la grandeur et le poids des molécules distinctes, on est toujours

amené à conclure qu'elles doivent être excessivement petites par rapport à toutes les grandeurs mesurables, sans qu'on ait jamais pu parvenir encore à déterminer une limite inférieure (pour la petitesse). On doit donc admettre que si l'unité habituelle de volume, le litre par exemple, est rempli de gaz à la pression atmosphérique ordinaire, le nombre des molécules qu'il contient doit être très-grand, et, par suite, leurs distances très-petites. D'après cela, les valeurs 83λ et 62λ trouvées pour l' et l doivent être regardées comme des quantités très-petites.

8. Après avoir déterminé dans ce qui précède la longueur du chemin *moyen*, il nous reste encore à chercher dans quel rapport les chemins réels se trouvent avec le chemin moyen.

Tout d'abord, il s'agit de savoir quel est le rapport du nombre des cas où le chemin réel est plus petit que le moyen à celui des cas où il est plus grand. Pour résoudre cette question, nous nous servirons de l'équation (3) dans laquelle il suffit de remplacer x par le chemin moyen l' pour obtenir la probabilité que le chemin réel est égal ou supérieur au chemin moyen. En employant l'expression (6) donnée pour l' et désignant par W_1 la valeur correspondante de W , on aura :

$$(11) \quad W_1 = e^{-1} = 0,3679,$$

d'où résulte que sur N cas, il n'y en a que

$$0,3679 N$$

dans lesquels le chemin réel est égal ou supérieur au moyen, tandis que dans les

$$0,6321 N$$

autres cas, il est plus petit.

Si l'on veut trouver le nombre des cas dans lesquels le chemin réel est le double, le triple, etc., du chemin moyen, ou surpasse ces valeurs, on pourra employer le même procédé que plus haut. En appelant W_2 , W_3 , etc., les probabilités correspondantes, on aura :

$$(12) \quad \begin{cases} W_2 = e^{-2} \\ W_3 = e^{-3} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Ces nombres décroissent très-rapidement, puisqu'on a, par exemple,

$$e^{-10} = 0,000043;$$

on voit par là que, s'il se présente quelques cas dans lesquels une molécule parcourt un chemin beaucoup plus grand que le chemin moyen, ces cas sont relativement rares, et que dans la grande majorité des cas les chemins réels seront inférieurs ou, du moins, peu supérieurs à la faible moyenne trouvée plus haut.

9. Si l'on applique ces résultats à la manière d'être des gaz perceptible à l'expérience, en supposant qu'il n'y ait pas de mouvement commun à toutes les masses en dehors du mouvement moléculaire, on se convaincra aisément que la théorie qui explique la force expansive des gaz par des mouvements rectilignes des molécules ne conduit pas à la conclusion que deux masses de gaz contiguës doivent se mêler rapidement et violemment, mais qu'il n'y a qu'un nombre relativement restreint de molécules qui puissent arriver vite à de grandes distances, tandis que les masses principales ne peuvent se mêler que peu à peu près des surfaces de contact.

Ceci explique pourquoi les nuages de fumée ne changent que lentement de forme dans un air calme. Même dans un air en mouvement, si ce mouvement consiste en un écoulement uniforme de toute la masse, les nuages de fumée peuvent être entraînés sans que leur forme doive changer rapidement. Les deux autres faits rapportés par Buys-Ballot, s'expliquent tout aussi simplement. L'observation présentée par lui à l'occasion de l'un d'eux, que les particules de gaz devraient parcourir la chambre des centaines de fois en une seule seconde, est entièrement étrangère à la théorie. Peut-être pourrait-on conclure d'un passage du développement analytique ajouté au Mémoire précédent qu'il donne lieu à

une conclusion de cette espèce. J'ai supposé, en effet, que le gaz se trouvait dans un vase très-mince, et que ses molécules se mouvaient, sans se gêner mutuellement, entre les deux grandes parois parallèles. Mais j'ai accompagné cette hypothèse des mots suivants : « On pourra, dans la détermination de la pression, au lieu de considérer le mouvement tel qu'il a réellement lieu, introduire quelques simplifications ; » par là, je crois avoir assez nettement fait entendre que cette hypothèse ne devait pas servir à donner une image du phénomène réel, mais seulement à faciliter le calcul proposé, sans en modifier le résultat.

MÉMOIRE XVI.

SUR LA CONDUCTIBILITÉ DES CORPS GAZEUX POUR LA CHALEUR.

Ann. de Pogg., livraison de janvier 1862, t. CXV, p. 1; *Phil. Mag.*, 4^{me} série, vol. XXIII, p. 417 et 512.

[Après qu'il a été prouvé dans le Mémoire précédent que les chemins rectilignes parcourus par les molécules gazeuses doivent être regardés comme très-petits, on s'explique d'une manière satisfaisante cette circonstance que deux masses gazeuses en contact ne se mélangent que lentement. Mais on a encore regardé de diverses parts comme inexplicable une autre circonstance, à savoir, le faible pouvoir conducteur des gaz.

On disait que, quoique les molécules elles-mêmes ne parcourent que de faibles distances, cependant une vitesse plus considérable qui aurait lieu en un certain point de la masse gazeuse devait, puisqu'elle passe à chaque choc d'une molécule à l'autre, se communiquer si rapidement que des différences locales de température étaient impossibles dans la masse gazeuse. On citait comme un exemple analogue, ce phénomène connu, que dans une série de billes élastiques égales un mouvement que l'on communique à la première peut se transporter rapidement de bille en bille, tandis que chacune d'entre elles ne parcourt cependant qu'une très-faible distance.

Je ne pouvais regarder comme exactes, ni cette comparaison ni la conclusion qu'on en tirait sur la rapidité de la propagation de la chaleur dans les corps gazeux ; en effet, à cause de l'irrégularité de mouvement des molécules gazeuses, il

doit surgir de tout autres phénomènes que dans une série de billes qui sont disposées en ligne droite et se transmettent des mouvements qui n'ont lieu que dans cette direction.

C'est d'une autre manière que Maxwell a traité la conductibilité des gaz, dans un Mémoire très-estimable, paru en 1860¹⁾; cependant, il ne s'en est occupé que brièvement à côté d'autres questions relatives à la théorie dynamique des gaz, et je crois avoir des objections importantes à élever contre sa manière de la traiter.

Dans ces circonstances, il m'a paru utile de soumettre à l'analyse mathématique la conductibilité des gaz, en prenant pour base l'hypothèse que j'ai établie sur les mouvements moléculaires des corps gazeux; c'est ce qui fait le sujet du Mémoire suivant. Je crois pouvoir faire remarquer à ce sujet que les principes dont je me servirai dans cette recherche peuvent s'appliquer, avec quelques modifications, dans beaucoup d'autres cas où il s'agit de déterminer les phénomènes intérieurs qui se passent dans une masse gazeuse, et que, par là, les développements qui suivent peuvent même prétendre à une signification plus générale et susceptible de s'étendre au delà des limites du problème proposé. 1866.]

I. DÉTERMINATION DU CAS À CONSIDÉRER.

§ 1

Imaginons une masse gazeuse comprise entre deux parois planes parallèles et infiniment étendues, dont chacune est maintenue à une température constante. Si la température de l'une des parois est plus élevée que celle de l'autre, la chaleur se transmettra de l'une à l'autre par l'intermédiaire du gaz; elle passera, en effet, constamment de la paroi la

1) *Phil. Mag.*, 4^e sér., vol. XIX, p. 19; et vol. XX, p. 21. [Il sera peut-être utile de rappeler ici que les remarques que j'ai faites sur le travail de M. Maxwell et que l'on trouvera plus bas se rapportent au Mémoire cité de 1860, et non aux Mémoires que ce géomètre habile a publiés plus tard. 1868.]

plus chaude au gaz, puis elle se transmettra à l'intérieur de celui-ci de couche en couche, et enfin le gaz la cédera à la paroi la plus froide. Comme nous ne voulons considérer ici que le mouvement de la chaleur qui est dû à la conductibilité, et non celui qui peut être occasionné par les courants qui ont lieu dans le gaz, à cause de la différence de poids spécifique des parties chaudes et froides, et qui tendent à mouvoir les unes vers le haut et les autres vers le bas, nous ferons complètement abstraction de l'action de la pesanteur; cela répondra approximativement au cas où les deux parois sont horizontales et où la supérieure est la plus chaude, parce que, dans ce cas, il ne se présente pas de courant de cette nature.

Lorsque les deux parois ont été maintenues pendant longtemps à une température constante, le gaz arrive enfin à un état stationnaire dans lequel la température est invariable en chaque lieu, mais différente en des lieux différents, de telle sorte qu'elle est partout la même dans chaque plan parallèle aux parois, et qu'elle décroît suivant une loi déterminée de la paroi la plus chaude jusqu'à la paroi la plus froide. En même temps, il s'effectue alors à travers le gaz un courant de chaleur d'une grandeur déterminée et constante.

C'est cet état stationnaire que nous allons considérer, et nous chercherons à déterminer le courant de chaleur qui est occasionné dans ce cas par la conductibilité du gaz.

§ 2.

Imaginons une perpendiculaire donnée entre les deux parois, et prenons-la pour axe des abscisses; la température à l'intérieur du gaz sera une fonction de l'abscisse x , et si, pour fixer les idées, nous supposons que la première paroi où l'abscisse est la plus petite soit la plus chaude, la température décroîtra à l'intérieur du gaz à mesure que x croîtra. La densité du gaz se comporte d'une manière inverse, puisque, pour l'équilibre, la densité doit être d'autant plus grande que la

température est plus basse; elle est donc une fonction de x croissante en même temps que cette variable.

Admettons maintenant que les molécules du gaz se meuvent irrégulièrement dans toutes les directions, de sorte qu'elles se choqueront et se repousseront mutuellement en différents points; admettons, en outre, que la rapidité du mouvement est d'autant plus grande que la température est plus élevée. Dans l'espace occupé par le gaz menons un plan parallèle aux parois, ce plan sera traversé pendant l'unité de temps par un grand nombre de molécules qui passeront du côté négatif au côté positif, et *vice versa*. Les molécules qui vont du côté négatif au positif ont, en général, une plus grande vitesse que celles qui vont en sens contraire, parce que du côté négatif du plan la température est, par supposition, plus élevée, et, par suite, la vitesse des molécules plus grande que du côté positif. La force vive totale des molécules qui traversent le plan dans le sens positif, pendant l'unité de temps, est donc plus grande que celle des molécules qui le traversent dans le sens négatif; si nous considérons comme se compensant mutuellement des quantités égales qui traversent le plan en sens contraire, nous aurons encore un certain excès de force vive dans le sens positif. Puisque nous regardons la force vive et la chaleur comme identiques, c'est cet excès de force vive, qui a passé d'un côté du plan à l'autre, qui constitue le courant de chaleur mentionné au paragraphe précédent, auquel nous donnons le nom de conductibilité et que nous aurons à considérer par la suite ¹⁾.

1) D'après ce qui précède, nous ne considérons dans la conductibilité que la chaleur qui est inhérente aux molécules elles-mêmes, et qui ne se transmet d'une molécule à l'autre que par choc. En outre, les molécules se communiquent encore de la chaleur par rayonnement; cette chaleur se transmet à travers l'éther, et est peu à peu absorbée partiellement sur sa route par les autres molécules. Dans des corps dont le pouvoir rayonnant et absorbant est très-faible, comme c'est le cas pour les gaz, on ne peut guère tenir compte de cette dernière transmission dans la conductibilité, parce qu'elle a un tout autre caractère à cause de la longueur des chemins que les rayons de chaleur peuvent

II. MODE DE MOUVEMENT DES MOLÉCULES ÉMISES PAR UNE COUCHE INFINIMENT MINCE.

§ 3.

Commençons par étudier de plus près les mouvements des molécules particulières.

Imaginons deux plans infiniment voisins, perpendiculaires à l'axe des x et renfermant entre eux une couche infiniment mince. Comme cette couche est continuellement parcourue en tous sens par des molécules, il doit arriver, à de certains moments, que deux molécules se choquent à l'intérieur de la couche et se repoussent ensuite. Lorsque ces molécules ont perdu par leur choc leurs vitesses primitives et quittent la couche avec leurs nouvelles vitesses, nous les appellerons simplement *les molécules émises par la couche*; ce sont les mouvements de ces molécules que nous allons étudier.

Ces mouvements sont très-différents entre eux, et parmi les différences qui se présentent, nous aurons à en considérer deux espèces qui sont produites par deux causes indépendantes entre elles, et qui peuvent, par suite, être considérées isolément. La première espèce consiste dans ces différences irrégulières qui ont toujours lieu dans les mouvements moléculaires que nous nommons chaleur et qui, par conséquent, se présenteraient encore quand même le gaz aurait partout la même température et la même densité. Elles ont leurs causes dans diverses inégalités accidentelles qui se manifestent entre les différents chocs, et nous les nommerons différences *accidentelles*. L'autre espèce de différences provient de ce que la température et la densité du gaz ne sont pas partout les mêmes. Ces différences sont dé-

parcourir sans être absorbés. Dans tous les cas il nous sera permis de considérer l'une de ces espèces de mouvement de la chaleur en elle-même; et c'est dans ce sens que nous emploierons toujours par la suite le nom de *conductibilité*.

terminées par les lois auxquelles sont soumises les différences de température et de densité qui se présentent dans le gaz; c'est pourquoi nous les appellerons différences régulières.

Ce sont ces dernières qui sont surtout à considérer dans la conductibilité, et c'est sur elles que nous porterons d'abord notre attention.

Dans le cas actuel, elles proviennent de ce que, de deux molécules qui se rencontrent dans la couche et qui sont venues de côtés opposés, celle qui vient du côté le plus chaud a, en général, une vitesse plus grande que l'autre. La différence de ces vitesses dépend des distances des points où les molécules considérées ont commencé leurs mouvements à la couche considérée; et comme les chemins que les molécules parcourent entre deux chocs successifs sont, en général, très-petits, cette différence doit l'être aussi, de sorte que nous pouvons considérer la valeur moyenne de cette différence comme une quantité du même ordre que la longueur moyenne des chemins des molécules. Nous aurons à établir maintenant quelle influence cette différence qui existe avant les chocs exerce sur les mouvements qui ont lieu après ceux-ci.

§ 4.

Deux molécules ne se comportent pas dans le choc tout à fait de la même manière que deux sphères élastiques; toutefois, l'étude du choc de celles-ci peut, sous beaucoup de rapports, être utile pour faire connaître ce qui se passe dans le choc des molécules. L'action mutuelle de deux sphères élastiques dans le choc a été exposée d'une manière très-claire, par Maxwell, dans le Mémoire cité plus haut. Je n'énoncerai sur ce sujet que quelques propositions qui peuvent, du reste, être regardées comme suffisamment connues.

Lorsque deux sphères élastiques égales se meuvent avec la même vitesse et en sens contraire, de sorte que leurs centres se meuvent sur la même droite, chacune des sphères se mouvra, après le choc, avec la même vitesse, dans une direction opposée à celle qu'elle avait avant le choc. Si les deux sphères

se meuvent avant le choc en sens contraire, mais de telle sorte que leurs centres parcourent deux droites parallèles et que par suite elles se choquent excentriquement, elles se meuvent encore après le choc avec des vitesses égales, et leurs centres parcourront encore en sens opposés deux droites parallèles, mais la direction de celles-ci ne sera plus la même que celle des droites sur lesquelles elles se mouvaient avant le choc. La nouvelle direction dépend de la position du point de rencontre sur les surfaces des deux sphères; et comme celles-ci peuvent se rencontrer en un nombre infini de points différents sur leurs surfaces, il y aura aussi une variété infinie dans les directions du mouvement après le choc; on prouve aisément que toutes les directions possibles de l'espace sont également probables pour les mouvements des sphères après le choc.

Supposons maintenant que les deux sphères égales se meuvent, avant le choc, avec des vitesses quelconques et suivant des directions quelconques. Décomposons le mouvement de chaque sphère en deux autres: l'un qui sera le mouvement du centre de gravité du système des deux sphères; l'autre qui sera le mouvement relatif de la sphère considérée par rapport à ce centre de gravité. Le premier de ces mouvements est identiquement le même pour les deux sphères, le second est le même en grandeur, mais opposé en direction. Le premier n'est pas altéré par le choc; le second, au contraire, en reçoit la même altération que s'il existait seul, sans le mouvement commun du centre de gravité. On peut donc lui appliquer ce qui a été dit du cas où deux sphères se meuvent l'une vers l'autre suivant des droites parallèles et peuvent prendre, après le choc, différentes directions suivant la position du point de rencontre. On voit par là jusqu'à quel point les mouvements de sphères qui se choquent irrégulièrement dépendent après le choc de ceux qui avaient lieu avant, et jusqu'à quel point ils en sont indépendants. Le mouvement de chaque sphère résulte de deux composantes dont l'une est complètement déterminée en grandeur et en direction par les mouvements avant le choc, et dont la seconde a également une grandeur

déterminée, mais peut avoir un nombre infini de directions différentes dans l'espace et qui sont toutes également probables ¹⁾.

1) Ce résultat montre clairement combien on s'écarte de la réalité lorsqu'on se borne, comme l'ont fait Jochmann et Hoppe, au cas du choc central pour une étude approximative du phénomène, puisque parmi l'infinie variété de directions qui peuvent se présenter après le choc, on n'obtient ainsi qu'une direction déterminée et qui est précisément favorable à la transmission de la force vive.

[Jochmann et Hoppe ont avancé que, d'après la nouvelle théorie des gaz, la chaleur devait se répandre dans ceux-ci avec tant de rapidité, que des différences locales de température y devenaient impossibles; cette conclusion repose d'après moi, comme je l'ai exprimé ici de même que dans l'introduction reproduite en abrégé en tête de ce Mémoire, sur ce qu'ils ont substitué au cas réel où les molécules se meuvent irrégulièrement dans toutes les directions et se choquent par suite d'une infinité de manières, le cas simple où le mouvement n'a lieu que dans une direction déterminée et où le choc est seulement direct et central. Peu de temps après mon Mémoire, a paru un Mémoire de Stefan, intitulé: « *Bemerkungen zur Theorie der Gase* » (*Sitzungsberichte der Wiener Academie*, janvier 1863, et *Zeitschrift für Math. und Phys.*, t. VII, p. 355); l'auteur s'exprime d'abord comme s'il voulait combattre cette opinion et montrer que l'on peut arriver au même résultat que moi relativement au faible pouvoir conducteur des gaz, dans l'hypothèse de mouvements réguliers (c'est-à-dire, lorsque l'on ne considère que des molécules qui se meuvent toutes suivant une même direction dans un sens et dans l'autre, et qui se choquent de manière qu'il en résulte toujours des mouvements dans cette même direction). Mais la suite de son travail s'écarte considérablement de cette affirmation.

Après quelques développements que je puis passer sous silence, parce que les expressions mêmes que l'auteur emploie immédiatement après, leur ont fait perdre leur importance, il considère de plus près comment, dans l'hypothèse de mouvements réguliers, un excès de force vive qui se présenterait dans une couche d'une masse gazeuse devrait se communiquer de couche en couche (il suppose que celles-ci sont horizontales et que la supérieure est la plus chaude). Il termine par ces mots: « Dans cette hypothèse il est donc impossible qu'il se forme un courant de chaleur continu tel que celui qu'indique l'expérience, c'est-à-dire avec des températures régulièrement décroissantes du haut en bas, » et il ajoute ensuite: « Il en est tout autrement si les mouvements des molécules sont irréguliers, s'ils ont lieu dans toutes les directions possibles, et, ce qui est essentiel, si cette irrégularité des mouvements provient de ce que les chocs des molécules ne sont pas

§ 5.

Pour appliquer ce résultat aux chocs qui ont lieu entre les molécules, nous admettons donc que, des deux mouvements qu'ont deux molécules avant de se choquer, le mouvement commun seul, c'est-à-dire celui du centre de gravité de leur système, reste invariable en grandeur et en direction, tandis que la seconde composante peut prendre toutes les directions possibles dans l'espace, et que toutes ces directions sont également probables.

Considérons maintenant toute la masse des molécules qui se choquent pendant l'unité de temps dans une couche infiniment mince; il a déjà été question au § 3 des mouvements qu'elles ont avant les chocs. Nous avons vu que ces mouvements ont lieu dans toutes les directions possibles, mais que les molécules qui viennent du côté le plus chaud ont, en général, des vitesses un peu plus grandes que celles qui viennent du côté le plus froid. Comme nous avons admis que la température décroît quand x augmente, elle sera plus élevée du côté négatif, c'est-à-dire où x a des valeurs plus petites que dans la couche; en général donc, les molécules qui passent du côté négatif au côté positif ont de plus grandes vitesses que celles qui passent dans le sens opposé; de sorte que si l'on composait ensemble les mouvements de toutes les molécules qui se choquent, on obtiendrait une certaine quantité de mouvement dirigée vers les x positifs.

Or, cette quantité de mouvement résultante n'est pas altérée par les chocs. Mais, quant à l'autre partie des mouvements, il y a un changement complet dans les directions des molécules, en ce sens qu'elles sont renvoyées sans distinction

centraux. » A l'aide de ces mouvements irréguliers il trouve alors des résultats qui concordent mieux avec l'expérience.

M. Stefan arrive donc enfin à la même idée que moi, et par suite, je ne puis voir, dans le résultat de son travail, qu'une confirmation de mes propres vues sur ce sujet. 1866.]

dans toutes les directions possibles. Par suite, s'il y avait même avant les chocs un partage inégal entre les différentes directions, en ce que, pour certaines d'entre elles, le nombre ou la vitesse des molécules qui les suivent était différent de ce qu'ils sont pour d'autres directions, on doit admettre que les chocs établiront une compensation, de sorte qu'à part le mouvement commun vers les x positifs, il n'y a plus de différence entre les directions, et que celles-ci sont toutes également représentées dans les nouveaux mouvements.

D'après cela, si l'on ne veut pas considérer les vitesses des diverses molécules, mais que l'on se contente de connaître la vitesse moyenne pour chaque direction, il est facile de représenter d'une manière précise l'état de mouvement des molécules émises par la couche. Imaginons, en effet, d'abord que les molécules se meuvent également dans toutes les directions, de sorte qu'il y en a un nombre égal suivant chacune d'elles, et que ces molécules ont toutes la même vitesse; puis, ajoutons à tous ces mouvements une composante très-petite égale pour toutes et dirigée du côté des x positifs. Il y aura ainsi une petite variation dans les directions et les vitesses des mouvements, et le système varié de mouvements ainsi obtenus représentera le mouvement des molécules émises par la couche ¹⁾.

§ 6.

Nous pourrons déterminer mathématiquement, de la manière suivante, ce système de mouvements.

Soit A la vitesse qu'ont toutes les molécules avant cette faible variation. La composante de la vitesse que nous aurons à ajouter du côté des x positifs ne peut être, d'après ce que

1) Maxwell dans le Mémoire cité (*Phil. Mag.*, vol. XX) a négligé dans la détermination de la conductibilité cette circonstance, que les molécules émises par une couche ont un excès de quantité de mouvement positive, et il a supposé tacitement dans ses calculs que les molécules sont également émises dans toutes les directions.

nous venons de voir, qu'une quantité très-petite de l'ordre de la longueur moyenne de chemin des molécules. Comme celle-ci dépend de la densité du gaz, elle n'est pas la même en tous les points de la masse gazeuse considérée; il vaudra donc mieux introduire à la place de cette variable une quantité qui ait une valeur déterminée pour chaque gaz. A cet effet, nous choisirons pour chaque gaz un état normal déterminé, par exemple celui dans lequel se trouve le gaz sous la pression d'une atmosphère et à la température uniforme de la glace fondante. Nous appellerons *longueur moyenne normale* celle qui convient à cet état, et nous la désignerons par ϵ . Nous pourrons regarder la composante précitée comme une quantité de l'ordre de ϵ , et nous la représenterons en conséquence par $p\epsilon$.

Considérons maintenant une molécule quelconque dont la direction fait un angle α avec l'angle des x . Comme c'est le cosinus seul de cet angle auquel nous aurons généralement affaire par la suite, nous l'appellerons, par abréviation, simplement *cosinus de la molécule*, et nous le représenterons par λ . Actuellement si l'on ajoute à la vitesse de cette molécule une composante $p\epsilon$ dirigée suivant les x positifs, la vitesse et le cosinus de cette molécule varieront; appelons U et μ les valeurs variées de A et λ . Nous aurons pour déterminer ces deux quantités les équations :

$$(1) \quad U\mu = A\lambda + p\epsilon$$

$$(2) \quad U^2 = A^2 + 2\lambda Ap\epsilon + p^2\epsilon^2.$$

Remplaçant dans la seconde équation λA par sa valeur tirée de la première, on obtient :

$$U^2 = A^2 + 2\mu U p\epsilon - p^2\epsilon^2.$$

En résolvant cette équation par rapport à U , on trouve deux valeurs dont on doit évidemment choisir la positive, qui est :

$$(3) \quad U = p\mu\epsilon + \sqrt{A^2 - p^2(1 - \mu^2)\epsilon^2}.$$

En désignant par u la valeur particulière que prend U pour $\mu = 0$, c'est-à-dire :

$$(4) \quad u = \sqrt{A^2 - p^2 \varepsilon^2},$$

l'équation précédente devient

$$(5) \quad U = p \mu \varepsilon + \sqrt{u^2 + p^2 \mu^2 \varepsilon^2},$$

et si l'on développe cette expression suivant les puissances de $\mu \varepsilon$, on obtiendra l'équation suivante, qui exprime, sous une forme commode, la relation qui existe entre U et le cosinus μ :

$$(1) \quad U = u + p \mu \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{p^2}{u} \mu^2 \varepsilon^2 + \text{etc.}$$

Les quantités u et p , qui entrent dans cette équation, ont différentes valeurs pour les différentes couches, et doivent donc être regardées comme des fonctions de x .

Quant à ce qui concerne le partage des molécules entre les différentes directions, on voit aisément que, si le système primitif de mouvements ¹⁾ était tel qu'il y avait le même nombre de molécules en mouvement dans toutes les directions, il n'en pourra plus être de même dans le cas actuel, et qu'il devra se mouvoir plus de molécules suivant les directions pour lesquelles μ est positif, que suivant celles pour lesquelles il est négatif.

Afin de pouvoir exprimer cette variation, partons de la considération de ce système primitif de mouvement, et déterminons le nombre de molécules dont les directions forment avec l'axe des x des angles compris entre deux valeurs infiniment voisines α et $\alpha + d\alpha$. Imaginons une sphère de rayon A , et prenons pour pôle le point où elle est coupée par une droite partant du centre dans la direction des x positifs, et décrivons de ce pôle, avec les arcs α et $\alpha + d\alpha$ comme distance, deux petits cercles qui comprennent entre eux une zone infiniment mince. Le nombre des molécules dont les directions forment avec l'axe des x des angles compris entre α et $\alpha + d\alpha$ sera au nombre total des molécules qui vont dans toutes les direc-

1) [C'est-à-dire le système de mouvements auquel on n'a pas encore ajouté la composante très-petite suivant l'axe des x . 1866.]

tions, comme la surface de la zone sphérique décrite est à celle de la sphère, donc comme

$$\frac{2 \pi \sin \alpha d\alpha}{4 \pi} \text{ ou } \frac{1}{2} \sin \alpha d\alpha.$$

Et comme $\sin \alpha d\alpha = -d \cos \alpha = -d\lambda$, on peut dire aussi que le nombre des molécules dont les cosinus sont compris entre λ et $\lambda + d\lambda$ est une fraction du nombre total des molécules représentée par

$$\frac{1}{2} d\lambda.$$

Afin d'exprimer d'une manière analogue dans le système varié de mouvements, le nombre des molécules dont les cosinus sont compris entre μ et $\mu + d\mu$, nous aurons à introduire dans l'expression précédente un facteur qui dépendra de μ . Si nous appelons ce facteur H , la nouvelle expression sera :

$$\frac{1}{2} H d\mu.$$

Le facteur H peut se déterminer de la manière suivante. Comme l'addition de la vitesse composante $p \varepsilon$ a changé le cosinus λ en μ , et de même le cosinus $\lambda + d\lambda$ en $\mu + d\mu$, il y aura le même nombre de molécules dont les cosinus sont compris entre μ et $\mu + d\mu$ qu'il y en avait de celles dont les cosinus étaient compris entre λ et $\lambda + d\lambda$ avant la variation; nous pouvons donc poser :

$$\frac{1}{2} H d\mu = \frac{1}{2} d\lambda,$$

d'où résulte

$$(6) \quad H = \frac{d\lambda}{d\mu}.$$

Or, d'après l'équation (1) :

$$\lambda = \frac{U \mu}{A} - \frac{p \varepsilon}{A};$$

nous aurons par suite, puisque A , p et ε sont indépendants de μ :

$$(7) \quad H = \frac{1}{A} \cdot \frac{d(Uv)}{dv}.$$

Substituons à U la série (I.), et représentons la fraction $\frac{u}{A}$ par h , nous obtiendrons :

$$(II.) \quad H = h \left(1 + 2 \frac{p}{u} v \varepsilon + \frac{3p^2}{2u^2} v^2 \varepsilon^2 + \text{etc.} \right).$$

Le facteur h ne diffère de l'unité que d'une quantité du second ordre par rapport à ε . Si l'on remplace en effet, en vertu de l'équation (4), A par sa valeur $\sqrt{u^2 + p^2 \varepsilon^2}$, il vient :

$$(8) \quad h = \frac{u}{\sqrt{u^2 + p^2 \varepsilon^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{p^2}{u^2} \varepsilon^2 + \text{etc.}$$

Les équations (I.) et (II.) déterminent complètement le système de mouvements obtenu par l'addition de la composante commune $p\varepsilon$ au système tout à fait régulier dans lequel il y a un nombre égal de molécules animées toutes de la même vitesse suivant toutes les directions.

§ 7.

Le système de mouvements ainsi déterminé correspond aux mouvements des molécules émises par une couche, pour autant qu'on n'ait égard qu'aux différences régulières. Pour obtenir les mouvements réels, on devrait encore tenir compte des différences accidentelles mentionnées au § 3.

Il n'est naturellement pas possible de le faire de telle sorte que le mouvement de chaque molécule soit déterminé; mais le calcul des probabilités permet d'énoncer certains théorèmes relatifs à un grand nombre de molécules. Maxwell a ainsi déduit une formule qui représente la manière dont les différentes vitesses existantes se partagent entre les molécules. Il n'est pas nécessaire de nous y arrêter pour le but que nous nous proposons, mais il suffit que l'on accorde que

les différences accidentelles se présentent également dans toutes les directions, et que par suite, dans une masse gazeuse dont la température et la densité sont uniformes, il y a un même nombre de molécules qui se meuvent dans toutes les directions, et que la vitesse moyenne, suivant chacune de celles-ci, est la même.

Dans ce cas, il est en effet facile de voir que les différences accidentelles ne peuvent en rien contribuer à ce qu'il passe, à travers un plan donné, plus de force vive dans un sens que dans l'autre, puisque ces différences, quels que puissent être du reste leurs effets particuliers, agissent dans tous les cas également de part et d'autre. Dans la déduction des formules générales, nous pourrions donc faire entièrement abstraction des différences accidentelles. Mais dans le calcul numérique, nous aurons à en tenir compte; nous devons alors en effet, si les vitesses et les quantités qui en dépendent, et qui sont représentées dans la formule par des lettres déterminées, ont en réalité des valeurs différentes, calculer les valeurs moyennes qui remplacent exactement les différentes valeurs réelles; et pour calculer ces valeurs moyennes il est nécessaire de connaître la manière dont se partagent les valeurs particulières.

Nous nous réservons de revenir plus loin sur ce dernier point, et nous admettrons, quant à présent, que les quantités U et H déterminées par les équations (I.) et (II.) représentent les mouvements réels des molécules émises par une couche. Ceci admis, cherchons à déterminer l'état du gaz, et en particulier la force vive qui traverse un plan.

III. MODE DE MOUVEMENT DES MOLÉCULES QUI SE TROUVENT SIMULTANÉMENT DANS UNE COUCHE INFINIMENT MINCE.

§ 8.

Menons perpendiculairement à l'axe des z deux plans dont les abscisses soient x et $x + dx$, nous obtiendrons, comme dans les paragraphes précédents, une couche infiniment

mince; au lieu de considérer les molécules émises par cette couche, occupons-nous de celles qui se trouvent simultanément dans cette couche.

Si le gaz avait partout la même température et la même densité, les mouvements des molécules seraient tels, que dans toutes les directions il y en aurait le même nombre, et qu'elles auraient toutes la même vitesse. Mais dans le cas actuel où la température et la densité sont fonctions de x , cette uniformité n'a pas lieu.

Afin de déterminer les vitesses des molécules, choisissons une direction qui fasse avec l'axe des x un angle dont le cosinus est μ , et considérons les molécules qui se meuvent dans cette direction. Avant qu'une de ces molécules arrive dans la couche infiniment mince dont l'abscisse est x , elle aura en général déjà parcouru un certain chemin depuis son dernier choc. Si nous nommons ce chemin s , l'abscisse du point où a lieu le dernier choc sera $x - \mu s$; par suite la vitesse de la molécule est déterminée, puisque nous avons admis plus haut que la vitesse avec laquelle une molécule est émise après un choc ne dépend que de l'abscisse du point où le choc a eu lieu, et de la direction du mouvement. Nous avons désigné précédemment par U la vitesse en fonction de x et de μ ; nous pourrions donc, pour le cas où la molécule est émise par un point dont l'abscisse est $x - \mu s$, écrire, en représentant par V sa vitesse :

$$(9) \quad V = U - \frac{dU}{dx} \mu s + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \mu^2 s^2 - \text{etc.}$$

Le chemin s n'est pas le même pour toutes les molécules d'une direction déterminée qui se trouvent dans la couche, et par suite leurs vitesses diffèrent un peu entre elles. Pour obtenir la vitesse moyenne, nous devons nous servir des valeurs moyennes de s et s^2 . Par la suite nous représenterons la moyenne arithmétique d'une quantité qui a des valeurs différentes dans les divers cas particuliers, en mettant un trait horizontal au-dessus de la lettre qui représente les valeurs particulières de cette quantité; ainsi \bar{V} sera la valeur

moyenne de V , et \bar{s} et \bar{s}^2 seront celles de s et s^2 . Nous pourrions alors écrire :

$$(10) \quad \bar{V} = U - \frac{dU}{dx} \mu \bar{s} + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \mu^2 \bar{s}^2 - \text{etc.}$$

Il est à remarquer que dans cette expression la quantité \bar{s}^2 n'a pas la même signification que $(\bar{s})^2$, mais doit être déterminée spécialement. De même, les valeurs moyennes des puissances V^2 , V^3 , etc., ne sont pas égales aux puissances correspondantes de la valeur moyenne \bar{V} . On doit en effet, pour obtenir ces valeurs moyennes, commencer par élever l'équation (9) au carré, au cube, etc. Puis seulement mettre pour s , s^2 , etc., leurs valeurs moyennes. On obtient ainsi :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{V}^2 = U^2 - 2U \frac{dU}{dx} \mu \bar{s} \\ \quad + \left[U \frac{d^2U}{dx^2} + \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 \right] \mu^2 \bar{s}^2 - \text{etc.} \\ \bar{V}^3 = U^3 - 3U^2 \frac{dU}{dx} \mu \bar{s} \\ \quad + \left[\frac{3}{2} U^2 \frac{d^2U}{dx^2} + 3U \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 \right] \mu^2 \bar{s}^2 - \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Les quantités \bar{V}^2 , \bar{V}^3 , etc., ne diffèrent, comme on le voit, des quantités $(\bar{V})^2$, $(\bar{V})^3$, etc., qu'on obtiendrait, en élevant l'équation (10) au carré, au cube, etc., que par des termes du second ordre relativement aux chemins s , et comme ces chemins ont en moyenne de très-petites valeurs, les écarts entre ces quantités seront aussi très-faibles.

