Giudice Carlo

LEGENDRE

ELEMENTI DI GEOMETRIA

CON GIUNTE E MODIFICAZIONI

DI

A. BLANCHET

Versione italiana conforme ai programmi ministeriali
autorizzata ed approvata da A. Blanchet

CON NOTE ED AGGIUNTE

DI

GIUSEPPE HUEBER

DODICESIMA EDIZIONE

NAPOLI
CAV. ANTONIO MORANO, EDITORE
Via Roma, 371 e 372.
1881.

Stab. Tipo-Stereotipo del Cav. Antonio Morano

Incoraggiato dall' accoglienza fatta dal pubblico alla nostra traduzione degli elementi di geometria del Blanchet, con che in pochissimo tempo sonosi esaurite 11 edizioni, ci affrettiamo a pubblicare la 12ª che ci lusinghiamo esser priva di qualsiasi errore tipografico, non avendo risparmiata cura veruna onde riuscisse perfetta.

Nell' intento poi che essa corrisponda pienamente al programma in uso per gli esami liceali, abbiamo creduto utile di terminare l' opera colla indicazione dei teoremi e problemi enunciati nel suddetto programma, colla giunta di quelle poche proposizioni che non si trovano nell' originale, e che quantunque siano conseguenze di quelle quivi contenute, pure per non aggravare soverchiamente il testo, non vi si sono inserite sotto forma di note.

L' Editore

A quinze ans
il dévore la
Géométrie de
Legendre.
Alain (sur
Evariste Galois)
profil 53

Legendre autor
de los célebres
Élements de
Géométrie...
pag. 296, Klein

ELEMENTI
DI GEOMETRIA

LIBRO PRIMO

DEFINIZIONI.

I. Ogni corpo occupa nello spazio indefinito che lo circonda un luogo determinato che si chiama *volume*.

II. La *superficie* d' un corpo è il limite che lo separa dallo spazio che lo circonda.

III. Il luogo della intersezione delle superficie di due corpi, chiamasi *linea*.

IV. Il luogo della intersezione di due linee, chiamasi *punto*.

V. I volumi, le superficie, le linee si concepiscono indipendentemente dai corpi ai quali appartengono.

VI. I volumi, le superficie e le linee ricevono il nome di *figure*.

VII. La *Geometria* ha per oggetto la misura dell'estensione delle figure, non che lo studio delle loro proprietà.

VIII. La *linea retta* è la più breve linea che si può condurre fra due punti qualunque.

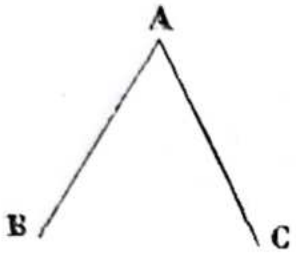
Si deve ritenere come evidente che da un punto ad un altro non si può condurre che una sola linea retta; e che se due parti di due rette coincidono, queste linee coincideranno in tutta la loro estensione.

IX. La linea *spezzata* o *poligonale* è una linea composta di linee rette.

X. Ogni linea che non è retta nè composta di linee rette, dicesi linea *curva*.

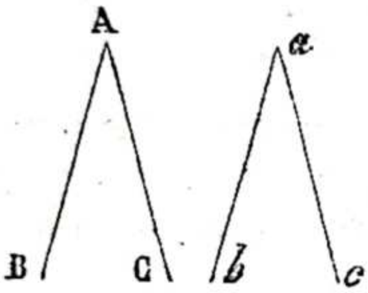
XI. Il *piano* è quella superficie sulla quale presi due punti ad arbitrio e congiunti per mezzo di una retta, questa giace interamente su di essa.

XII. Ogni superficie che non è piana nè composta di superficie piane è una superficie curva.

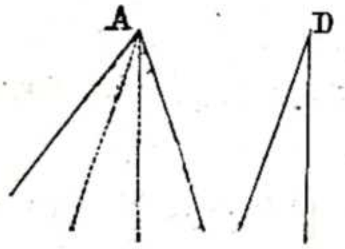


XIII. La figura formata da due rette AB, AC che si tagliano, chiamasi *angolo*. Il punto A è il *vertice* dell'angolo; le rette AB, AC ne sono i *lati*.

L'angolo s' indica qualche volta con la sola lettera A del vertice; ma ordinariamente colle lettere BAC o CAB, avendo cura di situare in mezzo la lettera del vertice.



Due angoli A e *a* diconsi uguali allorchè si possono far coincidere. Poichè supponendo che si porti l'angolo *a* su di A, in modo che *ab* si applichi su di AB; se *ac* prende la direzione di AC, i lati coincideranno, e i due angoli saranno uguali.

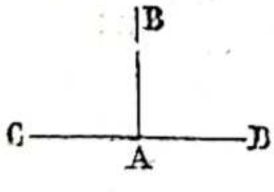


Un angolo A è doppio, triplo etc. dell'angolo D, se comprende fra i suoi lati due, tre etc. . . . angoli uguali all'angolo D.

Quindi gli angoli sono paragonabili fra loro come ogni altra grandezza.

XIV. Due angoli si dicono *adiacenti*, allorchè hanno un lato comune e gli altri due in prolungamento l' uno dell' altro.

Due angoli si dicono opposti al vertice, allorchè i lati dell'uno sono i prolungamenti di quelli dell' altro.



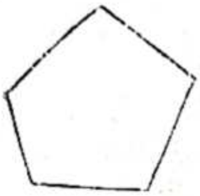
XV. Allorchè la retta AB ne incontra un' altra, in modo che gli angoli adiacenti BAC, BAD sono uguali fra loro, la AB dicesi *perpendicolare* a CD, e gli angoli uguali BAC, BAD si dicono *angoli retti*.

Si dimostrerà in seguito che da un punto A preso su di una retta si può sempre innalzare una perpendicolare su di questa retta, e che tutti gli angoli retti sono uguali fra loro. Ogni angolo più grande di un retto, chiamasi angolo *ottuso*, ed ogni angolo minore di un retto, dicesi angolo *acuto*.

Due angoli si dicono supplementari, quando la loro somma è uguale a due retti, e diconsi complementari quando la loro somma è uguale ad un retto.

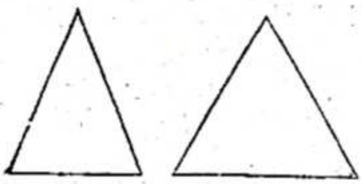
XVI. Due rette si dicono *parallele* quando, essendo situate nello stesso piano, e prolungate all' infinito non s'incontrano.

XVII. La *figura piana* è un piano terminato da linee.



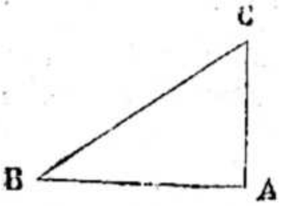
Se le linee sono rette, lo spazio che esse comprendono chiamasi *figura rettilinea* o *poligono* e le linee prese insieme costituiscono il *perimetro* del poligono.

XVIII. Il poligono di tre lati è il più semplice di tutti e si chiama *triangolo;* quello di quattro lati dicesi *quadrilatero;* quello di cinque *pentagono;* quello di sei, *esagono* etc.



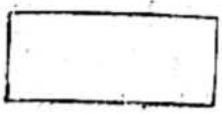
XIX. Si chiama triangolo *equilatero* quello che ha i tre lati uguali, *isoscele* quello che ne ha due soli uguali; *scaleno* quello che ha tutti i tre lati disuguali.

XX. Il triangolo rettangolo è quello che ha un angolo retto Il lato opposto all' angolo retto dicesi *ipotenusa;* gli altri due diconsi *cateti*. Così nel triangolo ABC rettangolo in A, il lato BC è l'ipotenusa, BA, CA sono i cateti.

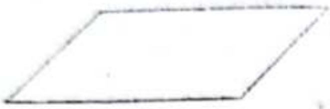


XXI. Fra i quadrilateri, si distinguono:

Il *quadrato*, che ha i lati uguali e gli angoli retti.

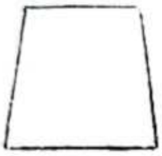


Il *rettangolo*, che ha gli angoli retti senza avere i lati uguali.



Il *parallelogrammo*, che ha i lati opposti paralleli.

La *losanga*, che ha i lati uguali senza avere gli angoli retti.



Infine il *trapezio*, che ha due soli lati paralleli.

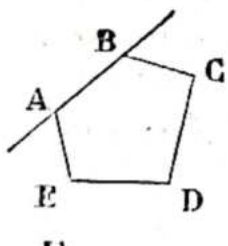
XXII. Chiamasi *diagonale* di un poligono, la retta che unisce i vertici di due angoli non adiacenti.

XXIII. Un poligono si dice *equilatero* quando ha tutti i suoi lati uguali, e dicesi *equiangolo* quando ha tutti gli angoli uguali.

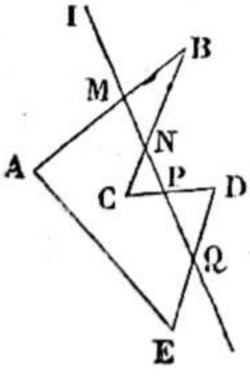
XXIV. Due poligoni sono *equilateri fra loro*, allorchè hanno i lati rispettivamente eguali e disposti nello stesso ordine ; cioè , che seguendo i loro contorni nello stesso senso, il primo lato dell' uno è uguale al primo lato dell'altro, il secondo dell'uno uguale al secondo dell' altro , il terzo al terzo e così di seguito.

Si comprende similmente quando due poligoni si dicono *equiangoli fra loro*.

Tanto nell'uno che nell'altro caso i lati o gli angoli uguali si chiamano lati o angoli *omologhi*.



XXV. Un poligono si chiama *convesso* quando prolungando uno qualunque dei suoi lati, tutto il poligono resta situato dalla stessa parte di questa retta. Tale è il poligono ABCD.



Il perimetro di un poligono convesso non può essere incontrato da una retta in più di due punti; poichè se una retta IQ incontrasse il perimetro ABCDE nei punti M, N, P, Q, il lato BC che è tagliato dalla retta in una dei punti intermedi N, avrebbe evidentemente una porzione della figura situata da una parte ed il rimanente dall'altra della sua direzione.

XXVI. Due figure qualunque si dicono uguali, allorchè si possono situare l'una sull'altra in modo che coincidano perfettamente.

N. B. Nei primi quattro libri si parlerà esclusivamente di figure piane o tracciate su di una superficie piana.

SPIEGAZIONE DEI TERMINI E DEI SEGNI.

Assioma è una verità evidente da per sè stessa.

Teorema è una verità che diviene evidente mediante un ragionamento che dicesi *dimostrazione*.

Problema è una quistione proposta che esige una *soluzione*.

Lemma è una verità impiegata sussidiariamente o per la dimostrazione di un teorema o per la soluzione di un problema.

I teoremi, i problemi ed i lemmi ricevono il nome comune di *proposizione*.

Corollario è la conseguenza che si ricava da una o più proposizioni.

Scolio è un'osservazione sopra una o più proposizioni, tendente a far risaltare il loro legame, la loro utilità, la loro restrizione o la loro estensione.

Ipotesi è una supposizione fatta sia nell'enunciato d'una proposizione, sia nel corso di una dimostrazione.

Il segno $=$ è il segno dell'eguaglianza; così $A=B$ significa che A è uguale a B.

Per esprimere che A è più piccola di B, si scrive $A<B$.

Per esprimere che A è più grande di B, si scrive $A>B$.

Il segno $+$ si pronunzia *più*, ed indica l'addizione.

Il segno $-$ si pronunzia *meno*, ed indica la sottrazione, così $A+B$ rappresenta la somma delle quantità A e B, ed $A-B$ la loro differenza; come pure $A-B+C$, o $A+C-B$, significa che A e C debbono essere sommate insieme e *B* deve essere tolta dalla loro somma.

Il segno $\times$ indica la moltiplicazione; così $A\times B$ rappresenta il prodotto di A per B. In luogo del segno $\times$ si usa qualche volta un punto; così $A \cdot B$ è lo stesso che $A\times B$.

Il prodotto di A per B si può anche scrivere AB, senza alcun segno intermedio; ma bisogna evitare questa espressione quando si deve nello stesso tempo esprimere che AB è la distanza dei due punti A e B.

L'espressione $A\times(B+C-D)$ rappresenta il prodotto di A per $B+C-D$. Se si deve moltiplicare $A+B$ per $A-B+C$, s'indicherà il prodotto così $(A+B)\times(A-B+C)$; tutto ciò che è rinchiuso nella stessa parentesi è considerato come una sola quantità.

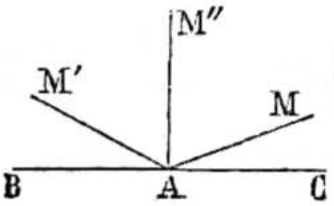
Un numero messo innanzi ad una linea o ad una quantità serve di moltiplicatore a questa linea o a questa quantità; così per esprimere che la linea AB è presa tre volte si scrive 3AB; per indicare la metà dell'angolo A, si scrive $\frac{1}{2}$ A.

Il quadrato della retta AB s'indica con $\overline{AB}^2$; il suo cubo con $\overline{AB}^3$. Spiegheremo a suo tempo il significato del quadrato e del cubo di una retta.

Il segno $\sqrt{}$ indica una *radice* da estrarsi; così $\sqrt{2}$ è la radice quadrata di 2, $\sqrt{A\times B}$ è la radice quadrata del prodotto $A\times B$ o la media proporzionale fra A e B.

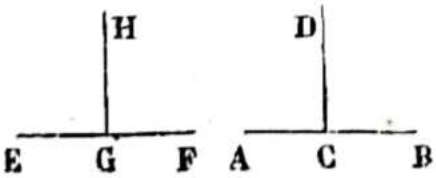
PROPOSIZIONE I.