§ 9.

Il s'agit maintenant de déterminer les quantités \bar{s} et \bar{s}^2 .

Nous commencerons par rechercher ce que sont ces quantités lorsque la température et la densité de la masse de gaz donnée sont uniformes. Et nous ajouterons ensuite les modi-

fications qui sont dues à la différence de température et de densité.

Considérons donc dans un gaz de température et de densité uniformes, toutes les molécules contenues à un moment donné dans une couche, et cherchons quelle est la longueur des chemins que les diverses molécules ont parcourus depuis leur dernier choc jusqu'à cet instant. La probabilité qu'une molécule a parcouru, depuis son dernier choc jusqu'au moment donné, un chemin compris entre s et $s + ds$ est tout aussi grande que la probabilité qu'elle parcourra un chemin de même longueur, depuis cet instant jusqu'au choc suivant. Cette dernière probabilité peut s'exprimer aisément.

Imaginons un grand nombre de molécules qui se meuvent avec la même vitesse depuis un certain instant dans la masse gazeuse; dans leurs mouvements elles iront choquer d'autres molécules, les unes plus tôt, les autres plus tard; et si z représente le nombre des molécules qui parcourent un chemin s , sans en rencontrer une autre, z doit décroître suivant une loi déterminée à mesure que s augmente. Appelons zds la probabilité qu'une molécule en rencontre une autre sur le chemin infiniment petit ds ; dans le nombre z des molécules qui ont parcouru le chemin s sans être arrêtées, il y en aura un nombre zds qui en rencontreront d'autres sur l'élément de chemin suivant ds ; le décroissement de z sera donc représenté par la formule

$$dz = -zds,$$

d'où résulte, si nous désignons par Z la valeur initiale qu'a z pour $s = 0$:

$$z = Ze^{-as}.$$

Si l'on substitue cette valeur de z dans le produit zds , on obtiendra, pour le nombre des molécules dont les chemins sont compris entre s et $s + ds$, l'expression :

$$Ze^{-as}ads.$$

Pour obtenir la longueur moyenne de tous les chemins,

nous n'aurons qu'à multiplier la dernière expression par le chemin s , à intégrer ensuite depuis $s = 0$, jusqu'à $s = \infty$, et à diviser l'intégrale par le nombre entier Z ; ce qui donnera :

$$(12) \quad \bar{s} = \int_0^{\infty} se^{-as} ads = \frac{1}{a}.$$

Nous avons trouvé cette valeur pour la moyenne des chemins que les molécules parcourent depuis l'instant considéré, jusqu'aux premiers chocs qui le suivent; mais elle représente également la moyenne des chemins parcourus par les molécules depuis leurs derniers chocs, jusqu'à l'instant considéré, puisque les chemins parcourus avant un certain instant doivent être en moyenne aussi grands que ceux qui sont parcourus après.

On obtient la même valeur $\frac{1}{a}$, si l'on cherche la moyenne de tous les chemins parcourus en un certain temps entre deux chocs consécutifs. En effet, si, au lieu de considérer les mouvements de toutes les molécules depuis un certain instant, jusqu'aux premiers chocs qui le suivent, on considère les mouvements d'un grand nombre de molécules depuis les chocs précédents, jusqu'aux suivants, toutes les conclusions que nous venons de tirer restent entièrement applicables à ce cas, et la valeur $\frac{1}{a}$ donnée par (12) doit donc être aussi la moyenne de ces chemins¹⁾.

1) Il peut sembler étonnant, au premier abord, que l'on obtienne pour les chemins parcourus depuis les derniers chocs jusqu'à un certain instant, ou depuis cet instant jusqu'aux premiers chocs suivants, la même valeur moyenne que pour les chemins entiers, parcourus dans le gaz pendant un certain temps d'un choc au suivant. Mais on doit remarquer que la moyenne de tous les chemins qui sont parcourus pendant un certain temps dans le gaz entre deux chocs, n'est pas la même que celle que l'on obtiendrait, si l'on considérait les chemins parcourus par toutes les molécules qui se trouvent simultanément dans une couche, depuis leurs derniers chocs jusqu'aux chocs suivants. Dans

On obtiendra, d'une manière tout à fait analogue, la valeur moyenne \bar{s}^2 , en multipliant avant d'intégrer par s^2 au lieu de s , et en achevant de même le calcul. On aura ainsi :

$$(13) \quad \bar{s}^2 = \int_0^{\infty} s^2 e^{-as} ds = \frac{2}{a^2}.$$

De là résulte entre les deux valeurs moyennes \bar{s} et \bar{s}^2 , la relation :

$$(14) \quad \bar{s}^2 = 2(\bar{s})^2.$$

§ 10.

Cherchons maintenant de quelle manière se modifient ces valeurs moyennes, si la température et la densité du gaz, au lieu d'être uniformes, sont des fonctions de x .

Pour les molécules qui se meuvent perpendiculairement à l'axe des x , et dont l'abscisse reste par suite constante, toutes les conclusions précédentes sont valables. Si donc nous désignons les valeurs particulières relatives à ce cas en affectant le signe correspondant de l'indice 0 (parce que, dans ce cas $\mu = 0$), nous pourrions écrire :

$$\bar{s}_0 = \frac{1}{\alpha_0} \quad \text{et} \quad \bar{s}_0^2 = \frac{2}{\alpha_0^2}.$$

La quantité $\frac{1}{\alpha_0}$, qui représente pour ce cas la longueur

ce dernier cas, les longs chemins l'emportent en effet sur les courts, plus que dans le premier, car une molécule emploie plus de temps à parcourir un long chemin qu'à en parcourir un court, et par suite, à un moment donné, il y a plus de probabilité qu'elle se trouvera sur un long chemin que sur un court, tandis que, dans le premier cas, tous les chemins parcourus dans le gaz entrent également en compte. En effectuant le calcul on trouve, dans le dernier cas, une valeur moyenne deux fois plus grande que dans le premier. La valeur \bar{s} que nous avons déterminée plus haut est la moitié de la plus grande de ces valeurs moyennes.

moyenne de chemin, est du même ordre que la longueur moyenne normale désignée par ε ; et, afin de l'indiquer, nous poserons :

$$(15) \quad \frac{1}{\alpha_0} = c\varepsilon,$$

nous aurons alors :

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{s}_0 = c\varepsilon \\ \bar{s}_0^2 = 2c^2\varepsilon^2. \end{cases}$$

Pour les molécules qui ne se meuvent pas perpendiculairement à l'axe des x , les longueurs moyennes de chemin ont des valeurs un peu différentes; et nous pourrions l'exprimer en remplaçant dans les équations précédentes les coefficients c et c^2 par des quantités qui dépendent de la direction. Cette dépendance est fondée sur deux circonstances qui peuvent être considérées isolément.

La première circonstance consiste en ce qu'aux points d'où partent les molécules, et dans les couches qu'elles doivent traverser avant d'arriver à la couche considérée, il ne règne ni la même température ni la même densité que dans celle-ci. Si μ est le cosinus de l'angle qu'une certaine direction fait avec l'axe des x , une molécule dont la longueur de chemin est s aura son point de départ à une distance μs de la couche infiniment mince. Les valeurs différentes de la température et de la densité à cette distance pourront se représenter, comme on sait, par des séries ordonnées suivant des puissances entières de μs . Or, comme les modifications que doivent subir les coefficients c et c^2 , en vertu des différences de température et de densité, doivent correspondre à ces différences mêmes, nous pourrions en conclure que les coefficients variés pourront se représenter par des séries analogues, mais renfermant au lieu des valeurs particulières de s , s^2 , etc., leurs valeurs moyennes. Nous pourrions donc écrire :

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \varepsilon (c + a\mu\bar{s} + a'\mu^2\bar{s}^2 + \text{etc.}) \\ \bar{s}^2 &= 2\varepsilon^2 (c^2 + b\mu\bar{s} + \text{etc.}) \end{aligned}$$

Si nous remplaçons dans le second membre s et \bar{s}^2 par les valeurs qui résultent de ces équations mêmes, nous obtiendrons des séries qui procéderont suivant les puissances de $\mu\epsilon$, et que nous pourrons écrire de la manière suivante, en remplaçant, par de simples lettres, les coefficients de ces différentes puissances :

$$(17) \quad \begin{cases} \bar{s} = \epsilon(c + A\mu\epsilon + A'\mu^2\epsilon^2 + \text{etc.}) \\ \bar{s}^2 = 2\epsilon^2(c^2 + B\mu\epsilon + \text{etc.}) \end{cases}$$

La seconde circonstance qui influe sur la longueur moyenne consiste en ce que, dans chaque couche considérée en elle-même, les molécules ne se meuvent pas également dans tous les sens, et par suite la probabilité, qu'une molécule en rencontre une autre sur un élément de chemin ds , diffère au même point, suivant les différentes directions que peut avoir ds . Pour tenir compte de cette circonstance, nous remplacerons de nouveau, dans l'équation précédente, tous les coefficients c , c^2 , A , A' , B par des quantités qui dépendent de la direction. Or, nous avons vu plus haut que les quantités U et H qui déterminent les mouvements inégaux dans les différentes directions des molécules émises par une couche, ne varient que faiblement avec μ , et peuvent se représenter par des séries qui procèdent suivant les puissances de $\mu\epsilon$. Nous pouvons conclure de là que les coefficients modifiés à cause de l'inégalité des mouvements pourront aussi se représenter par des séries analogues, de sorte que nous pourrons mettre au lieu de c :

$$c + c_1\mu\epsilon + c_2\mu^2\epsilon^2 + \text{etc.}$$

et de même des autres coefficients. Si nous substituons ces séries aux coefficients contenus dans les équations (17), et si nous ordonnons suivant les puissances de $\mu\epsilon$, nous obtiendrons de nouveau pour \bar{s} et \bar{s}^2 des séries procédant suivant ces puissances et qui ne différeront des précédentes, que par les coefficients des termes supérieurs. Si nous désignons ces

coefficients par de nouvelles lettres, les expressions définitives que nous obtiendrons en tenant compte des deux circonstances, seront les suivantes :

$$(18) \quad \begin{cases} \bar{s} = \epsilon(c + C\mu\epsilon + C'\mu^2\epsilon^2 + \text{etc.}) \\ \bar{s}^2 = 2\epsilon^2(c^2 + D\mu\epsilon + \text{etc.}) \end{cases}$$

Il faut remarquer, du reste, que parmi les coefficients de ces séries, nous ne ferons usage, par la suite, que de c , et que les termes supérieurs, là où il s'en trouve, ne sont ajoutés que pour rendre les expressions plus complètes.

§ 11.

Nous avons maintenant à substituer les expressions \bar{s} et \bar{s}^2 dans les équations (10) et (11) du paragraphe 8. Si l'on remplace en même temps U par la série donnée dans l'équation (I.) [§ 6], on obtiendra pour \bar{V} , \bar{V}^2 , \bar{V}^3 , etc., des séries qui procéderont suivant les puissances de $\mu\epsilon$, et que l'on pourra écrire sous la forme suivante, en introduisant quelques lettres nouvelles :

$$(III.) \quad \begin{cases} \bar{V} = u + q\mu\epsilon + r\mu^2\epsilon^2 + \text{etc.} \\ \bar{V}^2 = u^2 + 2uq\mu\epsilon + (2ur + q_1^2)\mu^2\epsilon^2 + \text{etc.} \\ \bar{V}^3 = u^3 + 3u^2q\mu\epsilon + 3(u^2r + uq_1^2)\mu^2\epsilon^2 + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Les lettres q , q_1 et r représentent les expressions suivantes :

$$(19) \quad \begin{cases} q = p - c \frac{du}{dx} \\ q_1^2 = q^2 + c^2 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \\ r = \frac{1}{2}p^2 - c \frac{dp}{dx} - C \frac{du}{dx} + c^3 \frac{d^2u}{dx^2} \end{cases}$$

§ 12.

Après avoir déterminé de cette manière les vitesses des molécules qui se trouvent simultanément dans une certaine couche, il s'agit encore de rechercher comment les mouvements de ces molécules se partagent entre les différentes directions.

Si les mouvements avaient également lieu dans toutes les directions, nous trouverions, par les mêmes raisons qui ont été exposées au § 6, pour le cas d'une molécule émise par une couche, que le nombre des molécules dont les cosinus sont compris entre μ et $\mu + d\mu$, serait exprimé par $\frac{1}{2} d\mu$ en fraction du nombre total. Dans le cas actuel, où les mouvements n'ont pas également lieu dans toutes les directions, mais où cette égalité n'existe que pour celles qui font des angles égaux avec l'axe des x , nous représenterons le nombre des molécules dont les cosinus sont compris entre μ et $\mu + d\mu$, par $\frac{1}{2} Jd\mu$ en fraction du nombre total, J désignant une fonction de μ . Par des considérations analogues à celles des paragraphes précédents, il est aisé de se convaincre que cette fonction J doit pouvoir se représenter par une série qui procède suivant les puissances de $\mu\epsilon$, et l'on pourra, par suite, l'écrire sous la forme suivante :

$$(IV.) \quad J = i(1 + q'\mu\epsilon + r'\mu^2\epsilon^2 + \text{etc.}),$$

où i , q' , r' , etc., sont des quantités indépendantes de μ .

La quantité i peut se déterminer immédiatement. Si l'on intègre l'expression $\frac{1}{2} Jd\mu$, depuis $\mu = -1$, jusqu'à $\mu = +1$, l'intégrale s'étendra à toutes les molécules existantes, et sa valeur doit, par suite, être égale à 1. En effectuant cette opération, après avoir remplacé J par la série précédente, on aura :

$$1 = i(1 + \frac{1}{3}r'\epsilon^2 + \text{etc.}),$$

et par suite

$$i = 1 - \frac{1}{3}r'\epsilon^2 + \text{etc.}$$

(20)

Nous ne déterminerons pas les autres quantités q' , r' , etc., qui entrent dans la série (IV), parce que nous aurons bientôt l'occasion de les déterminer autant qu'il sera nécessaire.

IV. MODE DE MOUVEMENT DES MOLÉCULES QUI TRAVERSENT UN PLAN DONNÉ PENDANT L'UNITÉ DE TEMPS.

§ 13.

Considérons un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x , et les molécules qui le traversent. Choisissons, par exemple, le plan qui a pour abscisse x , et qui forme la première limite de la couche infiniment mince dont il a été question aux paragraphes 8 et suivants; nous pourrions déduire du mode de mouvement des molécules qui se trouvent simultanément dans la couche, des conclusions déterminées sur le mode de mouvement des molécules qui traversent ce plan pendant un certain temps.

Imaginons, dans ce plan, une étendue égale à l'unité de surface. Le volume de la portion de la couche d'épaisseur dx , correspondante à cette étendue superficielle, sera représenté par Ndx ; et nous désignerons par Ndx le nombre des molécules qui se trouvent simultanément dans cet espace, N étant un nombre très-grand qui dépend de la densité du gaz au lieu considéré. Ces Ndx molécules se meuvent dans toutes les directions possibles, et le nombre de celles dont les cosinus sont compris entre μ et $\mu + d\mu$, sera, d'après le paragraphe précédent, la fraction $\frac{1}{2} Jd\mu$ de ce nombre total, et il sera, par suite, représenté par le produit :

$$\frac{1}{2} NJdxd\mu.$$

Nous avons à déduire de ce nombre, qui est relatif aux molécules qui se trouvent simultanément dans la couche, le

nombre de celles qui la parcourent pendant l'unité de temps et qui traversent, par suite aussi, le plan considéré; pour cela, nous aurons à tenir compte du temps qu'emploie une molécule pour parcourir la couche de l'un à l'autre des plans qui la limitent. La longueur du chemin d'une molécule dont le cosinus est μ , d'un de ces plans à l'autre, est, abstraction faite du signe, égale à $\frac{dx}{\mu}$; et en représentant par V sa vitesse,

le temps nécessaire pour parcourir ce chemin sera égal à $\frac{dx}{\mu V}$. Admettons, provisoirement, que toutes les molécules dont les cosinus sont compris entre μ et $\mu + d\mu$ ont des vitesses égales, et mettent, par suite, le même temps à parcourir la couche; le nombre des molécules qui se trouvent simultanément dans la couche sera au nombre de celles qui la parcourent pendant l'unité de temps, comme la durée du parcours est à l'unité de temps, et, pour obtenir le dernier nombre, nous aurons donc à diviser le premier par cette durée.

Dans le cas qui nous occupe, nous aurons donc à diviser $\frac{1}{2} NJ dx d\mu$ par $\frac{dx}{\mu V}$, et nous obtiendrons ainsi pour le nombre des molécules qui traversent, pendant l'unité de temps, l'unité de surface considérée, dans des directions dont les cosinus sont compris entre μ et $\mu + d\mu$, l'expression :

$$\frac{1}{2} NJV \mu d\mu.$$

Il faut remarquer, en outre, que la différence de signe qui provient dans cette expression de ce que le cosinus μ peut être positif ou négatif, correspond à une différence essentielle dans la manière dont s'effectue le passage. Si μ est positif, les molécules traversent le plan du côté négatif ou positif, et si μ est négatif, elles le traversent en sens contraire ¹⁾.

1) Pour indiquer d'une manière simple la signification de cette différence, on peut dire que cette expression représente le nombre des pas-

§ 14.

Avant de développer l'expression, trouvée plus haut, qui ne se rapporte qu'à une variation infiniment petite du cosinus μ , et qui suppose des vitesses égales, nous déduirons encore deux autres expressions analogues.

Une molécule qui se meut avec la vitesse V aura, si m désigne sa masse, la quantité de mouvement mV ; la composante de celle-ci suivant l'axe des x sera $mV\mu$, et elle sera dirigée du côté des x positifs dans le cas où la valeur du produit est positive. C'est pourquoi nous nommerons simplement ce produit la quantité de mouvement positif de la molécule. D'après cela, la quantité totale de mouvement positif des $\frac{1}{2} NJV \mu d\mu$ molécules considérées, qui traversent le plan, sera représentée par

$$\frac{1}{2} m NJV^2 \mu^2 d\mu. \quad 1)$$

En outre, une molécule de masse m et de vitesse V a une force vive $\frac{1}{2} mV^2$. Si la molécule possède, outre son mouvement de translation dont la vitesse est V , un mouvement de rotation ou un mouvement d'oscillation de ses parties constituantes, sa force vive totale sera supérieure à ce produit. Dans mon Mémoire « sur la nature du mouvement que nous nommons chaleur », j'ai parlé de ces mouvements qui peu-

sages positifs (c'est-à-dire des passages du côté négatif au positif), et qu'un passage négatif (c'est-à-dire du côté positif au négatif) doit être pris négativement. 1866.]

1) [Dans cette expression, la différence mentionnée plus haut disparaît, puisque cette expression reste positive même quand μ devient négatif. Voici l'explication de ce fait : cette expression représente une quantité de mouvement positive qui traverse le plan dans le sens positif. Or, si μ devient négatif, nous avons affaire à une quantité de mouvement négative qui traverse le plan dans le sens négatif, de sorte qu'à cause du double changement de signe, elle sera comptée absolument de même qu'une quantité de mouvement positive qui traverse le plan dans le sens positif. 1866.]

vent avoir lieu simultanément avec le mouvement de translation, et j'ai fait remarquer que pour une espèce déterminée de molécules, il doit exister, en moyenne, un rapport déterminé entre les divers mouvements simultanés, de sorte que la force vive du mouvement de translation forme une partie aliquote déterminée de la force vive totale. Nous représenterons donc par $\frac{1}{2} kmV^2$ la valeur moyenne de la force vive totale d'une molécule, k étant un facteur qui a une valeur déterminée pour chaque espèce de gaz ¹⁾. On obtiendra ainsi pour la force vive des $\frac{1}{2} NJV\mu d\mu$ molécules qui traversent le plan, l'expression :

$$\frac{1}{2} kmNJV^3\mu d\mu^2.$$

§ 15.

Afin de transformer les expressions des deux paragraphes précédents de telle sorte qu'elles restent variables pour le cas où les vitesses des molécules ne sont pas égales, nous n'aurons qu'à remplacer les valeurs V , V^2 et V^3 par leurs valeurs moyennes \bar{V} , \bar{V}^2 et \bar{V}^3 . En outre, pour étendre à toutes les molécules qui traversent le plan, les expressions qui ne se rapportent qu'à une variation infiniment petite du cosinus μ , nous aurons à les intégrer depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = +1$. Pour plus d'uniformité, nous multiplierons la première ex-

pression par la masse m d'une molécule, de sorte qu'elle représentera la masse de celles-ci au lieu de représenter leur nombre. Appelons, pour abrégé, E la masse, F la quantité de mouvement positif, et G la force vive, qui traversent, pendant l'unité de temps, l'unité de surface du plan dans le sens positif; nous obtiendrons les équations suivantes :

$$(V.) \quad \begin{cases} E = \frac{1}{2} mN \int_{-1}^{+1} J\bar{V}\mu d\mu \\ F = \frac{1}{2} mN \int_{-1}^{+1} J\bar{V}^2\mu^2 d\mu \\ G = \frac{1}{2} kmN \int_{-1}^{+1} J\bar{V}^3\mu d\mu \end{cases}$$

La dernière de ces trois quantités représente la *conductibilité* du gaz, et c'est elle, surtout, qu'il s'agit de déterminer par la suite. Nous devons, en même temps, considérer les deux autres, parce que, comme nous le verrons bientôt, elles servent à la détermination de la dernière.

Si l'on substitue, dans ces trois équations, à \bar{V} , \bar{V}^2 , \bar{V}^3 et J les séries données dans (III.) et (IV.), et si l'on effectue l'intégration, on obtiendra :

$$(VI.) \quad \begin{cases} E = \frac{1}{3} mN(q + uq)\epsilon + X_2\epsilon^3 \\ F = \frac{1}{3} mNu^2 + X_1\epsilon^2 \\ G = \frac{1}{6} kmNu^2(3q + uq)\epsilon + X_2\epsilon^3 \end{cases}$$

Les termes $X_2\epsilon^3$, $X_1\epsilon^2$ et $X_2\epsilon^3$, dans lesquels les facteurs X , X_1 et X_2 sont des fonctions non déterminées de x , n'ont été ajoutés que pour indiquer de quel ordre sont les termes que l'on obtiendrait en développant le calcul. On voit que, dans les trois équations, le second terme est de deux ordres plus élevé que le premier; si donc nous nous contentons dans nos résultats d'une approximation telle que nous néglignons vis-

1) J'ai montré dans le Mémoire cité plus haut comment on peut calculer ce facteur à l'aide des deux chaleurs spécifiques. Pour les gaz simples qui n'affectent aucune irrégularité relativement à leur volume, et pour les gaz composés qui n'ont pas éprouvé de diminution de volume par la combinaison, ce facteur est approximativement égal à $\frac{1}{0,6315}$ ou 1,584.

Pour les gaz qui éprouvent une diminution de volume par la combinaison, il est plus grand.

2) [Relativement au signe, cette expression se comporte de la même manière que celle qui représente le nombre des passages. 1866.]

à-vis de l'unité des quantités de l'ordre de ε^2 , ce que nous pouvons faire sans difficulté, puisque ε est une quantité très-petite, nous pourrions par la suite négliger les termes que nous avons ajoutés sans les déterminer.

Si l'on considère l'ordre du premier terme de ces expressions, il pourra sembler surprenant que la quantité F soit de l'ordre zéro par rapport à ε , tandis que E et G sont du premier ordre. Mais cela s'explique par cette raison que la quantité de mouvement se comporte, quant au signe, autrement que la masse et la force vive. En effet, la quantité de mouvement d'une molécule qui traverse le plan dans un sens négatif est négative en elle-même, et comme elle doit encore être prise en signe contraire, à cause de son passage dans un sens négatif, elle redevient positive; dans ce cas donc, les passages positifs et négatifs ne se retranchent pas comme dans les deux autres, mais, au contraire, ils s'ajoutent.

§ 16.

De ce que le gaz doit, par hypothèse, se trouver dans un état stationnaire, on peut immédiatement déduire les propositions suivantes, relativement aux quantités E, F et G.

1) La masse de gaz qui traverse le plan doit être égale à zéro. Car, comme toute la masse de gaz donnée est comprise entre deux parois fixes, si du gaz traversait un plan intermédiaire dans un certain sens, la densité devrait croître d'un côté du plan, et décroître de l'autre, ce qui serait contre l'hypothèse.

2) La quantité de mouvement positif, qui traverse le plan considéré pendant l'unité de temps, doit être indépendante de la position de ce plan, et par conséquent de x . Si l'on imagine, en effet, une couche limitée par deux plans parallèles, la quantité de mouvement qui pénètre dans cette couche, à travers l'un de ces plans, doit être égale à celle qui en sort à travers l'autre; sans quoi, la quantité de mouvement existante dans cette couche varierait, ce qui est incompatible avec la condition de l'état stationnaire.

3) La force vive, qui traverse le plan pendant l'unité de temps, doit être indépendante de x , pour la même raison que celle qui a été donnée quant à la quantité de mouvement.

Nous pouvons donc poser les trois équations de condition suivantes :

$$(21) \quad \begin{cases} E = 0 \\ F = \text{Const.} \\ G = \text{Const.} \end{cases}$$

Nous allons introduire, dans ces équations, les expressions trouvées pour E, F et G.

La première équation donne, en négligeant le terme $X_2 \varepsilon^3$:

$$q + uq' = 0,$$

ce qui détermine la relation qui existe entre les coefficients q et q' :

$$(22) \quad q' = -\frac{q}{u}.$$

L'équation (IV.) deviendra par là, si nous remplaçons en même temps i par sa valeur donnée dans (20) :

$$(VII.) \quad J = 1 - \frac{q}{u} \mu \varepsilon + r' \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \varepsilon^2 + \text{etc.}$$

La seconde des équations précédentes donne en y négligeant $X_1 \varepsilon^2$:

$$(23) \quad Nu^2 = \text{Const.}$$

N détermine la densité du gaz au lieu considéré, et u^2 est proportionnel à la température absolue; il s'ensuit que le produit de la densité par la température absolue, ou, ce qui revient au même, que la pression doit être constante dans toute la masse gazeuse, résultat que l'on pourrait regarder d'avance comme évident.

Enfin la troisième des équations (VI.) donnera, en tenant compte de (22) et négligeant le terme $X_2 \varepsilon^3$:

(VIII.)

$$G = \frac{1}{3} kmNu^2 q \epsilon.$$

Puisque Nu^2 est constant par ce qui précède, et que k , m et ϵ sont des constantes, il s'ensuit que, pour que G soit constant, on doit avoir

$$(24) \quad q = \text{Const.}$$

Pour la détermination de la conductibilité, il ne nous restera plus, abstraction faite de la quantité ϵ dont j'ai parlé dans le Mémoire précédent, qu'à déterminer l'unique constante q .

V. RELATION ENTRE LES MOLÉCULES QUI SE TROUVENT SIMULTANÉMENT DANS UNE COUCHE, ET CELLES QUI SONT ÉMISES PAR LA MÊME COUCHE.

§ 17.

Pour trouver combien de molécules sont émises par une couche, nous devons savoir quelle est la probabilité qu'une molécule qui traverse la couche choquera une autre molécule qui s'y trouve, puisque ce sont celles qui se sont choquées qui sortent de la couche avec une vitesse et une direction différentes de celles qu'elles avaient avant le choc, et que ce sont celles-là que nous nommons les molécules émises par la couche.

La probabilité qu'une molécule en rencontre un autre sur un chemin infiniment petit ds sera désignée, comme au § 9, par αds ; et il s'agira de déterminer la quantité α .

Dans mon précédent Mémoire, j'ai déterminé la valeur α pour le cas où une molécule se meut dans un espace qui en renferme un très-grand nombre d'autres en repos en des points déterminés, et j'ai trouvé¹ :

$$\alpha = \frac{\pi \rho^2}{\lambda^3},$$

1) [Voir p. 228.]

où ρ désigne le rayon de la sphère d'action d'une molécule dans le sens défini plus haut, et λ la distance qui existerait entre deux molécules voisines, si les molécules, au lieu d'être disposées irrégulièrement comme elles le sont en réalité, étaient disposées régulièrement en cubes (c'est-à-dire si l'on suppose tout l'espace partagé en petits cubes dont les centres des molécules occupent les sommets). Au lieu de la quantité λ , on peut introduire aussi le nombre N des molécules qui se trouvent dans l'unité de volume. Dans cette unité, il doit en effet se trouver autant de molécules qu'il y existe d'espaces cubiques de côté λ , et l'on a par suite $N = \frac{1}{\lambda^3}$, ce qui change l'équation précédente en :

$$(25) \quad \alpha = \pi \rho^2 N.$$

Il est facile de transformer cette expression de α , de telle sorte qu'elle convienne encore au cas où les autres molécules ne sont pas en repos, mais se meuvent également d'une manière quelconque.

Si nous désignons par adt la probabilité que la molécule considérée en rencontre une autre pendant l'élément de temps dt , et par ds , le chemin parcouru pendant le temps dt , nous aurons :

$$(26) \quad adt = \alpha ds,$$

ou si nous remplaçons $\frac{ds}{dt}$, qui est la vitesse de la molécule, par v :

$$(27) \quad a = \alpha v.$$

Si nous substituons à α , sa valeur tirée de (25), nous aurons :

$$(28) \quad a = \pi \rho^2 N v.$$

Supposons maintenant que les autres molécules, au lieu d'être au repos, se meuvent toutes dans une direction déterminée avec une vitesse commune, la probabilité que la mo-

molécule considérée en rencontre une autre pendant le temps dt sera évidemment représentée par la même formule que dans le cas précédent, pourvu que l'on remplace la vitesse réelle v de la molécule par sa vitesse relative par rapport aux autres. Soient V la vitesse commune des autres molécules, φ l'angle que leur direction fait avec celle de la molécule considérée, et R la vitesse relative, on aura :

$$(29) \quad R = \sqrt{V^2 + v^2 - 2Vv \cos \varphi},$$

et au moyen de cette valeur, nous pourrions poser :

$$(30) \quad a = \pi \rho^2 N R.$$

Supposons enfin que les autres molécules se meuvent dans des directions différentes et avec des vitesses qui peuvent être inégales, les vitesses relatives de la molécule considérée par rapport aux autres seront différentes entre elles, et nous devons employer dans l'équation leur valeur moyenne. En la représentant par \bar{R} ¹⁾, nous aurons donc :

$$(31) \quad a = \pi \rho^2 N \bar{R},$$

et de là résulte pour α , en vertu de (27), l'équation :

$$(32) \quad \alpha = \pi \rho^2 N \frac{\bar{R}}{v}.$$

§ 18.

Il s'agit maintenant de déterminer, pour une molécule donnée qui se meut dans une couche infiniment mince, la vitesse moyenne relative qu'elle a par rapport à toutes les molécules qui se meuvent simultanément avec elle dans la couche.

1) On verra bientôt pourquoi nous avons employé dans ce cas deux traits au-dessus de la lettre R , tandis que dans les cas précédents nous n'en avons employé qu'un.

La vitesse relative R de la molécule donnée, par rapport à une autre dont la direction fait avec la sienne un angle φ , et qui a la vitesse V , est déterminée par l'équation (29). Or, si nous considérons toutes les molécules qui se meuvent dans la même direction, nous avons vu, au § 8, que leurs vitesses ne seront pas tout à fait égales; par suite, les vitesses relatives de la molécule donnée, par rapport aux autres, seront aussi un peu différentes, et c'est pourquoi nous introduirons d'abord, pour chaque direction donnée, une vitesse relative moyenne que nous désignerons par \bar{R} .

Afin de nous figurer d'une manière simple les différentes directions qui se présentent, décrivons, comme plus haut, une sphère de rayon r , du centre de laquelle partent des droites dirigées vers tous les points de la surface et qui représenteront toutes les directions. Si les molécules se mouvaient également dans toutes les directions, le nombre de celles dont les directions tombent en un élément $d\omega$ de la surface de la sphère, seraient au nombre total des molécules, comme la surface de cet élément est à celle de la sphère; et il serait par suite représenté, en fraction du nombre total, par $\frac{d\omega}{4\pi}$. Dans le cas actuel, où toutes les molécules ne se meuvent pas également dans toutes les directions, cette expression doit être modifiée; et en employant la notation du § 12, le nombre des molécules, dont les directions tombent dans l'élément $d\omega$, sera représenté, en fraction du nombre total, par $J \frac{d\omega}{4\pi}$.

Or, si \bar{R} représente la vitesse relative moyenne de la molécule donnée par rapport à celles dont les directions tombent dans l'élément $d\omega$, et \bar{R} la vitesse relative moyenne de la molécule donnée par rapport à toutes les autres, celle-ci sera déterminée par l'équation suivante :

$$(33) \quad \bar{R} = \int \frac{d\omega}{4\pi} J \bar{R},$$

où l'intégrale doit s'étendre à toute la surface de la sphère. Nous allons développer cette intégrale.