Teorema — *Da un punto preso su di una retta si può sempre innalzare una perpendicolare sulla retta e non se ne può innalzare che una sola.*



In effetti, supponendo che una retta AM, adagiata prima su di AC, giri intorno al punto A; essa formerà due angoli adiacenti MAC, MAB, dei quali, l'uno MAC, dapprima piccolissimo andrà sempre crescendo e l'altro MAB, dapprima grandissimo, andrà sempre diminuendo fino a zero.

L'angolo MAC che era più piccolo di MAB finirà dunque col divenire più grande; e per conseguenza vi sarà una posizione AM″ della retta mobile nella quale questi due angoli saranno uguali; ed è poi evidente che non ve ne può essere che una sola.



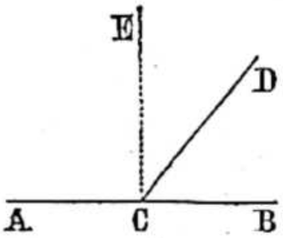
Corollario — Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.

Siano DC perpendicolare ad AB, e HG perpendicolare ad EF; io dico che l'angolo DCB è uguale a

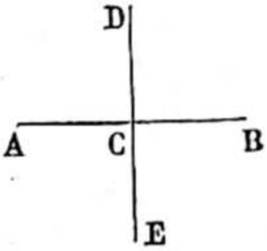
HGF. In effetti, se si porta la retta EF sopra AB in modo che il punto G cada in C, GH prenderà la direzione di CD; altrimenti, da un punto preso su di una retta, si potrebbero innalzare due perpendicolari alla medesima.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA — *Ogni linea retta* CD, *che ne incontra un' altra* AB, *fa con essa due angoli adiacenti* ACD, BCD, *la cui somma è uguale a due angoli retti.*



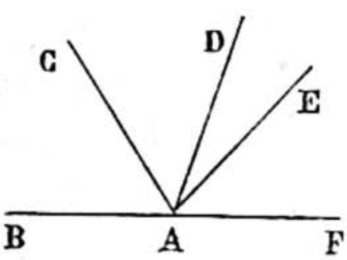
Dal punto C, s'innalzi sopra di AB la perpendicolare CE. L'angolo ACD essendo la somma dei due ACE, ECD, sarà ACD+BCD la somma degli angoli ACE, ECD, BCD. Ma il primo di questi è retto, e gli altri due formano l' angolo retto *BCE*; dunque la somma dei due ACD, BCD è uguale a due retti.



Corollario I. Se uno degli angoli ACD, BCD è retto, l'altro lo sarà pure.

Corollario II. Se la retta DE è perpendicolare ad AB, reciprocamente AB sarà perpendicolare a DE.

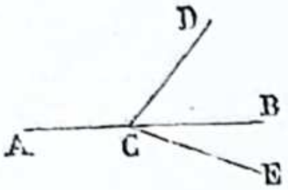
Poichè dall' essere *DE* perpendicolare ad AB, ne segue che l' angolo ACD è uguale al suo adiacente DCB, e che perciò essi sono tutti e due retti. Ma dall'essere *A*CD retto ne segue che il suo adiacente ACE è anche retto; dunque ACE = ACD, e quindi A*B* è perpendicolare a DE.



Corollario III. Tutti gli angoli consecutivi *B*AC, CAD, DAE, EAF formati dalla stessa parte della retta BF, presi insieme, equivalgono a due retti; poichè la loro somma è uguale a quella dei due adiacenti BAC, CAF.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA — *Se due angoli adiacenti* ACD, DCB *equivalgono a due retti, i lati esterni* CA, CB *sono in linea retta.*

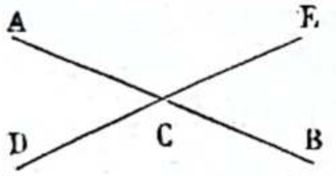


Poichè se CB non è il prolungamento di AC, sia CE questo prolungamento; allora la linea ACE essendo retta, la somma degli angoli ACD, DCE sarà uguale a due retti (prop. 2.). Ma per ipotesi, la somma degli angoli ACD, DCB è anche uguale a due retti; togliendo dunque da una parte e dall'altra l'angolo ACD, resterebbe BCD uguale a DCE, la qual cosa è impossibile, e però CB è il prolungamento di AC.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA — *Se due rette* AB, DE *si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono uguali.*

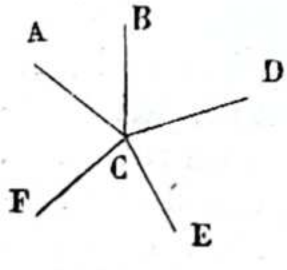
Infatti, essendo la DE retta, la somma dei due angoli



ACD, ACE è uguale a due retti; ed essendo la linea AB una linea retta, la somma degli angoli ACE, BCE è anche uguale a due retti; dunque ACD+ACE è uguale ad ACE+BCE. Togliendo da una parte e dall'altra lo stesso angolo ACE, resterà l'angolo ACD uguale al suo opposto BCE.

Nello stesso modo si dimostra che l'angolo ACE è uguale al suo opposto BCD.

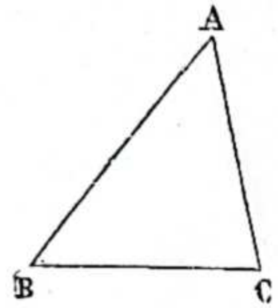
Scolio. I quattro angoli formati intorno ad un punto da due rette che si tagliano, presi insieme equivalgono a quattro angoli retti; poichè gli angoli ACE, BCE presi insieme equivalgono a due retti, e gli altri due hanno lo stesso valore.



In generale si può dire che la somma di tutti gli angoli consecutivi ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, formati da più rette che s'incontrano nello stesso punto C, è uguale a quattro retti. Poichè se al punto C si formano quattro angoli retti, per mezzo di due rette perpendicolari fra loro, la loro somma sarà evidentemente uguale a quella degli angoli successivi ACB, BCD etc.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA—*In ogni triangolo, un lato qualunque è minore della somma degli altri due.*



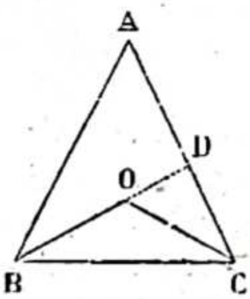
Essendo la retta BC il più corto cammino da B a C (def. 8), sarà $BC<AB+AC$.

È utile osservare che un lato qualunque è sempre maggiore della differenza degli altri due.

Infatti sia a il lato più grande, b e c gli altri due; nella ineguaglianza $a<b+c$, togliendo b da una parte e dall'altra, si ha $a-b<c$ e quindi $c>a-b$.

PROPOSIZIONE VI.

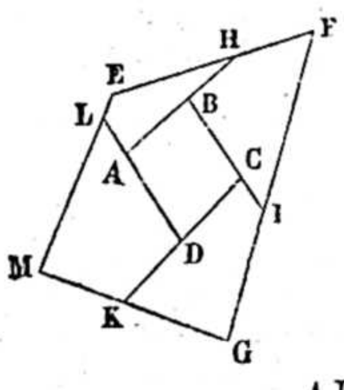
Teorema — *Se da un punto* O *preso nell' interno del triangolo* ABC, *si conducono alle estremità d'un lato* BC, *le rette* OB, OC, *la somma di queste rette sarà minore di quella degli altri due lati* AB. AC.



Si prolunghi BO fino all' incontro di AC in D; la retta OC è minore di $OD+DC$ (prop. 5); aggiungendo all'una parte ed all'altra BO, si avrà $BO+OC<BO+OD+DC$, o $BO+OC<BD+DC$.

Similmente si ha $BD<BA+AD$; aggiungendo all'una parte ed all' altra DC, si avrà $BD+DC<BA+AC$. Ma si è trovato $BO+OC<BD+DC$; dunque con più forte ragione sarà $BO+OC<BA+AC$.

PROPOSIZIONE VII.



Teorema — *Ogni linea poligonale convessa* ABCD *è minore di qualunque linea* MEFG *che la circonda da tutte le parti.*

Prolungando nello stesso senso tutti i lati del poligono ABCD fino all'incontro della linea inviluppante, si avrà questa serie d' ineguaglianze:

$$AB+BH<AL+LE+EH$$
$$BC+CI<BH+HF+FI$$
$$CD+DK<CI+IG+GK$$
$$DA+AL<DK+KM+ML.$$

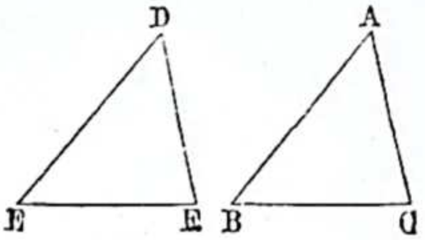
Addizionando queste ineguaglianze membro a membro, e sopprimendo le parti comuni ai due membri, si ha $AB+$ $+BC+CD+DA<EF+FG+GM+ME$.

Nell' istesso modo si dimostrerebbe che ogni linea poligonale convessa è minore della linea inviluppante che ha i medesimi punti estremi.

Osservazione—Il teorema precedente non è che un caso particolare di questo.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA—*Due triangoli sono uguali quando hanno un angolo uguale compreso fra due lati rispettivamente uguali.*



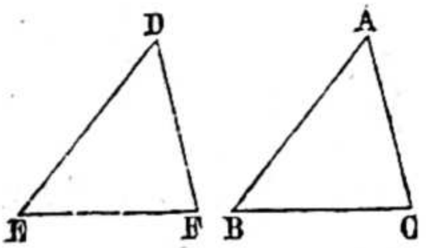
Sia l'angolo in A uguale all'angolo in D, il lato AB uguale al lato DE, ed il lato AC uguale a DF; dico che il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF.

Infatti, se s'immagini il triangolo DEF sovrapposto al triangolo ABC in modo che il lato DE coincida col suo uguale AB, i vertici E, D del primo certamente coincideranno coi vertici B ed A del secondo; ma per ipotesi l' angolo in D è uguale all' angolo in A; e però il lato DF si adagerà su di AC; ed allora, per l'uguaglianza di questi ultimi lati, coincidendo il vertice F col vertice C, ne segue che anche il terzo lato EF coinciderà con BC, e quindi i due triangoli coincidendo in tutta la loro estensione, risultano uguali.

Corollario — Dall' eguaglianza dei tre elementi di due triangoli A=D, AB=DE, AC=DF ne risulta l'eguaglianza degli altri tre B=E, C=F, BC=EF.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA—*Due triangoli sono uguali, quando hanno un lato uguale adiacente a due angoli rispettivamente uguali.*



Sia il lato BC uguale ad EF, l' angolo B uguale all' angolo E, e l'angolo C uguale all'angolo F; dico che il triangolo DEF sarà uguale al triangolo ABC.

Infatti, per eseguire la sovrapposizione pongasi EF sopra il suo uguale BC; il punto

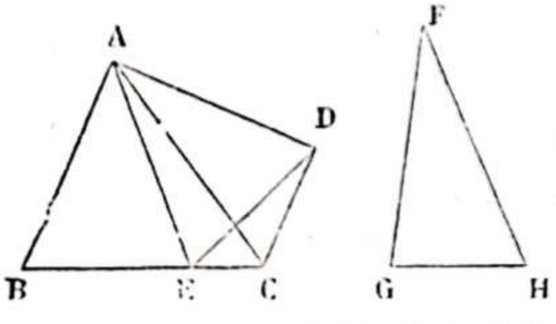
E cadrà in B e il punto F in C; ma per ipotesi l'angolo E è uguale all'angolo B, dunque il lato ED prenderà la direzione di BA, ed il punto D si troverà in qualche punto della AB.

Similmente, essendo l'angolo F uguale all'angolo C, la retta FD prenderà la direzione di CA ed il punto D si troverà sopra qualche punto del lato CA; quindi il punto D dovendo trovarsi contemporaneamente sulle due rette BA, CA, cadrà sulla loro intersezione A; e perciò i due triangoli ABC, DEF, coincidendo l'uno coll'altro, sono perfettamente uguali.

Corollario – Dall'essere tre elementi uguali in due triangoli, cioè BC=EF: B=E, C=F, se ne può concludere che gli altri tre lo saranno pure, cioè sarà AB=DE, AC=DF, A=D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA – *Se due lati di un triangolo sono uguali rispettivamente a due lati d'un altro triangolo e l'angolo compreso dai primi è maggiore di quello compreso dai secondi; il terzo lato del primo triangolo sarà maggiore del terzo lato del secondo.*



Siano i due triangoli ABC. FGH ne'quali AB=FG, AC=FH, e l'angolo BAC>GFH, dico che il lato BC sarà maggiore di GH.

Al punto A del lato AC s'intenda costruito l'angolo CAD=GFH, si prenda AD==GF=AB, e si tiri la DC: i due triangoli ACD, FGH avendo un angolo eguale compreso fra due lati rispettivamente eguali, sono eguali; e quindi sarà CD=GH.

S'intenda ora diviso per metà l'angolo BAD per mezzo della retta AE, che certamente cade nell'angolo maggiore BAC, e si unisca il punto D coll'altro E in cui la suddetta retta incontra il lato BC: i due triangoli BAE, EAD essendo uguali per avere un angolo uguale compreso fra due lati rispettivamente uguali, sarà BE = ED; ma nel triangolo EDC si ha CD<ED+EC; e però sostituendo ad ED il suo uguale BE, si ottiene CD<BE+EC ovvero CD<BC; o infine GH<BC.

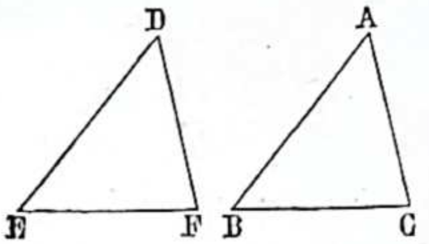
Reciprocamente, se due lati AB, AC del triangolo ABC sono uguali ai due lati FG, FH del triangolo FGH ; e se il terzo lato CB del primo triangolo è maggiore del terzo lato GH del secondo triangolo, l' angolo BAC sarà maggiore dell' angolo GFH.

Poichè se BAC fosse più piccolo di GFH, dovrebbe essere BC minore di GH, il che è contro l' ipotesi.

Per la stessa ragione non può essere BAC=GFH; dunque dovrà essere BAC>GFH.

PROPOSIZIONE XI.

Teorema—*Due triangoli sono uguali, quando hanno i tre lati rispettivamente uguali.*



Sia AB=DE, AC=DF, BC=EF; dico che sarà l'angolo A=D, B=E, C=F.

Poichè se l'angolo A fosse maggiore di D, siccome i lati AB,AC sono uguali rispettivamente ai lati DE, DF, così, per il teorema precedente, dovrebbe il lato BC esser maggiore di EF.

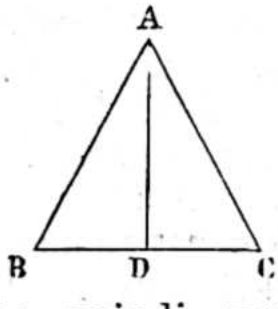
Nell' istesso modo si dimostra che A non può essere minore di D; dunque A deve essere uguale D.

Si vedrà parimenti che B=E e C=F.

Scolio—Da quanto precede si può ricavare che in due triangoli eguali, gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali; così gli angoli uguali A e D sono opposti ai lati uguali BC, EF.

PROPOSIZIONE XII.

Teorema - *In un triangolo isoscele, gli angoli opposti ai lati uguali, sono uguali.*



Sia AB=AC, dico che si avrà l'angolo C=B.

Si congiunga il vertice A col punto di mezzo D della base BC ; i due triangoli ABD, ACD avranno i tre lati rispettivamente uguali cioè, AD di comune, AB=AC per ipotesi e BD=DC per costruzione, quindi, sarà l'angolo B=C.

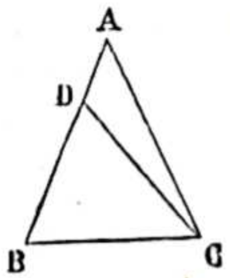
Corollario—Un triangolo equilatero è nello stesso tempo equiangolo, cioè ha tutti i suoi angoli uguali.

Scolio — L'eguaglianza dei triangoli ABD, ACD dà BAD=DAC, e BDA=ADC; ma questi due ultimi sono adiacenti e quindi retti, dunque la retta condotta dal vertice di un triangolo isoscele al punto di mezzo della sua base, è perpendicolare a questa base e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.

In un triangolo non isoscele si prende indifferentemente per base un lato qualunque, e allora il suo *vertice* è quello dell'angolo opposto; ma nel triangolo isoscele si prende particolarmente per base il lato che non è uguale ad alcuno degli altri due.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA—*Reciprocamente, se due angoli di un triangolo sono uguali, i lati ad essi opposti sono anche uguali, ed il triangolo è isoscele.*

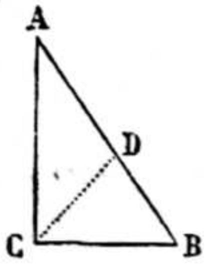


Sia ABC=ACB, dico che il lato AC è uguale al lato AB.

Poichè se questi lati non sono uguali, sia AB il maggiore dei due; si prenda BD =AC e si congiunga DC. Essendo l'angolo DBC uguale ad ACB, ed i due lati DB, BC uguali ai due AC, CB; ne segue che il triangolo BDC sarebbe uguale al triangolo ACB; ma la parte non può essere uguale al tutto, e però non potendovi essere ineguaglianza fra i lati AB, AC, il triangolo è isoscele.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA—*Di due lati di un triangolo, il maggiore è quello che è opposto all'angolo maggiore, e reciprocamente, di due angoli di un triangolo il maggiore è quello che si oppone al lato maggiore.*



1.° Sia C>B; io dico che il lato AB opposto all'angolo C è maggiore del lato AC opposto all'angolo B.

Al punto C del lato BC s'intenda costruito l'angolo BCD=B; nel triangolo BDC si avrà (prop. 13) BD = CD; ma la linea retta AC è più corta di AD+DC; e AD+DC=AD+DB=AB, dunque AB è maggiore di AC.

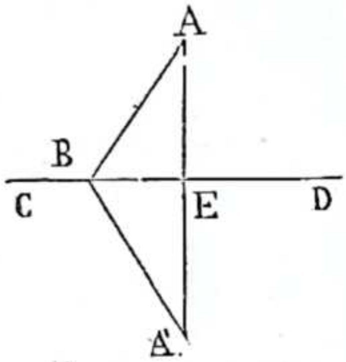
2.° Sia il lato AB > AC, dico che l' angolo C opposto al lato AB, sarà maggiore di B opposto al lato AC.

Poichè se fosse C < B, dovrebbe essere, perciò che si è dimostrato, AB < AC, il che è contro l' ipotesi.

Nello stesso modo si dimostra che C non può essere uguale a B (prop. 13); dunque l'angolo C è maggiore di *B*.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA — *Da un punto* A *preso fuori di una retta* CD, 1.° *si può sempre abbassare una perpendicolare su di questa retta*: 2.° *non se ne può abbassare che una sola.*



1.° Si unisca il punto A con un altro qualunque B preso su di CD, e nel quale s' intenda costruito l'angolo DBA'=DBA; si prenda BA'=BA e si tiri la AA'.

I due triangoli ABE, A'BE avendo il lato BE di comune, il lato AB=BA', e l' angolo ABE=EBA', sono eguali e sarà per conseguenza l' angolo AEB = A'EB; ma questi sono adiacenti; e però la retta AE è perpendicolare a CD.

2.° Suppongasi che dal punto A si possano condurre su di CD due perpendicolari AE, AB: si prolunghi una di esse di una quantità EA'=EA, e si unisca il punto A' col punto B.

I due triangoli ABE, A'BE, avendo due lati uguali a due lati e l'angolo AEB compreso dai primi uguale come retto all'angolo A'EB compreso dai secondi, sono uguali; e sarà l' angolo ABE=EBA'; ma il primo per ipotesi è retto, quindi anche l'altro deve esser retto; sicchè essendo i due angoli adiacenti ABE, EBA' uguali a due retti, la linea ABA' dev' esser retta (prop. 3); d' onde ne risulta che fra due punti A, ed A' si potrebbero condurre due rette, il che è impossibile. Dunque etc.

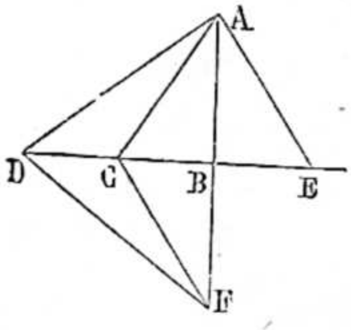
PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA — *Se da un punto* A *preso fuori di una retta* DE *si conduce la perpendicolare* AB *sopra questa retta e diverse oblique* AE, AC, AD, *etc. a diversi punti di questa stessa retta.*

1.° *La perpendicolare* AB *è minore di ogni obbliqua.*

2.° *Le due obblique* AC, AE. *menate da una parte e dall' altra della perpendicolare a distanze uguali* BC, BE, *sono uguali.*

3.° *Di due obblique qualunque* AC, AD; *o* AE, AD *quella che più si allontana dal piede della perpendicolare è la maggiore.*



Si prolunghi la perpendicolare AB, d' una quantità BF=AB e si congiungano FC, FD.

1.° Il triangolo BCF essendo uguale al triangolo BCA, perchè l'angolo retto CBF= CBA, il lato CB è comune, e il lato BF=BA, sarà il terzo lato CF uguale al terzo AC: ma la retta ABF è minore di ACF linea spezzata, quindi AB metà di ABF è minore di AC metà di ACF; dunque, 1.° la perpendicolare è più corta di ogni obbliqua.

2.° Se si suppone BE=BC, siccome è inoltre AB di comune e l' angolo ABE=ABC, così i due triangoli ABE, ABC essendo eguali, sarà pure AC=AE (prop. 8), dunque; 2.° due obblique che si allontanano ugualmente dal piede della perpendicolare sono uguali.

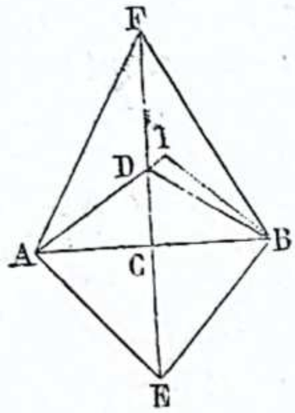
3.° Nel triangolo DFA, la somma delle rette AC, CF, essendo minore (prop. 6) della somma dei lati AD, DF; sarà AC, metà di ACF, minore di AD metà di ADF; dunque: 3.° le obblique che si allontanano maggiormente dal piede della perpendicolare sono le più lunghe.

Corollario I. — La perpendicolare misura la vera distanza di un punto da una retta, poichè essa è minore di ogni obbliqua che dal punto si può condurre alla retta.

II. Da un punto non si possono condurre ad una retta, tre rette uguali, poichè allora, vi sarebbero due obblique uguali menate dalla stessa parte della perpendicolare, il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XVII.

Teorema — *Se dal punto di mezzo* C, *della retta* AB, *s' innalza la perpendicolare* EF *sopra questa retta*, 1.°



ogni punto della perpendicolare è ugualmente distante dagli estremi A e B *della* AB; 2.° *ogni punto preso fuori della stessa perpendicolare è disugualmente distante dagli stessi estremi* A e B.

Poichè 1.° essendo AC=CB, le due oblique AD, DB si allontanano ugualmente dal piede della perpendicolare, e quindi sono uguali. Lo stesso si può dire delle due oblique AE, EB ; delle altre due AF, FB etc.; dunque 1.° ogni punto preso sulla perpendicolare è ugualmente distante dagli estremi A e B.

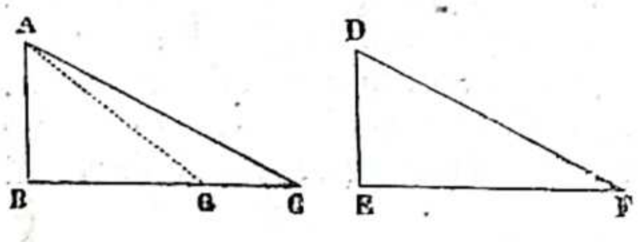
2.° Sia I un punto fuori della perpendicolare ; se si conducono IA, IB, una di queste rette taglierà la perpendicolare in D. Congiungendo D con B, si avrà DB=DA ; ma la linea retta IB è minore della linea spezzata ID+DB; e ID+DB=ID+DA=IA ; dunque IB<IA , e però , 2.° ogni punto fuori della perpendicolare è disugualmente distante dagli estremi A e B.

Osservazione — Nel piano si dà il nome di *luogo geometrico* ad ogni linea di cui tutti i punti godono d'una stessa proprietà, la quale non si verifica per gli altri punti del piano.

La linea EF è dunque il luogo geometrico di tutti i punti egualmente distanti da A B.

PROPOSIZIONE XVIII.

Teorema — *Due triangoli rettangoli sono uguali allorchè hanno l'ipotenusa ed un cateto uguale.*



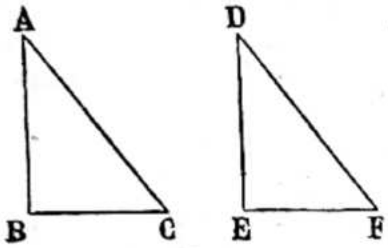
Sia l' ipotenusa AC=DF, ed il lato AB=DE, dico che il triangolo rettangolo ABC è uguale al triangolo rettangolo DEF.

S' intenda adagiato il triangolo DEF sul triangolo ABC in modo che il lato DE cada sopra il suo uguale AB ; gli angoli B ed E essendo retti, la EF prenderà la direzione di BC e il punto F cadrà in C; poichè se il punto F cadesse in G, il triangolo ABG sarebbe uguale al triangolo DEF e quindi AG=DF; ma per ipotesi AC=DF. dunque si avrebbe AG=AC , il che è impossibile, giacchè queste rette sono due obblique che si allontanano disugualmente dal piede della perpendicolare AB.

PROPOSIZIONE XIX.

Teorema — *Due triangoli rettangoli sono uguali quando hanno l'ipotenusa ed un angolo obbliquo uguale.*

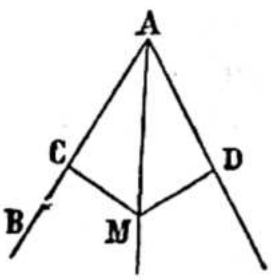
Sia AC=DF e l'angolo A=D; s'intenda situato il triangolo DEF sopra ABC in modo che DF s'applichi su di AC; l' angolo D essendo uguale all' angolo A, DE prenderà la direzione di AB, ed allora anche FE deve prendere la direzione di CB; altrimenti dallo stesso punto C si potrebbero abbassare due perpendicolari su di AB. Il punto E cadrà dunque in B, e i due triangoli coincidendo in tutta la loro estensione, sono eguali.



PROPOSIZIONE XX.

Teorema — 1.° *Ogni punto* M *preso sulla bisettrice* (*) *di un angolo* BAD *è ugualmente distante dai lati di quest'angolo.*

2.° *Ogni punto* M *preso nell'angolo* BAD *ad egual distanza dai lati* AB, AD, *appartiene alla bisettrice di quest' angolo.*



1.° Dal punto M si abbassino le due rette MD e MC rispettivamente perpendicolari ai lati AD, AB. I triangoli rettangoli MAD, MAC sono uguali, perchè hanno l' ipotenusa MA di comune e gli angoli MAD, MAC uguali per ipotesi; dunque MD=MC.

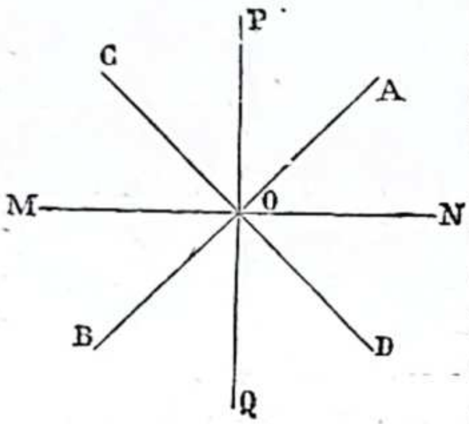
2.° Reciprocamente; se le perpendicolari MD, MC sono uguali, i triangoli MAD, MAC, avendo l'ipotenusa MA di comune e i lati MD, MC uguali per ipotesi, saranno uguali; e perciò sarà l'angolo MAD=MAC.