§ 19.

D'après (29), on a :

$$R = \sqrt{V^2 + v^2 - 2Vv \cos \varphi};$$

nous écrirons cette équation sous la forme suivante :

$$(34) \quad R = \sqrt{2} \sqrt{Vv} \sqrt{1 - \cos \varphi + \frac{(V-v)^2}{2Vv}}.$$

La vitesse V d'une molécule quelconque qui se trouve dans la couche ne diffère, comme nous l'avons vu plus haut, de la vitesse u des molécules qui se meuvent perpendiculairement à l'axe des x , que d'une quantité de l'ordre ϵ . Or, si nous admettons que la vitesse v de la molécule donnée ne diffère de la vitesse u que d'une quantité du même ordre, la différence $V - v$ sera également de cet ordre, et, par suite, le terme $\frac{(V-v)^2}{2Vv}$ qui se trouve sous le dernier radical sera de l'ordre ϵ^2 .

Par l'intégration, il ne résultera également de ce terme qu'une quantité du même ordre, et, par conséquent, si nous convenons de négliger dans l'expression cherchée de \bar{R} les termes d'un ordre supérieur au premier, nous pourrions négliger la quantité $\frac{(V-v)^2}{2Vv}$; ce qui simplifie beaucoup le calcul.

L'équation précédente deviendra ainsi :

$$(35) \quad R = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi} \sqrt{Vv}.$$

Or, d'après l'équation (9) :

$$V = U - \frac{dU}{dx} \mu s + \text{etc.};$$

en substituant cette valeur dans l'équation précédente, et en

s'arrêtant dans le développement au terme du premier ordre en s , elle deviendra :

$$R = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi} \sqrt{Uv} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \mu s \right).$$

Enfin, si l'on remplace s par la valeur moyenne \bar{s} , on obtiendra, au lieu de R , valeur moyenne \bar{R} :

$$(36) \quad \bar{R} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi} \sqrt{Uv} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \mu \bar{s} \right).$$

Substituons maintenant à U et \bar{s} , les expressions (I.) et (18) qui deviennent, si l'on néglige les termes d'ordres supérieurs :

$$U = u + p\mu\epsilon \\ \bar{s} = c\epsilon,$$

et posons en même temps

$$(37) \quad v = u + \delta,$$

où δ représente une quantité de l'ordre ϵ . Nous aurons :

$$\bar{R} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi} \left[u + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \left(p - c \frac{du}{dx} \right) \mu \epsilon \right];$$

ou bien, en remplaçant $p - c \frac{du}{dx}$, comme nous l'avons fait dans (19), par q :

$$(38) \quad \bar{R} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi} \left(u + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} q \mu \epsilon \right).$$

Nous avons à multiplier cette expression par J , qui d'après (VII) est représenté par $1 - \frac{q}{u} \mu \epsilon$, en négligeant les termes d'ordres supérieurs; nous aurons donc :

$$(39) \quad J\bar{R} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi} \left(u + \frac{1}{2} \delta - \frac{1}{2} q \mu \epsilon \right),$$

produit que nous aurons à substituer dans (33) pour effectuer ensuite l'intégration.

Pour cela, nous devons connaître la relation qui existe entre $\cos \varphi$ et le cosinus désigné par μ . Ce dernier est celui de l'angle que la direction d'une molécule quelconque fait avec l'axe des x , et φ est l'angle compris entre la direction de cette molécule et celle de la molécule donnée. En outre, soient η l'angle de la direction de la molécule donnée avec l'axe des x , et ψ l'angle compris entre les deux plans passant par la direction de la molécule donnée et renfermant les angles φ et η . Nous aurons alors :

$$(40) \quad \mu = \cos \eta \cos \varphi + \sin \eta \sin \varphi \cos \psi.$$

L'élément $d\omega$ de la surface sphérique peut se représenter par $\sin \varphi d\varphi d\psi$. Par ces substitutions l'équation (33) deviendra :

$$(41) \quad \bar{R} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \int \int d\varphi d\psi \sin \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi [u + \frac{1}{2} \delta - \frac{1}{2} q (\cos \eta \cos \varphi + \sin \eta \sin \varphi \cos \psi) \varepsilon]},$$

où l'intégrale relative à ψ doit s'étendre depuis 0 jusqu'à 2π et celle relative à φ depuis 0 jusqu'à π .

En effectuant les intégrations, on obtient :

$$(IX.) \quad \bar{R} = \frac{4}{3} (u + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{10} q \cos \eta \cdot \varepsilon)^3.$$

§ 20.

Nous avons à substituer cette expression de \bar{R} dans les

1) Pour plus de clarté, je n'ai écrit dans les expressions précédentes que les termes du premier ordre relativement à ε ; toutefois, j'indiquerai ici le résultat du calcul plus complet, dans lequel il est tenu compte des termes du second ordre :

$$\begin{aligned} \bar{R} = & \frac{4}{3} \left\{ u + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{10} q \cos \eta \cdot \varepsilon + \frac{1}{4} \frac{\delta^2}{u} - \frac{1}{5} q \cos \eta \frac{\delta \varepsilon}{u} \right. \\ & + \frac{1}{5.7} \left[-6q^2 + 2q_1^2 + 6ru + \frac{1}{3} r'u^2 \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{2} q^2 + \frac{11}{4} q_1^2 - \frac{1}{2} ru - r'u^2 \right) \cos^2 \eta \right] \frac{\varepsilon^2}{u} \right\}. \end{aligned}$$

équations (31) et (32) pour obtenir les expressions de a et de α . Nous aurons ainsi, en mettant de nouveau $u + \delta$ au lieu de v :

$$(42) \quad a = \frac{4}{3} \pi \rho^2 N (u + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{10} q \cos \eta \cdot \varepsilon)$$

$$(43) \quad \alpha = \frac{4}{3} \pi \rho^2 N \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{u} + \frac{1}{10} q \cos \eta \frac{\varepsilon}{u} \right).$$

Nous pouvons encore éliminer la quantité inconnue ε de ces expressions. Si l'on admet, en effet, comme cas particulier, que la molécule donnée émette ainsi que toutes les autres on la vitesse u , on devra faire $\delta = 0$ et $q = 0$, et l'on aura :

$$(44) \quad \alpha = \frac{4}{3} \pi \rho^2 N.$$

En outre, d'après le § 9, pour ce cas où toutes les molécules ont des vitesses égales, la fraction $\frac{1}{\alpha}$ représente la longueur moyenne de chemin entre deux chocs consécutifs, et son expression sera par suite :

$$\frac{3}{4} \frac{1}{\pi \rho^2 N}.$$

Afin de spécialiser encore davantage cette expression, de telle sorte qu'elle représente la longueur moyenne normale, que nous avons désignée par ε , nous n'avons qu'à remplacer N qui est le nombre des molécules contenues dans l'unité de volume, par la valeur particulière correspondante à l'état normal du gaz, et que nous nommerons N_0 ; nous aurons donc :

$$(45) \quad \varepsilon = \frac{3}{4} \frac{1}{\pi \rho^2 N_0}.$$

En éliminant, au moyen de cette équation, la quantité ε des expressions précédentes, on obtiendra :

1) J'ai déjà indiqué dans mon Mémoire précédent [p. 230], sans effectuer entièrement le calcul, cette valeur de la longueur moyenne de chemin pour le cas où toutes les vitesses sont égales. [J'ai complété le calcul dans une note, p. 222 et suiv. 1866.]

$$(X.) \quad a = \frac{N}{N_0 \varepsilon} \left(u + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{10} q \cos \eta \cdot \varepsilon \right),$$

$$(XI.) \quad \alpha = \frac{N}{N_0 \varepsilon} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{u} + \frac{1}{10} q \cos \eta \cdot \varepsilon \right).$$

On voit, par ces expressions, que les quantités a et α dépendent de la vitesse et de la direction de la molécule donnée, et, qu'en outre, puisque N et u sont fonctions de x , elles dépendent de la position de la couche, dans laquelle on considère le mouvement de cette molécule¹⁾.

Au moyen de ces expressions, nous pouvons déterminer facilement les quantités nécessaires à notre but.

§ 21.

Cherchons à déterminer combien de molécules en choquent d'autres pendant l'unité de temps dans la couche infiniment mince, et quelle est la quantité totale de mouvement positif de ces molécules.

La probabilité qu'une molécule, qui se meut dans la couche, en choque une autre pendant l'élément de temps dt , est représentée par adt , pourvu que dans l'expression de a on mette pour $\cos \eta$ et δ les valeurs correspondantes à la direction et à la vitesse de la molécule considérée. Si donc on veut déterminer, dans un grand nombre donné de molécules, le nombre de celles qui en choquent d'autres pendant le temps dt , on n'aura qu'à multiplier le nombre total par adt , en ayant soin, si la valeur de a n'est pas la même pour toutes les molécules, d'en employer la valeur moyenne. Considé-

1) Maxwell n'a pas assez tenu compte dans ses calculs des différentes circonstances dont dépend la quantité α , en ce qu'il traite les mouvements des molécules émises par une couche infiniment mince comme si la valeur de α était égale et constante pour toutes ces molécules. Or, il se fait que la négligence qu'il commet ici produit un résultat contraire à celui de la négligence que nous avons mentionnée au § 5, de sorte qu'elles se compensent en partie, du moins dans le calcul de la conductibilité.

rons maintenant les molécules qui se trouvent simultanément dans une portion de la couche correspondante à l'unité de surface, et particulièrement celles dont les cosinus sont compris entre μ et $\mu + d\mu$; le nombre en sera $\frac{1}{2} N J d\mu dx$; si

nous multiplions cette expression par $\bar{a} dt$, où \bar{a} désigne la valeur moyenne de a pour ces molécules, le produit $\frac{1}{2} N \bar{a} d\mu dx dt$ représentera, comme nous venons de le voir, le nombre des molécules qui, parmi celles-là, en choquent d'autres pendant le temps dt . Si l'on intègre cette expression par rapport à μ depuis -1 , jusqu'à $+1$, on obtiendra le nombre de toutes les molécules qui se choquent dans la couche pendant le temps dt . Il suffira, ensuite, de le diviser par dt , pour obtenir le nombre des molécules qui se choquent dans la couche pendant l'unité de temps. En nommant ce nombre $M dx$, on aura :

$$(46) \quad M = \frac{1}{2} N \int_{-1}^{+1} \bar{a} d\mu.$$

La quantité J qui entre dans cette intégrale est, comme nous savons, $1 - \frac{q}{u} \mu \varepsilon$. Pour obtenir la quantité \bar{a} , nous n'avons qu'à remplacer dans l'équation (X.) qui donne a , $\cos \eta$ par μ et δ par $V - u$, puisque nous avons désigné par V la vitesse d'une molécule. Or, comme les molécules pour lesquelles le cosinus μ a une valeur déterminée n'ont pas toutes la même vitesse, nous devons, pour obtenir la valeur moyenne \bar{a} , nous servir de la valeur moyenne \bar{V} . D'après l'équation (III.) celle-ci est égale à $u + q\mu \varepsilon + \text{etc.}$, et, par suite, la valeur moyenne de δ sera égale à $q\mu \varepsilon$ en négligeant les puissances supérieures de ε . Substituons ces expressions dans l'équation (X.), nous obtiendrons :

$$(47) \quad \bar{a} = \frac{N}{N_0 \varepsilon} \left(u + \frac{3}{5} q\mu \varepsilon \right).$$

D'après cela, l'équation (46) devient :

$$M = \frac{1}{2} \frac{N^2}{N_0^2} \int_{-1}^{+1} \left(u - \frac{2}{5} u^3 \right) \mu \, d\mu,$$

et l'intégration effectuée donne

$$(48) \quad M = \frac{N^2 u}{N_0^2}.$$

On peut déterminer, de la même manière, la quantité totale de mouvement positif des molécules qui se choquent, dans la couche, pendant l'unité de temps. La quantité positive de mouvement d'une molécule de vitesse V et de cosinus μ est $m\mu V$, et, par suite, au lieu de la quantité a , nous aurons à faire entrer le produit $m\mu Va$, dans lequel nous devons prendre la valeur moyenne de Va comme nous avons pris plus haut celle de a . L'expression de la quantité de mouvement cherchée est donc :

$$\frac{1}{2} dxmN \int_{-1}^{+1} J \bar{V} a \mu \, d\mu.$$

Si nous y substituons, comme plus haut, à J et à $\bar{V}a$ leurs valeurs, elle devient :

$$\frac{1}{2} dxm \frac{N^2}{N_0^2} \int_{-1}^{+1} \left(u^2 + \frac{3}{5} u^4 \right) \mu \, d\mu,$$

et en effectuant l'intégration, il en résulte :

$$\frac{4}{5} dxm \frac{N^2}{N_0} uq,$$

que nous pourrions écrire d'après l'équation (48), sous la forme suivante :

$$\frac{1}{5} dxmMq^2.$$

§ 22.

Cette dernière expression peut nous servir à déterminer la constante q .

Les mêmes molécules qui se choquent dans la couche, sont aussi celles qui sont émises par la couche après les chocs; et la quantité totale de mouvement positif qu'elles avaient auparavant doit encore subsister après sans altération. Or, il est facile d'exprimer, au moyen de la notation précédente, la quantité de mouvement positif des molécules émises par la couche. Nous avons vu, en effet, que les mouvements de ces molécules peuvent se décomposer en deux autres, dont le premier serait tel que toutes les molécules se mouvraient également dans toutes les directions, et dont le second consisterait en une faible vitesse composante, communiquée à toutes les molécules dans le sens positif de x , et que nous avons désignée par p . De là résulte que si Mdx représente le nombre des molécules émises pendant l'unité de temps, la quantité totale de mouvement positif de ces molécules sera

$$dxmMp^2.$$

Comparant cette expression à la précédente, nous trouverons

$$dxmMp^2 = \frac{1}{5} dxmMq^2$$

et par suite

(49)

$$p = \frac{1}{5} q.$$

Revenons maintenant à la première des équations (19) :

$$q = p - c \frac{du}{dx},$$

elle deviendra par la substitution de la valeur de p :

(50)

$$q = -\frac{3}{4} c \frac{du}{dx}.$$

On peut déduire, de la manière suivante, la quantité c , de ce qui précède. On a par l'équation (15) :

$$\frac{1}{\alpha_0} = c\varepsilon,$$

où α_0 désigne la valeur particulière que prend α pour les molécules qui se meuvent perpendiculairement à l'axe des x ; on obtient cette valeur en égalant δ et $\cos \eta$ à zéro dans l'équation (XI.) :

$$\alpha_0 = \frac{N}{N_0\varepsilon}.$$

Par la substitution de cette valeur, l'équation précédente donnera :

$$(51) \quad c = \frac{N_0}{N}.$$

Et, par suite, l'équation (50) deviendra

$$(XII.) \quad q = -\frac{5}{4} \frac{N_0}{N} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Le coefficient q étant connu, l'équation (22) donnera le coefficient q' ; et, par suite, dans les équations (III) et (IV) qui déterminent la nature du mouvement des molécules qui se trouvent simultanément dans une couche, nous connaîtrons les termes des séries dont nous avons besoin, c'est-à-dire dans chacune d'elles, outre le terme indépendant de ε , le terme du premier ordre par rapport à cette quantité ²⁾.

1) Si l'on effectue les calculs en conservant partout une puissance de ε de plus que nous ne l'avons fait, on trouvera que les expressions données dans le texte pour le nombre et la quantité de mouvement des molécules qui se choquent dans une couche, et pour la quantité q , sont exactes à une quantité près qui est de deux ordres (par rapport à ε) plus élevée que l'expression donnée.

2) Dans les termes du second ordre entre les quantités q_1^2 , r et r' que l'on peut déterminer de la même manière que q en effectuant les calculs d'une manière plus complète. Je ne leur donnerai pas cette

VI. RÉSULTATS DÉFINITIFS.

§ 23.

Après avoir déterminé, dans ce qui précède, les coefficients nécessaires, nous pourrons maintenant chercher à tirer, des équations trouvées, des conclusions sur l'état du gaz, et sur la conductibilité qui y a lieu.

Nous avons vu au § 16 que q doit être une constante et, par suite, en le remplaçant par sa valeur, nous pourrons écrire :

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{du}{dx} = \text{Const.}$$

En outre, nous savons par le même paragraphe que

$$Nu^2 = \text{Const.}$$

et en multipliant ces deux équations entre elles, nous obtiendrons

$$(52) \quad u^2 \frac{du}{dx} = \text{Const.}$$

Or, comme la quantité u^2 est proportionnelle à la température absolue T , on peut écrire :

$$u = \text{Const.} \sqrt{T},$$

de sorte que l'équation précédente devient

extension qui ne présente absolument aucune difficulté, et je me contenterai d'écrire simplement les valeurs de ces quantités :

$$q_1^2 = \frac{41}{25} q^2$$

$$r = -\frac{31}{50} q^2$$

$$r' = \frac{266}{17.25} \frac{q^2}{u^2}.$$

$$(53) \quad \sqrt{T} \frac{dT}{dx} = \text{Const.}$$

En intégrant cette équation, on en obtiendra une de la forme

$$(54) \quad T^{\frac{3}{2}} = Cx + C_1,$$

où C et C_1 sont des constantes.

La masse gazeuse renfermée entre deux parois de températures données ne prend donc pas, comme on pourrait le croire au premier abord, un état tel que sa température soit une fonction linéaire de l'abscisse; mais la variation de température de l'une à l'autre paroi suit une loi un peu plus compliquée, puisque c'est sa puissance $T^{\frac{3}{2}}$ qui est représentée par une fonction linéaire de l'abscisse.

Lorsque l'on aura déterminé dans l'équation (54) les constantes C et C_1 , à l'aide des températures données des parois, on pourra déterminer la température du gaz en tout autre point. Comme de plus, le produit de la température et de la densité à l'intérieur du gaz doit être constant, on pourra, si la densité est donnée en un seul point, la déterminer en tous les autres au moyen de la température; et l'on connaîtra ainsi complètement l'état du gaz quant à sa température, sa densité et sa pression.

§ 24.

Pour déterminer la conductibilité G , qui a lieu dans le gaz, nous obtiendrons, en substituant dans l'équation (VIII.) la valeur trouvée pour q , l'équation suivante :

$$(XIII.) \quad G = -\frac{5}{12} kmN_0 u^2 \frac{du}{dx} \varepsilon^2.$$

Nous pouvons donner à cette équation une forme plus com-

1) Maxwell donne pour la force vive qui, en vertu des mouvements moléculaires, traverse pendant l'unité de temps dans le sens positif,

mode. Soit désignée par u_0 la vitesse des molécules et par T_0 la température absolue pour l'état normal du gaz; on aura :

$$\frac{u^2}{u_0^2} = \frac{T}{T_0},$$

l'unité de surface d'un plan perpendiculaire à l'axe des x , l'expression suivante (*Phil. Mag.* Vol. XX, p. 32) :

$$(A) \quad G = -\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} km u^2 N u l \right),$$

où l représente la longueur moyenne de chemin des molécules pour la densité qu'a le gaz au lieu considéré. Si nous mettons pour l sa valeur

$$l = \frac{N_0}{N} \varepsilon,$$

il vient :

$$G = -\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} km N_0 u^2 \varepsilon \right) = -\frac{1}{2} km N_0 u^2 \frac{du}{dx} \varepsilon.$$

Cette expression ne diffère de la précédente qu'en ce qu'elle renferme $\frac{1}{2}$ au lieu de $\frac{1}{3}$. Mais si l'on prend garde à la manière dont Maxwell est arrivé à l'équation (A), on trouve que cette concordance approximative de son résultat avec le mien n'est qu'apparente.

En représentant par E la masse de gaz qui traverse pendant l'unité de temps cette unité de surface dans le sens positif, Maxwell a posé l'équation suivante (*Loc. cit.*, p. 23) :

$$(B) \quad E = -\frac{1}{3} \frac{d}{dx} (m N u l).$$

Pour obtenir la force vive au lieu de la masse, il s'est contenté de remplacer dans cette équation la *masse* m d'une molécule par la *force vive* $\frac{1}{2} km u^2$ d'une molécule, et il est ainsi arrivé à l'équation A. Si nous considérons de plus près l'équation B; et si nous y substituons de même à l sa valeur $\frac{N_0}{N} \varepsilon$, nous aurons :

$$E = -\frac{1}{3} \frac{d}{dx} (m N_0 u \varepsilon) = -\frac{1}{3} m N_0 \frac{du}{dx} \varepsilon.$$

Cette équation exprime que, si la température du gaz varie dans la direction de l'axe des x , de telle sorte que $\frac{du}{dx}$ a une valeur appréciable, il doit se produire un mouvement continu de la masse dans cette direction, puisqu'il y a plus de molécules qui traversent le plan dans un

et par suite,

$$(55) \quad u = \frac{u_0}{\sqrt{\frac{T_0}{T}}} \sqrt{T}.$$

Par là, l'équation précédente devient :

$$(56) \quad G = -\frac{5}{24} \frac{kmN_0 u_0^3}{T_0} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Si nous prenons pour température de l'état normal celle de la glace fondante, nous aurons approximativement $T_0 = 273$, et $T = 273 + t$, t étant la température comptée à partir de celle de la glace fondante. En outre, désignons par α , comme on le fait d'habitude, le coefficient de la dilatation des gaz permanents, c'est-à-dire $\frac{1}{273}$, nous pourrions écrire :

$$(XIV.) \quad G = -\frac{5}{24} \frac{kmN_0 u_0^3}{273} \sqrt{1 + \alpha t} \frac{dt}{dx}.$$

Posons enfin

$$(XV.) \quad K = \frac{5}{24} \frac{kmN_0 u_0^3}{273},$$

sens que dans le sens opposé. Cette équation est donc en contradiction avec l'hypothèse que nous devons faire quand nous parlons de conductibilité; car nous entendons par là un transport de chaleur sans transport de masse.

On doit donc, abstraction faite de la question de savoir si l'équation (B) peut être exacte, conclure nécessairement : ou bien que Maxwell en posant ces équations a eu en vue un tout autre état que celui que nous supposons dans la conductibilité, c'est-à-dire un état dans lequel la masse gazeuse se meut dans une direction déterminée; dans ce cas, son équation (A) ne représente plus ce que nous entendons par conductibilité, et ce qui est donné par l'équation (XIII), mais au contraire un mouvement de la chaleur lié à un mouvement de la masse et occasionné en partie par celui-ci; ou bien l'on devra conclure que Maxwell a réellement eu en vue cet état dans lequel il y a mouvement de la chaleur sans mouvement de la masse; alors l'équation (B) est fautive, et l'équation (A) qui s'en déduit n'est devenue approximativement exacte que par une compensation partielle des deux erreurs.

notre équation deviendra :

$$(XVI.) \quad G = -K \sqrt{1 + \alpha t} \frac{dt}{dx}.$$

§ 25.

Le facteur K ne renferme que des quantités qui se rapportent à l'état normal du gaz, et, par suite, c'est une constante dépendant de la nature du gaz considéré. Par suite, la forme de la dernière équation nous conduit immédiatement à deux conclusions générales.

1° Pour une valeur donnée de $\frac{dt}{dx}$, la conductibilité croît avec la température qu'a le gaz au lieu considéré; et elle croît avec elle dans le même rapport que la vitesse du son, c'est-à-dire proportionnellement à $\sqrt{1 + \alpha t}$.

2° La conductibilité est indépendante de la pression à laquelle est soumis le gaz. Cela s'explique par cette raison que, si le nombre des molécules qui peuvent transmettre la chaleur est plus considérable quand le gaz est plus comprimé, d'un autre côté, les chemins parcourus par les molécules sont plus petits.

Cette dernière proposition pourrait conduire à des absurdités, si l'on voulait admettre qu'elle est toujours valable, quelque grande ou quelque petite que devienne la densité du gaz. Mais on doit songer que son application est naturellement bornée à des états du gaz qui ne s'écartent pas trop de l'état moyen; car, d'un côté, le gaz ne doit pas être comprimé, à un point tel qu'il se présente de trop grands écarts quant aux lois des gaz parfaits, qui forment la base de toute notre analyse; d'un autre côté, il ne doit pas être dilaté au point que la longueur moyenne de chemin des molécules devienne trop grande pour qu'il soit permis de négliger ses puissances supérieures.

§ 26.

Pour le calcul numérique des formules développées plus

haut, il sera nécessaire de revenir encore une fois sur le sujet mentionné au § 7, c'est-à-dire sur les différences *accidentelles* qui surviennent entre les vitesses des molécules, même lorsque la température et la densité du gaz sont partout les mêmes.

D'après cela, on ne doit pas attribuer la même valeur pour toutes les molécules à la quantité u qui se présente dans les formules relatives aux mouvements des molécules, et qui désigne leur vitesse pour le cas où il n'y a pas de différences de température ou de densité; mais on devra attribuer à u différentes valeurs qui varient irrégulièrement de molécule à molécule; et il en est de même d'autres quantités dépendantes de la vitesse, comme, par exemple, de la longueur de chemin s qui se présente dans les §§ 8 et suivants, et qui doit être en moyenne un peu plus grande pour les molécules qui ont une plus grande vitesse que pour celles qui ont une vitesse plus petite. Il s'agit donc de déterminer, pour ces quantités, quand elles entrent dans les formules, des valeurs moyennes telles que les formules donnent les mêmes résultats que si l'on attribuait à chaque molécule sa vitesse réelle.

Pour pouvoir calculer d'une manière exacte ces valeurs moyennes, il faudrait connaître la loi que suivent les différentes vitesses qui se présentent. Comme je l'ai déjà dit, Maxwell a posé une loi à ce sujet, et l'on pourrait peut-être s'en servir pour le calcul des valeurs moyennes¹⁾. Mais je ne m'arrêterai pas sur ce sujet, parce que j'aurais à faire sur la loi quelques observations qui me conduiraient trop loin; je crois d'autant plus pouvoir m'en abstenir que la valeur numérique de ϵ est encore trop peu connue pour qu'il soit pos-

1) Je dois faire remarquer que ce calcul ne serait pas aussi simple qu'on se l'imaginerait au premier abord. On doit observer en effet, comme nous l'avons déjà vu plus haut dans une circonstance analogue, que la moyenne [arithmétique] d'une puissance de u n'est pas identique avec la puissance correspondante de la moyenne [arithmétique] de u ; et il en est de même des puissances d'autres quantités dépendantes de u ou de leur produit. Si l'on considère par exemple la série

sible de calculer exactement les formules dans lesquelles elle entre. Dans le calcul de la conductibilité, je me contenterai donc de me servir de la formule précédente, dans laquelle il a été fait abstraction des différences accidentelles, et d'employer pour la vitesse une valeur moyenne facile à calculer, et qui, si elle n'est pas rigoureusement la véritable, peut du moins être considérée comme suffisamment exacte, vu l'incertitude qui règne encore sur la valeur de ϵ .

§ 27.

La moyenne que nous emploierons pour u sera celle qui donnera la même force vive que les vitesses réelles; on l'obtiendra en prenant la moyenne arithmétique des carrés des vitesses, et en en extrayant la racine carrée.

Dans ce cas, le produit $\frac{1}{2} k N_0 m u_0^2$ a une signification simple. Il représente la force vive ou la quantité de chaleur contenue dans une unité de volume du gaz à l'état normal. Si l'on représente par γ la chaleur spécifique de l'unité de volume du gaz sous volume constant, cette quantité de chaleur sera γT_0 , ou bien approximativement $\gamma \cdot 273$, en prenant pour la température normale T_0 celle de la glace fondante; et l'équation (XV.) deviendra par là :

$$(57) \quad K = \frac{5}{12} \gamma u_0^2.$$

suivante d'expressions dans lesquelles, comme plus haut, un trait horizontal sert à désigner les moyennes [arithmétiques] :

$$\overline{u^2}; (\overline{u})^2; a \overline{u^2} + (1-a) (\overline{u})^2; \frac{u^{n+2}}{u^n} \text{ etc.,}$$

on voit aisément qu'elles prendraient toutes la forme commune u^2 , si toutes les valeurs de u étaient égales entre elles, tandis qu'il n'en serait pas de même, si les valeurs de u étaient inégales. Si donc, dans une formule qui a été déduite dans l'hypothèse de valeurs égales de u , la quantité u^2 se présente, on ne saura pas *à priori* laquelle des valeurs moyennes indiquées plus haut, on devra choisir, et pour le décider on devra reprendre tout le développement de la formule.

Dans l'application de cette formule, si γ est exprimé en calories, la conductibilité le sera également. La quantité u_0 résulte de la formule posée plus haut pour la vitesse des molécules ¹⁾:

$$(58) \quad u_0 = \frac{485^m}{\sqrt{\sigma}},$$

où σ désigne le poids spécifique du gaz considéré par rapport à l'air atmosphérique. En substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle devient :

$$(XVII.) \quad K = 202,1 \frac{\gamma}{\sqrt{\sigma}} \epsilon.$$

Pour les gaz permanents simples, ainsi que pour les gaz composés qui n'ont pas subi de diminution de volume dans la combinaison, la chaleur spécifique γ a la même valeur que pour l'air, c'est-à-dire en prenant pour unité de volume le mètre cube qui contient à l'état normal 1,2932 kil. d'air :

$$(59) \quad \gamma = 0,1686 \cdot 1,2932 = 0,21803.$$

Au moyen de cette valeur, on obtiendra pour les gaz précités :

$$(XVIII.) \quad K = \frac{44,06}{\sqrt{\sigma}} \epsilon.$$

De là résultent pour les trois gaz permanents simples et pour l'air qui, sous le rapport de la conductibilité, doit être traité comme un gaz simple, les valeurs suivantes de K :

pour l'air atmosphérique....	44,06 . ϵ
» l'oxygène.....	41,90 . ϵ
» l'azote.....	44,71 . ϵ
» l'hydrogène.....	167,49 . ϵ .

Pour la détermination numérique complète de ces valeurs, il faudrait connaître encore le facteur ϵ . Il ne serait pas pos-

1) [V. p. 213.]

sible de calculer numériquement cette quantité d'après les principes exposés précédemment, parce que l'on devrait connaître le rayon ρ de la sphère d'action; on doit donc partir d'autres données pour la détermination de ϵ . Maxwell a calculé la longueur moyenne de chemin des molécules en se fondant sur des données relatives au frottement de masses d'air en mouvement et à la diffusion des gaz; et il a trouvé, dans les deux cas, des nombres qui ne diffèrent pas beaucoup de

$$\frac{1}{400000} \text{ pouce angl. ou } \frac{1}{16000000} \text{ mètre.}$$

Sans vouloir m'exprimer sur le degré de confiance qu'on peut avoir en ce nombre, je pense, toutefois, que nous pourrions nous en servir, pour nous faire une idée approchée de la nature des quantités dont il s'agit ici. Par la substitution de cette valeur, nous obtiendrons pour l'air :

$$(60) \quad K = \frac{44}{16000000} = \frac{11}{4000000}.$$

Cette quantité représente en calories la quantité de chaleur qui passerait par seconde à travers 1 mètre carré, si $\frac{dt}{dx}$ était égal à -1 , c'est-à-dire si la température, dans le voisinage du lieu considéré, décroissait dans le sens de l'axe des x , de telle sorte que, en admettant un décroissement uniforme sur une plus grande étendue, la température baisserait de 1° cent. sur une longueur de 1 mètre.

§ 28.

Pour comparer cette conductibilité à celle des métaux, nous nous servirons d'un résultat dû à Péclet. Ce physicien a déterminé, par l'expérience, la quantité de chaleur qui traverse une plaque de plomb, et il a trouvé que, si une grande masse de plomb était portée à un état tel que la température y décrût de 1° cent. sur une longueur de 1 mètre, il pas-

serait, pendant une heure, 14 calories, à travers une surface d'un mètre carré ¹⁾. Pour comparer ce nombre à celui que nous avons trouvé pour l'air, et qui a été rapporté à la seconde, comme unité de temps, nous devons multiplier ce dernier par 3600 (le nombre de secondes contenues dans une heure); il deviendra ainsi :

$$\frac{11 \cdot 3600}{4000000} = \frac{1}{100}.$$

Ce calcul conduit donc à une conductibilité 1400 fois plus faible que celle du plomb ²⁾.

Quoique ce nombre ne présente qu'un degré d'exactitude assez faible, et qu'on ne puisse le regarder que comme une valeur approchée, il peut, du moins, servir à démontrer que la conductibilité, déduite théoriquement de l'hypothèse sur les mouvements moléculaires des gaz, qui sert de base à ce Mémoire, est beaucoup plus faible que celle des métaux, résultat qui est entièrement conforme à l'expérience. L'objection que cette hypothèse conduirait à une propagation tellement rapide de la chaleur, qu'elle rendrait impossibles des différences locales de température dans la masse gazeuse, est donc dénuée de tout fondement. Bien plus, on peut considérer ce même phénomène, que l'on faisait valoir avec une insistance particulière contre cette hypothèse, comme une nouvelle vérification de celle-ci.

1) *Traité de la chaleur*, t. I, p. 391.

2) Maxwell a trouvé un résultat tout différent; d'après lui, la conductibilité de l'air est dix millions de fois plus faible que celle du cuivre. Mais ce résultat repose sur deux erreurs qu'il a commises dans son calcul numérique. En premier lieu, au lieu de se servir des nombres donnés par Pécelet, qui expriment la conductibilité des métaux en mesures françaises, il emploie ceux que Rankine en a déduits pour la résistance à la conductibilité en mesures anglaises (*Manual of the Steam Engine*, p. 259.) Mais ces nombres doivent être multipliés par 0,4536, rapport de la livre anglaise au kilog., pour correspondre aux nombres donnés par Pécelet. En second lieu Maxwell s'est servi des nombres rapportés à l'heure comme s'ils se rapportaient à la seconde.

§ 29.

Les expressions trouvées pour K permettent, en outre, d'établir une comparaison approchée de différents gaz entre eux, sous le rapport de leur conductibilité.

Dans l'expression (XVII), on connaît avec assez d'exactitude le poids spécifique σ , et l'on peut calculer approximativement la chaleur spécifique γ au moyen des expériences de Regnault. Si nous considérons en particulier les gaz simples, et les gaz composés qui n'ont pas subi de diminution de volume dans la combinaison, nous pourrions, comme nous l'avons déjà dit, regarder γ comme constant, et l'expression de K prend alors la forme (XVIII), qui ne contient, outre un facteur numérique, que la fraction $\frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma}}$.