Risulta da ciò che si è detto che ogni punto preso nel-

(*) *La bisettrice di un angolo è la retta che divide quest'angolo in due parti uguali.*

l'angolo BAD fuori della bisettrice AM è disugualmente distante dai due lati dell'angolo.

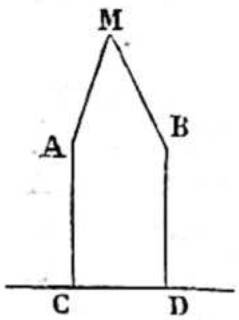
Osservazione I.—La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti situati nell'interno di quest'angolo ad egual distanza dai lati di esso.



Osservazione II.—Il luogo geometrico dei punti ugualmente distanti da due rette indefinite AB, CD si compone delle bisettrici MN, PQ degli angoli adiacenti AOD, AOC formati dalle rette date. Queste bisettrici sono perpendicolari fra loro; perchè la somma degli angoli AOC, AOD essendo uguale a due retti, la somma delle loro metà sarà uguale ad un retto.

TEORIA DELLE PARALLELE

PROPOSIZIONE XXI.

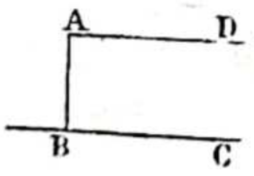


TEOREMA — *Due rette* AC, BD *perpendicolari ad una stessa retta* CD, *sono parallele.*

Poichè se esse s' incontrassero in un punto M, si potrebbero da questo punto abbassare due perpendicolari su di CD.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA — *Da un punto* A *si può sempre condurre una parallela ad una retta* BC *e non se ne può condurre che una sola.*

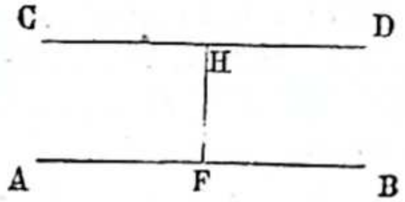


Dal punto A si conduca la perpendicolare AB su di BC, nonchè la perpendicolare AD su di AB; le rette AD e BC essendo entrambe perpendicolari ad AB, saranno parallele.

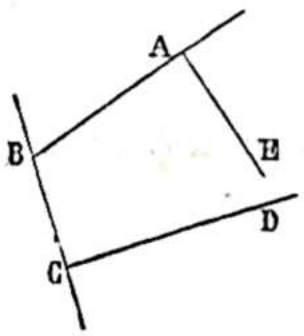
Si ammetterà in secondo luogo, come evidente, che da un punto non si può condurre che una sola parallela ad una retta.

PROPOSIZIONE XXIII.

Teorema — *Se due rette* CD, AB, *sono parallele, ogni retta* FH *perpendicolare ad una di esse, è perpendicolare anche all'altra.*



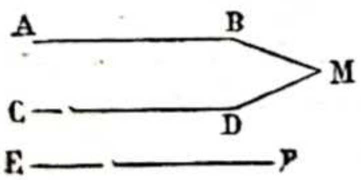
È in 1.° luogo evidente che FH deve incontrare CD, altrimenti dal punto F si potrebbero condurre due parallele a CD. Inoltre CD è perpendicolare a FH, poichè, se la retta CD fosse obbliqua rispetto ad FH, si potrebbe dal punto H innalzare una perpendicolare su di FH, la quale sarebbe parallela ad AB; e quindi dal punto H si potrebbero condurre due parallele alla stessa retta AB.



Scolio — Risulta da questa proposizione che se due rette AB, BC, s' incontrano, le AE, CD che le sono rispettivamente perpendicolari, debbono anche incontrarsi; poichè se queste due ultime rette fossero parallele, la BC che è perpendicolare a CD, lo sarebbe anche alla sua parallela AE; ma BA è pure perpendicolare ad AE; dunque dal punto B si potrebbero abbassare due perpendicolari sulla retta AE, il che è impossibile.

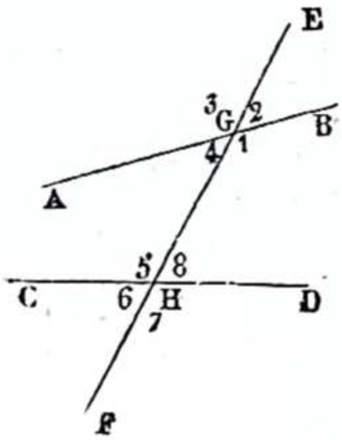
PROPOSIZIONE XXIV.

Teorema — *Due rette* AB, CD, *parallele a una terza* EF, *sono parallele fra loro.*



Poichè se le rette AB, CD, s'incontrassero in un punto M; si potrebbero da questo punto menare due parallele ad EF.

DEFINIZIONI.



Allorchè due rette AB , CD sono tagliate da una trasversale EF , si formano otto angoli ai punti d'intersezione G e H.

I quattro angoli (1), (4), (5), (8) compresi fra le due rette AB e CD si dicono *angoli interni*. Gli altri quattro si dicono *angoli esterni*.

Due angoli come (1) e (5) situati da una parte e dall'altra della trasversale, interni e non adiacenti , si dicono *angoli alterni interni*.

Due angoli , come (8) e (2) situati dalla stessa parte della secante, uno interno e l'altro esterno e non adiacenti, chiamansi *angoli corrispondenti*.

Infine due angoli , come (2) e (6) situati da una parte e dall'altra della secante, esterni e non adiacenti , chiamansi alterni esterni.

PROPOSIZIONE XXV.

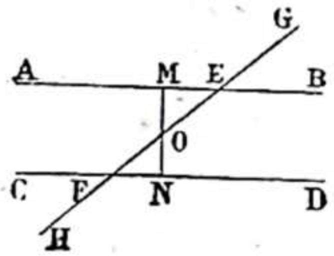
Teorema — *Due parallele formano con una trasversale.*

1.° *Gli angoli alterni interni uguali* ;

2.° *Gli angoli alterni esterni uguali* ;

3.° *Gli angoli corrispondenti uguali* ;

4.° *La somma degli angoli interni da una stessa parte della secante, uguale a due retti.*



1.° Siano le parallele AB, CD tagliate dalla trasversale GH: se dal punto di mezzo O di EF si conduce OM perpendicolare ad AB , questa retta sarà anche perpendicolare a CD; ed i triangoli rettangoli MOE, ONF, avendo l'ipotenusa OE uguale all' ipotenusa OF per costruzione , e gli angoli MOE, FON uguali come opposti al vertice, saranno uguali, e sarà per conseguenza MEO=OFN.

Dall' eguaglianza dei suddetti angoli si desume quella degli altri BEF, EFC, poichè sono rispettivamente i supplementi degli angoli MEO, OFN.

2.° Gli angoli alterni esterni GEB, CFH sono uguali, poichè sono i verticali degli angoli alterni interni MEO, OFN.

3.° Gli angoli corrispondenti GEB, EFD sono uguali, perchè GEB=AEF ed AEF=EFD.

4.° La somma degli angoli BEF, EFD è uguale a due retti, perchè si ha BEF+AEF=2r e AEF=EFD.

PROPOSIZIONE XXVI

TEOREMA — *Reciprocamente, se due rette fanno con una trasversale:*

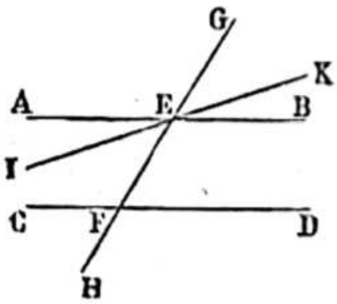
Gli angoli alterni interni uguali,

Gli angoli alterni esterni uguali,

Gli angoli corrispondenti uguali,

E la somma degli angoli interni situati dalla stessa parte della trasversale, uguale a due retti:

Le rette sono parallele.



1.° Siano le due rette AB, CD tagliate dalla trasversale GH; se gli angoli alterni interni sono uguali, AB sarà parallela a CD; altrimenti conducendo dal punto E una parallela EI a CD, l'angolo IEF sarebbe uguale ad EFD come alterni interni; e siccome, per ipotesi, AEF=EFD, sarebbe AEF=IEF. il che è un assurdo.

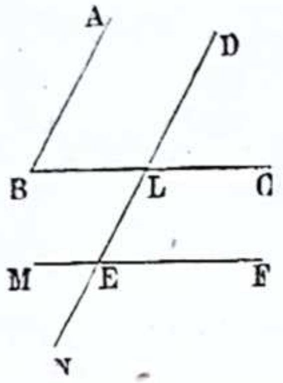
2.° Se gli angoli alterni esterni GEB, CFH, sono uguali, gli angoli AEF, EFD che sono opposti al vertice ai primi, saranno anche uguali; e però, da ciò che si è dimostrato, risulta AB parallela a CD.

3.° Se gli angoli corrispondenti GEB, EFD sono uguali; siccome GEB è uguale a AEF, così si avrà AEF=EFD; e quindi AB è parallela a CD.

4.° Se la somma degli angoli BEF, EFD. è uguale a due retti, siccome BEF+AEF=2r; così se ne conchiude che AEF=EFD; e perciò AB sarà parallela a CD.

PROPOSIZIONE XXVII.

Teorema – *Due angoli che hanno i lati rispettivamente paralleli, sono uguali o supplementari.*



1.° Siano ABC, DEF, due angoli i cui lati sono paralleli e diretti nello stesso senso; dico che essi sono uguali. Infatti, gli angoli DLC, DEF sono uguali come angoli corrispondenti; ma per la stessa ragione DLC=ABC; dunque ABC=DEF.

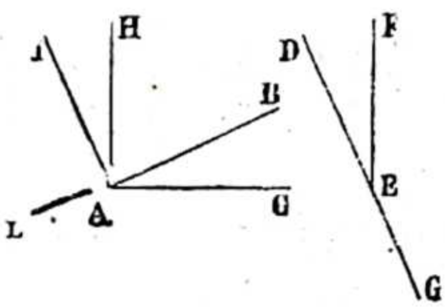
2.° Sieno ABC, MEN, due angoli i cui lati sono paralleli e diretti in senso contrario; questi angoli saranno uguali, perchè MEN=DEF, e DEF=ABC.

3.° Infine due angoli ABC, DEM che hanno i lati paralleli; ma due di essi BA, ED diretti in un senso e gli altri due BC, EM diretti in senso contrario, sono supplementari; poichè DEM è il supplemento di DEF, e DEF=ABC.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Teorema—*Se due angoli hanno i lati rispettivamente perpendicolari, saranno uguali o supplementari.*

1.° Sieno BAC, DEF, due angoli acuti i cui lati sono rispettivamente perpendicolari: Se dal punto A si conducono AI, AH rispettivamente parallele a DE, EF e dirette nello stesso senso, l'angolo IAH sarà uguale all'angolo DEF.



Ora essendo EF perpendicolare ad AC, la retta AH parallela ad EF, sarà anche perpendicolare ad AC, e quindi si avrà: HAB+BAC $= 1^r$. Per la stessa ragione AI è perpendicolare ad AB e si ha HAB $+$IAH $= 1^r$, dunque IAH=BAC= DEF

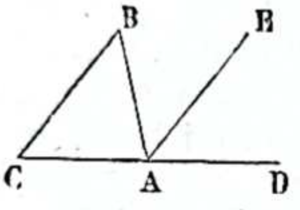
2.° Gli angoli acuti BAC, DEF essendo uguali, i loro adiacenti CAL, FEG che ne sono i supplementi, saranno anche uguali.

2.° Essendo BAC uguale DEF, sarà BAC il supplemento di FEG.

In conchiusione diremo che quando due angoli che hanno i lati perpendicolari, sono tutti e due acuti o tutti e due ottusi, essi sono uguali; in caso contrario sono supplementari.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA — *La somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti.*



Si conduca AE parallela a BC e si prolunghi AC; gli angoli ACB, EAD, sono uguali come angoli corrispondenti, per rapporto alle parallele BC, AE tagliate dalla trasversale CA. Gli angoli CBA, BAE, sono anche uguali come angoli alterni interni per rapporto alle stesse parallele, e alla secante AB; quindi la somma dei tre angoli del triangolo è uguale alla somma dei tre angoli CAB, BAE, EAD, formati intorno al punto A e dalla stessa parte della retta AC; ma quest'ultima somma è uguale a due retti, quindi anche la prima sarà uguale a due retti.

Corollario I. — In ogni triangolo non vi può essere che un solo angolo retto, e con più forte ragione, non vi può essere che un solo angolo ottuso.

II. In ogni triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è uguale ad un angolo retto.

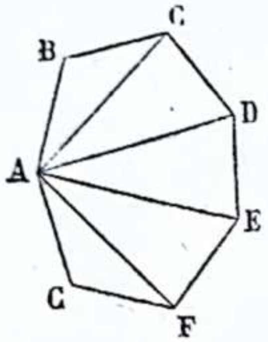
III. Allorquando si conoscono due angoli d' un triangolo o semplicemente la loro somma, si ottiene il terzo angolo togliendo la somma dei primi due da due angoli retti.

IV. L' angolo esterno BAD, formato dal lato BA e dal prolungamento di AC è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti CBA, BCA.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA — ***La somma degli angoli interni di un poligono convesso è uguale a tante volte due angoli retti quanti sono i lati, meno due*** (*).