La quantité ϵ , qui est la longueur moyenne de chemin des molécules, n'est pas nécessairement la même pour différents gaz, et nous ignorons quel est, pour ceux-ci, le rapport de ces longueurs de chemin. Mais il n'y a pas de raison pour admettre que cette longueur serait plus petite pour des gaz d'un moindre poids spécifique que pour ceux d'un plus grand poids spécifique; car elle est inversement proportionnelle au rayon de la sphère d'action, et il est difficile d'attribuer de plus grandes sphères d'action à des molécules légères qu'à de plus lourdes. Si donc ϵ n'est pas plus faible pour des gaz moins denses, la fraction $\frac{\epsilon}{\sqrt{\sigma}}$, et, par suite, la conductibilité doit être plus grande pour ceux-ci que pour des gaz plus denses.

Ce résultat concorde parfaitement avec les résultats d'expériences connus jusqu'à présent, et particulièrement avec ceux des belles recherches de Magnus ¹⁾, dans lesquelles il a évité les courants de gaz qui étaient intervenus conjointement

1) [*Ann. de Pogg.*, t. CXII, p. 497.]

avec la conductibilité propre dans les expériences de Dulong et Petit. Il ressort surtout d'une manière remarquable de ces expériences que le gaz le plus léger, l'hydrogène, est beaucoup meilleur conducteur que les autres gaz.

§ 30.

Si nous récapitulons brièvement les résultats que nous avons obtenus, nous pourrions les exprimer comme suit :

1) Les gaz sont beaucoup plus mauvais conducteurs que les métaux. Un calcul numérique approché, dans lequel on s'est servi de la valeur approchée calculée par Maxwell sur la longueur moyenne de chemin des molécules, donne, pour l'air à la température de la glace fondante, un pouvoir conducteur 1400 fois plus faible que celui du plomb.

2) La conductibilité dépend de la température du gaz, et croît avec celle-ci dans le même rapport que la vitesse du son.

3) La conductibilité est, entre certaines limites, indépendante de la pression à laquelle le gaz est soumis.

4) Le pouvoir conducteur est plus considérable pour les gaz d'un moindre poids spécifique que pour ceux d'un plus grand poids spécifique, et doit, par suite, être surtout beaucoup plus grand pour l'hydrogène que pour tous les autres gaz.

MÉMOIRE XVII.

SUR LA NATURE DE L'OZONE.

Lu à la Société des sciences naturelles de Zurich le 8 mars 1858, publié dans les *Ann. de Pogg.*, livraison d'avril 1858, t. CIII, p. 644; *Phil. Mag.*, 4^e série, vol. XVI, p. 45; *Archives des sciences phys. et nat.*, Bibl. univ. de Genève, 2^e série, t. II, p. 150 1).

Dans la livraison de janvier du *Phil. Mag.* 2), p. 24, se trouve un travail de Schönbein, dans lequel l'inventeur de l'ozone signale une propriété nouvelle de cette remarquable modification de l'oxygène. Tandis que l'ozone exerce une forte action oxydante sur les substances oxydables, et même sur les métaux nobles, Schönbein a trouvé que des bandes de papier, qui sont colorées avec du peroxyde de plomb, se décolorent lorsqu'on les plonge humides dans de l'air fortement ozonisé, puisque le peroxyde de plomb est réduit; et il est à remarquer qu'en même temps, comme Schönbein l'a prouvé d'autre part, l'ozone est détruit, c'est-à-dire transformé en oxygène ordinaire.

Ce résultat m'a confirmé dans l'idée que je m'étais faite sur la nature de l'ozone, et m'a engagé à la publier maintenant sous forme d'hypothèse.

Dans mon Mémoire « sur la nature du mouvement que nous nommons chaleur 3) », j'ai cherché à expliquer les rapports qui existent entre les volumes des gaz simples et composés, par cette

1) [Dans l'ordre des dates, ce Mémoire aurait dû suivre le Mémoire XIV; je l'ai placé ici, pour ne pas séparer l'un de l'autre les Mémoires précédents, qui tiennent ensemble par leur contenu.]

2) [4^e sér., vol. XV.]

3) [Mémoire XIV de cette collection.]

hypothèse que, même dans les gaz simples, une molécule est composée de plusieurs atomes; qu'une molécule d'oxygène, par exemple, se compose de deux atomes. Or je pense qu'il peut arriver, dans des circonstances particulières, que, parmi le grand nombre des molécules qui se trouvent dans une certaine quantité de gaz, une petite partie d'entre elles soient décomposées dans leurs deux atomes, qui se meuvent alors isolément parmi les autres molécules. *Ces atomes isolés d'oxygène, qui doivent naturellement se distinguer, dans leur action sur des corps étrangers, des atomes qui sont combinés deux à deux en molécules, constituent, d'après moi, l'ozone ¹⁾.*

Considérons tout d'abord les modes de formation les plus importants de l'ozone.

Lorsque de l'électricité se répand dans l'oxygène ou dans l'air atmosphérique, ou lorsque des étincelles électriques les traversent, il se forme de l'ozone; et la nature de l'électricité, qu'elle soit positive ou négative, ne provoque aucune différence. Cet effet peut fort bien être attribué simplement à la force répulsive de l'électricité, qui sépare l'un de l'autre les deux atomes d'une molécule, lorsqu'ils sont chargés de la même électricité, comme on l'observe sur des corps plus considérables.

Lorsque l'oxygène, dans des circonstances particulières, est séparé de ses combinaisons par électrolyse, on l'obtient ozonisé. Cela s'explique parce que, au moment de la séparation, les atomes d'oxygène sont isolés. La plupart d'entre eux se combinent aussitôt deux à deux à l'électrode, et peut-être l'électrode elle-même, si elle est de platine, par exemple, intervient-elle dans cette action. Mais un petit nombre des

1) [Je ferai remarquer immédiatement qu'en modifiant cette explication d'une manière tout-à-fait insignifiante, et qui ne touche pas à son essence, on pourra admettre que les atomes provenus de la décomposition des molécules ordinaires de l'oxygène ne restent pas tout à fait libres, mais qu'ils se lient faiblement à des molécules non décomposées de l'oxygène ordinaire environnant. De tels atomes, qui ne sont que faiblement liés à d'autres molécules, sont tout aussi propres à produire les effets dont il sera question plus bas que des atomes libres. 1866].

atomes restent isolés, et forment l'ozone mêlé à l'oxygène.

Il y a enfin un troisième mode de formation, lorsque l'oxygène est en contact avec du phosphore humide. On pourra peut-être se représenter ce phénomène de cette manière. Tandis que le phosphore se combine avec l'oxygène environnant, un certain nombre des molécules d'oxygène en contact avec lui doivent se décomposer en leurs deux atomes, et il peut se faire que le phosphore ne se combine pas avec tous deux, mais que l'un soit repoussé de sa sphère d'action par le mouvement calorifique, et reste alors isolé. Il est possible qu'il y ait encore ici une circonstance particulière qui agisse. On sait par l'électrolyse que, dans la combinaison d'atomes d'espèces différentes en une molécule, une partie de la molécule est électro-positive, et l'autre électro-négative. Cela a peut-être lieu aussi dans la combinaison de deux atomes de même espèce, comme, par exemple, de deux atomes d'oxygène, en ce que l'un d'entre eux devient électro-positif, et l'autre électro-négatif ¹⁾. Or, comme dans l'oxydation du phosphore, l'oxygène entre nécessairement comme partie constituante négative dans la combinaison, il peut se faire que, des deux atomes d'oxygène qui proviennent d'une même molécule, l'atome négatif soit surtout retenu par le phosphore, et que l'atome positif puisse se mouvoir sans obstacle, ou du moins plus librement. Si celui-ci, dans le cours de ses mouvements et de ses rencontres avec d'autres molécules gazeuses ou avec des parois fixes, perd plus tard son état électro-positif, et devient ainsi plus propre à se combiner avec le phosphore, il ne pourra toutefois pas le faire avant que son mouvement l'ait ramené dans la sphère d'action du phosphore.

1) [Je crois pouvoir rappeler ici que, lorsque j'ai écrit et publié ce Mémoire, il n'était pas encore question, dans les travaux de Schönbein, de deux espèces différentes d'oxygène actif, mais seulement de l'ozone. Ce n'est que dans des travaux qui ont paru plus tard que Schönbein a aussi exprimé l'idée que l'oxygène ordinaire se compose de deux parties constituantes qui se trouvent dans des états différents, et qu'il a appelées ozone et antozone, et désignées par \ominus et \oplus . 1866.]

On sait que, dans l'ozonisation par le phosphore, il se présente quelques phénomènes remarquables; ainsi, de l'oxygène raréfié s'ozonise plus facilement que de l'oxygène plus dense; celui qui est mêlé à de l'hydrogène ou à de l'azote, plus facilement que celui qui est pur. Je crois qu'on peut donner des explications probables, ou du moins plausibles, de plusieurs de ces phénomènes accessoires; mais je ne m'y arrêterai pas ici.

La circonstance mentionnée plus haut comme probable, que, dans la combinaison de deux atomes d'oxygène en une molécule, les deux atomes ont des états électriques opposés, peut aussi servir à expliquer quelques autres phénomènes. Ainsi, le fait que l'ozone formé dans une masse d'oxygène ne disparaît pas de lui-même après un court intervalle de temps par la recombinaison des atomes séparés en molécules, ce fait, disons-nous, s'explique peut-être par cette raison que, après que les atomes libres ont perdu leur état électrique, leur tendance à se réunir est par là même devenue moindre; comme aussi l'oxygène, même quand il est ozonisé, peut être mêlé à l'hydrogène, sans se combiner avec lui ¹⁾.

Lorsqu'on chauffe de l'oxygène ozonisé, l'ozone est détruit. Ceci s'explique peut-être, parce qu'une température élevée, de même qu'elle peut occasionner la combinaison de l'oxygène avec l'hydrogène et d'autres substances oxydables, occasionne aussi la réunion des atomes d'oxygène séparés.

Les expériences de Becquerel et Frémy ont démontré qu'une masse donnée d'oxygène ne peut s'ozoniser qu'à un certain degré, au moyen d'étincelles électriques, lorsque l'ozone reste

1) [Si l'on suppose que les atomes d'oxygène qui constituent l'ozone se sont faiblement liés à des molécules ordinaires d'oxygène, et si l'on admet en même temps que les molécules plus complexes ainsi formées contiennent ces atomes comme parties électro-négatives, et que, par là, ces atomes se trouvent tous dans un même état électrique, on expliquera d'autant plus facilement la faible tendance qu'ont ces atomes à se réunir mutuellement pour former des molécules biatomiques. 1866.]

mêlé à l'oxygène; tandis que, quand l'ozone formé est immédiatement séparé, par exemple, par l'oxydation de l'argent, toute la masse d'oxygène peut être transformée peu à peu en ozone. Ceci témoigne que, quand le gaz renferme déjà un trop grand nombre d'atomes séparés, ceux-ci se combinent de nouveau entre eux; et il peut se faire que les étincelles électriques aient la propriété d'exercer l'effet inverse dans des circonstances différentes, c'est-à-dire de faciliter la réunion des atomes séparés, de même qu'elles peuvent occasionner la combinaison de l'oxygène et de l'hydrogène.

Occupons-nous maintenant de quelques effets de l'ozone. L'effet essentiel, c'est-à-dire la forte oxydation, peut être regardé comme résultant immédiatement de l'explication donnée de l'ozone; car il est clair que des atomes d'oxygène séparés ¹⁾ peuvent plus aisément entrer dans des combinaisons avec des corps étrangers, que des atomes qui sont déjà combinés entre eux, deux à deux, et qui doivent d'abord être séparés de cette combinaison, avant de pouvoir être propres à se combiner avec d'autres substances.

Sous ce rapport, l'ozone est comparable à l'oxygène à l'état naissant, à cela près que, dans le dernier, l'état électrique entre encore en considération. En effet, si l'oxygène est séparé d'une combinaison dans laquelle il était électro-négatif, il entrera aisément, pour un double motif, dans une autre combinaison où il doit aussi être électro-négatif, d'abord parce que les atomes sont encore séparés, et, en second lieu, parce qu'ils ont déjà l'état électrique convenable. Il en résulte que l'oxygène, à l'état naissant, peut, dans certains cas, surpasser même l'ozone en activité.

Un autre effet, voisin du précédent, consiste en ce qu'une lame de platine acquiert une polarisation galvanique lorsqu'on la plonge dans de l'oxygène ozonisé. On sait que les deux électrodes, qui servent à la décomposition galvanique de l'eau, se polarisent par là, de telle sorte qu'elles peuvent

1) [Ou liés seulement faiblement à d'autres molécules. 1866.]

produire par elles-mêmes un courant contraire. On explique ce fait, parce que l'une des électrodes est chargée d'une couche d'hydrogène, et l'autre d'une couche d'oxygène. Avec ce fait concorde également celui-ci, qu'une lame de platine, plongée dans de l'hydrogène, acquiert par là une polarisation positive. Si l'on plonge, au contraire, une lame de platine dans de l'oxygène ordinaire, elle ne se polarise pas négativement, comme on s'y serait peut-être attendu; et il semble ici y avoir une contradiction avec l'explication mentionnée. Je pense toutefois, que l'on peut se rendre raison de cette différence de la manière suivante. Comme une molécule d'eau se compose de deux atomes d'hydrogène et d'un atome d'oxygène, les atomes d'hydrogène, qui forment deux à deux des molécules, de même que ceux de l'oxygène, peuvent entrer en combinaison avec ce dernier, sans abandonner leur réunion mutuelle. Les atomes d'oxygène, au contraire, aussi longtemps qu'ils sont réunis en molécules, ne sont pas propres à se combiner avec l'hydrogène. Par suite, l'oxygène, dans son état ordinaire, ne peut pas produire de polarisation galvanique, mais il acquiert cette propriété par l'ozonisation.

Outre l'action oxydante, l'ozone peut encore, comme Schönbein l'a démontré sur le peroxyde de plomb, exercer l'action opposée de la désoxydation; et l'ozone lui-même est alors transformé en oxygène ordinaire. Comme ce dernier phénomène se passe aussi au contact de l'ozone avec d'autres peroxydes, il paraît naturel de supposer que la désoxydation ne se borne pas au peroxyde de plomb seul. Cet effet peut s'expliquer sans difficulté. Si l'on imagine qu'un oxyde, qui cède facilement son oxygène ou une partie de celui-ci, soit en contact avec un gaz dans lequel se meuvent des atomes séparés d'oxygène¹⁾, qui cherchent à se combiner avec de seconds atomes, ils pourront, lorsqu'ils seront en contact avec l'oxyde, lui enlever les atomes qu'il ne retient que faiblement; cela

1) [Ou des atomes faiblement liés, 1868.]

explique le double effet précédent : la réduction de l'oxyde, et la disparition de l'ozone.

La manière d'être de l'ozone est, sous certains rapports, analogue à celle des peroxydes. Le peroxyde hydrique, par exemple, exerce, comme on sait, une forte action oxydante, en ce qu'il cède facilement son second atome d'oxygène. Mais si l'on met le peroxyde hydrique en contact avec des oxydes de métaux nobles, ou avec certains peroxydes métalliques, il se présente une réduction mutuelle. On peut admettre ici que les atomes d'oxygène, qui se séparent du peroxyde hydrique, se combinent en molécules avec ceux qui se séparent des oxydes ou des peroxydes métalliques.

Ce phénomène fait naître la question de savoir pourquoi les atomes eux-mêmes de l'ozone, ou les atomes facilement séparables d'oxygène qui se trouvent dans un oxyde ou un peroxyde, ne peuvent pas s'unir entre eux aussi facilement que le font les atomes de deux substances différentes. Mais plusieurs circonstances accessoires peuvent ici exercer de l'influence. D'abord, on doit tenir compte de l'état d'aggrégation. Dans un oxyde ou peroxyde métallique solide, les différentes parties sont dans une position invariable, l'une par rapport à l'autre, et l'on peut admettre, par suite, que les atomes d'oxygène ne se mettent pas en contact l'un avec l'autre de la manière nécessaire pour que la combinaison ait lieu. Un corps liquide, au contraire, et ses particules possèdent en même temps la mobilité nécessaire; il en est de même d'un corps gazeux, qui subit en outre une condensation au contact d'un corps solide. En outre, il se peut que l'état électrique égal, dans lequel se trouvent les atomes d'oxygène d'une combinaison déterminée, les rende moins propres à se combiner entre eux qu'avec l'ozone non électrisé, ou avec les atomes d'oxygène d'une autre combinaison dont l'état électrique peut être différent. La conductibilité électrique des substances peut aussi exercer de l'influence, en ce que les modifications de l'état électrique, qui sont nécessaires pour la combinaison, peuvent avoir lieu plus aisément au contact avec des

corps métalliques qu'à l'intérieur de mauvais conducteurs. Peut-être trouverait-on encore d'autres raisons en réponse à la question posée plus haut ; mais celles qui précèdent suffiront à montrer combien d'influences peuvent agir ici simultanément, et combien, par suite, on doit peu s'attendre à trouver une loi simple, qui soit valable dans tous les cas.

[La première publication de ce petit Mémoire se terminait par une remarque sur des recherches faites par Andrews et Tait sur la densité de l'ozone. Je croyais alors qu'il y avait une contradiction entre le résultat de ces recherches et mon explication de l'ozone ; mais j'ai reconnu plus tard que cette contradiction n'existe qu'en apparence, parce qu'elle ne se rapporte pas à l'essence de mon explication, mais seulement à un point accessoire peu important. Mon explication dit que, dans l'oxygène ordinaire, chaque molécule est composée de deux atomes, mais que l'ozone consiste en atomes qui se sont séparés de cette combinaison binaire, et qui, par cette raison, sont plus propres à entrer dans d'autres combinaisons que les atomes de l'oxygène ordinaire. Mais l'essence de cette explication n'exige pas que les atomes, qui se sont séparés de leur combinaison binaire, restent parfaitement libres. Il est bien possible, comme je l'ai déjà dit en note (page 292), que ces atomes se lient aux molécules de l'oxygène ordinaire environnant, et qu'ils forment avec ceux-ci des molécules d'une composition plus compliquée. Il est seulement nécessaire, dans ce cas, de supposer que ces atomes, qui se sont combinés avec les molécules de l'oxygène ordinaire, y sont liés avec une force moindre que celle avec laquelle les deux atomes qui forment une molécule de l'oxygène ordinaire sont liés l'un à l'autre. Il est clair que des atomes faiblement liés sont plus propres à entrer dans d'autres combinaisons que des atomes fortement liés, et que, par conséquent, l'oxygène qui contient un certain nombre d'atomes faiblement liés doit être plus oxydant que l'oxygène ordinaire. Les propriétés désoxydantes de l'ozone s'expliquent de même tout aussi facilement par la supposition d'atomes faiblement liés que par la supposition d'atomes libres.]

Les recherches déjà citées de MM. Andrews et Tait sur la densité de l'ozone (auxquelles ces physiiciens habiles ont ajouté encore d'autres expériences plus nouvelles), et les recherches exécutées avec beaucoup de soin par Von Babo et par Soret, ont montré que l'oxygène chargé d'ozone est plus dense que l'oxygène ordinaire ; d'où il suit que l'oxygène chargé d'ozone contient des molécules plus compliquées que les molécules de l'oxygène ordinaire. Les recherches de Soret me semblent être les plus complètes sur ce sujet, et ce physicien exercé et zélé, auquel on est redevable de tant d'éclaircissements sur la manière dont se comporte l'ozone, a trouvé une densité qui est $\frac{3}{2}$ fois plus grande que celle de l'oxygène ordinaire. On peut en conclure que les atomes qui forment l'ozone ne restent pas parfaitement libres, mais que chacun de ces atomes se lie à l'une des molécules de l'oxygène ordinaire environnant et en fait une molécule triatomique.

M. Soret lui-même a constaté que le résultat de ses recherches concorde avec la partie essentielle de mon explication de l'ozone ; car il dit à la fin de son premier Mémoire sur ce sujet (*Archives des sciences physiques et naturelles*, t. XVIII) : « Pour terminer, je dirai quelques mots de la théorie de M. Clausius. Partant de l'idée que la molécule d'oxygène ordinaire est composée de deux atomes, il explique la formation de l'ozone par la dissociation de ces atomes ; l'ozone serait donc formé d'atomes libres et isolés. Nous avons vu dit M. Clausius l'avait lui-même reconnu, que ce dernier point n'est pas compatible avec les phénomènes découverts par MM. Andrews et Tait. Mais, pour mettre l'hypothèse de M. Clausius en accord avec les faits, il suffit d'ajouter que ces atomes, au moment où ils sont mis en liberté, se combinent immédiatement avec les molécules d'oxygène qui ne sont pas dissociées. Les raisonnements de M. Clausius ne paraissent pas ébranlés par cette addition, et sa théorie coïncide alors avec celle que nous avons développée. » 1868.]

TABLE DES MATIÈRES

Mémoires sur l'application de la théorie mécanique de la chaleur aux phénomènes électriques

INTRODUCTION A LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLECTRICITÉ.....	3-44
La fonction potentielle.....	3
Détermination des forces au moyen de la fonction potentielle...	7
Équation différentielle du deuxième ordre qui détermine la répartition de l'agent actif dans l'espace.....	9
Application des équations précédentes à l'électricité.....	10
Équation différentielle qui détermine la répartition de l'agent actif sur une surface.....	12
Disposition de l'électricité sur une sphère, sur un ellipsoïde et sur un plateau elliptique très-mince.....	14
Analyse de la bouteille de Leyde, du carreau de Franklin et du condensateur d'après Green.....	19
Insuffisance de cette analyse, et introduction d'un théorème destiné à la compléter.....	25
Relation entre les niveaux potentiels et les quantités d'électricité de deux corps conducteurs quelconques soumis à leur influence mutuelle.....	29
Relation entre les niveaux potentiels et les quantités d'électricité des deux armatures d'une bouteille de Leyde.....	31
Démonstration du théorème général dont on a fait usage.....	38

MÉMOIRE X.

SUR L'ÉQUIVALENT MÉCANIQUE D'UNE DÉCHARGE ÉLECTRIQUE, ET L'ÉCHAUFFEMENT QU'ELLE PRODUIT DANS LE FIL CONDUCTEUR..	45-85
Objet du Mémoire.....	45
Équation qui exprime le principe de l'équivalence de la force vive et du travail.....	46

Expression du travail mécanique dans des circonstances particulières.....	48
Application aux forces électriques.....	50
Théorème fondamental sur les effets d'une décharge électrique.....	53
Détermination de la fonction potentielle et du potentiel pour une bouteille de Leyde ou une batterie chargée.....	54
Travail effectué par les forces électriques pendant la décharge.....	60
Production de chaleur dans certaines parties du circuit, et sa dépendance vis-à-vis des autres parties de ce circuit.....	61
Travail consommé par l'étincelle.....	64
Dépendance de la production de chaleur vis-à-vis de la quantité d'électricité et de la grandeur de la batterie.....	69
Décharge incomplète d'une batterie.....	71
Équations pour le cas d'une batterie en cascade.....	74
Batterie en cascade formée de deux batteries de différentes grandeurs.....	77
Batterie en cascade formée de plusieurs batteries de même grandeur.....	81
Remarque finale.....	85

ADDITION AU MÉMOIRE X.

<i>Sur le changement d'état intérieur qui a lieu pendant la charge dans la couche isolante d'un carreau de Franklin ou d'une bouteille de Leyde, et sur l'influence de ce changement sur les phénomènes de la décharge.....</i>	86-113
Changements d'état qui peuvent avoir lieu dans le verre.....	86
Polarité des particules isolées du verre.....	88
Pénétration de l'électricité dans le verre.....	90
Choix d'une hypothèse pour l'analyse mathématique.....	92
Équation générale d'après Poisson et Green, et transformation de celle-ci.....	93
Application de l'équation à un carreau de Franklin à armatures circulaires.....	97
Équations simplifiées qui conviennent à un carreau de Franklin ou à une bouteille de Leyde quelconque.....	103
Modifications qui ont lieu dans l'état de la bouteille pendant les décharges successives et après celles-ci.....	104
Potentiel de la quantité totale d'électricité sur elle-même pendant les différents états successifs.....	106
Décomposition du potentiel total en différentes parties.....	107
Changements du potentiel pendant les décharges et après celles-	

ci, et travail qui en résulte à l'extérieur et à l'intérieur du verre.....	109
Remarque finale.....	113

MÉMOIRE XI.

SUR LE TRAVAIL PRODUIT ET LA CHALEUR ENGENDRÉE DANS LE CONDUCTEUR PAR UN COURANT ÉLECTRIQUE STATIONNAIRE.....	114-125
Détermination du cas à considérer.....	114
Expression de la loi d'Ohm suivant la manière de voir de Kirchhoff.....	115
Preuve que l'électricité séparée ne se trouve qu'à la surface du conducteur.....	117
Théorème sur le travail effectué par la force électrique pendant un courant stationnaire.....	121
Équation pour la détermination du travail effectué dans un espace donné.....	122
Équation pour la détermination de la chaleur produite dans un espace donné.....	123
Application des équations précédentes à la forme la plus ordinaire du conducteur.....	124

MÉMOIRE XII.

SUR L'APPLICATION DE LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR AUX PHÉNOMÈNES THERMO-ÉLECTRIQUES.....	126-155
Manière d'être de l'électricité à la surface de contact de deux métaux, différence de niveau potentiel.....	126
Manière de voir de Helmholtz sur la cause de cette différence de niveau potentiel.....	128
La différence de niveau potentiel est un effet de la chaleur....	129
Explication du phénomène observé par Peltier.....	131
Différence de tension électrique observée entre les métaux.....	134
Équations pour la détermination du travail effectué et de la chaleur produite.....	136
Étude de la chaîne thermo-électrique en général, détermination de l'intensité du courant ainsi que du travail effectué et de la chaleur produite dans les différentes parties.....	138
Comparaison de la chaîne thermo-électrique avec une machine thermo-dynamique.....	141
Application du second principe fondamental de la théorie mécanique de la chaleur à la chaîne thermo-électrique.....	142

Équation qui exprime la dépendance entre la différence de niveau potentiel et la température.....	147
Comparaison de ce résultat avec l'expérience.....	148
Écarts qui se manifestent dans certains cas.....	150
Explication de ces écarts par des modifications de l'état moléculaire.....	151
Remarque finale.....	154

MÉMOIRE XIII.

SUR LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DANS LES ÉLECTROLYTES..	156-177
Le travail effectué par la force électrique et la production de chaleur qui en résulte peuvent se déterminer dans un électrolyte de la même manière que dans un conducteur de première classe.....	156
Considération plus particulière de la conductibilité à l'intérieur d'un électrolyte.....	159
Conditions qui doivent être regardées comme remplies dans ce cas.....	160
Difficulté qui surgit dans cette étude.....	163
Nouvelle hypothèse sur la manière d'être des fluides composés..	165
Explication de la conductibilité électrique par cette manière d'être.....	167
Idées exprimées par Williamson.....	170
Production simultanée de l'autre espèce de conductibilité électrique.....	171
Transport du liquide dans la direction du courant positif.....	172
Production de travail et de chaleur par ce transport.....	174
Notice sur la relation qui existe entre l'action chimique qui a lieu dans une pile voltaïque et les effets produits par le courant.	178
NOTICE sur l'accroissement de la résistance à la conductibilité électrique des métaux simples avec la température.....	181

MÉMOIRES SUR LES MOUVEMENTS MOLÉCULAIRES ADMIS POUR L'EXPLICATION DE LA CHALEUR.

MÉMOIRE XIV.

SUR LA NATURE DU MOUVEMENT AUQUEL NOUS DONNONS LE NOM DE CHALEUR.....	185-216
Idées exprimées par différents auteurs sur l'état gazeux.....	185
Complément aux idées exprimées sur ces mouvements.....	187
Il existe un rapport déterminé entre les différents mouvements.	188
Explication de la force expansive des gaz, et conclusions qui en découlent.....	189
Raisons pour lesquelles les gaz n'obéissent pas exactement aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac.....	191
Manière d'être des molécules dans les trois états d'agrégation..	192
Vaporisation.....	194
Production et consommation de chaleur dans les changements de l'état d'agrégation.....	197
Rapports de volume des gaz simples et des gaz composés.....	199
Recherches mathématiques pour déduire du mouvement moléculaire l'expression qui représente la force expansive du gaz..	204
Vitesse des molécules.....	212
Rapport entre la force vive du mouvement de translation et la force vive totale existante dans le gaz.....	213

MÉMOIRE XV.

SUR LES LONGUEURS MOYENNES DES CHEMINS QUI SONT PARCOURUS PAR LES MOLÉCULES DANS LE MOUVEMENT MOLÉCULAIRE DES CORPS GAZEUX.....	217-234
Objections de Buys-Ballot contre l'idée développée dans le Mémoire précédent sur l'état gazeux.....	217
Remarques sur les forces moléculaires, et notion de la sphère d'action.....	219
Relation entre le cas où une seule molécule se meut, tandis que les autres sont en repos, et le cas où elles se meuvent toutes.	221
Probabilité qu'une molécule en rencontre une autre sur un certain parcours.....	224
Expression des longueurs moyennes de chemin, et relation entre celles-ci et le rayon des sphères d'action.....	223
Exemple numérique.....	231

Rapport entre les différents chemins réellement parcourus et les longueurs moyennes de chemin.....	232
Manière d'être extérieurement perceptible des gaz.....	233

MÉMOIRE XVI.

SUR LA CONDUCTIBILITÉ DES CORPS GAZEUX POUR LA CHALEUR. 235-290	
Remarques préliminaires.....	235
Détermination du cas à considérer.....	236
Mouvement des molécules émises par une couche infiniment mince.....	239
Mouvement des molécules qui se trouvent simultanément dans une couche infiniment mince.....	249
Mouvement des molécules qui traversent un plan donné pendant l'unité de temps.....	259
Relation entre les molécules qui se trouvent simultanément dans une couche, et celles qui sont émises par cette couche.....	266
Résultats définitifs.....	279

MÉMOIRE XVII.

SUR LA NATURE DE L'OZONE.....	291-299
Observation de Schönbein.....	291
Hypothèse sur la nature de l'ozone.....	291
Modes de production de l'ozone.....	292
États électriques opposés des deux atômes d'une molécule d'oxygène ordinaire.....	293
Reconversion de l'ozone en oxygène ordinaire.....	294
Effet oxydant de l'ozone.....	295
Effet désoxydant de l'ozone.....	296
Comparaison de l'ozone avec l'oxygène faiblement lié dans les peroxydes.....	297
Adaptation de l'explication précédente aux résultats des nouvelles expériences sur l'ozone.....	298

FIN DE LA TABLE.

ERRATA

PREMIER VOLUME.

- Page XII, lignes 20 et 21, au lieu de t , lisez : t_1 .
- Page 3, ligne 7, dans les coefficients différentiels $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, les d droits doivent être remplacés par des d ronds.
- Page 4, dernière ligne, au lieu de $\frac{dz}{dx}$, lisez : $\frac{dz}{dx}$.
- Pages 348 et suivantes, partout où se trouvent les signes ds_a , ds_b et ds_c , lisez : ds_a , ds_b et ds_c .
- Page 394, ligne 12, au lieu de $\left(\frac{dv}{dT}\right)^2$, lisez : $\left(\frac{dv}{dT}\right)^2$.

SECOND VOLUME.

- Page 56, dernière ligne, au lieu de $\frac{1}{2} \int \int \frac{dq dq'}{r}$, lisez : $\frac{1}{2} \int \int \frac{dq dq'}{r}$.
- Page 72, dernière ligne, au lieu de $\frac{1}{2} \frac{k^2 s'}{s} Q^2$, lisez : $\frac{1}{2} \frac{k^2 s'}{s} Q^2$.
- Page 101, ligne 3, au lieu de $\frac{c}{\frac{1}{2}a}$, lisez : $\frac{1}{2} \frac{c}{a}$.
- Page 109, ligne 3, au lieu de ${}_1W$, lisez : ${}_1W_1$.
- Page 122, ligne 18, au lieu de $= k \frac{dV}{dN}$, lisez : $i = k \frac{dV}{dN}$.
- Page 147, ligne 6, au lieu de $\frac{\int \Lambda dt}{E = \varepsilon \cdot e}$, lisez : $E = \varepsilon \cdot e \int \frac{\Lambda dt}{c}$.
- Page 224, ligne 15, au lieu de φd , lisez : $d\varphi$.
- Page 224, ligne 17, au lieu de $(u^2 + v^2 + 2uv)^{\frac{3}{2}}$, lisez :

$$(u^2 + v^2 + 2uv)^{\frac{3}{2}}$$

- Page 230, ligne 9, et page 231, ligne 7, au lieu de $\frac{\lambda^3}{\frac{3}{4}\pi\rho^3}$, lisez :

$$\frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}$$

EUGÈNE LACROIX, ÉDITEUR

PARIS, 54, RUE DES SAINTS-PÈRES

EXTRAIT DU CATALOGUE : PHYSIQUE — CHIMIE

- BLANCHÈRE (H. DE LA), peintre et photographe, délégué à l'Exposition universelle de Londres de 1862. **Répertoire encyclopédique de photographie**, comprenant, par ordre alphabétique, tout ce qui a paru et paraît en France et à l'étranger depuis la découverte, par Niepce et Daguerre, de l'art d'imprimer au moyen de la lumière, et les notions de chimie, physique et perspective qui s'y rapportent. Partie non périodique. 2 vol. in-8, ensemble 1000 p., nombreux bois dans le texte. Paris. Partie périodique. 1 vol. in-8. Les trois volumes. 18 fr.
- BLAVIER (E.-E.). **Nouveau traité de télégraphie électrique**. Cours théorique et pratique. Cet ouvrage est sans contredit le plus recommandable et le seul complet qui ait été publié sur la matière. Il a été adopté dès son début par tous les employés des lignes télégraphiques, et il s'en prépare plusieurs traductions en langues étrangères. Il forme 2 vol. grand in-8 d'environ 500 pages chacun, illustrés de près de 6,000 bois. Prix des 2 vol. 20 fr.
- BRETON et BEAU DE ROCHAS. **Théorie mécanique des télégraphes sous-marins**. In-8. 3 fr.
- CASTRO (Manuel Fernandez de), ingénieur en chef de première classe du corps royal des mines d'Espagne. **L'Électricité et les Chemins de fer**, description et examen de tous les systèmes proposés pour éviter les accidents sur les chemins de fer, au moyen de l'électricité, précédé d'un résumé historique élémentaire de cette science et de ses principales applications; publié par ordre du gouvernement espagnol. 2 vol. in-8, 1160 p., ornés de 351 bois intercalés dans le texte. 16 fr.
- CHAPPE (l'ainé). **Histoire de la télégraphie**. Nouvelle édition, précédée de l'origine du télégraphe Chappe, et observations sur la possibilité de remplacer le télégraphe aérien par un télégraphe acoustique. 1 vol. in-8, 270 p. et atlas in-4 de 34 pl. 12 fr.
- CHEVREUL (E.). **Théorie des effets optiques** que présentent les étoffes de soie. 1 vol. in-8, 208 p. 5 fr.
- COIGNET. **Mémoire sur les allumettes chimiques**, adressé à la commission des prix Montyon pour les arts insalubres. In-4, 39 p. 1 fr.
- DELAMARCHE (A.). **Éléments de télégraphie sous-marine**. Première partie: route à suivre; construction du câble, difficultés électriques; construction du câble, difficultés mécaniques; émission du câble. — Deuxième partie: pose du câble transatlantique entre l'Irlande et Terre-Neuve. Broch. grand in-8 de 83 p. 2 fr.
- Domitor**, compteur de l'air. **Acérost dirigéable**, objet d'une demande de brevet. Broch. in-8, 28 p. 2 fr. 50

- DU MONCEL (le vicomte T. M.). **Exposé des applications de l'électricité**. 5 vol. in-8. Deuxième édition. 46 fr.
- Tome I, NOTIONS TECHNOLOGIQUES. 8 fr.
- Tome II, APPLICATIONS MÉCANIQUES DE L'ÉLECTRICITÉ. 10 fr.
- Tome III, APPLICATIONS MÉCANIQUES, PHYSIQUES ET PHYSIOLOGIQUES. 8 fr.
- Tome IV, Revue des découvertes faites en 1857 et 1858. 10 fr.
- Tome V, Revue des découvertes faites en 1859, 1860, 1861 et 1862. 10 fr.

M. du Moncel s'est attaché à écarter de son exposé toutes les questions théoriques pour insister plus particulièrement sur les détails pratiques et d'exécution. Son ouvrage est écrit principalement en vue des mécaniciens, des industriels et surtout des inventeurs.

- **Notice sur l'appareil d'induction électrique** de Ruhmkorff et les expériences que l'on peut faire avec cet instrument. 4^e édit. In-8. 7 fr. 50
- **Considérations nouvelles sur l'électro-magnétisme** et ses applications aux électro-moteurs et à l'anémographie électrique. In-8. 3 fr.
- **Théorie de la perspective apparente**, suivie d'une notice sur l'art lithographique. Deuxième édition. In-8. 2 fr.
- **Mémoires sur les anémomètres** à indications continues établis près Cherbourg. In-8. 1 fr. 50
- **Recherches sur les constantes des piles voltaïques**. In-8, 20 p.
- **Étude du magnétisme et de l'électro-magnétisme** au point de vue de la construction des électro-aimants. In-8, 272 fig. et pl. 5 fr.
- **Recherches sur la non-homogénéité de l'étincelle d'induction**. In-8, 119 p., figures intercalées dans le texte. 2 fr. 50
- **Notice sur l'appareil d'induction électrique** de Ruhmkorff. 4^e édit. In-8, x-400 p. 7 fr. 50
- **Études des lois des courants électriques** au point de vue des applications électriques. In-8, x-201 p. 4 fr.
- **Mémoire sur les courants induits** des machines magnéto-électriques. Broch. in-8, 33 p. 1 fr. 50
- **Télégraphie électrique**. 156 figures dans le texte et 3 pl. In-8, xxvi-613 p. 10 fr.
- DUPASQUIER (ALPH.). **Traité élémentaire de chimie industrielle**. 1 vol. in-8, 742 p. 9 fr.
- Éther (L'), l'électricité et la matière**. 2^e édition de Quere et invenies (physique, théologie, tables parlantes et réformes). 1 vol. in-8, 352 p. 5 fr.
- FORTHOMME (C.). **Traité élémentaire de physique expérimentale et appliquée**. 2 vol. in-18, 1060 p. 21 pl. Chaque volume. 5 fr.
- FRANCK DE PRÉAUNONT (E.). **Manuel pratique d'essai par la voie sèche**, à l'usage des essayeurs. 1 vol. in-18, 140 p. et 1 pl. 2 fr. 50
- GAULTIER DE CLAUDRY et CH. MARTIN. **Répertoire de chimie, de physique et d'applications aux arts**, contenant les traductions ou extraits des travaux qui se publient sur ces matières dans

les pays étrangers, et de plus un résumé rapide des mémoires parus en France. 5 vol. in-8, avec planches. 40 fr.

GERSPACH (E.). Histoire administrative de la **télégraphie aérienne** en France. In-8, 120 p. 3 fr. 50

GIUSEPPE SELLA (V.). **Plico del fotografo**, ovvero arte pratica e teorica. 1 vol. in-8, 415 p. 10 fr.

GUYOT (JULES). **De la télégraphie de jour et de nuit**. 1 vol. in-8, 239 p. et pl. 5 fr.

HERBLAND (ACHILLE). **Précis du cours de chimie usuelle**, professé aux sections d'infanterie et de cavalerie à l'École militaire de Belgique. 1 vol. in-12, 592 p. et pl. 7 fr.

LIEBIG. Guide pour l'**Introduction à l'étude de la chimie**, contenant les principes généraux de cette science, les proportions chimiques, la théorie atomique, le rapport des poids atomiques avec le volume des corps, l'isomorphisme, les usages des poids atomiques et des formules chimiques, les combinaisons isomériques des corps catalytiques, etc., accompagné de considérations détaillées sur les acides, les bases et les sels; traduit de l'allemand par Ch. Ghérard, augmenté d'une table alphabétique des matières présentant les définitions techniques et les relations des corps. 1 vol., 248 pages. 2 fr. 50

Bibliothèque des professions industrielles et agricoles, série B, n° 11.

— **Instruction sur l'analyse des corps organiques**; traduit de l'allemand par A. Schmersahl. Broch. in-8, 44 p., 1 tabl. et 2 pl. 2 fr.

LOUYET (P.), professeur de chimie à l'École centrale d'industrie et de commerce de Bruxelles. **Cours élémentaire de chimie générale, inorganique, théorique et pratique**, à l'usage des universités et des écoles industrielles. 3 vol. in-8, ensemble 2039 p. et 3 pl. 24 fr.

LOVE (G.-H.). Essai sur l'identité des agents qui produisent le **son**, la **chaleur**, la **lumière**, l'**électricité**, etc. 1 vol. in-8, 296 p. 6 fr.

Dans cette étude, M. Love, — il le déclare dans sa préface, — s'est laissé guider par la sensation en s'efforçant d'analyser correctement les idées reçues: son essai part de la notion de la matière que nous recevons par les sens pour arriver à celle de Dieu, en expliquant dans l'intervalle les phénomènes les plus importants de la physique, de la chimie, de la physiologie et de la psychologie.

MARTIN, DE VERVINS (ÉMILE). **Nouvelle école électro-chimique**, ou Chimie des corps pondérables et impondérables, découverte des véritables corps simples et d'une théorie chimique générale à l'aide de laquelle les actions chimiques et électro-chimiques sont dévoilées, la science agrandie et simplifiée. 1 vol. in-8, 487 p. 7 fr. 50

L'auteur expose que la chimie, telle qu'on l'enseigne, manque, comme science, d'un but essentiel; elle n'a pas de théorie générale. C'est cette chimie générale que M. Martin veut produire dans ses principes et dans ses applications.

— **L'atomisme opposé au dynamisme** dans la solution des grandes questions de chimie et de physique. 1 vol. in-8, 228 p. 5 fr.

— **Protestation contre les théories dynamiques idéales** proclamées dans le cours de physique. In-8, 32 p. 50 c.

MATTEUCCI (CARLO). **Manuale de telegrafia elettrica**. 1 vol. in-18, 394 p. et 6 pl. 6 fr.

MIÈGE (B.), directeur de station de lignes télégraphiques. **Guide pratique de télégraphie électrique**, ou *Vade-mecum* pratique à l'usage des employés des lignes télégraphiques, suivi du programme des connaissances exigées pour être admis au surnuméraire dans l'administration des lignes télégraphiques. xi-148 pages, avec figures dans le texte. 3 fr.

Bibliothèque des professions industrielles et agricoles, série B, n° 4.

— **Notions élémentaires de physique et de chimie**. 1 vol. in-12, 239 p., orné de 150 grav. sur bois. 2 fr. 50

NICKLÈS (J.), professeur de chimie à la Faculté des sciences de Nancy. — **Les électro-aimants et l'adhérence magnétique**. 1 vol. in-8, 10 p. et 5 pl. in-8. 5 fr.

OLIVIER (J.). **Traité de magnétisme**, suivi des paroles d'un somnambule et d'un recueil de traitements magnétiques. 1 vol. in-8, 521 p. 9 fr.

PÉCLET. **Traité de la chaleur** considérée dans ses applications. 2^e édit. 2 vol. in-4 et atlas in-folio. (*Rare.*) 60 fr.

POURIAU (A.-F.), docteur ès sciences. **Éléments des sciences physiques** appliquées à l'agriculture. 1 vol. in-12 de 512 p. et 153 fig. dans le texte. 6 fr.

Chimie inorganique, suivie de l'étude des marnes, des eaux, etc. 1 vol. in-12 de 541 p., avec bon nombre de fig. dans le texte. 6 fr.

RAMBOSSON (J.). **La science populaire**, ou Revue du progrès des connaissances et de leurs applications aux arts et à l'industrie. Paraît annuellement depuis 1863 en un volume in-12, avec gravures. Prix de l'année ou volume. 3 fr. 50

SAIGEY. **Annales télégraphiques**, publiées sous le patronage de M. le Directeur général des lignes télégraphiques. 1 vol. in-8, avec figures dans le texte. 10 fr.

VIOLETTE (J. M. H.), commissaire des poudres et salpêtres. **Nouvelles manipulations chimiques simplifiées**, ou Laboratoire économique de l'étudiant; ouvrage contenant la description d'appareils simples et nouveaux, suivi d'un Cours de **Chimie pratique** à l'aide de ces instruments. 3^e édition, considérablement augmentée, avec 30 tableaux et 200 fig. dans le texte. 1 vol. in-8, 476 p. 7 fr. 50

Comme son titre l'indique, cet ouvrage s'adresse aux étudiants; il a pour but de faciliter l'étude de la chimie en donnant le moyen de manipuler avec économie de temps et d'argent. L'étudiant pourra manipuler chez lui, sur sa table, avec des fioles, des tubes, des lampes et une foule de petits appareils construits par lui et à l'aide desquels il pourra reconnaître et étudier les propriétés des corps.

VIOLETTE et ARCHAMBAULT (P. J.), professeur. **Dictionnaire des analyses chimiques**, ou Répertoire alphabétique des analyses de tous les corps naturels et artificiels. Second tirage, augmenté de 400 analyses nouvelles. 2 vol. in-8, ensemble 1032 p. 12 fr.

Ce recueil contient l'ensemble des analyses de toutes les substances que les

savants et les industriels ont intérêt à bien connaître. L'ingénieur, le médecin, le pharmacien, le manufacturier, l'agriculteur, trouveront dans ce dictionnaire tous les documents qui les intéressent, et auront ainsi l'avantage de trouver réunis dans un seul ouvrage les résultats qu'il faudrait chercher dans un grand nombre de livres spéciaux.

WILL (le docteur H.). Guide pratique d'analyse qualitative, instruction pratique à l'usage des laboratoires de chimie; traduit de l'allemand par M. le docteur G.-W. Bichon, traducteur des lettres de M. Justus Liebig sur la chimie, et auteur de plusieurs travaux sur cette science. 1 vol., 248 p. 1 fr. 50
Bibliothèque des professions industrielles et agricoles, série B, no 9.

Annales du Génie civil, et Recueil de mémoires sur les mathématiques pures et appliquées, les ponts et chaussées, les routes et chemins de fer, les constructions et la navigation maritime et fluviale, l'architecture, les mines, la métallurgie, la chimie, la physique, les arts mécaniques, l'économie industrielle, le génie rural; revue descriptive de l'industrie française et étrangère; publiées par une réunion d'ingénieurs, d'architectes et d'anciens élèves de l'Ecole centrale et des Ecoles d'arts et métiers, avec le concours d'ingénieurs et de savants étrangers.

Les *Annales du Génie civil* paraissent mensuellement depuis le 1^{er} janvier 1862, par cahier de 4 à 5 feuilles grand in-8^o, avec figures dans le texte et 4 ou 5 pl. grand in-8^o double.

Prix de l'abonnement, 20 francs par an. — Les numéros séparés, 4 francs. Les années écoulées, 1 fort vol. d'environ 900 pages, avec figures dans le texte et un atlas de 40 planches in-fol. et in-4^o, prises séparément, 25 francs. *Il ne reste plus que quelques exemplaires de la 2^e année.*

Les *Annales du Génie civil*, destinées à tenir tous les hommes spéciaux au courant des progrès théoriques et pratiques, ont obtenu très-rapidement un succès légitimement acquis; depuis qu'elles paraissent, il ne s'est présenté aucune question importante dans les sciences appliquées qui n'ait été traitée par des hommes compétents dans ce recueil qui se trouve aujourd'hui dans la bibliothèque de tous les ingénieurs et de tous les industriels.

ANSIAUX (LUCIEN) et MASON (LAMBERT). Traité pratique de la fabrication du fer et de l'acier puddlé, comprenant les applications de ces matières à la confection des différents échantillons livrables au commerce. 1 vol. in-8 de 282 p. et un atlas in-4 de 28 pl. 10 fr.

CERFBERR DE MEDELSHEIM (A.). De l'état actuel de la métallurgie en Europe. Houille, bois, industrie métallurgique, fonte, fer, plomb, zinc, machines, armes, etc. 1 vol. in-8, 447 p. 6 fr.

M. Cerfberr, pendant une excursion dans le nord de la France, en Belgique, en Prusse, a visité successivement les forges, les fonderies, les mines, les usines de toute espèce, s'enquérant des quantités produites, des débouchés, des prix de revient et de vente, etc. C'est le résultat de cette enquête qui forme le fond de ce volume, où les aperçus statistiques sont entremêlés de notes de voyages concernant diverses autres questions.

BIBLIOTHÈQUE LACROIX

(BIBLIOTHÈQUE DES PROFESSIONS INDUSTRIELLES ET AGRICOLES)

Depuis quarante-deux ans que notre maison est fondée, nos prédécesseurs ont publié et nous continuons à publier des ouvrages sur les sciences appliquées à l'industrie, aux arts et métiers, à l'agriculture. L'ensemble de ces publications forme une collection très-variée: donc, nous avons créé par le fait une *Bibliothèque des professions industrielles et agricoles*. Mais l'étendue de quelques-uns de ces ouvrages, l'enseignement plus ou moins scientifique ou plus particulièrement pratique qu'ils contiennent, la forme typographique, différente pour le plus grand nombre, et enfin le prix élevé de quelques-uns ne permettaient pas de les comprendre par séries dans une encyclopédie accessible, par la forme, par le fond et par le prix, aux personnes qui ont le plus souvent besoin d'indications pratiques sur la profession dont elles font l'apprentissage, ou dans laquelle elles veulent devenir plus intelligemment habiles.

A ces personnes, dont le nombre est très-grand, il faut des *guides pratiques* exacts, d'un format commode, d'un prix modéré, rédigés avec clarté et méthode, comme est clair et méthodique l'enseignement direct du professeur à l'élève ou celui du maître à l'apprenti. Telle a été notre pensée en commençant, en 1863, la publication de la *Bibliothèque des professions industrielles et agricoles*.

Nous atteindrons le but que nous nous sommes proposé, nous en avons aujourd'hui l'assurance par la vente soutenue des séries déjà publiées, par le nombre et le mérite, soit comme savants, soit comme praticiens, des collaborateurs acquis à l'œuvre, et par les adhésions qui nous arrivent de tous côtés et sous toutes les formes.

Notre publication s'adresse à l'ingénieur, à l'industriel, à l'ouvrier mécanicien dans chacune des professions spéciales, à l'artisan de tous les métiers, à l'instituteur, à l'agriculteur; certaines séries conviennent à l'homme du monde

qui désire satisfaire utilement sa curiosité, ou qui veut augmenter les notions déjà acquises, par des connaissances particulières sur les professions qui procurent à la société entière les éléments du bien-être matériel, base indispensable du progrès moral.

C'est donc à un très-grand nombre, de lecteurs ou plutôt de travailleurs que nous offrons un concours efficace pour l'étude et les applications des questions d'utilité privée ou publique. Nous leur faisons un appel direct, en leur rappelant qu'il n'y a possibilité d'abaisser le prix de vente d'un livre qu'à condition de pouvoir imprimer ce livre à un très-grand nombre d'exemplaires, en prévision d'un grand nombre d'acheteurs : en effet, les premières dépenses, c'est-à-dire la gravure des bois et des planches, la composition typographique du texte et le travail de l'auteur sont les mêmes pour un exemplaire que pour mille... dix mille, etc. Dans l'espoir que le nombre des adhérents à notre œuvre ne cessera pas d'augmenter, — que rédacteurs et souscripteurs nous prêteront leur appui, de plus en plus efficace, — nous continuerons à publier les volumes annoncés, le plus promptement qu'il nous sera possible.

Le prix de vente de chacun d'eux sera fixé d'après le chiffre des frais occasionnés par sa fabrication.

Cette Bibliothèque est composée de **Neuf Séries**, qui se subdivisent comme suit :

SÉRIE A. — Sciences exactes	9 vol.
• B. — Sciences d'observation	21 »
• C. — Constructions civiles	29 »
• D. — Mines et Métallurgie	20 »
• E. — Machines motrices	6 »
• F. — Professions militaires et maritimes	9 »
• G. — Professions industrielles	67 »
• H. — Agriculture, Jardinage, etc.	37 »
• I. — Economie domestique, Comptabilité, Législation, Mélanges	26 »

Les volumes et les atlas de cette collection sont publiés dans le format grand in-13.

CATALOGUE DE LA BIBLIOTHÈQUE

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

DES NOMS D'AUTEURS

POUR LES VOLUMES DÉJÀ PUBLIÉS.

Pages.	Pages.
Barbot. Joaillerie.	24
Basset. Chimie agricole.	28
— Culture et Alcoolisation de la Betterave	20
Bichon. Analyse qualitative.	11
Biot. Plans et nivellements.	14
— Routes et chemins.	14
— Ponts et aqueducs.	14
— Constructions en général.	14
Bona. Jardins d'agrément.	31
— Constructions rurales.	33
— Préparation et tissage des étoffes.	21
Bouneau. Constructions à la mer.	15
Bourgoin d'Orli. Culture du caféier et du cacaoyer.	32
— Culture de la canne à sucre.	33
Brun. Fraudes et maladies du vin.	12
Cailletet. Huiles, essais et dosage	26
Carbonnier. Pisciculture.	29
Château. Corps gras industriels.	22
Chauvac de la Place. Chemins de fer (courbes de raccordement).	14
Chevalier. Photographie.	11
Clater. Maladies du chien.	30
Clausius. Théorie mécanique de la chaleur.	11
Courtois-Gérard. Jardinage.	31
Courtois-Gérard. Culture maraîchère.	30
Demanet. Maçonnerie.	14
— (fils). Exploitation de la houille.	11
Dessoye. Acier.	17
Dinée. Engrenages.	19
Doneaud. Droit maritime.	20
Drapiez. Minéralogie.	18
Dromart. Pin maritime.	22
Dubief. Liqueurs.	26
— Vins factices.	35
— Féculier.	25
Dubos. Choix des vaches laitières.	92
Dufrené. Droits des inventeurs, brevets	35
Emion. Chemins de fer (exploitation).	15
— 1° Voyageurs et bagages.	15
— 2° Marchandises.	15
— Expropriations.	36
— Courtage des marchandises	35
Fairbairn. Métallurgie du fer	16
Flamm. Appareils économiques de chauffage	23
Fleury-Lacoste. Vigneron.	31
Folie. Théorie mécanique de la chaleur.	11
Fraiche. Ostréiculture.	33
Garnault. Electricité.	13
Gayot. Écuries et étables.	27
— Bergeries, porcheries, etc.	27
Ghérard. Chimie.	12

Gobin (H.) . Entomologie et destruction des insectes nuisibles.	33	Mesta . Dessin linéaire.	10
Gobin (A.) . Prairies naturelles.	30	Miége . Télégraphie électrique.	11
— Prairies artificielles.	31	Monier . Analyse des sucres.	23
Gossin . Conférences agricoles.	29	Moreau . Bijoutier.	24
Grateau . Acier.	16	Noguès . Minéralogie appliquée.	12
Guettier . Alliages.	17	Omalius d'Halloy (Baron d'). Ethnographie.	36
Guy . Géomètre arpenteur.	13	Ortolan . Dessin linéaire.	10
Haudouin . Pétales.	18	— L'ouvrier mécanicien.	10
Kauppelin . Impression des tissus.	21	Perdonnet . Chemins de fer (Notions générales).	16
Kielmann . Drainage.	28	Pernot . Guide du Constructeur, revu par Tronquoy.	13
Koltz . Culture du saule.	32	Peronne . Tracé des courbes sur le terrain.	14
Laffineur . Hydraulique urbaine.	24	Fouriau . Chimie appliquée.	27
— L'ingénieur agricole.	27	— 1 ^o Chimie inorganique.	28
— Roues hydrauliques.	19	— 2 ^o Chimie organique.	28
Latterrière (de) . Lingerie.	22	— Chimiste agriculteur.	34
Lérolle (Léon) . Botanique.	34	Froutéaux . Fabrication du papier et du carton.	24
Liebig . Introduction à l'étude de la chimie.	12	Reynaud . Culture de l'olivier.	31
Lincol . Entreprises industrielles et commerciales.	23	Rozan . Géométrie.	10
Lunel . Epicerie.	35	Sébillot . Mouvement industriel.	35
— Economie domestique.	23	Sicard . Coton.	32
— Parfumerie.	32	Snow-Harris . Electricité.	13
— Acclimatation.	36	Soulié . Pétrole.	18
— Hygiène.	18	Steerk (Le major). Poudres et salpêtres; — feux d'artifice.	20
Malo . Alphaltes bitumes.	18	Tissier (Ch. et A.). Aluminium.	17
Marcel de Serres . Traité des roches.	18	Touchet . Vidange agricole.	33
Mariot-Didieux . Oies et canards.	29	Tronquoy . Voyez Pernot.	13
— Poules.	29	Violette . Fabrication des vernis.	21
— Lapins.	29	Will . Analyse qualitative.	11
— Maladies des chiens.	30		
Maurice . Métallurgie du fer.	16		
Merly . Guide du charpentier.	23		

CATALOGUE

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

POUR LES VOLUMES PUBLIÉS.

Acclimatation des animaux domestiques , par le Dr. B. LUNEL. 1 vol., 183 p.	2 fr.
Acier (son emploi et ses propriétés), par G.-B.-J. DESOYE, avec Introduction et Notes, par E. GRATEAU. 1 vol. 306 p. Relié.	4 fr.
Alcoolisation . V. <i>Betterave</i> .	
Alliages métalliques , par A. GUETTIER, directeur de fonderie. 1 vol., 343 p.	3 fr.
Aluminium et métaux alcalins (Recherche, extraction et fabrication), par C.-H. et A. TISSIER. 1 vol., 228 p. avec 1 pl. et de nombreuses figures dans le texte.	3 fr.
Analyse des vins . V. <i>Vins</i> .	
Analyse des sucres . V. <i>Sucres</i> .	
Analyse qualitative , par H. WILL, traduit par W. BICHON. 1 vol., 239 p. avec tableaux dans le texte. Relié.	3 fr.
Animaux domestiques . V. <i>Habitations</i> .	
Animaux nuisibles : leur destruction, par H. GOBIN.	3 fr.
Appareils économiques de chauffage pour les combustibles solides et gazeux, par P. FLAMM. 1 v., 157 p., 4 pl.	3 fr.
Artifice (Feux d'). V. <i>Poudres et salpêtres</i> .	
Asphaltes, bitumes , par MALO. 1 v., iij-319 p., 7 pl.	4 fr.
Betterave (Culture et Alcoolisation), par BASSET. 1 vol. 284 p. Relié.	4 fr.
Bijoutier . Application de l'harmonie des couleurs, par L. MOREAU. 1 vol. in-12, 108 p., 2 pl.	1 fr.
Botanique appliquée à la culture des plantes, par LÉON LEROLLE, 1 vol., 464 p., avec nombreuses figures dans le texte.	5 fr.
Brevets . Droit des inventeurs, par H. DUFRENÉ.	2 fr. 50
Café . Culture du caféier, par BOURGOIN d'ORLI. 1 vol., 100 p.	2 fr.
Canards , par MARIOT-DIDIEUX. 1 vol.	1 fr. 50
Carnet de l'ingénieur . Aide manuel de l'ingénieur, etc. 1 vol., 290 p. avec fig. et table. Relié.	4 fr.
Chaleur (Théorie mécanique de la chaleur), par CLAUDIUS, traduit par FOLIE. 1 ^{er} vol., 441 p. avec fig. Relié.	10 fr.
2 ^e vol. 307 p. avec fig. Relié.	10 fr.
Charpentier (Livre de poche du). Collection de 150 épreuves, avec texte explicatif en regard, par J.-F. MERLY. 1 v., 287 p., 5 fr. Relié.	6 fr.
Chasseur médecin (Traité complet sur les maladies du chien, par F. CLATER), trad. par MARIOT-DIDIEUX. 1 vol., 195 p. 2 fr.	
Chemins de fer . Traité d'Exploitation, par Victor EMION,	

- avec préface de Jules FAVRE. 2 parties réunies en 1 vol. et reliées ensemble, 787 pages.
Chaque partie se vend séparément brochée : 8 fr.
- 1^{re} partie. *Voyageurs et bagages*. 321 p. 2 fr. 50
2^e partie. *Marchandises*, 466 p. 3 fr. 50
- Chemins de fer** (Notions générales), par A. PERDONNET. 1 vol., 458 p. 5 fr. Relié. 6 fr.
- Chimie agricole**, par N. BASSET. 1 vol. 339 p. 3 fr.
- Chimie** (Introduction à l'étude de la), par M. J. LIEBIG. 1 vol., 255 p. 2 fr. 50
- Chimie inorganique**, par POURIAU. 1 v., 520 p., avec fig. 6 fr.
- Chimie organique**, par le même. 1 v., 546 p., avec fig. 6 fr.
- Chimiste agriculteur**, par le même. 1 v., 460 p., 148 fig. 5 fr.
- Conférences agricoles**, par GOSSIN. 1 vol., 124 p. 1 fr.
- Constructeur** (Guide du). Dictionnaire des mots techniques employés dans la construction, par PERNOT, revu et complétement refondu, par C. TRONQUOY. 1 vol. 532 p. Relié, 6 fr.
- Constructions et travaux à la mer**, par M. BOUNICEAU. 1 vol. VIII-420 p. et atlas de 44 planches doubles. 45 fr.
- Constructions rurales**, par BONA. 1 v., 296 p., avec fig. 3 fr. 50
- Corps gras industriels**, Savons, Bougies, Chandelles, etc. (Connaissance et exploitation), par Th. CHATEAU. 1 vol., 435 p. 4 fr.
- Coton** (Culture du), par le docteur A. SICARD. 1 vol. de 143 p. avec figures dans le texte. 2 fr.
- Courbes de raccordement**. *Chemins de fer, routes et chemins* (Nouvelle table pour le tracé des), par CHAUVAC DE LA PLACE. 1 vol., 121 p., 1 pl. 3 fr. 50
- Courbes sur le terrain** (Guide pratique pour le tracé des), par Eug. PERONNE, 66 p. ou tableaux, avec figures intercalées dans le texte. 2 fr.
- Courtage**. La liberté et le courtage des marchandises, par V. EMION. 1 vol., 142 p. 1 fr.
- Culture maraîchère**, par COURTOIS GÉRARD. 1 vol., 399 p., avec de nombreuses figures dans le texte. 3 fr. 50
- Dessin linéaire**, par A. ORTOLAN et J. MESTA. 1 vol., 281 p., avec un atlas de 42 pl. 5 fr. Reliés. 7 fr.
- Drainage**. Résultat d'observations et d'expériences pratiques, par KIELMANN. 1 vol., 104 p., fig. dans le texte. 1 fr.
- Droit maritime international et commercial** (Notions pratiques de), par Alp. DONNAUD. 1 vol., 155 p. 2 fr.
- Économie domestique**, contenant des notions d'une application journalière, par le doct. B. LUNEL. 1 vol., 227 p. 1 fr.
- Électricité**. Principes généraux, applications, par SNOW-HARRIS, traduit par E. GARNAULT. 1 vol. de 264 p., avec nombreuses figures dans le texte. Relié. 3 fr.

- Engrenages** (Traité pratique du tracé et de la construction des), par F.-G. DINÉE. 1 vol., 80 p. et 17 pl. 3 fr. 50
- Entomologie agricole**. Destruction des insectes nuisibles, par H. GOBIN. 1 vol., 285 p., avec fig. et tableaux. 3 fr.
- Entreprises industrielles et commerciales**, par LINGOL. 1 vol., 343 p. 4 fr. Relié. 5 fr.
- Epiceries**, ou Dictionnaire des denrées indigènes et exotiques, par le doct. B. LUNEL. 1 vol., 262 p. 2 fr.
- Ethnographie** (Description des races humaines), par d'OMALIUS D'HALLOY. 1 vol., avec une pl. coloriée, 130 p. 3 fr.
- Expropriations**. Manuel des expropriés, par Victor EMION. 1 vol., 125 p. 4 fr.
- Fécules et amidons**, par DUBIEF. 1 vol., 267 p. 6 fr.
- Feux d'artifice**. V. *Poudres et salpêtres*.
- Géomètre arpenteur** (Arpentages, nivellements, levé des plans, partage des propriétés agricoles), par M. P. GUY. 1 vol., 272 p., avec 5 pl. 3 fr.
- Géométrie élémentaire** (Leçons de), par Ch. ROZAN. 1 vol. 270 p. avec un atlas de 31 pl. 5 fr. Relié. 7 fr.
- Habitations des animaux**. (Bon aménagement des). Écuries et étables, par GAYOT. 1 vol., avec fig., 203 p. 3 fr.
- Habitations des animaux**. Bergeries, porcheries, etc., par le même. 1 vol., 355 p. et 91 fig. 3 fr.
- Huiles** (Essai et dosages des) employées dans le commerce ou servant à l'alimentation, des savons et de la farine de blé, par CAILLETET. 1 vol., 107 p. 3 fr.
- Hydraulique urbaine et agricole**, par J. LAFFINEUR. 1 vol., 129 p., 2 pl. 2 fr.
- Hydrauliques** (Roues), par J. LAFFINEUR. 1 vol. de 142 pages et 8 planches. 2 fr. 50
- Hydrauliques** (Constructions). V. *Constructions*.
- Hygiène et médecine usuelle**, par le doct. B. LUNEL. 1 vol., 212 p. 1 fr. 50
- Ingénieur agricole** (Hydraulique, dessèchement, drainage, irrigation, etc.), par LAFFINEUR. 1 vol., 269 p., 3 pl. 3 fr.
- Insectes nuisibles** (Destruction des). V. *Entomologie*.
- Inventeurs** (Droit des). Législation, par H. DUFRENÉ. 1 vol. 168 pages. 2 fr.
- Jardinage** (Manière de cultiver son jardin), par COURTOIS-GÉRARD. 1 vol., 403 p., avec 1 planche et figures dans le texte. (Nouvelle édition.) 3 fr. 50
- Jardins d'agrément** (Tracé et ornementation), par T. BONA. 1 vol., 304 p., 4^e éd. 2 fr. 50
- Joaillier**. Traité complet des pierres précieuses, par Ch. BARBOT. 1 vol., 567 p. et 178 figures gravées. Relié. 10 fr.
- Lapins** (Éducation lucrative des), par MARIOT-DIDIEUX. 1 vol., 163 p. 2 fr.

- Liqueurs** (Fabrication des), sans distillation, par DUBIEF. 1 vol., 288 p. avec figures et 1 pl. 4 fr.
- Literie**, par JEAN DE LATERRIÈRE. 1 vol., 180 p., avec 13 pl. 2 fr.
- Machines agricoles** en général et machines à vapeur rurales (Construction, emploi et conduite), par GAUDRY. 1 v., 107 p. 1 fr.
- Maçonnerie** (Constructeur), par A. DEMANET. 1 v., texte 252 p. et atlas de 20 pl. 5 fr.
- Matières résineuses** (Provenance et travail), par E. DROMART. 1 vol., 101 p., avec 3 pl. 3 fr.
- Mécanicien (L'ouvrier)**, par A. ORTOLAN, mécanicien en chef de la marine impériale. (*Sous presse.*)
- Métallurgie** (le Fer, son histoire, ses propriétés), par William FAIRBAIRN; traduit par G. MAURICE. 1 vol., 331 pages, avec 5 pl. Relié. 6 fr.
- Minéralogie appliquée**, par A.-F. NOGÈS, 1^{re} partie, 396 p. avec 124 fig. 5 fr. Relié. 6 fr.
- 2^e partie, avec 124 fig. 523 p. Relié. 6 fr.
- Minéralogie usuelle** (Exposition succincte et méthodique des minéraux), par M. DRAPPIEZ. 1 vol., 507 p. 2 fr.
- Mouvement industriel et commercial**, 1864-1865, par A. SÉBILLOT. 1 vol., 232 p. 2 fr.
- Oies et canards** (Educat. lucrative des), par MARIOT-DIDIEUX. 1 vol., 187 p., avec de nombr. fig. dans le texte. 1 fr. 50
- Olivier** (sa culture, son fruit et son huile), par J. RAYNAUD. 1 vol., 330 p. 3 fr.
- Ostréiculture**. Élevage et multiplication des races marines comestibles, par FRAICHE. 1 vol., 178 p., avec fig. 3 fr.
- Papiers et cartons** (Fabrication), par A. PROUTEAUX. 1 vol., 277 p., avec atlas, 7 pl. Relié. 5 fr.
- Parfumeur**. Dictionnaire des cosmétiques et parfums, par le doct. B. LUNEL. 1 vol., 215 p. 5 fr.
- Pétrole** (Gisements, exploitation et traitement industriel), par E. SOULIÉ et H. HAUDOÛIN. 1 vol., 236 p. 3 fr.
- Photographie** (l'Étudiant photographe), par A. CHEVALIER. 1 vol. avec nombreuses fig., 3 fr. Relié. 4 fr.
- Pisciculteur**, par P. CARBONNIER. 1 vol., 208 p. 2 fr.
- Plantes fourragères**, par M. H. GOBIN.
- 1^{re} partie. Prairies naturelles, irrigations, pâturages, 1 v., 284 p. et fig. 3 fr.
- 2^e partie. Prairies artificielles, plantes-racines, 1 vol., et 87 fig. 3 fr. 50
- Ponts et chaussées et agent voyer** (Conducteur), 1^{re} partie Plans et nivellements, par F. BIROT. 1 vol., 129 p., 6 pl. 2 fr.
- 2^e partie. Routes et chemins. 1 vol., avec pl. 2 fr.
- 3^e partie. Ponts et aqueducs. 1 vol. 2 fr.
- 4^e partie. Constructions en général. 1 vol. 2 fr.