(*) Questa proprietà ha luogo anche per i poligoni non convessi, purchè per angoli interni rientranti si considerino quelli maggiori di 180°. *N. del Trad.*



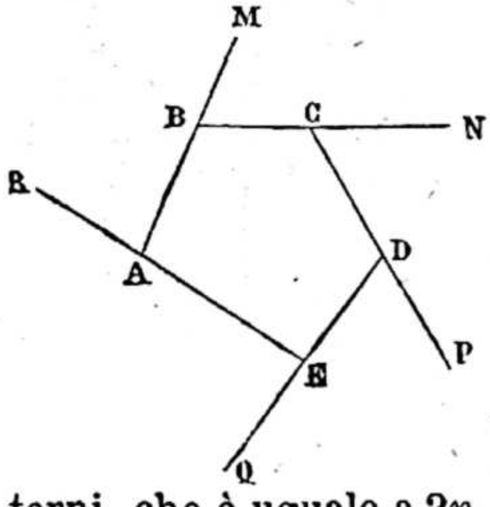
Da uno dei vertici A, conducendo le diagonali a tutti i vertici non adiacente; il poligono verrà a decomporsi in tanti triangoli quanti sono i lati meno due; poichè questi differenti triangoli possono essere considerati come aventi per vertice comune il punto A e per base i diversi lati del poligono, ad eccezione dei due triangoli estremi ciascuno dei quali contiene due lati del poligono; ma si vede con chiarezza che la somma degli angoli di questi triangoli è uguale alla somma degli angoli del poligono; quindi quest' ultima somma è uguale a tante volte due retti, quanti sono i lati, meno due.

Se indichiamo con n il numero dei lati del poligono, la somma di questi angoli sarà:

$$2\times(n-2) \text{ o } 2n-4.$$

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA — *Se si prolungano nello stesso senso tutti i lati di un poligono convesso, la somma degli angoli esterni che si formano è uguale a 4 angoli retti.*

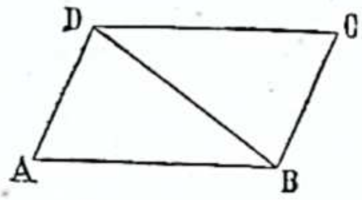


In effetti; la somma dell'angolo esterno MBN e dell'angolo interno adiacente ABN essendo uguale a due retti, ne segue che la somma di tutti gli angoli esterni ed interni del poligono è uguale a $2n$ retti (indicando con n il numero dei lati del poligono).

Se quindi da questa somma si toglie quella degli angoli interni, che è uguale a $2n-4$, il resto 4^r indicherà la somma degli angoli esterni.

PROPOSIZIONE XXXII.

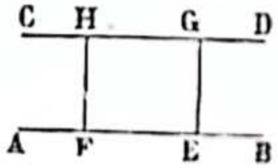
TEOREMA—*I lati e gli angoli opposti di un parallelogrammo sono uguali.*



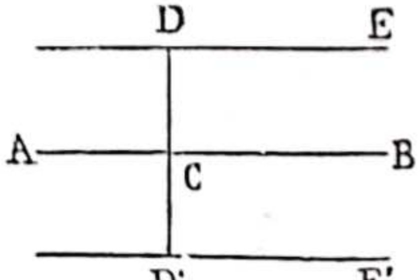
Si tiri la diagonale BD; i due triangoli ADB, DBC, avendo il lato BD di comune, l'angolo ADB=DBC per le parallele AD, BC (prop. 25), e l'angolo ABD=BDC per le altre due parallele AB, DC, sono uguali (prop, 9) e perciò il lato AB opposto all' angolo ADB è uguale a DC opposto all' angolo uguale DBC; similmente il terzo lato AD è uguale al terzo lato BC; e quindi i lati opposti di un parallelogrammo sono uguali (*).

In secondo luogo, dall' eguaglianza degli stessi triangoli risulta l' angolo A uguale all' angolo C, e l' angolo ADC composto dei due angoli ADB, BDC uguale all' angolo ABC composto dei due DBC, ABD; dunque anche gli angoli opposti di un parallelogrammo, sono uguali.

Corollario I. — Due parallele AB, CD, comprese fra due altre parallele AD, BC, sono uguali.



Corollario II. — Due parallele sono sempre equidistanti, perchè essendo AB e CD parallele, se dai punti H e G, abbassiamo HF, GE perpendicolari su di AB, queste rette saranno parallele e saranno uguali perchè comprese fra due rette parallele.



Corollario III. - Se dal punto C della retta AB, s'innalzano dall'una parte e dall'altra di questa retta le due perpendicolari uguali CD, CD', e dagli estremi D e D' si conducono le DE, D'E' parallele ad AB; queste rette rappresenteranno il luogo geometrico dei punti che distano da AB per la quantità CD.

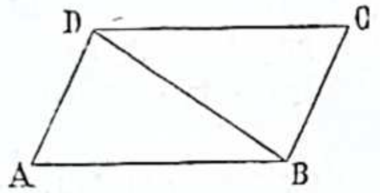
Infatti già si conosce che tutti i punti delle due rette DE, D'E' hanno questa proprietà; oltre di che sarebbe facile lo assicurarsi, che ogni punto preso fuori di queste rette dista da AB per una quantità diversa da CD.

(*) Ogni diagonale di un parallelogrammo lo divide in due triangoli eguali.

N. del Trad.

PROPOSIZIONE XXXIII.

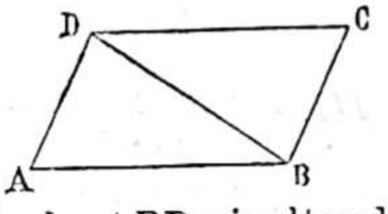
Teorema — *Se in un quadrilatero i lati opposti sono uguali; cioè* AB=CD, *e* AD=BC, *questi lati sono anche paralleli e la figura è un parallelogrammo.*



Poichè, tirando la diagonale BD, i due triangoli ABD, DBC avendo i tre lati rispettivamente uguali, sono uguali, e l'angolo ADB opposto al lato AB è uguale all'angolo DBC opposto al lato CD; sicchè (prop. 26) il lato AD è parallelo a BC. Per la stessa ragione AB è parallela a CD; dunque il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXXIV.

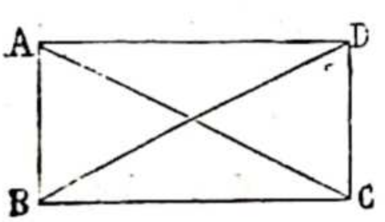
Teorema — *Se due lati opposti* AB, CD, *di un quadrilatero sono uguali e paralleli, i due altri lati saranno anche uguali e paralleli e la figura* ABCD *sarà un parallelogrammo.*



Si tiri la diagonale BD; essendo AB parallela a CD, gli angoli alterni-interni ABD, BDC sono uguali; (prop. 25); ma il lato AB=DC, ed il lato DB è di comune, e però il triangolo ABD risultando uguale al triangolo BDC (prop. 8), sarà AD=BC, non che l'angolo ADB=DBC; e per conseguenza AD risultando anche parallela a BC, la figura ABCD è un parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXXV.

Teorema — *In ogni rettangolo* ABCD, *le diagonali sono uguali.*



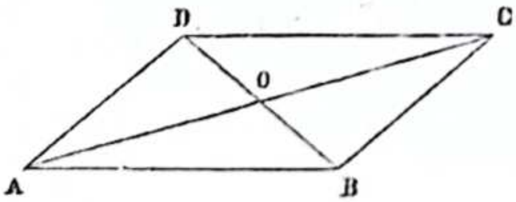
Infatti, i triangoli rettangoli ABC, DCB sono uguali, avendo il lato BC di comune e AB=DC; dunque AC = =BD.

Reciprocamente, ogni parallelogrammo ABCD che ha le diagonali uguali, è un rettangolo.

Perchè i due triangoli ABC, DCB avendo il lato BC di comune, AC=BD per ipotesi e i lati AB, DC uguali, come lati opposti del parallelogrammo, sono uguali; onde risulta ABC=BCD; ma pel parallelismo delle rette AB, CD, questi angoli sono supplementari, quindi essi sono retti; e perciò ABCD sarà un rettangolo.

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA — *Le due diagonali* AC, DB *di un parallelogrammo, si tagliano scambievolmente in due parti uguali.*



Giacchè, paragonando il triangolo ADO al triangolo COB, si trova il lato AD=CB, l'angolo ADO = CBO (prop. 25) e l'angolo DAO = OCB; perciò questi due triangoli saranno uguali, e sarà AO lato opposto all'angolo ADO uguale ad OC lato opposto all'angolo OBC, non che DO=OB.

Reciprocamente, se in un quadrilatero ABCD, le due diagonali AC, BD si tagliano scambievolmente in due parti uguali, questo quadrilatero è un parallelogrammo,

Infatti i due triangoli DOC, AOB avendo un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali, sono eguali, e sarà DC = AB, non che DCO=BAO; ma questi angoli sono alterni interni, e perciò DC essendo eguale e parallela ad AB, la figura ABCD è un parallelogrammo (prop. 34).

Scolio I. — Nel caso della losanga i lati AB, BC essendo uguali, i triangoli AOB, OBC, hanno i tre lati uguali rispettivamente e sono per conseguenza uguali; onde verificandosi che l'angolo AOB=BOC, si rileva che le diagonali di una losanga si tagliano scambievolmente ad angoli retti.

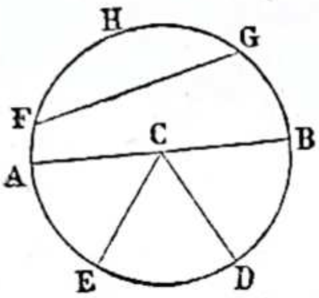
Scolio II. — Se la losanga diviene un quadrato, le diagonali si tagliano sempre ad angoli retti, ed inoltre esse sono uguali (*).

(*) Nel caso della losanga e del quadrato è da osservarsi che dall'eguaglianza dei triangoli adiacenti DOC, BOC ne risulta

LIBRO SECONDO

DEL CERCHIO E DELLA MISURA DEGLI ANGOLI

DEFINIZIONI



I. La *circonferenza del cerchio* è una linea curva di cui tutti i punti sono egualmente distanti da un punto interno che si chiama *centro*.

Il *cerchio* è la porzione di piano terminato da questa curva.

II. Ogni linea retta come CA, CE, CD etc. condotta dal centro alla circonferenza, si chiama *raggio*: ogni retta come AB che passa pel centro e che termina alla circonferenza, chiamasi *diametro*.

In virtù della definizione del cerchio, tutti i raggi sono uguali; come pure tutti i diametri; e ciascuno di questi è doppio del raggio.

III. Chiamasi *arco* una porzione di circonferenza, come FHG.

La *corda* è la retta FG che congiunge gli estremi di un arco.

IV. Chiamasi *segmento* la superficie o porzione di cerchio compreso fra l'arco e la corda.

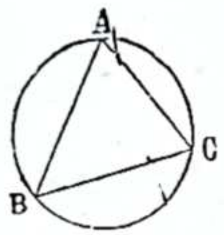
N. B. Alla stessa corda FG corrispondono sempre due archi FHG, FEG e per conseguenza anche due segmenti; ma senza una particolare indicazione, si deve considerare il più piccolo.

V. Chiamasi *settore* la porzione di cerchio compresa fra un arco DE e i due raggi CD, CE condotti ai suoi estremi.

VI. Ogni linea retta AB che ha i suoi estremi sulla circonferenza, dicesi *linea inscritta nel cerchio*.

quella degli angoli DCO, BCO; e però in questi due quadrilateri le diagonali sono le bisettrici degli angoli opposti.

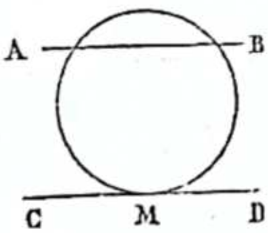
N. del Trad.



Angolo inscritto è un angolo come BAC che ha il vertice sulla circonferenza ed ha per lati due corde.

Un triangolo dicesi inscritto, quando i suoi tre angoli hanno i vertici sulla circonferenza.

In generale una figura si dice *inscritta* quando tutti i suoi angoli hanno i vertici sulla circonferenza; nello stesso tempo il cerchio dicesi *circoscritto* a questa figura.

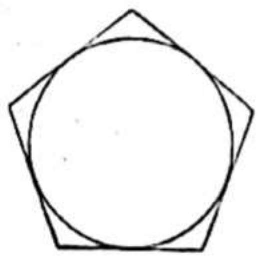


VII. Ogni retta indefinita che incontra la circonferenza in due punti, chiamasi secante. Tale è AB.

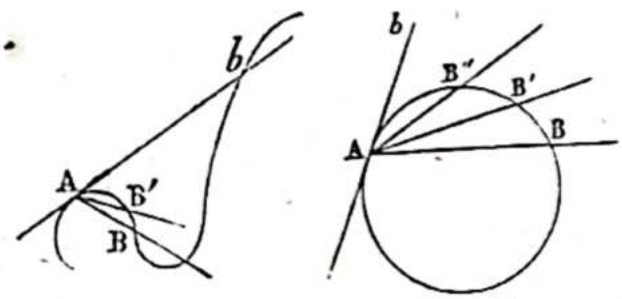
VIII. La tangente è una retta la quale non ha che un sol punto di comune colla circonferenza; tale è CD.

Il punto M chiamasi *punto di contatto.*

IX. Similmente, due circonferenze sono *tangenti* l'una all'altra, allorchè esse non hanno che un sol punto di comune.



X. Un poligono è *circoscritto ad un cerchio* quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza; in questo caso si dice che il cerchio è *inscritto* nel poligono.



N. B. Si chiama, in generale, tangente di una curva il limite delle posizioni che prende una secante AB la quale gira intorno ad un punto A della curva, fino a che un secondo punto d'intersezione viene a confondersi col primo. Se la curva è chiusa e non può essere incontrata da una retta in più di due punti, come per esempio, il cerchio, è evidente che quando i due punti d'intersezione saranno riuniti in un solo, la retta non avrà più che un punto di comune con la curva; e quindi si potrà, se si vuole, chiamar tangente una retta che ha un sol punto di comune con la curva. Però la prima definizione conviene a tutte le curve; ed an

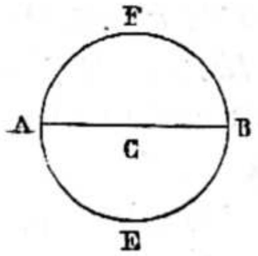
PROPOSIZIONE I.