- Ponts et chaussées**. Tracé des courbes sur le terrain, par PÉRONNE. 2 fr.
- Poudres et salpêtres**, par le major STEERK, avec un appendice sur les feux d'artifice. 1 vol., 360 p., 3 fr. Relié. 6 fr.
- Poules** (Education lucrative des), ou Traité raisonné de galinoculture, par MARIOT-DIDIEUX. 1 vol., 486 p. 3 fr. 50
- Prairies naturelles et artificielles**. V. *Plantes fourragères.*
- Roches** simples et composées (Classification et caractères minéralogiques), par Marcel de SERRES. 1 vol., 291 p. 3 fr.
- Roues hydrauliques** par LAFFINEUR. 2 fr. 50
- Saule et osier** (Culture du), par M.-J. KOLTZ. 144 p. et 30 fig. dans le texte. 2 fr.
- Science populaire** (la), par J. RAMBOSSON. 4 vol., avec de nombreuses figures dans le texte. 14 fr.
- Sucres**. Essai et analyse des sucres. par E. MONIER, avec fig. et tableaux. 2 fr.
- La canne à sucre, par BOURGOIN D'ORLÉ. 1 vol., 156 p. 2 fr.
- Télégraphie électrique**, par B. MIÈGE. 1 vol., 158 p. avec de nombreuses figures dans le texte. 2 fr. Relié. 3 fr.
- Tissage et préparation des étoffes**, par T. BONNA. Texte 2 parties en 1 vol., ensemble 364 p.; plus 2 atlas en 1 seul, ensemble 116 pl. relié en 2 vol. 9 fr.
- La 1^{re} partie seule : *Préparation des étoffes*, se vend séparément, 1 vol. et atlas. 4 fr.
- Tissus imprimés** (leur fabrication). Impression des étoffes de soie, par D. KAEPPELIN. 1 vol., 151 p., avec 4 pl. et de nombreux échantillons. 10 fr.
- Vaches**. Choix des vaches laitières, par E. DUBOS. 1 vol., 132 p. et planches. 2 fr.
- Vernis** (Fabrication des), par Henri VIOLETTE, 1 vol., avec figures dans le texte. 5 fr.
- Vidange agricole**. Engrais humain, par J.-H. TOUCHET. 1 vol., 88 p. 1 fr.
- Vigneron**, par FLEURY-LACOSTE. 1 vol., 144 p., avec fig. 2 fr.
- Vins**, falsifications et maladies du vin, par J. BRUN. 1 vol., avec de nombreux tableaux. 2^e éd., 1 vol., 191 p. 2 fr. 50
- Vins factices et boissons vineuses**, par DUBIEF, 1 vol., 67 p. 1 fr. 50

CATALOGUE
DES OUVRAGES PUBLIÉS OU EN PRÉPARATION
PAR ORDRE DE SÉRIES.

TABLE DES MATIÈRES¹.

SÉRIE A.

SCIENCES EXACTES.

3. Leçons de **Géométrie élémentaire**, par M. Ch. ROZAN, professeur de mathématiques. 1 vol., 262 pages et un atlas de 31 planches doubles gravées. 5 fr. Reliés. 7 fr.

Ces leçons sont conçues sur un plan tout nouveau. M. Rozan s'est surtout attaché à faire sentir la liaison qui existe entre les principes essentiels de la géométrie élémentaire et la manière dont ils découlent les uns des autres par un enchaînement continu de déductions et de conséquences. La division par leçons amène graduellement l'élève à acquérir, même sans professeur, la connaissance des théorèmes les plus avancés de la géométrie. L'atlas est composé de planches gravées avec le plus grand soin.

6. Guide pratique pour l'étude du **Dessin linéaire** et de son application aux professions industrielles, par MM. A. ORTOLAN et J. MESTA. 1 vol., LXXVI-204 pages et un atlas de 41 planches doubles, grav. par EHRRARD. 5 fr. Reliés. 7 fr.

Excellent manuel élémentaire, précédé d'une introduction dans laquelle les auteurs donnent sous forme de dictionnaire, l'explication de tous les termes techniques et la description des divers instruments spéciaux. Ce guide pratique est une introduction naturelle à l'ouvrage auquel nous avons donné le titre de *Guide de l'ouvrier mécanicien*.

*En préparation*² : Arithmétique. — Algèbre. — Trigonométrie. — Géométrie descriptive. — Perspective. — Connaissance et pratique des Logarithmes³. — Emploi de la Règle à calcul.

¹ Cette table est loin d'être complète comme matières à publier. La collection devant former une technologie complète des arts et métiers, des manufactures, des mines, de l'agriculture, etc., beaucoup d'autres volumes, traitant de sujets non mentionnés ici viendront en leur temps en élargir le cadre ; mais nous avons l'intention, pour le moment, de ne nous occuper que des ouvrages indiqués, parce que nous pensons que ce sont ceux dont la publication est le plus promptement désirée.

² Plusieurs ouvrages indiqués comme étant en préparation seront mis sous presse dans le courant de 1869.

³ Nous croyons devoir recommander spécialement un travail sur les logarithmes qui a paru il y a quelque temps, intitulé : *Tables des logarithmes à sept décimales*, par Jean Luvini : ces tables sont très-complètes, et ce volume comprend plusieurs autres tables usuelles. Prix : 4 francs. (Librairie scientifique-industrielle E. Lacroix.)

SÉRIE B.

SCIENCES D'OBSERVATION, CHIMIE, PHYSIQUE,
ÉLECTRICITÉ, ETC.

2. **Théorie mécanique de la chaleur**, par R. CLAUDIUS, professeur à l'Université de Wurtzbourg, traduit de l'allemand par F. FOULIE, professeur à l'École industrielle et répétiteur à l'École des mines de Liège. 1 vol., XXIV-441 pages. Relié. 10 fr.

« Depuis que l'on a utilisé la chaleur comme force motrice au moyen des machines à vapeur, et que l'on a été ainsi amené pratiquement à regarder une certaine quantité de travail comme l'équivalent de la chaleur nécessaire pour le produire, il était naturel de rechercher théoriquement une relation déterminée entre une quantité de chaleur et le travail qu'il est possible de lui faire produire, et d'utiliser cette relation pour en déduire des conclusions sur l'essence et les lois de la chaleur elle-même. »

Ainsi s'exprime M. Clausius au début de son premier Mémoire. Ces lignes suffisent pour faire comprendre l'importance d'une question dont l'étude s'impose aujourd'hui aux savants et aux hommes pratiques qui veulent tirer de la machine à vapeur tout l'effet utile qu'elle peut donner.

— *Deuxième partie.* Mémoires sur l'application de la théorie mécanique de la chaleur aux **phénomènes électriques** et sur les **mouvements moléculaires** admis pour l'explication de la chaleur. 1 vol. vi-307 p. Relié. 10 fr.

4. **Télégraphie électrique**, ou *Vade-mecum* pratique à l'usage des employés des lignes télégraphiques, suivi du programme des connaissances exigées pour être admis au surnumérariat dans l'administration des lignes télégraphiques, par M. B. MIÈGE, directeur de station de ligne télégraphique. 1 vol., xi-148 pages, avec 45 figures dans le texte. 2 fr. Relié. 3 fr.

M. Miège n'a pas voulu faire seulement un livre utile, mais bien un guide indispensable. Aux notions préliminaires sur le magnétisme, les différentes sources d'électricité et les propriétés des courants, succède la description de tous les appareils usités, avec l'indication des signaux généralement adoptés. Des formules d'une grande simplicité permettent de se rendre compte de l'intensité des courants et de rechercher la cause des dérangements.

L'ouvrage de M. Miège sera aussi d'une incontestable utilité pour toute personne qui veut acquérir la connaissance des lois de l'électricité appliquée à la télégraphie.

5. **L'Étudiant photographe**, par A. CHEVALIER, avec les procédés de MM. CIVIALE, BACOT, CAVELIER, ROBERT, 1 vol. de 246 pages, avec 68 figures. 3 fr. Relié. 4 fr.

Pas de considérations théoriques, mais beaucoup de renseignements et de détails sur les instruments employés et la manière d'opérer. Ajoutons que l'auteur a tenu à mettre le lecteur au courant des procédés les plus nouveaux.

9. **Analyse qualitative**, instruction pratique à l'usage des laboratoires de chimie, par M. le docteur H. WILL, professeur agrégé de l'université de Giessen; traduit de l'allemand par M. le Dr. G.-W. BIGNON, traducteur des Lettres de M. Justus Liebig sur la chimie, et auteur de plusieurs travaux sur cette science, 1 vol., 248 pages. Relié. 3 fr.

Les traités spéciaux sur la chimie analytique sont ou trop volumineux ou incomplets, en ce sens que, dans ces derniers, manquent les indications indispensables pour que l'élève puisse se conduire lui-même. M. le docteur Will a su éviter ces deux défauts: son guide enseigne d'une manière simple, substantielle et méthodique, tout ce qu'il faut savoir pour devenir capable de découvrir et de séparer les parties constituantes des corps composés.

11. **Introduction à l'étude de la Chimie**, contenant les principes généraux de cette science, les proportions chimiques, la théorie atomique, le rapport des poids atomiques avec le volume des corps, l'isomorphisme, les usages des poids atomiques et des formules chimiques, les combinaisons isomériques des corps catalytiques, etc., accompagnée de considérations détaillées sur les acides, les bases et les sels, par M. J. LIEBIG, traduit de l'allemand par Ch. GUÉRARD, augmenté d'une table alphabétique des matières présentant les définitions techniques et les relations des corps. 1 vol., 248 pages. 2 fr. 50.

L'accueil favorable que cette traduction a rencontré en France rappelle le succès obtenu en Allemagne par l'édition originale de l'illustre savant considéré à juste titre comme l'un des princes de la chimie moderne.

12. **Guide pratique pour reconnaître et corriger les Fraudes et maladies du vin**, suivi d'un Traité d'ANALYSE CHIMIQUE de tous les vins, par M. JACQUES BRUN, vice-président de la Société suisse des pharmaciens. 2^e éd., 1 vol., 191 p., avec de nombreux tableaux. 2 fr. 50.

L'art de falsifier les vins a fait ces dernières années de rapides progrès. La chimie ne doit pas se laisser devancer par la fraude: elle

doit lui tenir tête et pouvoir toujours montrer du doigt la substance ajoutée. Cette tâche, dit M. Brun, incombe surtout aux pharmaciens. Son livre est le résumé des différents traitements qu'il a trouvés réellement utiles, et qui dans sa longue pratique lui ont le mieux réussi pour l'examen chimique des vins suspects.

13. **Traité pratique et élémentaire de Botanique appliquée** à la culture des plantes, par M. LÉON LEROLLE. (Voir série H, n^o 56.)
14. **Guide pratique de Minéralogie appliquée**, (histoire naturelle inorganique) ou connaissance des combustibles minéraux, des pierres précieuses, des matériaux de construction, des argiles céramiques, des minerais manufacturiers et des laboratoires, des minerais de fer, de cuivre, de zinc, de plomb, d'étain, de mercure, d'argent, d'antimoine, d'or, de platine, etc., par M. A.-F. NOGÈS, professeur de sciences physiques et naturelles.

Première partie: 1 vol. de 396 pages avec 124 fig. dans le texte, 5 francs. Relié. 6 fr.

Deuxième partie: 1 vol. de 523 pages avec 124 fig. dans le texte, 5 francs. Relié. 6 fr.

Comme l'auteur l'indique dans sa préface, ce guide a été écrit principalement pour les personnes qui désirent acquérir des notions justes, pratiques et usuelles sur les minerais métallifères et les minéraux employés dans les arts et l'industrie. Les étudiants qui suivent les cours des Facultés, les élèves des Ecoles spéciales et industrielles, les ingénieurs, les élèves des Ecoles des mines, les mineurs, les agriculteurs, les directeurs d'exploitations minières, les garde-mines, les amateurs et les gens du monde qui voudront acquérir des connaissances pratiques en minéralogie, le consulteront avec fruit.

Ce guide a été conçu dans un esprit essentiellement pratique et industriel.

17. **Leçons élémentaires d'Électricité** ou exposition concise des principes généraux de l'ÉLECTRICITÉ ET DE SES APPLICATIONS, par SNOW-HARRIS, de la Société royale de Londres, etc.; annotées et traduites par E. GARNAUT, ancien élève de l'École normale, professeur de physique à l'École normale impériale. 1 vol., 264 pages, avec 72 figures dans le texte. Relié. 3 fr.

Les leçons de M. SNOW-HARRIS ont eu un grand succès en Angleterre. L'auteur s'est surtout attaché à donner des idées saines, pratiques et théoriques sur les principes généraux de l'électricité et les faits les plus simples qu'il démontre à l'aide d'expériences faciles à répéter.

Son élégant traducteur, M. Garnaut, a ajouté à l'ouvrage anglais

des notes dans lesquelles il donne surtout des aperçus sur les principales applications de l'électricité qui ont passé dans l'industrie.

En préparation : Physique. — Galvanoplastie. — Astronomie. — Chimie générale. — Chimie industrielle. — Géologie. — Vinaigrier et Moutardier. — Météorologie. — Anatomie. — Zoologie.

(Nous prions les lecteurs de voir aussi la série H, nos 6 et 7, *Chimie inorganique* et *Chimie organique* de M. Pouriau.)

SÉRIE C.

ART DE L'INGÉNIEUR, PONTS ET CHAUSSÉES,
CONSTRUCTIONS CIVILES.

1. Guide pratique du **Géomètre arpenteur**, comprenant l'arpentage, le nivellement, le levé des plans, le partage des propriétés agricoles, par M. P.-G. GUY, ancien élève de l'École polytechnique, officier d'artillerie. Nouv. édition. vol. de 272 pages avec 5 planches. 3 fr.

Les deux premières éditions de ce guide étaient épuisées. Celle que nous annonçons a été complètement revue et quelques additions importantes y ont trouvé place. Les planches gravées à nouveau, sont d'une grande netteté.

2. Guide pratique du **Conducteur des ponts et chaussées** et de l'**Agent voyer**. Principes de l'art de l'ingénieur, par M. F. BIROT, ingénieur civil, ancien conducteur des ponts et chaussées. 3^e édition, revue et augmentée. 1 vol. 545 pages, avec un atlas de 49 planches doubles, contenant 144 figures. Prix du volume et de l'atlas. 8 fr.

Le volume et l'atlas reliés. 40 fr.

Un premier ouvrage de M. Birot, qui avait pour titre *Routes et ponts*, s'est épuisé avec une très-grande rapidité et était demandé tous les jours. — La série des 4 volumes publiés dans la Bibliothèque Lacroix représente la nouvelle édition complètement refondue et augmentée de cet excellent ouvrage.

Cet ouvrage se subdivise en quatre parties qui sont vendues séparément.

- Première partie* : Plans et nivellements, 1 vol., VIII-124 pages et 6 planches. 2 fr.
Deuxième partie : Routes et chemins. 1 vol. de 155 pages 5 planches. 2 fr.
Troisième partie : Ponts et aqueducs. 1 vol. de 124 pages et 8 planches. 2 fr.

Quatrième partie : Travaux de construction en général. 1 vol. de 145 p. et pl. 2 fr.

10. Guide pratique du **Constructeur**. — MAÇONNERIE, par A. DEMANET, lieutenant-colonel honoraire du génie, membre de l'Académie royale de Belgique, etc. 1 vol., 252 pages, avec tableaux et 1 atlas in-18 de 20 planches doubles, gravées sur acier par CHAUMONT. Br. 5 fr. Relié. 6 fr.
- Ce guide écrit, par M. Demanet, qui a professé un cours de construction à l'École militaire de Bruxelles, emprunte une grande autorité à l'expérience et à la position qu'occupait l'auteur.

Les 20 planches de l'atlas qui accompagnent ce guide comprennent 137 figures que Chaumont a gravées avec cette exactitude et cette élégance qui ont fondé sa réputation.

Nous rappellerons que M. le lieutenant-colonel Demanet est auteur d'un *Cours de construction* qui a eu très-rapidement deux éditions et qui embrasse la connaissance des matériaux et leur emploi, la théorie des constructions, l'établissement des fondations, l'économie des travaux, leur entretien, etc., etc. Cet ouvrage, édité par la Librairie scientifique, industrielle et agricole, coûte avec l'atlas 70 francs et ne pouvait par conséquent entrer dans le cadre de la *Bibliothèque des professions industrielles et agricoles*. Le *Guide pratique du constructeur* (maçonnerie) est un extrait de l'œuvre si estimée de M. Demanet, mais forme cependant un tout complet.

16. Nouvelles tables pour le tracé des **Courbes de raccordement** (chemins de fer, routes et chemins), calculées par M. CHAUVAC DE LA PLACE, chef de section au chemin de fer de l'Est. 1 vol., 120 pages, 1 planche. 3 fr. 50

Ces tables calculées pour 82 rayons les plus fréquemment employés, et prenant pour base un petit arc exprimé en nombre rond et s'ajoutant successivement à lui-même, offrent une grande facilité. Leur mérite a été promptement apprécié par tous ceux qui ont eu l'occasion de s'en servir.

17. Guide pratique pour le tracé des **Courbes sur le terrain**, par Eug. PERONNE. 66 pages ou tableaux, avec figures dans le texte. 2 fr.

Les ouvrages spéciaux destinés à faciliter les opérations des ingénieurs sur le terrain sont généralement volumineux ou incomplets. M. Peronne a su éviter ce double écueil, et il a réuni dans un format commode les tables concernant les tangentes, les cercles, les flèches, les conversions de la graduation et le lever des plans.

Chaque table est précédée d'une explication et d'une figure géométrique, et l'auteur a en outre indiqué soigneusement la manière de se servir de ces diverses tables.

20. Études et notions sur les **Constructions à la mer**, par

M. BOUNICEAU, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 vol., VIII-424 p. et atlas de 44 pl. in-4°, dont plusieurs doubles, gravées par Ehrard. Br. 15 fr. Relié. 18 fr.

Cet ouvrage est le résumé d'études longues et consciencieuses d'un des ingénieurs en chef les plus distingués du corps impérial des ponts et chaussées. M. Bouniceau a attaché son nom à des travaux d'une haute importance. Son travail devra être médité par tous ceux qu'intéressent les nouveaux développements que doivent prendre les constructions conçues en vue d'améliorer les ports de mer et les ouvrages nécessaires à la préservation des côtes. L'atlas qui accompagne ces Etudes est remarquable sous le rapport du choix des planches et de leur exécution.

21. **Traité de l'Exploitation des chemins de fer.** Deux parties réunies en 1 vol. et reliées ensemble, 787 p. 3 fr.

Chaque partie se vend séparément brochée :

Première partie: VOYAGEURS ET BAGAGES, par M. V. EMION, précédée d'une préface par M. Jules FAVRE. 1 vol., XVI-305 pages. 2 fr. 50

Deuxième partie: MARCHANDISES. 1 vol., VII-439 p. 3 fr. 50

Aujourd'hui tout le monde voyage. Le manuel de M. V. Emion est donc le guide obligé de tout le monde. Il fait connaître à chacun ses droits et ses devoirs vis-à-vis des Compagnies; il prend le voyageur chez lui, il le mène à la gare, le suit à son départ, pendant sa route, à son arrivée et le ramène à son domicile: il prévoit toutes les difficultés, toutes les contestations et en donne la solution fondée sur la loi, les règlements, la jurisprudence et l'équité.

Dans la seconde partie, M. Emion traite avec beaucoup de détails l'organisation du service des marchandises, les tarifs, les formalités exigées pour la remise des marchandises en gare, l'expédition, la livraison, enfin tout ce qui concerne les actions à intenter aux Compagnies, soit pour avaries, soit pour retard, perte, négligence, etc.

26*. **Guide pratique du Constructeur.** Dictionnaire des mots techniques employés dans la construction, à l'usage des architectes, propriétaires, entrepreneurs de maçonnerie, charpentes, serrurerie, couvertures, etc., renfermant les termes d'architecture civile, l'analyse des lois de voirie, des bâtiments et des dessèchements, par M. L.-P. PERNOT, officier de la Légion d'honneur, architecte-vérificateur des travaux publics. Nouvelle édition, augmentée et entièrement refondue, par Camille TRONQUOY, ingénieur civil. 4 vol. de 532 p. 5 fr. Relié. 6 fr.

* Le chiffre 6 étant tombé pendant l'impression, quelques exemplaires portent 2 au lieu de 26.

Les premières éditions de ce *Dictionnaire de la construction* étaient complètement épuisées. Pour répondre aux nombreuses demandes qui lui parvenaient, le directeur de la *Bibliothèque des professions industrielles et agricoles* ne s'est pas borné à faire réimprimer le travail primitif; il a voulu que dans la nouvelle édition aucun des progrès réalisés pendant les quinze dernières années ne fût omis, et M. C. Tronquoy, l'un de nos ingénieurs civils les plus distingués et en même temps l'un de nos technologistes les plus érudits, a bien voulu se charger du travail ingrat d'une révision complète de l'œuvre. Le *Dictionnaire* que nous annonçons est le résultat de ce travail consciencieux.

27. **Notions générales sur les chemins de fer**, statistique, histoire, exploitation, accidents, organisation des Compagnies, administration, tarifs, service médical, institutions de prévoyance, construction de la voie, voitures, machines fixes, locomotives, nouveaux systèmes; suivies des Biographies de Cugnot, Seguin et George Stephenson, d'un mémoire sur les avantages respectifs des différentes voies de communication, d'un mémoire sur les chemins de fer considérés comme moyens de défense d'un pays, et d'une Bibliographie raisonnée; par M. Auguste PERDONNET, ancien élève de l'École polytechnique, ancien ingénieur en chef de plusieurs chemins de fer, etc. 1 vol., 432 p., avec de nombreuses figures dans le texte. 5 fr. Relié. 6 fr.

Après avoir publié deux ouvrages techniques sur les chemins de fer, qui s'adressent directement aux hommes spéciaux, M. A. Perdonnet avait voulu dans ses *Notions générales* se rendre intelligible pour tout le monde. Outre les questions techniques et économiques, il a traité dans ces *Notions* des questions d'organisation des Compagnies et d'exploitation dont il n'avait pas à parler dans ses deux grands ouvrages. Nous signalerons l'importance des renseignements historiques et statistiques dont M. Perdonnet a enrichi notre publication.

En préparation: Mètreur vérificateur. — Fabrication des briques — Architecte. — Tailleur de pierre. — Charpentier (voyez série G, n° 13). — Construction des escaliers. — Fumisterie. — Chauffournier et plâtrier, ciments et mortiers. — Marbrier. — Peintre en bâtiments. — Constructions en fer. — Architecture religieuse. — Chauffage et ventilation. — Routes et chemins de fer (exploitation de la voie). — Routes et chemins de fer (matériel fixe et roulant). — Tables de cubages pour les matériaux de toutes natures. — Tables pour les poids des matériaux de toutes natures — Terrassier. — L'appareilleur.

SÉRIE D.

**MINES ET MÉTALLURGIE, MINÉRALOGIE,
GÉOLOGIE, HISTOIRE NATURELLE.**

4. Guide pratique du métallurgiste. **Le Fer**, son histoire, ses propriétés et ses différents procédés de fabrication, par M. William FAIRBAIRN, ingénieur civil, membre de la Société royale de Londres, correspondant de l'Institut de France, etc., traduit de l'anglais avec l'approbation de l'auteur et augmenté de notes et d'appendices, par M. Gustave MAURICE, ingénieur civil des mines, secrétaire de la rédaction du Bulletin de la Société d'encouragement, 1 vol., 331 p. et 68 fig. dans le texte, 5 fr. Relié. 6 fr.

Depuis longtemps, le nom de M. Fairbairn fait autorité dans l'industrie du fer. Après avoir tracé l'histoire des progrès de la fabrication du fer, l'auteur donne les analyses des minerais et des combustibles dans leurs rapports avec les résultats des différents procédés de fabrication : il saisit cette occasion pour donner la description des fourneaux, machines, etc., employés dans la métallurgie du fer.

M. Maurice, l'élegant traducteur du livre de M. Fairbairn, a complété par des notes et des appendices tout ce que le texte original pouvait présenter de trop laconique ou de trop exclusivement rédigé en vue de la métallurgie anglaise. Parmi ces appendices, on remarquera ceux concernant les procédés Bessemer et sur la résistance des tubes à l'écrasement.

5. **Emploi de l'acier**, ses propriétés, par J.-B.-J. DESOYE, ancien manufacturier, avec une introduction et des notes par Ed. GRATEAU, ingénieur civil des mines. 1 vol. de 303 pages. Relié. 4 fr.

Ce livre constitue une véritable monographie de l'acier. M. Desoye prend l'ait de fabriquer l'acier à son origine et nous montre ses progrès. Il signale la nature et les propriétés natives de l'acier, en indique les différents modes d'élaboration et termine son guide par une étude sur l'emploi de l'acier dans les manipulations qu'on lui fait subir. Comme le fait remarquer M. Grateau dans sa savante introduction, ce livre s'adresse à tous ceux qui sont appelés à acheter et à consommer de l'acier d'une qualité quelconque, sous toute forme, et il devra être consulté par tous les praticiens.

Cet ouvrage est en quelque sorte complété par un volume de M. Landrin fils, intitulé *Traité de l'acier*. Quoique nous ayons publié cet ouvrage en dehors de la Bibliothèque, nous devons le citer ici. Il forme 1 volume, format de la Bibliothèque, de 315 pages avec figures dans le texte. 5 fr.

41. Guide pratique de la recherche, de l'extraction et de la fabrication de l'Aluminium et des **Métaux alcalins**. Recherches techniques sur leurs propriétés, leurs procédés d'extraction et leurs usages par MM. Charles et Alexandre TISSIER, chimistes-manufacturiers. 1 vol., 226 pages, 1 planche et figures dans le texte. 3 fr.

Les notions sur l'aluminium se trouvaient disséminées dans des recueils nombreux publiés en France et à l'étranger. Les auteurs de ce guide ont eu l'heureuse idée de faire de ces notions éparses un tout homogène dans lequel, après avoir retracé l'histoire de la préparation des métaux alcalins, ils esquisseront à grands traits l'histoire de la préparation de l'aluminium. Des chapitres spéciaux sont consacrés à la fabrication industrielle et aux propriétés physiques et chimiques du nouveau métal qui a conquis très-rapidement une grande place dans l'industrie.

43. Guide pratique de l'**Alliage des métaux** par M. A. GUETTIER. 1 vol., VIII-342 pages. Br. 3 fr. Relié. 4 fr.

Après avoir donné quelques explications préliminaires sur les propriétés physiques et chimiques des métaux et des alliages, l'auteur examine au point de vue des alliages entre eux les métaux spécialement industriels, c'est-à-dire d'un usage vulgaire très-répandu (cuivre, étain, zinc, plomb, fer, fonte, acier). Il donne ensuite quelques indications générales sur les métaux appartenant aux autres industries mais n'occupant qu'une place secondaire (bismuth, antimoine, nickel, arsenic, mercure), et sur des métaux riches appartenant aux arts ou aux industries de luxe (or, argent, aluminium, platine); enfin il envisage les métaux d'un usage industriel restreint, au point de vue possible de leur association avec les alliages présentant quelque intérêt dans les arts industriels.

45. **Minéralogie usuelle**, Exposition succincte et méthodique des minéraux, de leurs caractères, de leur composition chimique, de leurs gisements, de leurs applications aux arts et à l'économie, par M. DRAPIEZ. 1 vol., 304 p. Relié. 2 fr.

A la lucidité des définitions et à la simplicité de la méthode d'exposition, ce guide joint un mérite qui n'échappera pas aux hommes pratiques : il contient la description de 1500 espèces minérales dont il analyse les caractères distinctifs, la forme régulière et la forme irrégulière, les propriétés particulières, les compositions chimiques et les synonymies, les gisements, les applications dans les arts, dans l'industrie, etc.

47. **Traité des Roches** simples et composées ou de la classification géognostique des Roches d'après leurs caractères minéralogiques et l'époque de leur apparition, par

M. Marcel DE SERRES, professeur à la Faculté des sciences de Montpellier, conseiller honoraire à la Cour impériale de la même ville, officier de la Légion d'honneur. 1 vol., 288 pages. 3 fr.

Une analyse de la table des matières de ce traité sera la meilleure recommandation que nous puissions en faire : De la composition du globe ; — de la classification minéralogique des roches composées : — des roches plutoniques ou des roches cristallines ; — des roches plutoniques composées à deux éléments dérivés des granites (six sous-familles) ; — roches plutoniques composées à trois éléments dont l'un est l'amphibole : — *idem*, dont l'un est le talc, la stéatite ou le chlorate ; — *idem*, dont l'un est le pyroxène ; — de quelques roches simples ; — des divers degrés d'ancienneté des roches composées. — L'ouvrage est complété par divers tableaux et par les coupes idéales des terrains de gneiss de l'Écosse.

18. Guide pratique pour la fabrication et l'application de l'Asphalte et des Bitumes, par M. Léon MALO, ingénieur civil, ancien élève de l'École centrale. 1 vol., III-319 pages, 7 planches. 4 fr.

L'usage de l'asphalte et des bitumes se généralise, et cependant il n'existait pas de traité pratique sur la fabrication et l'emploi de ces substances. Le livre de M. Malo comble cette lacune. Il abonde en renseignements intéressants non-seulement pour les ingénieurs, mais aussi pour les autorités municipales. Il contient aussi des données d'un grand intérêt au point de vue historique, c'est-à-dire sur les origines de l'asphalte. Ce guide pratique est accompagné de sept planches, dont quelques-unes de très-grand format.

19. Pétrole (le), ses gisements, son exploitation, son traitement industriel, ses produits dérivés, ses applications à l'éclairage et au chauffage, par MM. Emile SOULIÉ et Hipp. HAUDOÛIN, anciens élèves de l'École des mines, 1 vol., 232 pages, avec figures dans le texte. 3 fr.

Le pétrole tend à prendre une place de plus en plus grande dans l'industrie. Chaque jour voit essayer de nouvelles applications de cette substance, naguère dédaignée. À l'étude chimique du pétrole naturel les auteurs ont joint l'étude industrielle qui a pour but d'indiquer les moyens d'appliquer les données de la science. Les fabricants trouveront dans ce livre des renseignements véritablement pratiques, non-seulement sur le traitement chimique en lui-même, mais aussi sur les appareils qui serviront à l'effectuer.

En préparation : Recherche et exploitation des mines métalliques. — Sondeur. — Le zinc. — Le cuivre. — Le plomb et l'étain. — L'argent. — L'or. — Essayeur. — Exploitation des houillères (*Sous presse*). — Extraction de la tourbe.

SÉRIE E.

MACHINES MOTRICES.

1. Traité de la construction des Roues hydrauliques, contenant tous les systèmes de roues en usage, les renseignements pratiques sur les dimensions à adopter pour les arbres tournants, les tourillons, les bras de roues hydrauliques, etc. 1 vol. de 142 pages, avec de nombreux tableaux et 8 planches, par M. Jules LAFFINEUR, ingénieur civil, membre de plusieurs sociétés savantes. 2 fr. 50.

L'auteur démontre dans sa préface que le perfectionnement des machines motrices des usines est à la fois une nécessité d'intérêt général et privé. Dans son ouvrage, il recherche et il définit les principales conditions à remplir sous ce rapport, et il donne ensuite tous les détails relatifs à la construction des roues hydrauliques dans les meilleures conditions possibles.

Fidèle à la méthode qui lui est propre, M. Laffineur s'est surtout attaché à se faire comprendre par la simplicité des termes employés et par les nombreux exemples qu'il donne.

Les planches sont d'une grande netteté.

6. Traité pratique du tracé et de la construction des Engrenages, de la vis sans fin et des cames, par M. F.-G. DINÉE, mécanicien de la marine impériale, ex-élève de l'École des arts et métiers de Châlons-sur-Marne. 1 vol., 80 p. et 17 pl. 3 fr. 50.

Ce livre répond à un besoin, car depuis longtemps il manquait à toute bibliothèque industrielle ; c'est une œuvre de mécanique véritablement pratique.

Il se divise en trois chapitres :

1° Des courbes en usage dans la construction des engrenages ; 2° dimensions des détails et de l'ensemble des engrenages ; 3° tracé des engrenages, des vis sans fin, des cames.

En préparation : Conduite, chauffage et entretien des machines fixes et locomobiles. — Construction des machines locomotives. — Des machines à vapeur marines. — Construction des moulins à vent.

(Voir série G., n° 10, le Guide de l'Ouvrier mécanicien.)

SÉRIE F.

PROFESSIONS MILITAIRES ET MARITIMES.

1. *Aide-mémoire de l'officier de marine* (marine militaire et marine marchande). Notions pratiques de **Droit maritime international et commercial**, par Alp. DONEAUD, professeur à l'École navale. 1 vol., 155 pages. 2 fr.

Les derniers traités de commerce ont augmenté dans des proportions considérables les relations internationales. Cet ouvrage de M. Doneaud devient donc d'une grande utilité pratique.

Nous ajouterons que ce livre commence une série de volumes dont l'ensemble formera, dans notre bibliothèque, l'*Aide-mémoire* de l'officier de marine.

4. Guide pratique de la fabrication des **Poudres et salpêtres**, par M. le major STEERK, avec un appendice sur les feux d'artifice. 1 vol., 360 pages, avec de nombreuses figures dans le texte. 5 fr. Relié. 6 fr.