TEOREMA – *Una retta non può incontrare una circonferenza in più di due punti.*

Poichè se essa la incontrasse in tre, questi tre punti sarebbero ugualmente distanti dal centro e quindi vi sarebbero tre rette uguali menate da uno stesso punto alla stessa retta, il che è impossibile (prop. 16, 1).

PROPOSIZIONE II.

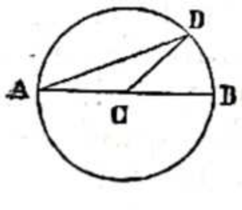
TEOREMA — *Ogni diametro* AB *divide il cerchio e la circonferenza in due parti uguali.*



Poichè se si applica la figura AEB sopra AFB, conservando la base comune AB, la curva AEB dovrà cadere esattamente su di AFB. senza di che vi sarebbero sull'una o sull' altra dei punti disugualmente lontani dal centro, ciò che è contrario alla definizione del cerchio.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA — *Ogni corda è minore del diametro.*



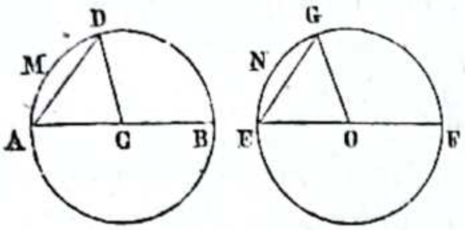
Infatti, se agli estremi della corda AD si conducono i raggi AC, CD, sarà la retta AD$<$ $<$AC+CD, o AD$<$AB.

Corollario. La retta maggiore che si può inscrivere in un cerchio è il diametro.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA. – *Nello stesso cerchio o in cerchi uguali, archi uguali sono sottesi da corde uguali; e reciprocamente, corde uguali sottendono archi uguali.*

che restringendola al cerchio, essa ha il vantaggio di mostrare alcune analogie notevoli fra parecchi teoremi.



Sia il raggio AC uguale al raggio EO e l'arco AMD uguale all'arco ENG, io dico che la corda AD sarà uguale alla corda EG.

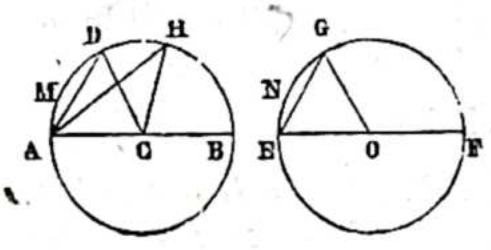
Infatti, essendo il diametro AB uguale al diametro EF, il semicerchio AMDB si potrà sovrapporre al semicerchio ENGF in modo che coincidano; ma si è supposto la parte AMD uguale alla parte ENG, quindi il punto D cadrà in G; e perciò la corda AD dovrà risultare uguale alla corda EG.

Reciprocamente, supponendo sempre il raggio AC=OE; se la corda AD=EG, io dico che l'arco AMD sarà uguale all'arco ENG.

Poichè tirando i raggi CD, OG, i due triangoli ACD, EOG avendo i tre lati rispettivamente uguali, sono uguali; quindi l'angolo ACD=EOG: ma situando il semicerchio ADB sul suo uguale EGF, il raggio CD deve cadere sul raggio OG per essere ACD=EOG, ed il punto D sul punto G; dunque l'arco AMD è uguale all'arco ENG.

PROPOSIZIONE V.

Teorema — *Nello stesso cerchio o in cerchi uguali l'arco maggiore è sotteso dalla corda maggiore, e reciprocamente; sempre però che gli archi siano minori di mezza circonferenza.*



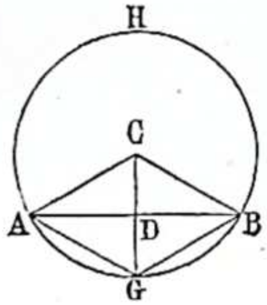
Sia l'arco AMH maggiore di ENG; se si taglia AMD=ENG, le corde AD, EG saranno uguali; e se infine si tirano i raggi DC, CH, i due triangoli ACH, ACD avendo due lati uguali a due lati e l'angolo ACH maggiore di ACD, sarà il terzo lato AH maggiore del terzo lato AD.

Reciprocamente, se la corda AH è maggiore di EG, l'arco AMH sarà maggiore di ENG; poichè se AMH fosse uguale a ENG, la corda AH sarebbe uguale ad EG, il che è contro l'ipotesi, e se l'arco AMH fosse minore di ENG, la corda AH sarebbe minore di EG, la qual cosa è anche contro l'ipotesi.

Scolio. Si suppongono gli archi minori di una semicirconferenza; poichè se essi fossero maggiori, avrebbe luogo la proprietà contraria.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA. *Il raggio* CG *perpendicolare ad una corda* AB, *divide questa corda e l'arco sotteso in due parti uguali.*



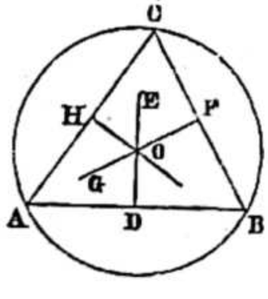
Si conducano i raggi CA, CB; questi essendo due obblique uguali rispetto alla perpendicolare CD, si avrà AD=DB. In secondo luogo, essendo AD=DB, la CG è una perpendicolare innalzata dal punto di mezzo di AB; e però (prop. 17, I) ogni punto G di questa perpendicolare dovendo essere ugualmente distante dagli estremi A e B, sarà AG=BG: Ma se la corda AG è uguale alla corda GB, l'arco AG è uguale all'arco GB (prop. 4); dunque il raggio CG perpendicolare alla corda AB divide anche l'arco sotteso da questa corda in due parti uguali.

Scolio. La retta CG passa pel centro, pel punto medio della corda, pel punto medio dell'arco ed è perpendicolare alla corda. Ora due di queste condizioni essendo sufficienti a determinare la posizione di una retta, ne risulta, che ogni linea retta che soddisfa a due di queste condizioni, soddisferà anche alle altre due.

Per esempio, la perpendicolare innalzata dal punto di mezzo dalla corda, passerà pel centro e pel punto di mezzo dell'arco, e così di seguito.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA — *Per tre punti* A, B, C, *non in linea retta, si può sempre far passare una circonferenza; ma non se ne può far passare che una sola.*



Si tirino le AB, BC, e dai punti di mezzo di queste rette le s'innalzino le perpendicolari DE, FG; queste rette debbono incontrarsi perchè perpendicolari a due rette AB, BC che si tagliano. (Scolio della prop. 23).

Intanto il punto d'incontro O delle due

rette DE, FG, appartenendo alla perpendicolare DE, è ugualmente distante dai punti A e B; (prop. 17) e lo stesso punto appartenendo alla perpendicolare FG, è ugualmente distante dai punti B e C; quindi le tre distanze OA, OB, OC essendo uguali, la circonferenza descritta col centro O e col raggio OB passerà per i tre punti A, B, C.

Io dico inoltre che nessun altra circonferenza può passare per i tre punti A, B, C; perchè se ve ne fosse un'altra, il suo centro dovendo trovarsi contemporaneamente sopra DE e FG, non può essere che l' unico punto d' incontro di queste due rette.

Corollario I. — La perpendicolare innalzata dal punto di mezzo di AC passerà pel punto O, perchè questo punto è ugualmente distante da A e C ; dunque le perpendicolari innalzate dai punti di mezzo dei lati di un triangolo, si tagliano nello stesso punto.

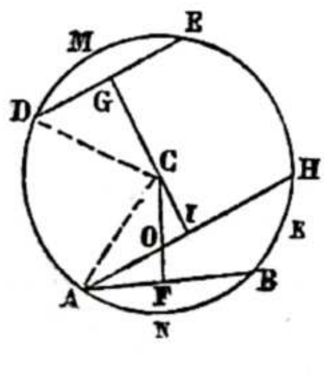
Corollario II. — Due circonferenze non possono avere più di due punti comuni, senza confondersi.

PROPOSIZIONE VIII.

Teorema — *Nello stesso cerchio o in cerchi uguali, due corde uguali sono ugualmente lontane dal centro, e di due corde disuguali, la minore è la più lontana dal centro.*

1.° Sia la corda AB=DE ; si dividano queste corde per metà con le perpendicolari CF, CG, e si tirino i raggi AC, CD.

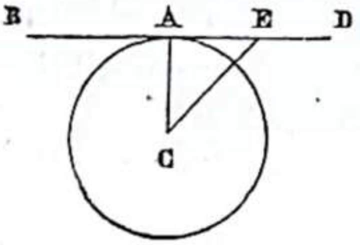
I triangoli rettangoli CAF, DGC , avendo le ipotenuse CA, CD uguali e il lato AF metà di AB uguale al lato DG metà di DE, sono uguali; (prop. 18, 1) e però il terzo lato CF sarà uguale al terzo CG ; dunque : 1.° le due corde uguali AB, DE sono ugualmente lontane dal centro.



2.° Sia la corda AH maggiore di DE, l'arco AKH sarà maggiore di DME (prop. 5) : sull' arco AKH si prenda la parte ANB=DME, si tiri la corda AB e si abbassi CF perpendicolare a questa corda e CI perpendicolare ad AH; è chiaro che CF è maggiore di CO e CO maggiore di CI; quindi, con più forte ragione sarà CF > CI; Ma CF=CG, perchè le corde AB, DE sono uguali, dunque sarà CG > CI; e quindi di due corde disuguali, la minore è più lontana dal centro.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA. — *La perpendicolare* BD *all' estremità del raggio* CA *è tangente alla circonferenza.*



Poichè ogni obbliqua CE essendo maggiore della perpendicolare CA, il punto E trovasi fuori del cerchio; e però la BD non avendo che il solo punto A di comune con la circonferenza, è una tangente.

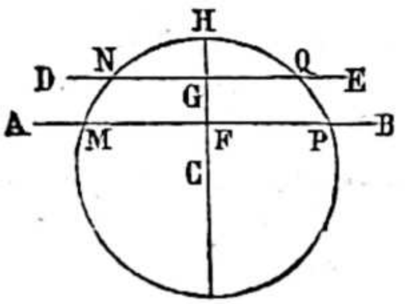
Reciprocamente. Il raggio CA, condotto al punto di contatto della tangente BD, è perpendicolare a questa tangente.

Poichè tutti i punti di questa retta, ad eccezione di A, essendo esterni alla circonferenza, il raggio CA sarà la più corta linea che si può condurre dal punto C alla retta BD; e per conseguenza sarà perpendicolare a questa retta.

Corollario — Da un punto A preso sulla circonferenza non si può tirare che una sola tangente.

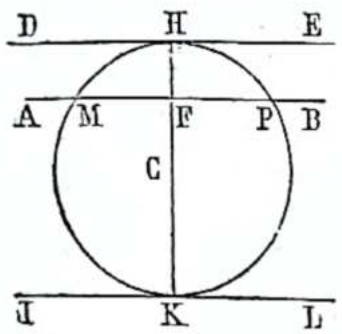
PROPOSIZIONE X

TEOREMA — *Due parallele* AB, DE *intercettano sulla circonferenza gli archi uguali* MN, PQ.



Si possono dare tre casi:

1.° Se le due parallele sono secanti, conducendo il raggio CH perpendicolare alla corda MP, esso sarà perpendicolare anche alla NQ parallela ad MP; quindi il punto H essendo contemporaneamente il punto di mezzo dell'arco MHP e dell'arco NHQ, (prop 6) sarà l'arco MH=HP, e l'arco NH=HQ, donde risulta MH−NH=HP−HQ, cioè: MN=PQ.



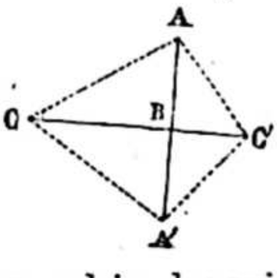
2.° Se delle due parallele AB, DE, una è tangente e l'altra è secante; al punto di contatto H conducendo il raggio CH, questo sarà perpendicolare alla tangente DE (prop. 9) ed anche alla sua parallela MP: Ma essendo CH perpendicolare alla corda MP, il punto H è il punto di mezzo dell'arco MHP; dunque i due archi MH, HP compresi fra le parallele AB, DE, sono uguali.

3.° Infine, se le due parallele DE, IL sono tangenti, l'una in H e l'altra in K, tirando la secante AB parallela ad una di esse, si avrà, per ciò che si è dimostrato MH=HP e MK=KP; dunque l'intero arco HMK=HPK, e si vede chiaramente che ciascuno di questi archi è una semicirconferenza.

PROPOSIZIONE XI.

Teorema — *Se due circonferenze hanno un punto di comune* A *fuori della retta* CC' *che unisce i loro centri, esse avranno un secondo punto di comune* A' *situato sulla perpendicolare* AB *a* CC' *e ad una distanza da questa retta uguale a quella del punto* A *alla medesima retta.*

In effetti, supponendo A'B uguale a AB, le rette CA, CA' saranno uguali come oblique che si allontanano ugualmente dal piede della CB perpendicolare alla retta AA'. Dunque il cerchio descritto col punto C come centro e con CA per raggio, passerà pel punto A'. Nell'istesso modo si vedrà che il cerchio descritto col punto C' come centro e con C'A per raggio, deve passare pel punto A'.

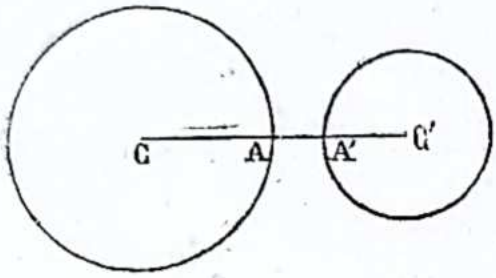


Corollario — I. Quando due circonferenze si tagliano, la retta che unisce i centri risulta perpendicolare nel punto di mezzo della corda comune.

II. Se due circonferenze sono tangenti, il punto di contatto è situato sulla retta che unisce i centri; poichè se fosse altrimenti, le circonferenze avrebbero un secondo punto di comune, e per conseguenza si taglierebbero.