Dès les premières lignes de ce livre, on s'aperçoit que l'auteur est un homme compétent dans la matière qu'il traite, et qu'à l'étude dans le laboratoire, le major Steerk a joint l'expérience de la fabrication en grand. Dans ses données, tout est rigoureusement exact, et on peut accepter l'auteur comme guide, sans craindre de se tromper.

L'appendice sur les feux d'artifice résume en quelques pages les notions pratiques nécessaires pour la confection de ces feux.

En préparation : Topographie militaire. — Pontonnier. — Constructions navales. — Capitaine au long cours. — Maître au cabotage. — Topographie marine, le lever du plan d'une côte ou d'une baie. — Instruments et calculs nautiques.

SÉRIE G.

ARTS. — PROFESSIONS INDUSTRIELLES.

1. *Traité pratique de la Culture et de l'Alcoolisation de la Betterave*. Résumé complet des meilleurs travaux faits jusqu'à ce jour sur la betterave et son alcoolisation, renfermant toutes les notions nécessaires au cultivateur et au distillateur, ainsi que l'examen critique des méthodes de pulpaion, de macération, de fermentation et de distillation employées aujourd'hui, par M. N. BASSET. 3^e édition, corrigée et considérablement augmentée, accompagnée de nombreuses gravures dans le texte. 1 vol. de 284 pages. Relié. 4 fr.

Avant de donner au public cette nouvelle édition, l'auteur avait étudié à fond les principales questions relatives à la betterave, afin d'apporter son contingent à la grande question de la transformation agricole, par les données que l'expérience lui a fournies. Il a cherché, et il y a réussi, à mettre sous les yeux des agriculteurs et des distillateurs, les faits techniques, scientifiques ou pratiques, dans la plus grande simplicité d'expression, et à les tenir bien en garde contre toutes les exagérations.

(Pour le sucre de canne, voir plus loin série H, n^o 50.)

- 2¹. **Traité de Tissage**. Manuel complet de la fabrication et de la composition des tissus, et spécialement de la draperie-nouveautés, par T. BONA, directeur de l'École de tissage et de dessin industriel de Verviers, membre de la Société industrielle, etc.

Cet ouvrage se compose de deux parties et de deux atlas.

La première partie, renfermant 192 pages de texte avec un atlas de 137 planches, traite des opérations préparatoires du tissage et des tissus ; c'est le résumé de tout ce qui a paru à l'auteur utile à la pratique intelligente du tissage.

La deuxième partie, de 171 pages avec un atlas de 56 planches, traite de la classification des tissus. « Il ne suffit plus, dit l'auteur, de produire bien et économiquement, il faut aussi savoir créer, et pour cela des études spéciales sont indispensables. » C'est dans le but de faciliter ces études et de les populariser que M. BONA a entrepris la rédaction de ce supplément au *Manuel*.

Les deux parties reliées ensemble, avec les deux atlas également reliés ensemble, se vendent 9 fr.

La première partie, qui se vend seule séparément, est du prix de 4 fr.

3. **Fabrication des Tissus imprimés**, impression des ÉTOFFES DE SOIE. Ouvrage accompagné de planches et enrichi de nombreux échantillons, par M. D^e KÆPPELIN, chimiste, directeur de fabriques d'impression sur étoffes. Deuxième édition augmentée d'un appendice. 1 vol., 142 p., 4 pl. et nombreux échantillons. 10 fr.

M. Kaepelin, avec l'autorité qui s'attache à une longue expérience, décrit successivement toutes les opérations de l'impression proprement dite, en commençant par celles qui les précèdent (blanchiment et mordantage) ; puis vient l'impression à la main, à la perrotine, au rouleau, à l'aide de pierres lithographiques. Des chapitres spéciaux sont consacrés au fixage, au lavage, à l'apprêt, à la fabrication des foulards, aux différents genres de dérivés, etc.

¹ Par erreur, le titre porte n^o 1.

4. Manuel de la **Literie**, par M. Jean DE LATERRIÈRE, manufacturier. 1 vol., 180 pages, avec 14 planches. 2 fr.

Ce manuel contient : 1° la description analytique, le genre de fabrication et le mode de traitement des meubles et objets mobiliers usités dans la literie ; 2° une série d'observations pratiques sur la composition et l'installation des lits dans les hôpitaux.

Quelque aride que puisse paraître le sujet traité par M. de Laterrière, abstraction faite de son incontestable utilité, l'auteur a su le parer de réflexions humoristiques qui font du *Manuel de la Literie* une lecture attrayante.

5. Traité théorique et pratique de la recherche, du travail et de l'exploitation commerciale des **Matières résineuses** provenant du pin maritime, par M. E. DROMART, ingénieur civil à Bordeaux. 1 vol., viii-96 pages, 3 planches 3 fr.

Après quelques mots sur le pin en général, M. Dromart donne les caractères chimiques de la gomme qui en découle, ainsi que ceux des essences de térébenthine et de la colophane qui en dérivent. Il compare les deux systèmes de gemmage usités dans les Landes et décrit tous les appareils nécessaires à la fabrication des produits résineux, avec les perfectionnements qu'on y a apportés. Le livre se termine par un aperçu de l'emploi des essences et des colophanes dans les principales industries.

8. Guide pratique de la **Fabrication des vernis**, par M. Henry VIOLETTE, ancien élève de l'École polytechnique, commissaire des poudres et salpêtres, membre de plusieurs sociétés savantes. 1 vol., 401 p., avec de nombreuses figures dans le texte. 5 fr.

« Nous avons cherché à faire connaître, dit M. Violette, les causes et les effets des réactions, les conditions du succès ; nous nous sommes efforcé de faire sortir l'art du vernisseur des obscurités de l'empirisme, pour le faire entrer dans le domaine de la science. Faire connaître les conditions nécessaires et suffisantes à remplir, en écartant les faits accessoires et inutiles, simplifier les recettes, faciliter et assurer les opérations, tel est le but que nous avons cherché à atteindre. »

Ce plan, largement conçu, a été ponctuellement réalisé, et M. Violette a passé successivement en revue les vernis à l'éther, à l'alcool, à l'essence et les vernis gras.

9. **Connaissance et Exploitation des Corps gras industriels**, contenant l'histoire des provenances, des modes d'extraction, des propriétés physiques et chimiques, du commerce des corps gras, des altérations et des falsifications dont ils sont l'objet, et des moyens anciens et nou-

veaux de reconnaître ces sophistications, par M. Théodore CHATEAU, chimiste, ex-préparateur au Muséum d'histoire naturelle ; ouvrage à l'usage des chimistes, des pharmaciens, des parfumeurs, des fabricants d'huiles, etc., des épurateurs, des fondeurs de suif, des fabricants de savon, de bougie, de chandelle, d'huiles et de graisses pour machines, des entrepositaires de graines oléagineuses et de corps gras, etc. 2^e édition, revue et augmentée. 1 volume, 386 pages ou tableaux, suivi d'un appendice nouveau. Br. 4 fr. Relié. 5 fr.

M. Chateau, en publiant la première édition de cet ouvrage, avait eu pour but de donner aux chimistes et aux manufacturiers une histoire aussi complète que possible des corps gras industriels employés tant en France qu'à l'étranger, et considérés au point de vue de leur provenance, de leur extraction, de leur composition, de leurs propriétés physiques et chimiques, de leur commerce et de leurs altérations spontanées ou frauduleuses.

Dans la nouvelle édition publiée dans notre *Bibliothèque*, M. Chateau a ajouté à sa monographie des corps gras un appendice renfermant quelques corrections indispensables et d'importantes additions.

11. **Armes et poudres de chasse**, par M. Louis ROUX, ingénieur des poudres. 1 vol. de 138 pages. 2 fr.

Ce livre renferme des indications précieuses pour tout chasseur qui veut se rendre compte des qualités de sa poudre et de l'arme qu'il emploie. Par sa position M. Roux a pu puiser ses renseignements aux sources officielles, et n'oublions pas que la fabrication de la poudre étant un monopole du gouvernement, il fallait un homme qui occupât une semblable position pour connaître les détails de toutes les expériences comparatives dont il rend compte. De plus, l'auteur du livre est un fervent chasseur et ce sont les observations qu'il a pu faire lui-même, qu'il communique au lecteur.

12. **Trois sources d'économies de combustible. Guide pratique du Constructeur d'appareils économiques de chauffage** pour les combustibles solides et gazeux, traitant des générateurs à gaz fixes et locomobiles, de l'application de la chaleur concentrée et du calorifique perdu aux chaudières à vapeur et aux fours de toute espèce, à l'usage des ingénieurs, architectes, fumistes, verriers, briquetiers, des forges, fabriques de zinc, de porcelaine, de faïence, d'acier, de produits chimiques ; des raffineries de sucre, de sel ; des industries métallurgiques et autres employant la chaleur ; par M. Pierre FLAMM, manufacturier, auteur d'un ouvrage qui a pour titre le *Verrier au dix-neuvième siècle*, 157 pages et 4 planches. 3 fr.

M. Flamm a pris pour épigraphe de son livre : *Non multa, sed multum*. Jamais devise n'a été plus fidèlement respectée. Dans ce traité tout est substantiel, rien n'est inutile. Les constructeurs y trouveront des données pratiques, et les grands industriels pourront, après l'avoir lu, se rendre compte des qualités que doivent posséder les appareils qu'ils font établir dans leurs usines ou dans leurs fabriques.

Le même auteur a publié dans le même format une excellente petite brochure qui a pour titre : Un chapitre sur la *verrière*, ou transformation complète de la *fabrication* actuelle du verre donnant les méthodes du chauffage aux gaz combustibles, les modes nouveaux de couler les glaces, le cristal, le flint et le *crown-glass*; de travailler le verre à vitres, la *gobellerie* et les *bouteilles*, de supprimer les creusets et le cneillage du verre sur les pots. 1 volume, 44 pages et 1 planche. 4 fr. 50.

13. Le livre de poche du **Charpentier**, application pratique à l'usage des CHANTIERS, des ÉLÈVES DES ÉCOLES PROFESSIONNELLES, etc. Collection de 140 ÉPURES, avec texte explicatif en regard, par M. J.-F. MERLY, charpentier, entrepreneur de travaux publics, membre de la Société industrielle d'Angers et de l'Académie nationale de Paris, auteur de l'Album du Trait théorique et pratique, etc. 1 vol., 287 pages. 5 fr. Relié. 6 fr.

A propos du *Livre de poche du charpentier*, nous répéterons ce qui a été dit d'un autre livre de M. Merly. Les deux ouvrages méritent les mêmes éloges.

• M. Merly n'est pas un savant qui doit s'efforcer d'oublier la technologie de l'École pour parler le langage ordinaire de la plupart de ses auditeurs. M. Merly, est au contraire, un ouvrier, un homme pratique, qui a cherché d'abord à se faire comprendre par les compagnons de travail auxquels il s'adressait, et qui est arrivé à des démonstrations si claires, à des explications si naturelles, que les théoriciens eux-mêmes ont bientôt eu à s'inspirer de ses travaux. Rien de plus net que ses dessins, rien de plus simple que ses préceptes : c'est en quelque sorte en se jouant qu'il arrive aux épreuves les plus compliquées. L'Album du trait théorique et pratique restera comme une preuve des résultats que peuvent donner l'intelligence, la persévérance et l'amour du travail. »

23. Guide pratique du **Bijoutier**. Application de l'harmonie des couleurs dans la juxta-position des pierres précieuses, des émaux et de l'or de couleur, par M. L. MOREAU, bijoutier et dessinateur. 1 vol., 108 pages avec 2 planches. 4 fr.

Ce petit livre est une protestation hardie contre l'esprit de routine. L'auteur a réuni les données fournies par la science sur l'harmonie et le contraste des couleurs, et comparant ces données aux observations

faites dans la pratique du métier, il a formé une théorie applicable à la bijouterie.

26. Guide pratique du **Joaillier**, ou Traité complet des pierres précieuses, leur étude chimique et minéralogique, les moyens de les reconnaître sûrement, leur valeur approximative et raisonnée, leur emploi, la description des plus extraordinaires et des chefs-d'œuvre anciens et modernes auxquels elles ont concouru, par M. Ch. BARBOT, ancien joaillier, inventeur du procédé de décoloration du diamant brut, membre de plusieurs sociétés savantes. 4 vol., 567 pages, 3 planches renfermant 178 figures représentant les diamants les plus célèbres de l'Inde, du Brésil et de l'Europe, bruts et taillés, et les dimensions exactes des brillants et roses en rapport avec leur poids, depuis un carat jusqu'à cent carats (*rare*). Relié. 10 fr.

Érit tout à la fois pour les praticiens et les gens du monde, ce guide donne, par ordre alphabétique, la description de toutes les pierres précieuses, en en indiquant l'aspect, la couleur, la dureté, l'éclat, la pesanteur spécifique, la composition chimique, la forme géométrique, le gisement, l'abondance et la rareté, l'emploi et le prix. — Un article spécial a été consacré au diamant, la pierre de prédilection de nos jours.

31. Guide pratique d'**Hydraulique** urbaine et agricole, ou Traité complet de l'établissement des conduites d'eau pour l'alimentation des villes, des bourgs, châteaux, fermes, usines, etc., comprenant les moyens de créer partout des sources abondantes d'eau potable, par M. Jules LAFFINEUR, ingénieur civil, etc. Ouvrage formant le complément du *Guide pratique de l'Ingénieur agricole* (voir plus loin, série H, n° 3). 2^e tirage, augmenté d'un supplément. 1 vol., 130 pages et 2 planches. 2 fr.

En publiant cet ouvrage, M. Laffineur a eu pour but de réunir en un faisceau les principales données de la science hydraulique expérimentale. On y trouvera réunis tous les renseignements, toutes les formules, toutes les applications pour la conduite des eaux.

35. **Fabrication du Papier et du Carton**, par M. A. PROUTEAUX, ingénieur civil, ancien élève de l'École centrale des arts et manufactures, directeur de la papeterie de Thiers (Puy-de-Dôme). 1 vol., 273 p. et atlas de VII planches doubles gravées sur acier avec leurs légendes en regard, 4 fr. Relié. 3 fr.

Après avoir énuméré et classé méthodiquement les diverses matières premières, l'auteur nous initie aux détails de fabrication et nous

décrit les nombreuses transformations que subit le chiffon avant de sortir de la cuve ou de la machine sous forme de papier. Il nous apprend à connaître et à distinguer les différentes espèces de papier, leurs formats, leurs poids, leurs dimensions, et décrit les diverses machines qui constituent le matériel d'une papeterie. — Un éditeur américain s'est empressé de faire traduire en anglais l'ouvrage de M. Prouteaux.

43. Guide pratique du **Parfumeur**. Dictionnaire raisonné des **Cosmétiques** et **Parfums**, contenant la description des substances employées en parfumerie, les altérations ou falsifications qui peuvent les dénaturer, etc., les formules de plus de 300 préparations cosmétiques, huiles parfumées, poudres dentifrices épilatoires, eaux diverses, extraits, eaux distillées, essences, teintures, infusions, esprits aromatiques, vinaigres et savons de toilette, pastilles, crèmes, etc. Ouvrage entièrement nouveau présentant des considérations hygiéniques sur les préparations cosmétiques qui peuvent offrir des dangers dans leur emploi, par M. le docteur Adolphe-Benestor LUNEL, chimiste, membre des Académies impériales des sciences de Caen, Chambéry, etc., ancien professeur de chimie et d'histoire naturelle, etc. 1 vol., 215 pages. 5 fr.

44. Guide pratique de l'**Épicerie**, ou Dictionnaire des denrées indigènes et exotiques en usage dans l'économie domestique, comprenant : l'étude, la description des objets consommables ; les moyens de constater leurs qualités, leur nature, leur valeur réelle ; les procédés de préparation, d'amélioration et de conservation des denrées, etc. ; contenant en outre la fabrication des liqueurs, le collage des vins, etc., enfin les procédés de fabrication d'une foule de produits que l'on peut ajouter au commerce de l'épicerie, par le docteur Benestor LUNEL, membre de plusieurs sociétés savantes. 1 vol. de 236 pages. 2 fr.

Nous n'avons rien à ajouter aux titres de ces deux ouvrages qui indiquent leur utilité. Nous devons seulement constater que le docteur Lunel a consciencieusement rempli le cadre qu'il s'était tracé.

48. Guide pour l'essai et l'analyse des **Sucres** indigènes et exotiques, à l'usage des fabricants de sucre. Résultats de 200 analyses de sucres classés d'après leur nuance, par M. Emile MONIER, ingénieur chimiste, ancien élève de l'École centrale des arts et manufactures, membre de la Société de chimie de Paris. 1 vol., 96 p., avec figures dans le texte et tableaux. 2 fr.

L'auteur, après avoir rappelé les propriétés générales des substances saccharifères, donne les méthodes les plus simples qui permettent de doser avec précision ces mêmes substances. Quelques notes sur l'altération et le rendement des sucres soumis au raffinage terminent le travail de M. Monier, dont M. Payén a fait un éloge mérité devant l'Académie des sciences.

(Pour la culture de la *Canne à sucre*, voir série II, n° 50.)

(Pour la *Culture et l'Alcoolisation de la Betterave*, voir série G, n° 1.)

48. bis. Guide pratique du **Féculier** et de l'**Amidonnier**, suivi de la conversion de la fécule et de l'amidon en dextrine sèche et liquide, en sirop de glucose, sirop de froment, sirop impondérable ; en sucre de raisin, sucre massé, sucre granulé et cassonade, en vin, bière, cidre, alcool et vinaigre, ainsi que leur application dans beaucoup d'autres industries, par M. L.-F. DUBIEF, chimiste. 1 vol. de 267 pages. 6 fr.

50. Traité de la fabrication des **Liqueurs** françaises et étrangères sans distillation. 3^e édition, augmentée de développements plus étendus, de nouvelles recettes pour la fabrication des liqueurs, du kirsch, du rhum, du bitter, la préparation et la bonification des eaux-de-vie et l'imitation de celles de Cognac, de différentes provenances, de la fabrication des sirops, etc., etc., par M. L.-F. DUBIEF, chimiste oenologue, 1 vol., 288 pages. 4 fr.

Ce traité est formulé en termes clairs et familiers ; la personne la moins expérimentée dans l'art du distillateur qui en lira attentivement les préceptes pourra sans aucun guide devenir un bon fabricant après quelques essais.

60. **Essai et dosage des huiles** employées dans le commerce ou servant à l'alimentation, des savons et de la farine de blé ; manuel pratique à l'usage des commerçants et des manufacturiers, par Cyrille CAILLETET, pharmacien de première classe, etc. 1 vol., 104 pages. 3 fr.

Ce guide décrit avec clarté des procédés nouveaux et pratiques pour découvrir la sophistication des huiles, pour l'analyse prompt des savons et pour l'essai commercial de la farine de blé. Les procédés de M. Cailletet ont à leur tour subi la pierre de touche de l'expérience ; la Société industrielle de Mulhouse a couronné en 1837 et en 1839, le dosage des huiles mélangées et celui des savons. La Société des arts, sciences et belles-lettres de Paris a couronné en 1833, l'essai de la farine de blé.

En préparation : Teinturier et préparation des matières tinctoriales. — Fabrication des couleurs. — L'Ouvrier mé-

canicien, ou Mécanique de l'atelier (paraîtra le 1^{er} mai 1869). — Le Forgeron et l'Ouvrier forgeron. — Menuisier modeleur. — Ebéniste. — Tourneur en bois. — Sculpteur. — Tapissier, ameublement, etc. — Serrurier. — Ajusteur et tourneur en métaux. — Fondeur et mouleur. — Ferblantier. — Marqueteur. — Chaudronnier. — Horloger-mécanicien. — Graveur. — Luthier. — Brocheur, relieur et cartonier. — Vitrification (Fabrication des). — Faïencier. — Peinture sur verre et sur porcelaine. — Imprimeur typographe. — Imprimeur-lithographe et en taille douce. — Charbonnage, coke, tourbe. — Fabrication du gaz. — Huiles. — Bougies et chandelles. — Fabrication des savons. — Meunerie et Boulangerie. — Saunier. — Cuisinier. — Sommelier — Pâtissier. — Distillation. — Fabrication des bières. — Pharmacien. — Fabrication du sucre. — Raffinage. — Chocolatier, confiseur, etc. — Pharmacien-droguiste. — Instrument de précision. — Préparation et filature du chanvre et du lin. — Blanchiment. — Blanchissage et buanderie. — Naturaliste préparateur. — Herboriste. — Conservation des bois.

SÉRIE H.

**AGRICULTURE, JARDINAGE, HORTICULTURE,
EAUX ET FORÊTS, — CULTURES INDUSTRIELLES,
ANIMAUX DOMESTIQUES, — APICULTURE,
PISCICULTURE, ETC.**

3. **Ingénieur agricole** (L'), hydraulique, dessèchement, drainage, irrigations, etc.; suivi d'un appendice contenant les lois, décrets, règlements et instructions ministérielles qui régissent ces matières, par M. Jules LAFFINEUR, ingénieur civil et agronome, membre de plusieurs sociétés savantes, etc. 1 vol., 266 pages et 3 planches. 3 fr.

Le *Guide pratique d'hydraulique* (série G, n° 31), du même auteur, s'adresse plus particulièrement aux habitants des villes, aux grands propriétaires, à ceux qui ont mission d'étudier ou d'établir des conduites d'eau. L'*Ingénieur agricole* s'occupe plus spécialement des travaux de la campagne. Les agriculteurs y trouveront des notions précises sur les travaux qu'il est de leur intérêt de faire exécuter, et des renseignements exacts sur leurs droits et leurs devoirs.

4. **Guide pratique pour le bon aménagement des Habitations des animaux**: les Bergeries, les Porcheries, les Habitations des animaux de la basse-cour, Clapiers, Oisele-

rie et Colombiers, par M. Eug. GAYOT, membre de la Société impériale et centrale d'agriculture de France. 1 volume de 355 pages et 31 figures dans le texte. 3 fr.

5. **Guide pratique pour le bon aménagement des Habitations des animaux**: les Ecuries et les Etables, par le même. 1 vol., 208 pages et 63 figures dans le texte. 3 fr.

Aucun animal ne saurait être développé dans ses facultés natives, dans ses aptitudes propres, et produire activement dans le sens de ces dernières si on ne le place dans les meilleures conditions d'alimentation, de logement, de multiplication. M. Gayot, avec l'autorité d'une longue expérience, a réuni dans ces deux volumes les conditions générales d'établissement et les dispositions particulières aux diverses espèces d'animaux.

- 6 et 7. **Eléments des Sciences physiques appliquées à l'agriculture**, par M. A.-F. POURIAU, docteur ès-sciences, ancien élève de l'École centrale, etc., en deux volumes, savoir :

6. 1^o *Chimie inorganique*, suivie de l'étude des marnes, des eaux et d'une méthode générale pour reconnaître la nature d'un des composés *minéraux* intéressant l'agriculture ou la médecine vétérinaire. 1 vol., 512 p., 153 figures dans le texte et tableaux. Br. 6 fr. Relié. 7 fr.

7. 2^o *Chimie organique*, comprenant l'étude des éléments constitutifs des végétaux et des animaux, des notions de physiologie végétale et animale, l'alimentation du bétail la production du fumier, etc., par le même. 1 vol., 541 p., 66 figures dans le texte et tableaux. Br. 6 fr. Relié. 7 fr.

On ne fait plus l'éloge des livres de M. Pouriau. M. Pouriau est professeur et sous-directeur à l'École impériale d'agriculture de Grignon; l'élection l'a fait secrétaire-général de la Société impériale d'agriculture de Lyon; voilà quelques-uns des titres de l'homme; quant à ses ouvrages, ils sont promptement devenus classiques, et ils sont en même temps consultés avec fruit par les gens du monde.

(Voir aussi plus loin n° 55).

8. **Drainage**, résultats d'observations et d'expériences pratiques faites par M. C.-E. KIELMANN, directeur de l'École agricole de Haasensfeld (Prusse), et publiées à l'usage des agriculteurs français, par C. HOMBURG. 1 vol., 104 pages avec figures dans le texte. 4 fr.

La plupart des ouvrages publiés sur le drainage sont le résultat d'études théoriques que l'expérience n'a pas encore sanctionnées. M. Kielmann est entré dans une autre voie: il n'a eu recours à la

théorie qu'autant que cela était nécessaire pour expliquer certains phénomènes. Comme il le dit dans sa préface, il voulait offrir à ceux qui commencent à s'occuper du drainage, et même au simple paysan, un manuel tel que le lecteur pût dire, après l'avoir parcouru : C'est facile à comprendre, désormais je pourrai travailler. — Ce but, le succès du *Guide pratique du drainage* le prouve, a été largement atteint.

9. **Chimie agricole.** Leçons familières sur les notions de chimie élémentaire utiles au cultivateur et sur les opérations chimiques les plus nécessaires à la pratique agricole, par M. N. BASSET, auteur de plusieurs ouvrages d'agriculture et de chimie appliquée. 1 vol., 336 p. avec figures dans le texte. 3 fr.

L'auteur, laissant de côté les grands mots et les formules scientifiques, a cherché, avant tout, à se rendre intelligible à tous. Dans une série de leçons familières, après avoir prouvé la nécessité de la chimie pour l'agriculture, il a successivement traité de l'analyse des sols, des amendements, de la composition des plantes, de celle des animaux, de quelques industries agricoles, etc. Des observations succinctes et des notions intéressantes sur divers sujets complètent cette *Chimie agricole*.

(Voir aussi même série n° 55).

11. **Guide pratique des Conférences Agricoles**, par M. Louis GOSSIN, cultivateur, professeur d'agriculture dans l'Oise, etc. 1 vol., XII-112 pages. 1 fr.

(Ouvrage recommandé officiellement pour les écoles normales, etc.)

14. **Guide pratique pour le choix de la Vache Laitière**, par M. ERNEST DUBOS, vétérinaire de l'arrondissement de Beauvais, professeur de zootechnie à l'Institut agricole de la même ville. In-18, 132 pages et planches. 2 fr.

Les diverses méthodes pour le choix des vaches laitières sont résumées dans ce livre. Les agriculteurs et les éleveurs y trouveront l'indication des signes qui peuvent les guider pour la conservation et l'acquisition des animaux qui conviennent le mieux à leurs exploitations. — Les figures représentant les diverses races de vaches laitières sont remarquables.

17. **Éducation lucrative des lapins**, ou **Traité de la race cuniculine**, suivi de l'Art de mégisser leurs peaux et d'en confectionner des fourrures, par M. MARIOT-DIDIEUX, vétérinaire en premier attaché aux remotes de l'armée, membre de plusieurs sociétés savantes. 1 vol., 136 p. 2 fr.

L'industrie de l'éducation de la race cuniculine est créée et elle mar-

che vers le progrès. C'est dans le but de la voir se propager dans les campagnes comme une des industries peut-être les plus propres à tarir les sources du paupérisme et de la misère que l'auteur a publié cette nouvelle édition de son *Guide pratique*, en l'enrichissant d'un grand nombre de données nouvelles. En résumé, l'auteur démontre qu'aucune viande ne peut être produite à aussi bon marché que celle du lapin.

18. **Éducation lucrative des poules**, ou **Traité raisonné de gallinoculture**, par le même. 1 vol., 444 pages. 3 fr. 50

L'éducation, la multiplication et l'amélioration des animaux qui peuplent les basses-cours ont fait depuis une quinzaine d'années de notables progrès. Répondant à un besoin de l'économie domestique, l'auteur de ce guide pratique a voulu faire un traité complet de gallinoculture dans lequel, après des considérations historiques, anatomiques et physiologiques sur les poules, il décrit les caractères physiques et moraux de quarante-deux races, apprend à faire un choix parmi ces races si diverses et indique les moyens de conservation et de multiplication des individus. Des chapitres spéciaux sont consacrés aux maladies, à la pharmacie gallinée, à la statistique des poules et des œufs de la France, etc.

19. **Éducation lucrative des Oies et des Canards**, par le même. 1 vol., 180 p., avec de nombreuses figures dans le texte. 1 fr. 50

Ces deux monographies sont à la fois utiles, instructives et amusantes. L'auteur décrit les mœurs particulières de chaque espèce et indique le genre de nourriture favorable à leur multiplication et propre à donner des bénéfices aux éleveurs. Toutes ces notions, parsemées de données historiques, d'anecdotes, de réflexions philosophiques, offrent une lecture des plus attrayantes.

20. **Guide pratique du Pisciculteur**, par M. Pierre CARBONNIER, pisciculteur, fabricant d'appareils à éclosion, membre de la section des poissons de la Société impériale d'acclimatation et de plusieurs sociétés savantes, etc. 1 vol., 200 pages, avec de nombreuses figures dans le texte. 2 fr.

Ce n'est pas comme un théoricien ou un savant systématique que M. Carbonnier se présente à ses lecteurs : ce sont les résultats pratiques qu'il a obtenus dans la *pisciculture* construite et exploitée par lui à Champigny, qui lui donnent le droit d'indiquer les méthodes et les systèmes qui lui ont le mieux réussi, c'est-à-dire qui lui ont donné les résultats les plus profitables. Le *traité de pisciculture* est suivi d'une notice sur les poissons d'eau douce qui vivent dans nos climats, leurs formes, leurs habitudes; enfin les particularités relatives à la culture artificielle de chacun d'eux. Un appendice est consacré aux *aquariums* d'appartement.

(Pour l'*Ostréiculture*, voir même série n° 52.)

21. Guide pratique du **Chasseur médecin**, ou *Traité complet sur les maladies du chien*, par M. Francis CLATER, vétérinaire anglais; traduit de l'anglais sur la 27^e édition. 3^e édition française, corrigée et augmentée, par M. MARIOT-DIDIEUX, vétérinaire en premier attaché aux remontes de l'armée, etc. 1 vol., 189 pages. 2 fr.

La mention que ce livre a eu en Angleterre, vingt-sept éditions, dispense de tout commentaire. Le guide que nous avons placé dans notre Bibliothèque en est la troisième édition française. M. Mariot-Didieux, le savant vétérinaire, en acceptant la révision de cette édition, s'est attaché à supprimer dans le texte original des formules trop compliquées, à en simplifier d'autres et à en ajouter de nouvelles. Ainsi entièrement refondu, l'ouvrage est véritablement un traité complet sur les maladies du chien, traité auquel un chapitre sur l'art de mégisser les peaux pour en faire des tapis sert de complément.

28. Manuel pratique de **Culture maraîchère**, par M. COURTOIS-GÉRARD, marchand grainier, horticulteur. 4^e édition, augmentée d'un grand nombre de figures et de plusieurs articles nouveaux. Ouvrage couronné d'une médaille d'or par la Société impériale et centrale d'agriculture, d'une grande médaille de vermeil par la Société impériale et centrale d'horticulture. 1 vol., 396 pages, 88 figures dans le texte. Br., 3 fr. 50. Relié. 5 fr.

Outre les récompenses honorifiques qui viennent d'être mentionnées, l'auteur de ce manuel a obtenu une attestation qui garantit la valeur de son travail aux yeux du public, en même temps qu'elle constate l'exactitude de ses recherches et l'utilité des notions renfermées dans son ouvrage. Cette attestation émane de vingt-cinq jardiniers-maraîchers de la ville de Paris qui, après avoir entendu la lecture du travail de M. Courtois-Gérard, déclarent qu'ils lui donnent toute leur approbation, comme étant conforme aux bonnes méthodes de culture en usage parmi eux et autorisent l'auteur à le publier sous leur patronage. Cet ouvrage est officiellement recommandé pour les écoles normales, etc.

Cette nouvelle édition a été augmentée d'un chapitre sur la culture des porte-graines et d'un vocabulaire maraîcher.

32. Guide pratique pour la **Culture des plantes fourragères**, par M. A. Gobin, ancien élève de l'École impériale de Grand-Jouan, directeur de la colonie pénitentiaire du Val-d'Yèvres (Cher).
- 1^{re} *Première partie* : PRAIRIES NATURELLES, irrigations, pâturages, avec un appendice reproduisant les lois du 21 juin 1866 sur les associations agricoles. 1 vol., 284 pages, avec nombreuses figures. 3 fr.

33. 2^e **Plantes fourragères**, *deuxième partie*, par le même auteur : PRAIRIES ARTIFICIELLES, *Plantes-racines*. 1 vol. de 388 p. et 87 figures. 3 fr. 50

Les fourrages sont la base de toute culture, et il est admis aujourd'hui, par tous les agriculteurs intelligents, que pour avoir du blé il faut faire des prés. M. Gobin a voulu rédiger un guide tout pratique, indiquant tout ce qui doit être observé pour obtenir les meilleurs résultats et éviter les dépenses inutiles; mais, comme il le dit dans sa préface, si le titre même de son livre lui a fait une loi de se restreindre à la culture des plantes fourragères et de s'abstenir de considérations scientifiques inutiles au but qu'il poursuit, il ne s'est pas interdit les applications pratiques des sciences en tant qu'elles se rapportent à l'explication des phénomènes ou à l'amélioration des méthodes de culture. « C'est là, en effet, dit-il, ce que nous entendons par la pratique, et non point la seule routine manuelle, qui consiste à savoir tenir les mancherons de la charrue, charger une voiture de gerbes ou manier la faux, celle-ci suffit à un ouvrier, celle-là est nécessaire au moindre cultivateur intelligent. »

C'est donc la *pratique intelligente* qui a dicté ce guide qui a obtenu promptement le succès qu'il mérite.

38. **Culture de l'Olivier**, son fruit et son huile, par M. Joseph REYNAUD (de Nîmes), négociant et manufacturier. 1 vol., 300 pages. 3 fr.

Ce livre est le fruit de trente-cinq années de durs travaux, de longues veilles, de nombreux voyages, de recherches patientes, de minutieuses expériences: aussi a-t-il été l'objet de nombreuses distinctions, et les procédés de M. J. Reynaud n'ont pas tardé à être pratiqués chez un grand nombre d'extracteurs d'huile.

40. Guide pratique du **Vigneron**, culture, vendange et vinification, par FLEURY-LACOSTE, président de la Société centrale d'agriculture du département de la Savoie, membre de plusieurs sociétés savantes. 1 vol., 137 pages. 2 fr.

Il existe un grand nombre de livres sur l'art de faire le vin. Malheureusement, il en est beaucoup qui ne sont que des reproductions presques serviles d'ouvrages antérieurs, tandis que d'autres ne présentent que le résultat d'expériences personnelles, de systèmes individuels.