Due circonferenze non possono occupare l'una rispetto all'altra che cinque posizioni differenti; cioè, possono essere interne o esterne, possono toccarsi esternamente o internamente; ed infine possono tagliarsi.

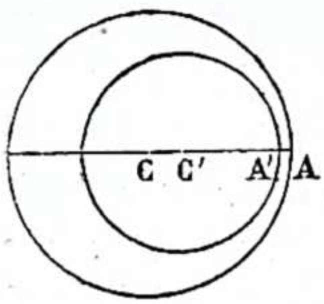
PROPOSIZIONE XII.



Teorema — *Se due circonferenze sono esterne, la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi.*

Poichè si ha $CC'=CA+C'A'+AA'$, donde $CC'>CA+C'A'$.

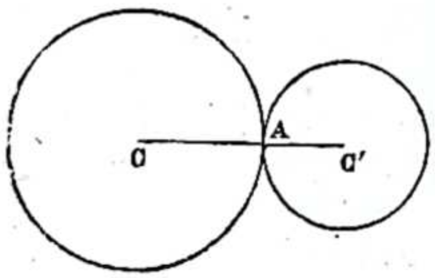
PROPOSIZIONE XIII.



Teorema — *Se due circonferenze sono interne, la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi.*

Poichè si ha $CC'=CA-C'A'-A'A'$, donde $CC'<CA-C'A'$.

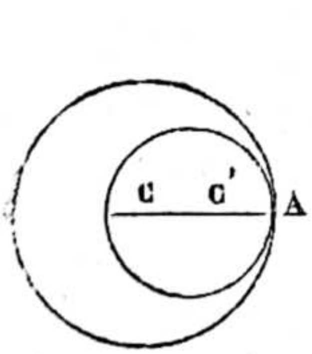
PROPOSIZIONE XIV.



Teorema — *Se due circonferenze sono tangenti esternamente, la distanza dei centri è uguale alla sommu dei raggi.*

Poichè, il punto di contatto A essendo sulla retta che passa pei centri, si ha evidentemente $CC'=CA+AC'$.

PROPOSIZIONE XV.

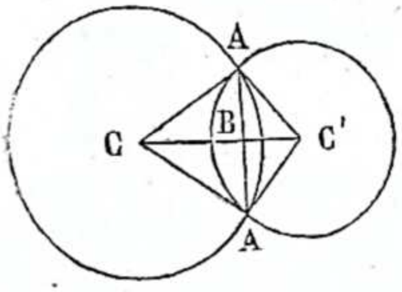


Teorema — *Se due circonferenze si toccano internamente, la distanza dei centri è uguale alla differenza dei raggi.*

Poichè il punto di contatto A trovandosi sulla congiungente dei centri, si ha $CC'=CA+C'A$.

PROPOSIZIONE XVI.

Teorema – *Se due circonferenze si tagliano, la distanza dei centri sarà minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza.*



Poichè, congiungendo i centri con uno dei punti d'intersezione A, si formerà un triangolo di cui la retta CC' che passa per i centri ed i raggi CA, C'A saranno i lati; e si è già veduto che in un triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due ed è maggiore della loro differenza.

Le reciproche di queste cinque proposizioni sono vere e si dimostrano tutte nello stesso modo; per esempio, se la distanza dei centri è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza, le circonferenze si tagliano, perchè se esse fossero esterne o interne, la distanza dei centri dovrebbe essere maggiore della somma dei raggi o minore della loro differenza; e se esse fossero tangenti, la distanza dei centri dovrebbe essere uguale alla somma dei raggi o alla loro differenza.

PROPOSIZIONE XVII.

Teorema—*Nello stesso cerchio o in cerchi uguali gli angoli uguali* ACB, DOE, *che hanno il vertice al centro, intercettano sulla circonferenza gli archi uguali* AB, DE.

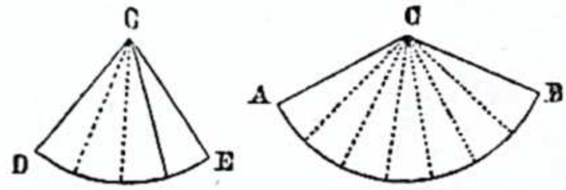
In effetti, tirando le corde AB, DE, i triangoli ACB, DOE risultano uguali, avendo un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali; quindi avendosi AB=DE, anche gli archi saranno uguali (prop. 4).

Reciprocamente, se gli archi AB, DE sono uguali, gli angoli ACB, DOE saranno anche uguali.

Poichè gli archi AB, DE essendo uguali, le corde AB, DE saranno anche tali, ed allora i due triangoli ACB, DOE, risultando uguali per avere i tre lati rispettivamente uguali, ne segue che l' angolo ACB=DOE.

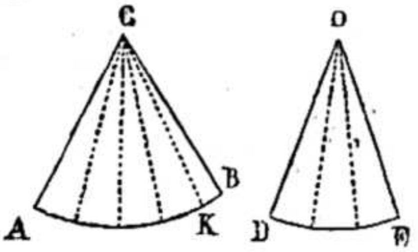
PROPOSIZIONE XVIII.

Teorema—*Nello stesso cerchio o in cerchi uguali, il rapporto di due angoli al centro è uguale a quello degli archi intercetti fra i loro lati.*



Siano ACB, DOE due angoli al centro di circonferenze uguali: supponiamo in primo luogo che gli archi AB, DE abbiano una comune misura, la quale sia contenuta 7 volte in AB e 4 volte in DE; il rapporto di AB a DE sarà $\frac{7}{4}$.

Intanto se si uniscono i punti di divisione dei due archi con i centri delle circonferenze, si vede che l'angolo ACB resterà diviso in 7 angoli uguali fra loro, perchè comprendono archi uguali, e che l'angolo DOE contiene 4 di questi angoli; epperò anche il rapporto dei due angoli ACB, DOE sarà $\frac{7}{4}$.



Se gli archi AB e DE sono incommensurabili, dopo di aver diviso l' arco DE in un numero arbitrario di parti eguali p. e. tre, supponiamo che l'arco AB contenga 4 di queste parti con un resto KB minore di una di esse; il rapporto di AB a DE, è dunque maggiore di $\frac{4}{3}$ e minore di $\frac{5}{3}$.

Ma se si congiungono i centri C, O con i punti di divisione degli archi, si vede che l'angolo DOE è diviso in tre parti uguali e che l'angolo ACB contiene 4 di queste parti con un resto KCB minore di una di esse, quindi il rapporto degli angoli ACB, DOE è anche compreso fra $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}$; e perciò ambo i rapporti $\frac{ACB}{DOE}$ e $\frac{AB}{DE}$ sono compresi fra $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}$. Ora dividendo l' arco DE in 10, 100, 1000.... parti uguali, si dimostrerebbe similmente che questi due rapporti sono compresi fra due numeri consecutivi di decimi, centesimi,.... dunque i suddetti rapporti essendo compresi fra due numeri la di cui differenza può divenire piccolissima, si possono considerare uguali.

Misura degli angoli.

Misurare una grandezza significa trovare il rapporto di questa grandezza all'unità della stessa specie. La misura d'un angolo, prendendo per unità l'angolo retto, non è altro che il rapporto di questo angolo ad un retto.

Ma il teorema precedente mostra che al rapporto dei due angoli al centro si può sostituire quello degli archi intercetti fra i loro lati; quindi in luogo di paragonare direttamente un angolo ad un retto, si potrà paragonare l'arco compreso fra i suoi lati al quarto della circonferenza; ed è in questo senso che più brevemente dicesi che un angolo al centro ha per misura l'arco intercetto fra i suoi lati.

Per facilitare questo paragone suol dividersi la circonferenza in 360 parti uguali chiamati *gradi*, ogni grado in 60 minuti, ogni minuto in 60 secondi... (*)

In tal caso, se l'arco intercetto dai lati di un angolo al centro contiene 24 gradi, la misura di quest'angolo sarà $\frac{24}{90}$ o $\frac{4}{15}$.

Nella pratica si dice che l'angolo al centro il quale intercetta fra i suoi lati un arco di 24° è un'angolo di 24°; ciò vuol dir che esso è uguale a 24 volte l'angolo al centro che comprende fra i suoi lati un arco di 1 grado.

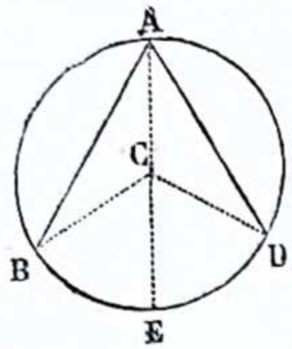
Scolio — Ripetendo letteralmente la dimostrazione del teorema precedente, si proverebbe che due settori presi in cerchi uguali stanno fra loro come gli archi intercetti fra i loro lati.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA – *L'angolo inscritto* BAD *ha per misura la metà dell' arco* BD *compreso fra i suoi lati.*

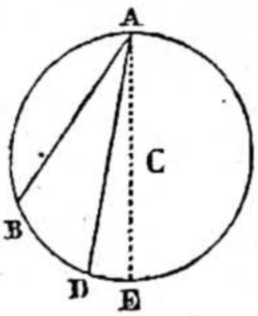
(*) Gli astronomi francesi per applicare il sistema decimale alle misure angolari sogliono considerare la circonferenza divisa in 400 gradi, il grado in 100 minuti primi, ed il minuto primo in 100 secondi. Ma questo sistema non ha incontrato favore nel rimanente dell' Europa.

N. del Trad.

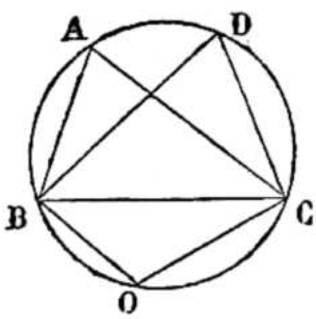


Supponiamo in primo luogo che il centro del cerchio sia situato nell' angolo BAD ; conduciamo il diametro AE ed i raggi CB, CD. L'angolo BCE, esterno al triangolo ABC è uguale alla somma dei due interni CAB, ABC (prop. 29, 1) ma il triangolo BAC essendo isoscele, l'angolo CAB=ABC, dunque l'angolo BCE è doppio di BAC ; e siccome l' angolo BCE come angolo al centro ha per misura l' arco BE; così l'angolo BAC avrà per misura la metà di EB : per una simile ragione l' angolo CAD avrà per misura la metà di ED; quindi BAC + + CAD o BAD avrà per misura la metà di BE+ED o la metà di BD.

Supponiamo in secondo luogo che il centro C sia situato fuori dell' angolo BAD, allora conducendo il diametro AE, l' angolo BAE avrà per misura la metà di BE, l' angolo DAE la metà di DE ; e quindi la loro differenza BAD avrà per misura la metà di BE meno la metà di ED , o la metà di BD. Ogni angolo inscritto adunque ha per misura la metà dell' arco compreso fra i suoi lati.



Corollario I. — Tutti gli angoli BAC , BDC, etc., inscritti nello stesso segmento sono uguali, poichè essi hanno per misura la metà dello stesso arco BOC.



II. Ogni angolo inscritto nel semicerchio è un angolo retto; poichè esso ha per misura la metà della semicirconferenza o la quarta parte della circonferenza.

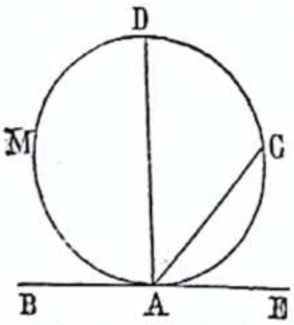
III. Ogni angolo BAC inscritto in un segmento maggiore del semi-cerchio è un angolo acuto, perchè ha per misura la metà dell'arco BOC minore della semicirconferenza.

Ogni angolo BOC inscritto in un segmento minore di un semicerchio è un angolo ottuso: poichè ha per misura la metà dell'arco BAC maggiore di una semicirconferenza (*).

(*) Due angoli inscritti in due segmenti che hanno la corda di comune, come BAC, BOC, sono supplementari, perchè misurati dalle metà di due archi che presi insieme formano una intera circonferenza. *N. del Trad.*

PROPOSIZIONE XX.

Teorema — *L' angolo* BAC *formato da una tangente e da una corda, ha per misura la metà dell' arco* AMDC, *compreso fra i suoi lati.*

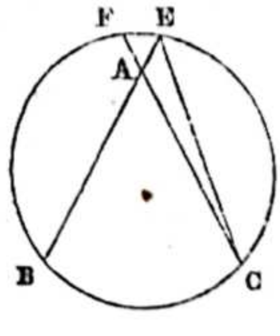


Al punto di contatto A si conduca il diametro AD: l' angolo BAD come retto (prop. 9) ha per misura la metà della semicirconferenza AMD; ma l' angolo DAC ha per misura la metà di DC; dunque BAD+DAC o BAC avrà per misura la metà di AMD più la metà di DC, o la metà dell' intero arco AMDC.

Si dimostra nell'istesso modo che l'angolo CAE ha per misura la metà dell'arco AC compreso fra i suoi lati.

PROPOSIZIONE XXI.

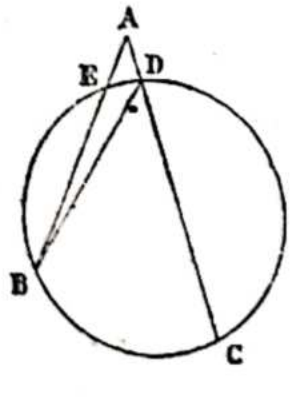
Teorema — *L'angolo* BAC, *formato dalle due secanti* BE, FG, *e il cui vertice è situato nell'interno della circonferenza ha per misura la metà dell' arco compreso fra i suoi lati, più la metà dell' arco compreso fra i prolungamenti dei medesimi lati.*



In effetti, l' angolo BAC, esterno al triangolo AEC, è uguale alla somma degli angoli AEC, ACE, che hanno rispettivamente per misura le metà degli archi BC e FE.