M. Fleury-Lacoste est à la fois un homme instruit et un homme pratique. Dans son *Guide du vigneron* il a su éviter ces deux écueils; son livre sera consulté avec fruit, et l'on peut avec confiance en adopter les préceptes. Au surplus, S. Exc. M. le ministre de l'agriculture, certes plus compétent que nous, vient d'engager M. Fleury-Lacoste à poursuivre ses études en souscrivant à son excellent petit

traité. C'est bien là le meilleur éloge que l'on puisse faire de cet ouvrage.

41. Manuel pratique de **Jardinage**, contenant la manière de cultiver soi-même un jardin ou d'en diriger la culture, par M. COURTOIS-GÉRARD, marchand grainier, horticulteur, 6^e édition. 1 vol., 396 pages, 1 planche et de nombreuses figures dans le texte. Br., 3 fr. 50. Relié. 4 fr. 50.

Nous renvoyons à la note accompagnant le n^o 28 (*Manuel de culture maraîchère*) pour les titres de M. Courtois-Gérard à la confiance publique. Dans le *Manuel du jardinier*, les jardiniers de profession trouveront des conseils, des détails nouveaux et des renseignements pratiques qu'ils peuvent ignorer; le propriétaire et l'amateur de jardin y puiseront des instructions précises et claires qui leur éviteront toute espèce de méprises et d'erreurs.

42. Guide pratique de la culture du **Saule** et de son emploi en agriculture, notamment dans la création des oseraies et des saussaies, avec un appendice sur la culture du **Roseau**, par M. M.-J. KOLTZ, chevalier de l'ordre R. G. D. de la Couronne de chêne, agent des eaux et forêts, etc., etc. Vol. in-18, 144 pages et 35 figures dans le texte. 2 fr.

Ce travail a pour objet de faire ressortir les avantages que procure la culture du saule dans les terrains qui lui conviennent, et qui, le plus souvent, ne peuvent être rendus productifs qu'à l'aide de cette essence. M. Koltz donne donc le moyen de mettre en produit des terrains vagues, et à ce point de vue, son traité est un véritable service rendu à l'agriculture.

Dans certains parages, le roseau commun forme le complément obligé de l'osier: l'appendice que M. Koltz a consacré à cette plante renferme des détails fort intéressants, surtout pour les propriétaires de terrains aujourd'hui tout à fait improductifs.

43. Guide pratique de la **Culture du coton**, par le docteur ADRIEN SICARD, secrétaire général de la Société d'horticulture et du comité d'agriculture pratique de Marseille, etc. 1 vol., 143 pages, avec figures dans le texte. 2 fr.

Ce guide, écrit par un homme compétent, est le fruit de longues études pratiques. Lorsque M. Sicard fait une affirmation, c'est qu'il parle de visu et d'après ses propres expériences. Ainsi, les figures intercalées dans le texte, et qui donnent une idée exacte du cotonnier et des détails du coton, ont été photographiées d'après nature par lui-même et par l'un de ses fils.

45. Guide pratique du tracé et de l'ornementation des **Jardins d'agrément**, par M. T. BONA, ancien architecte, directeur de l'École de dessin industriel de Verviers, 1 vol.,

304 pages. 4^e édition, complètement refondue et ornée de 238 figures dans le texte. Br., 2 fr. 50. Relié. 3 fr. 50.

Il existe quelques ouvrages spéciaux sur la composition et l'ornementation des jardins: malheureusement, ils sont généralement d'un prix élevé, et puis la plupart des auteurs arborent des prétentions qui se traduisent par la classification qu'ils ont adoptée: ils ont, en fait de jardins, des genres *graves*, *terribles*, *mélancoliques*, *riants*, *lugubres*, etc.; M. Bona pense qu'il faut étudier le terrain dont on dispose et l'embellir par des créations conformes à sa situation.

46. Guide pratique de la **Culture du caféier et du cacaoier**, suivi de la fabrication du chocolat, par M. P.-H.-F. BOURGOIN D'ORLÉ. 1 vol., 100 pages. 2 fr.

Ce livre est le fruit d'une longue expérience acquise par l'auteur dans une pratique de plusieurs années et par ses propres observations en Asie et en Amérique.

48. **Acclimatation des animaux domestiques**. Étude des animaux destinés à l'acclimatation, la naturalisation et la domestication: Animaux domestiques, méthodes de perfectionnement, mammifères, oiseaux, poissons, insectes, vers à soie; précédée de Considérations générales sur les climats, de l'Exposé des diverses classifications d'histoire naturelle, etc., pouvant servir de *Guide au Jardin d'acclimatation*; par M. le docteur B. LUNEL, ancien professeur d'histoire naturelle. 1 vol., 188 pages, avec fig. dans le texte. 2 fr.

M. le Docteur Lunel a résumé d'une manière concise dans ce guide les notions concernant l'acclimatation disséminées dans un grand nombre d'ouvrages volumineux. Ce livre sera consulté avec fruit par toutes les personnes qu'intéresse la grande question de l'acclimatation.

49. Guide pratique d'**Entomologie agricole**, et petit traité de la destruction des insectes nuisibles, par M. H. GOBIN. 1 vol., 279 pages, avec fig. dans le texte. 3 fr.

Ce traité, d'une lecture attrayante, dissimule un grand fonds de science sous des apparences légères. Le volume se compose de lettres familières adressées à un nouveau propriétaire rural. Tous les insectes qui s'attaquent aux champs et à leurs produits et aux animaux y sont passés en revue, et, ce qui est mieux encore, l'auteur a indiqué le moyen de se débarrasser de cette engeance envahissante. Le livre est terminé par des nomenclatures scientifiques avec les noms français.

50. Guide pratique de la **Culture de la canne à sucre**, et Traité de la sucrerie exotique, par M. P.-H.-F. BOURGOIN D'ORLÉ. 1 vol. de 156 pages. 2 fr.

Ce guide n'est pas, comme beaucoup de manuels, un livre fait avec d'autres livres. M. Bourgoïn d'Orli s'est, pendant de longues années, livré à une étude toute spéciale de la canne à sucre et de sa culture dans plusieurs contrées équatoriales et tropicales. Il a réuni dans ce volume, comme il l'a fait pour le caféier, le résultat de son expérience et de ses observations personnelles.

La manipulation du sucre est complètement traitée dans cet ouvrage indispensable aux propriétaires et aux cultivateurs qui veulent mettre en sucreries tout ou partie de leurs possessions dans les colonies.

(Pour l'*Essai des sucres*, voir série G, n° 48).

(Pour la *betterave et son alcoolisation*, voir série G, n° 1).

52. Guide pratique de l'*Ostréiculteur* ou Culture des huîtres et procédés d'élevage et de multiplication des races marines comestibles, par M. Félix FRAICHE, professeur de sciences mathématiques et naturelles. 1 vol., 175 pages, avec figures dans le texte. 3 fr.

Les chemins de fer et la navigation, en diminuant les distances, ont créé pour les races marines comestibles des débouchés qui leur avaient manqué jusqu'alors. De là, et d'autres causes que M. Fraiche indique, l'appauvrissement des bancs d'huîtres. L'auteur, qui s'est inspiré des travaux de M. Coste, démontre que l'ostréiculture est une industrie facile à créer et à développer, et qui donne des résultats rémunérateurs à ceux qui savent l'exploiter.

(Pour la *Pisciculture*, voir même série, n° 22).

52 bis. Richesse de l'agriculture. — Guide pratique de la *Vidange agricole*, à l'usage des agronomes, propriétaires et fermiers. Description de moyens faciles, économiques, salubres et pratiques de recueillir, de désinfecter et d'employer utilement en agriculture l'engrais humain, par M. J.-H. TOUCHET, ancien chef de service à la Comp. Richer. 2^e édition. 1 vol. de 88 pages avec figures. 1 fr.

Les pages de M. Touchet sont riches en enseignements : son guide, en ce qui concerne les vidanges et les différentes manières d'employer l'engrais humain, est le résumé des meilleures méthodes pratiquées actuellement. Les constructeurs, les entrepreneurs, les propriétaires, les fermiers y trouveront tous des indications utiles.

53. Manuel du *Chimiste-Agriculteur*, par A.-F. POURIAU, docteur ès-sciences, ancien élève de l'École centrale, etc., 1 vol., 460 pages, 148 figures et de nombreux tableaux, suivi d'un appendice. Br., 5 fr. Relié. 6 fr.

*Ce volume forme en quelque sorte le complément de la *Chimie organique* et de la *Chimie inorganique*. Il fait connaître les diverses manipulations qui sont décrites avec un très-grand soin. Il contient,

en outre, un grand nombre d'indications d'une utilité toute pratique. (Voir plus haut, série H, nos 6 et 7).

56. Guide pratique élémentaire de *Botanique* et *Traité de Physiologie végétale* appliquée à la culture des plantes, par M. Léon LEROLLE, ancien élève de l'École impériale d'agriculture du Grand-Jouan, membre de la Société d'horticulture de Marseille. 1 vol., VIII-464 pages, avec 108 figures dans le texte. 3 fr.

Dans ce traité, simple dans sa forme, mais rigoureusement exact quant au fond, l'auteur a eu pour but de donner la science en guide à la pratique, et il présente au cultivateur des explications rationnelles sur les phénomènes qui s'accomplissent journellement dans les champs, les forêts et les jardins. M. Lerolle s'est étendu principalement sur les points de la physiologie végétale où les différentes branches de culture trouveront d'utiles applications. Les nombreuses gravures sur bois qui éloquent le texte en rendent la lecture attrayante, même pour les gens du monde.

57. Manuel des *Constructions rurales*, par M. T. BONA, avec figures dans le texte. 1 vol. de 296 pages. 3 fr. 30.

En préparation : Traité complet d'agriculture. — Fabrication, choix et emploi des engrais. — Guide pratique de l'éleveur du cheval (production, élevage et utilisation). — Élevage des bœufs. — Élevage des moutons. — Élevage des porcs. — Élevage et entretien des oiseaux de volière. — Le berger. — Sériciculture. — Animaux de basse-cour en général. — Fabrication du fromage. — Laiterie et fabrication du beurre. — Culture des céréales. — Défrichement des landes et des bruyères. — Culture du sorgho. — Culture du tabac. — Culture du mûrier. — Culture du houblon. — De la culture et de l'aménagement des forêts. — Pépiniériste. — Arboriculture.

SÉRIE I.

ÉCONOMIE DOMESTIQUE, COMPTABILITÉ, LÉGISLATION, MÉLANGES.

1. Guide pratique de la *Fabrication des vins factices* et des boissons vineuses en général, ou Manière de fabriquer soi-même les vins, cidres, poirés, bières, hydromels, piquettes et toutes sortes de boissons vineuses, par des procédés faciles, économiques et des plus hygiéniques, par M. L.-F. DUBIEF, chimiste, auteur de plusieurs ouvra-

ges qui ont mérité les honneurs de la réimpression en France et à l'étranger. 1 vol., 72 pages. 1 fr. 50

L'auteur a publié ce petit ouvrage, non-seulement pour venir en aide aux personnes économes, mais encore, et plus, pour celles dont l'économie est une nécessité. Si elles suivent les prescriptions qui y sont indiquées, elles peuvent être assurées de bien fabriquer elles-mêmes et avec facilité toutes sortes de vins, bières, cidres, etc.

2. Guide pratique d'**Economie domestique**, publié sous forme de dictionnaire, contenant des notions d'une application journalière, chauffage, éclairage, blanchissage, dégraissage, préparation et conservation des substances alimentaires, boissons, liqueurs de toutes sortes, cosmétiques, soins hygiéniques, médecine, pharmacie, etc., etc., par M. le Dr B. LUNEL, médecin-chimiste, etc. 1 vol., 227 pages. 1 fr.

L'économie domestique, longtemps dédaignée, est élevée aujourd'hui au rang de science. Le guide de M. le docteur Lunel, sous la forme commode de dictionnaire, constitue une véritable encyclopédie de cette science nouvelle.

3. Le **Mouvement industriel et commercial en 1864-1865** (Chemins de fer, — Navigation intérieure, — Navigation maritime), par M. Amédée SÉBILLOT, ingénieur, ancien élève de l'École centrale des arts et manufactures. 1 vol., XVI-216 p. 2 fr.

M. Sébillot ne s'est pas contenté d'être l'historiographe du mouvement industriel, il indique les voies ouvertes à la grande industrie. Son livre abonde en conseils qui méritent d'être médités.

6. Les droits des **inventeurs en France et à l'étranger**. Conseils généraux, — Brevets d'invention, — Péremption, — Vente, — Licences, — Exploitation, — Géographie industrielle, — Marques de fabrique, — Dessins, — Objets d'utilité, par M. H. DUFRENÉ, ingénieur civil, ancien élève de l'École impériale des arts et manufactures, etc. 1 vol. de 108 pages. 2 fr. 50

Ce livre est un guide indispensable pour les inventeurs qui veulent demander un brevet et pour ceux qui en possèdent déjà, soit en France, soit à l'étranger. Pour tous, M. Dufrené a de bons conseils. D'après ses indications, résultant d'une longue pratique, on peut prévoir presque avec certitude les résultats que doivent ou que peuvent produire les inventions ou les perfectionnements, d'après la nature des brevets et les pays où on veut les exploiter.

7. **La liberté et le courtage des marchandises**, commen-

taire pratique de la loi du 18 juillet 1866, par VICTOR EMION, avocat à la Cour impériale de Paris. Vol. de 142 pages. 1 fr.

L'application pratique de la nouvelle loi sur le courtage des marchandises devait donner lieu à de nombreuses difficultés; ce sont ces difficultés que M. V. Emion s'est étudié à prévoir et à résoudre dans son commentaire, suivi d'un appendice qui renferme de nombreux documents intéressants tous les commerçants.

12. Manuel pratique et juridique des **Expropriés pour cause d'utilité publique**, suivi de deux tableaux donnant le chiffre de la valeur du mètre de terrain dans Paris et faisant connaître les principales indemnités accordées aux industriels négociants et commerçants expropriés, par M. VICTOR EMION, avocat à la Cour impériale de Paris. Vol. de 125 pages. 1 fr.

Ce manuel est le résumé simple et concis des règles pratiques que les expropriés ont intérêt à connaître pour se diriger dans la défense de leurs droits. En étudiant ce manuel, les expropriés sauront qu'avant de se présenter devant le jury, ils n'ont que peu ou point de formalités à remplir et *pas de frais* à déboursier. Ils y apprendront encore qu'en général les traités souscrits d'avance avec des intermédiaires ne sont *habituellement* avantageux que pour ceux qui contractent avec l'exproprié.

Les tableaux de la valeur du mètre dans les différents arrondissements de Paris et des principales indemnités accordées par le jury offrent un très-grand intérêt pour les propriétaires et les locataires.

14. Guide pratique d'**Hygiène et de Médecine usuelle**, complété par le traitement du choléra épidémique, par le docteur B. LUNEL, chimiste, membre des Académies impériales des sciences de Caen, etc., ancien médecin commissionné pour les épidémies, etc. 1 vol., 209 pages. 1 fr. 50

Ce livre ne s'adresse à aucune spécialité de lecteurs et convient à tout le monde. Il se subdivise en hygiène privée et en hygiène publique. Dans la première partie, l'auteur examine dans quelle mesure l'homme qui veut conserver sa santé doit, selon son âge, sa constitution et les circonstances dans lesquelles il se trouve, user des choses qui l'environnent et de ses propres facultés, soit pour ses besoins, soit pour ses plaisirs. Dans la seconde, il s'occupe de tout ce qui concerne la salubrité publique. Un chapitre spécial est consacré à la médecine des accidents.

16. Manuel pratique d'**Ethnographie**, ou Description des races humaines; les différents peuples, leurs caractères naturels, leurs caractères sociaux; divisions et subdivisions des différentes races humaines, par M. le baron J.

D'OMALIUS D'HALLOY. 3^e édition. 4 vol., 127 pages, avec 1 planche coloriée. 3 fr.

Après avoir exposé les principes généraux de l'ethnographie, l'auteur décrit les races, rameaux, familles et peuples que l'on distingue dans le genre humain. Le *Manuel d'ethnographie* est terminé par des tableaux synoptiques représentant les diverses divisions, avec l'indication approximative de la force de chaque peuple et de la distribution des familles dans les cinq parties de la terre. Cet ouvrage est accompagné de nombreuses notes dans lesquelles l'auteur discute les diverses questions sur lesquelles il ne partage pas les opinions de la plupart des ethnographes.

21. **L'immense trésor des vigneron et des marchands de vin**, indiquant des moyens inédits pour vieillir instantanément les vins, leur enlever les mauvais goûts, même celui de terroir ; colorer les vins blancs en rouge narbonne d'une manière hygiénique sans aucun coupage, éviter leur dégénérescence, partant plus de vins aigres, amers, gras ou poussés ; découverte d'un agent supérieur à l'alcool pour le maintien, la conservation et l'expédition lointaine des vins. Nouvelle édition considérablement augmentée, par M. L.-F. DUBIEF, vol. in-18 de 234 pages. 5 fr.

23. **Essai sur l'Administration des entreprises industrielles et commerciales**, par M. Lincol, vol. de 343 pages. 4 fr. Relié. 5 fr.

Il nous suffira de reproduire le titre de quelques chapitres pour faire juger de l'importance de cet ouvrage et de l'intérêt des personnes qui s'occupent de commerce et d'industrie.

Constitution des entreprises. — Conception du capital et de ses emplois. — 1^o dans l'industrie. — 2^o dans le commerce. — Des rapports entre entrepreneurs ou chefs de maison et leurs employés. — Des services administratifs (direction, secrétariat, correspondance, caisse, portefeuille, comptes courants, factures, main-d'œuvre, etc.) ; de l'inventaire annuel. — De la liquidation.

En préparation. — Comptabilité manufacturière. — Comptabilité agricole. — Législation agricole. — Géographie commerciale. — Géographie industrielle. — Droit usuel. — Créancier hypothécaire. — Economie industrielle. — Maires et adjoints. — Electricité médicale. — Pêcheur. — Conservation des substances alimentaires. — Chimie amusante. — Physique amusante. — Extinction des incendies, ou Guide du sapeur-pompier. — Personnel des chemins de fer.

Tout personne qui en fera la demande par lettre affranchie recevra, par retour du courrier, le catalogue général de la librairie scientifique, industrielle et agricole.

LIBRAIRIE LACROIX

EXTRAIT

DU

CATALOGUE DES OUVRAGES

PUBLIÉS EN DEHORS DE LA

BIBLIOTHÈQUE DES PROFESSIONS INDUSTRIELLES ET AGRICOLES

A

- Adhémar.** Chemins américains dits à traction de cheval. 1 vol. in-8°, 1 pl. 4 fr.
Aérostas dirigeable. In-8°, pl. 2 fr. 50
Album de papier quadrillé pour plan et croquis. 2 fr.
Album de machines-outils. 40 planches in-4°. 20 fr.
Album encyclopédique des chemins de fer. Cette publication paraît par livraisons, chacune se vend séparément 4 fr. ; douze livraisons forment une série. Trente-six livraisons sont publiées. Un prospectus spécial, avec nomenclature des planches publiées, est distribué chez l'éditeur du *Carnet de l'Ingénieur*, E. Lacroix, quai Malaquais.
Album de fers spéciaux de Dupont et Dreyfus. In-f°. 10 fr.
Alcan. Industries textiles. 1 vol. in-8° et atlas in-4° de 36 pl. 32 fr.
Allibert. Alimentation des animaux domestiques. 1 v. in-8°. 2 fr. 50
Annales du Conservatoire des arts et métiers. Recueil d'excellents articles publiés de 1860 à 1865, par les professeurs du Conservatoire. 5 vol. 80 fr.

Pour les détails s'adresser à l'éditeur du *Carnet de l'Ingénieur*,

qui a publié une table générale des matières traitées dans ce recueil.

Annales du Génie civil. Cette revue mérite une mention toute spéciale ; son premier numéro a été publié le 1^{er} janvier 1862, elle a ensuite continué de paraître sans interruption et mensuellement jusqu'à cette époque.

Elle commence donc sa huitième année, et ce sont tous ses collaborateurs réunis qui ont su, sans aucun appui officiel et sans le secours d'une publicité intéressée, faire un rapport consciencieux sur l'Exposition de 1867. Ce travail remarquable sera probablement le seul souvenir recommandable qui nous restera de la grande exhibition de 1867. Une table générale des matières de cette œuvre remarquable comprenant également et par ordre méthodique tous les articles publiés dans les *Annales du Génie civil* de 1862 à 1868 inclus, est distribuée à la librairie Lacroix.

Le prix de la collection des *Annales du Génie civil* y compris le supplément pour les années 1867 et 1868 ou *Études sur l'Exposition de 1867*, le tout formant 15 vol. et 9 atlas, est de 250 fr.

Sans le supplément. 140 fr.

Abonnement à l'année courante, France et Algérie, 20 fr. ; étranger, 25 fr. ; pays d'outre-mer, 30 fr.

Chaque année écoulée prise isolément, 25 fr. ; étranger, 30 fr.

Annales télégraphiques. 1 vol. in-8° et fig. 9 fr.

Annuaire de la Société des anciens élèves des écoles d'arts et métiers ; paraît tous les ans, depuis 1848, en 1 vol. in-8°. Prix de chaque année. 5 fr.

Par exception, l'année 1867 coûte 10 fr.

Ansiaux. Fabrication du fer et de l'acier. 1 vol. et atlas. 10 fr.

Arcet (d'). Assainissement des ateliers, etc. 1 vol. et atlas. 15 fr.

— Latrines modèles, broch. in-4°. 2 fr. 50

Archambault et Violette. Dictionnaire des analyses chimiques. 2 vol. 12 fr.

Arlot. Guide du peintre en voiture. 1 vol., fig. coloriées. 6 fr. 50

Armengaud. L'Industrie des chemins de fer. 1 vol. in-4° et atlas grand in-8°. 80 fr.

Art (l') de l'Ingénieur. Un programme détaillé de cette publication existe à la librairie Lacroix ; commencée tout récemment, elle ne compte encore que neuf livraisons. L'ouvrage complet sera très-considérable. Le prix de souscription est de 250 francs, payables 50 francs en souscrivant et le reste par annuités de 50 fr.

Toutes les livraisons se vendent séparément.

Nomenclature et prix des livraisons publiées.

1^{re} livraison : série A, 1^{re} Introduction, Résistance des matériaux, page 1 à 72, fig. 1 à 44. 2 fr.

2^e livraison : série A, Mémoire du projet n° 1, Transmission de

mouvement par engrenages, pour un laminoir, in-8°, pages 1 à 54, pl. 1, 2, 3, grand in-8°. 3 fr.

3^e livraison : série B, 1^{re} Introduction, Cinématique, p. 1 à 128, fig. 1 à 69. 2 fr.

4^e livraison : série B, Mémoire du projet n° 1 ; tracé des engrenages. In-8°, p. 1 à 80, pl. 4, 5, 6, grand in-8°. 3 fr.

5^e livraison : série A, 2^e Introduction, Résistance des matériaux, p. 73 à 126, fig. 45 à 57. 2 fr.

6^e livraison : série A, Résistance des matériaux ; Mémoire du projet n° 2 ; Comble en fer, à grande portée, du système Ponceau, p. 53 à 102, pl. 7, 8 et 9. Grand in-8°. 3 fr.

7^e livraison : série A, 3^e Introduction, Résistance des matériaux, p. 127 à 196, fig. 58 à 77. 2 fr.

8^e livraison : Résistance des matériaux ; Mémoire du projet n° 3. In-8°, p. 103 à 162, pl. 10 et 11, grand in-8°. 3 fr.

9^e livraison, série E : 1^{re} introduction, Mécanique appliquée. In-8°, p. 1 à 104, fig. 1 à 34. 2 fr.

Arthaud. De la vigne et de ses produits. 1 vol. 5 fr.

Audré. Cours de géométrie descriptive. In-4°. 10 fr.

Audibert. Tableaux pour la racine carrée et la racine cubique. 1 vol. 1 fr. 50

Audiganne. Les ouvriers d'à-présent. 1 vol. 6 fr.

Aulagnier. Etudes sur la navigation de la France et de la Belgique. 2 vol. in-4°. 20 fr.

Aymard. Etudes sur les grands travaux hydrauliques. 1 vol. in-8° et atlas. 30 fr.

B

Baltet. Arboriculture fruitière et viticulture. Gr. in-8°, 43 fig., 3 pl. 4 fr. 50

Barbot. Guide du joaillier. 1 vol. grand in-18 et pl. 10 fr.

Barbin. Cours de dessin industriel adopté pour les écoles de la ville de Paris, publié en trois parties :

1^{re} partie : Géométrie graphique. 3 fr.

2^e — Etude des solides. 5 fr.

3^e — Construction des machines. 5 fr.

Barrault. La fonte. Voir *Flachat*.

Barreswil. Répertoire de chimie appliquée. 1 vol. 7 fr.

Barretta. Manuel du chocolatier et du confiseur. 1 v. in-8°. 10 fr.

Basset. Guide de chimie agricole. 1 vol. avec fig. 4 fr.

— La vigne, ses maladies ; moyens de les atténuer. 1 v. in-18. 5 fr.

— Culture et alcoolisation de la betterave. 1 vol. 4 fr.

— Le pain par la viande. 1 vol. 2 fr.

— La sucrerie indigène, étrangère et exotique. Gr. in-8°. 50 c.

- Bast** (A. de). Les merveilles du génie de l'homme. 1 vol. in-8° avec fig. 10 fr.
- Beau de Rochas**. Machines locomotives à grande pression. 1 vol. in-4°. 9 fr.
- Recherches sur l'utilisation de la vapeur. 1 vol. in-4°. 6 fr.
- Beaume**. Classification des matières organiques. In-12. 1 fr.
- Bélanger**. Traité de cinématique. 1 vol. in-8° et 12 pl. 8 fr.
- Traité de dynamique d'un point matériel, 1 v. in-8° et pl. 4 fr.
- Traité de dynamique des systèmes matériels. In-8° avec pl. 10 fr.
- Equivalent mécanique de la chaleur. In-8°. 50 c.
- Belleney**. Théorie des parallèles. In-8° et pl. 3 fr.
- Bellelot**. Générateurs à vapeur inexplosibles. In-8°. 1 fr.
- Benoit**. Cours complet de topographie et de géodésie. 1 vol. in-8° et pl. 7 fr. 50
- Théorie des pèse-liqueurs. 1 vol. in-8° et pl. 3 fr. 50
- Benoît Duportail, Morandière et Sambuc**. Chemins de fer. Voitures, wagons, matériel de la voie. In-8°, fig. et 6 pl. 10 fr.
- Berlioz**. Étude sur l'horlogerie. Gr. in-8° et fig. 3 fr.
- Berthelot**. Industrie de la cochenille. In-8°. 75 c.
- Berthieu** (De). Constructions maritimes. Gr. in-8°, fig. et 4 pl. 4 fr.
- Bertrand** (Le général). Campagne d'Égypte. 2 v. in-8° et atlas 60 fr.
- Besnard**. Traité d'éclairage minéral. In-8°. 1 fr.
- Bezon**. Dictionnaire général des tissus anciens et modernes ; traité complet du tissage de toutes les matières textiles. 8 tomes brochés en 4 vol. in-8° et atlas de 151 pl. in-4°. 80 fr.
- Bibliothèque** des professions industrielles et agricoles. Pour le détail des volumes publiés, demander le catalogue à la librairie Eug. Lacroix.
- Bideault**. Études sur les mines de houille. In-4°. 40 fr.
- Bintzer**. Description de la cathédrale de Cologne. In-4°. avec pl. (Rare.) 25 fr.
- Biot**. Guide du conducteur des ponts et chaussées et de l'agent voyer. 1 vol. grand in-18 et atlas. 10 fr.
- Bisson**. Accidents des chemins de fer. In-8°. 2 fr.
- Blanchère** (De la). Répertoire de photographie ; véritable traité pratique de photographie. 3 vol. in-8° avec fig. 18 fr.
- Blavier**. Traité de télégraphie électrique ; cours complet théorique et pratique. 2 vol. gr. in-8° compacte, 600 figures. 20 fr.
- Bochet**. Comptabilité commerciale. Grand in-8°. 5 fr.
- Body**. Des chemins de fer au point de vue des opérations de guerre. Grand in-8°. 15 fr.
- Supplément audit ouvrage in-8°. 1 fr.
- Boileau**. Instructions sur les scieries. 1 vol. in-8° avec 5 pl. 5 f.
- Boitard**. Instructions sur les chronomètres. In-8°. 3 fr.
- Boland**. Traité de boulangerie. In-8° avec pl. 5 fr.

- Bona** (Christave). Combustion du charbon. 1 v. in-8° avec fig. 7 fr.
- Bona** (T.), architecte, ancien directeur de filature. Tracé et ornementation des jardins d'agrément. 1 vol. gr. in-18, fig. 3 fr. 50
- Traité des constructions rurales. 1 vol. grand in-18. 3 fr. 50
- Traité complet de tissage. 1 vol. et 1 atlas grand in-18. 9 fr.
- Bonnard**. De l'art de lever les plans. In-4° et 8 planches. 15 fr.
- Bonnefoux** (P.). Traité du vaisseau à la mer. 1 vol. in-8°. 7 fr. 50
- Bonneville**. Tuiles et briques. 61 pages, 8 fig., 6 pl. 5 fr.
- Borde**. Tables des surfaces pour les déblais et remblais. 3 vol. in-8°. (Rare.) 60 fr.
- Machines élévatoires pour la construction des grands bâtiments et des habitations civiles. Grand in-f°, texte anglais et français, avec pl. 25 fr.
- Bouchacourt**. Notice industrielle sur la Californie. Br. in-8°, 72 p. 1 fr. 25
- Boucherie**. Conservation des bois. In-8°. 39 fig. 2 fr. 50
- Boucherie** (M.). Les conserves alimentaires. Gr. in-8°. 1 fr.
- Boudet**. L'expédition des dépêches télégraphiques. In-32. 50 c.
- Boudin**. Technologie du constructeur-mécanicien. In-8°. Auto-graphie. 20 fr.
- Boudoin** (B.). Instruments de musique. Gr. In-8°, 27 fig. 2 fr.
- Bouniceau**. Les constructions à la mer. 1 vol. de 500 pages avec atlas et 50 pl. doubles. 15 fr.
- Navigation des rivières à marées, et conquête des lais et relais de leurs embouchures. 1 vol. in-8°, 304 p. 7 fr. 50
- Bourgoin d'Orli**. Culture de la canne à sucre et sucrerie exotique. In-18, 156 p. 2 fr.
- Culture du café ; le caféier ; culture du cacaoyer. 100 p. 2 fr.
- Boussac**. Télégraphie électrique. In-8°. 503 p., fig. 7 fr.
- Bréart**. Grément et manœuvre des bâtiments à voiles et à vapeur. 1 vol. gr. in-8°. 447 p., avec atlas. 10 fr.
- Breca**. Science pratique des chemins de fer. 1 vol. in-4° de 164 p. et 77 pl. in-f° (Rare.) 50 fr.
- Breton aîné**. Guide forestier. In-18. 3 fr.
- Breton** (Ph.) et **Beau de Rochas**. Télégraphie sous-marin. In-8°, 72 p. et 2 pl. 3 fr.
- Breton** (de Champ). Description des courbes à plusieurs centres. In-4°, 63 p. 5 fr.
- Briques** (Fabrication des), des produits céramiques de chaux et ciment. Br. in-8°, 48 p. 2 fr.
- Brois et Thieffry**. Album encyclopédique des chemins de fer. Prix de la livraison. 4 fr.
- 36 livraisons ont paru.
- Bruère**. Consolidation des talus, routes, canaux et chemins de fer. 1 v. in-12 de 312 p., accompagné d'un atlas in-4° de 25 pl. 10 fr.

- Brull.** Locomotives à marchandises de grande puissance. 1 vol. in-8°, 39 p. et 5 pl. 7 fr.
- Brun (J.)**, pharmacien. Fraudes et maladies du vin. Moyen de les reconnaître et de les corriger. 2 fr. 50
- Bujault.** OEuvres complètes. Gr. in-8°, avec fig. 6 fr.
- Bulletin** de la Société industrielle de Mulhouse. 12 livraisons mensuelles. Abonnement annuel, Paris, 15 fr. ; prov., 18 fr. Les numéros séparés à prix divers.
- Burat (A.)**. Matériel des houillères en France et en Belgique. 1 vol. gr. in-8° et atlas de 77 pl. 60 fr.
- Burel.** Montage et manœuvre du métier à tisser mécanique. 1 fr.

C

- Cailletet.** Essai et dosage des huiles, 104 p. 3 fr.
- Campagnac.** Navigation par la vapeur. In-4°, 335 p. et 5 pl. 26 fr.
- Camus.** Trempe des fers et des aciers. In-8°, 290 p. 6 fr.
- Carbonnier.** Le pisciculteur. 200 p., nombreuses figures. 2 fr.
- Cardon.** Agriculture et colonisation de l'Algérie. In-8°. 1 fr. 50
- Carnet** de l'ingénieur. Recueil de tables, de formules, etc., etc. Cartonné, 4 fr. ; relié en portefeuille, 6 fr.
- Carnet** du mécanicien de la marine impériale. 150 p. Relié en portefeuille avec poches, porte-crayon, etc. 5 fr.
- Carteron.** Ininflammabilité des feuilles, papiers, etc. 63 p. 1 fr.
- Cartier (E.)**. Album et calculs de résistance de fers marchands et spéciaux. In-f°. 5 fr.
- Cartier (J.)**. Les sels alcalins et agriculture. In-8°, 133 p. 2 fr.
- Castor.** Recueil d'appareils à vapeur. In-8°, XII-127 p. et atlas, 40 fr.
- Castro (De)**. L'électricité et les chemins de fer. 2 vol., 1160 pages, avec 351 fig. 16 fr.
- Catéchisme** des chauffeurs et des machinistes, orné de 19 gravures. In-8°, 110 p. 3 fr.
- Cavalier de Cuverville.** Cours de tir. In-8°, 754 pages, avec fig. et 16 pl. 15 fr.
- Cavos.** Construction des théâtres. 1 vol. in-8°, 212 pages et atlas de 25 pl. in-f°. 35 fr.
- *Le même ouvrage*, avec l'*Architectonographie* des théâtres, de Kaufmann. 90 fr.