PROPOSIZIONE XXII.

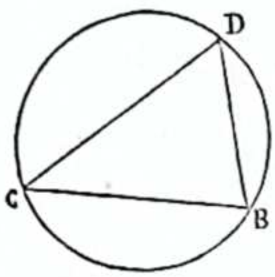
Teorema — *L' angolo* BAC, *formato dalle due secanti* AB, AC, *e il cui vertice trovasi fuori dalla circonferenza, ha per misura la metà dell' arco concavo* BC, *meno la metà dell' arco convesso* DE.



Poichè l'angolo A è uguale alla differenza degli angoli BDC, ABD che hanno per misura, il primo la metà di BC e il secondo la metà di DE.

La proposizione è anche vera, allorchè uno dei lati dell'angolo o tutti e due sono tangenti alla circonferenza, e la dimostrazione è la stessa.

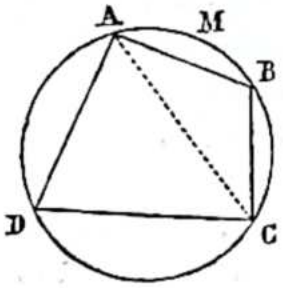
Corollario.—Il luogo geometrico del vertice di un angolo costante, i cui lati passano per i punti fissi C e B, è un arco di circonferenza.



Infatti, sia CDB una prima posizione dell'angolo; se si descrive la circonferenza che passa per i tre punti C, D, B, dai tre teoremi precedenti risulta che un angolo i cui lati passano per i punti C e B allora è uguale a CDB, quando il suo vertice trovasi situato sull'arco CDB, e che questo angolo sarà diverso da CDB, quando il suo vertice non è situato sull'arco di cerchio CDB.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA — *In ogni quadrilatero inscritto* ABCD, *gli angoli opposti sono supplementari.*



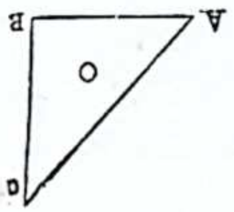
Poichè, gli angoli opposti ADC, ABC, presi insieme hanno per misura la metà della circonferenza ABCD(nota alla prop. 19). Reciprocamente, se in un quadrilatero, due angoli opposti ADC, ABC, sono supplementari, questo quadrilatero è inscrittibile.

In effetti, facendo passare una circonferenza per i tre punti A, D, C, l'angolo ADC avrà per misura la metà dell'arco AMC; dunque l'angolo ABC, che è il supplemento del primo, deve aver per misura la metà del rimanente arco ADC, vale a dire che esso è uguale a ciascuno degli angoli inscritti nel segmento AMC; ciò che non può aver luogo se non quando il punto B trovasi sull'arco AMC.

PROBLEMI RELATIVI AI DUE PRIMI LIBRI.

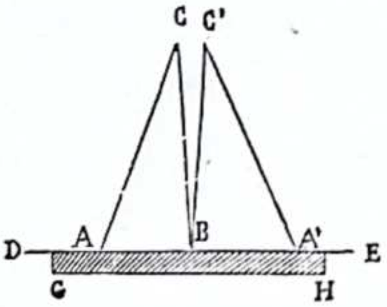
Per eseguire le costruzioni relative ai problemi della geometria elementare, bastano due strumenti: la riga per tracciare le linee rette, ed il compasso col quale si tracciano le circonferenze.

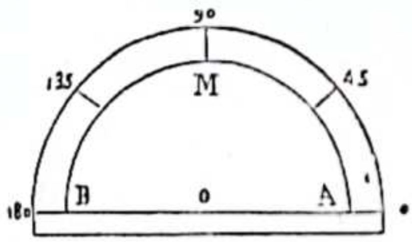
Qualche volta si fa anche uso dello squadro e del semicerchio graduato.



Lo squadro è un pezzo di legno che ha la forma di un triangolo rettangolo ABC.

Per verificare se lo squadro è esatto, cioè se l'angolo B è retto, si traccia una retta DE, sulla quale si adatta una buona riga GH. Si appoggia uno dei lati AB dello squadro contro la riga e con una matita si traccia una retta BC; in seguito si gira lo squadro in modo che esso prenda la posizione A'BC', e si traccia un'altra retta BC'. Se lo squadro è esatto, le rette BC, BC' devono coincidere, perchè la somma degli angoli ABC, A'BC' deve essere uguale a due retti.



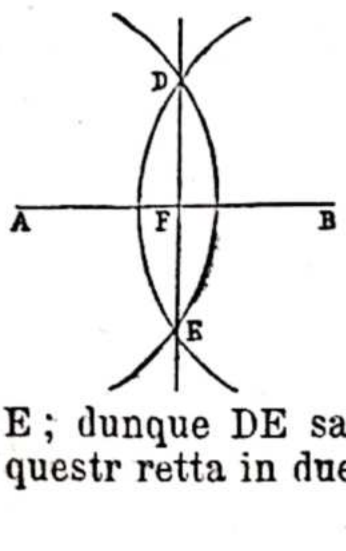


Il semicerchio da tavolino è un istrumento di corno o di rame che ha la forma di un semicerchio, e la cui semicirconferenza è divisa in 180 gradi, nel senso AMB e nel senso BMA.

Se il raggio del semicerchio supera 8 centimetri, si può facilmente dividere la semicirconferenza in mezzi gradi; il centro del semicerchio è segnato da un piccolo incavo disposto nel punto di mezzo del diametro.

PROBLEMA PRIMO.

Dividere la retta data AB *in due parti uguali.*



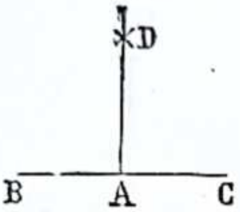
Con i punti A e B come centri, e con un raggio maggiore della metà di AB, si descrivano due archi di cerchio che si tagliano in D ed in E; e si conduca la retta DE.

Il punto D essendo ugualmente distante dai punti A e B, appartiene alla perpendicolare innalzata sul mezzo di AB; lo stesso avviene del punto E; dunque DE sarà perpendicolare ad AB, e dividerà questr retta in due parti uguali.

PROBLEMA II.

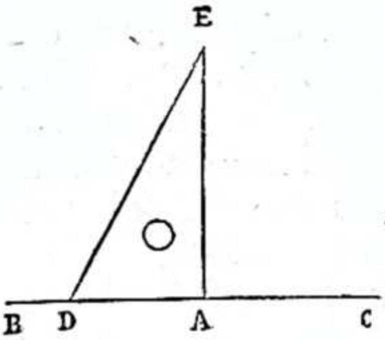
Da un punto A, *dato sulla retta* BC, *innalzare una perpendicolare su di questa retta.*

Si segnino sulla retta i punti B e C ad uguale distanza da A; indi con questi punti come centri e con un raggio maggiore di BA, si descrivano due archi che si tagliano in D; la AD sarà la perpendicolare dimandata.



Poichè il punto D essendo ugualmente distante da B e da C, appartiene alla perpendicolare innalzata dal punto di mezzo di BC.

Si può anche risolvere lo stesso problema per mezzo dello squadro.

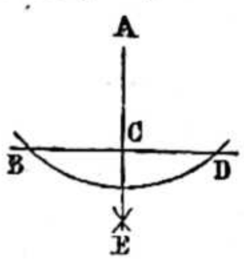


Si disponga lo squadro in modo che il vertice dell' angolo retto sia in A e che il lato AD coincida con la retta BC. La retta tracciata secondo il lato AE dello squadro è la perpendicolare innalzata dal punto A su di BC.

Nella pratica però questo mezzo non è molto esatto.

PROBLEMA III.

Da un punto A *dato fuori della retta* BD, *abbassare una perpendicolare su di questa retta.*

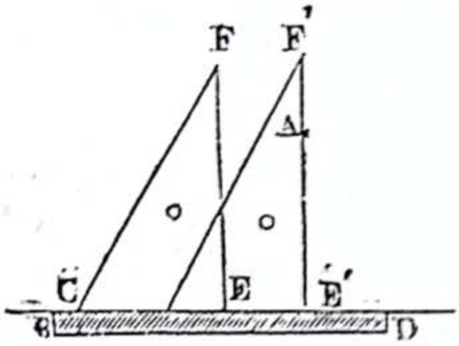


Col punto A come centro e con un raggio sufficientemente grande, si descriva un arco che tagli la retta BD nei due punti B e D; con questi punti come centri e con un raggio maggiore della metà di BD si descrivano due archi di cerchio, che si tagliano in E.

Tirando la retta AE, questa sarà la perpendicolare domandata.

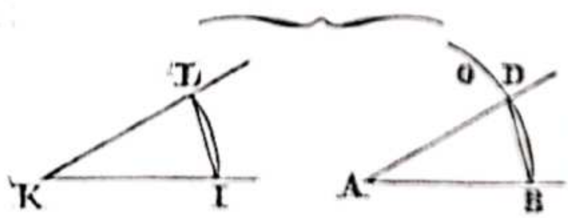
Poichè i due punti A e E essendo ugualmente distanti dai punti B e D, la retta AE sarà perpendicolare sul mezzo di BD.

Per effettuare la stessa costruzione col mezzo dello squadro si situi una riga sulla retta BD, si applichi alla riga uno dei lati dell' angolo retto dello squadro, e si faccia scorrere questo lungo la riga fino a che il secondo lato dell' angolo retto passi per il punto A; la retta F′E′ così tracciata sarà la perpendicolare su di BD.



PROBLEMA IV.

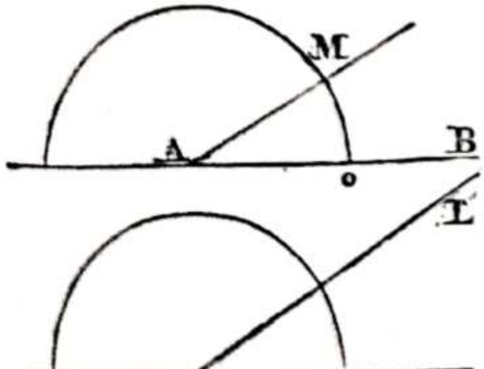
Al punto A *della retta* AB, *fare un angolo uguale all'angolo dato* K.



Col vertice K come centro e con un raggio qualunque KI si descriva l'arco IL terminato ai due lati dell'angolo; col punto A come centro e con un raggio AB uguale a KI si descriva l'arco indefinito BO; col punto B come centro e con un raggio eguale alla corda LI descrivasi un arco che taglia in D l' arco indefinito BO, si tiri AD e l'angolo DAB sarà uguale all'angolo dato K.

Poichè i due archi BD, LI avendo i raggi uguali e le corde uguali, sono uguali (prop. 4,2.); e perciò l' angolo BAD=IKL.

Si può far uso del semicerchio da tavolino per risolvere questo problema.



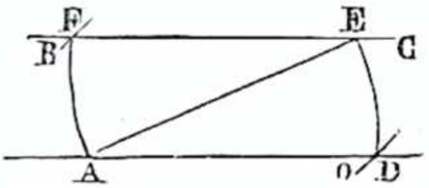
Dispongasi l'istrumento in modo che il suo centro sia in K, e che il diametro coincida con KI, e si esamini a quale divisione del suo lembo corrisponde il lato KL. supponiamo che sia la 39.a

Ciò fatto si situi il semicerchio in modo che mentre il suo diametro coincida con AB, il centro sia in A; si contino

39 divisioni a partire da 0; ed all'estremità della 30ª divisione si segni sulla carta il punto M; togliendo il quadrante e congiungendo il punto M col punto A, l'angolo MAB sarà uguale all'angolo IKL.

PROBLEMA V.

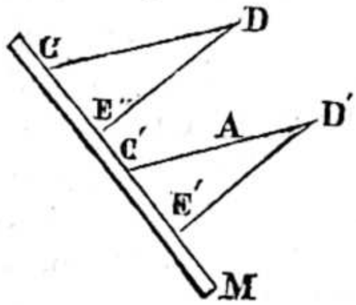
Dal punto dato A *condurre una parallela alla retta data* BC.



Col punto A come centro e con un raggio sufficientemente grande, descriviamo l'arco indefinito EO; col punto E come centro e con lo stesso raggio, si descriva l'arco AF; si prenda ED=AF e si tiri AD, che sarà la parallela dimandata.

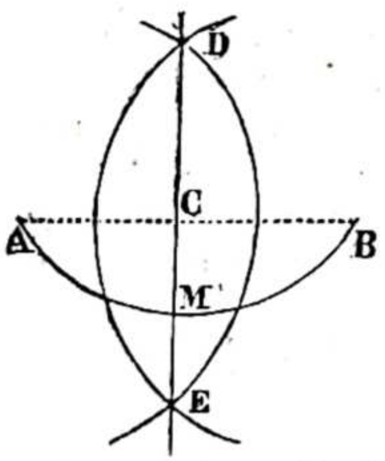
Poichè congiungendo AE, si vede che gli angoli alterni-interni AEF, EAD essendo uguali, le rette AD, BC sono parallele (prop. 26, 1).

Per risolvere questo problema si fa uso ordinariamente dello squadro.



Si applichi l'ipotenusa sulla retta CD alla quale si deve menare la parallela dal punto A, e il lato CE contro una riga fissa CM; poi si faccia scorrere lo squadro lungo la riga fino a che l'ipotenusa passi per il punto A; la retta AD′ sarà parallela a CD, perchè gli angoli corrispondenti DCM, D′C′M sono uguali.

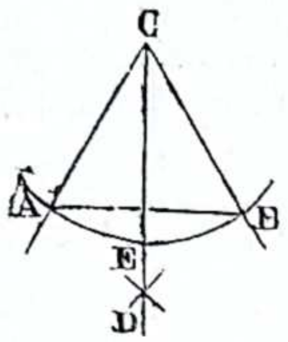
PROBLEMA VI.



Dividere un angolo o un arco dato in due parti uguali.

1º Se si deve dividere l'arco AB in due parti uguali, osserveremo che la perpendicolare innalzata dal punto di mezzo della corda AB dividerà l'arco in due parti uguali, e però il problema riducesi a dividere una retta per metà.

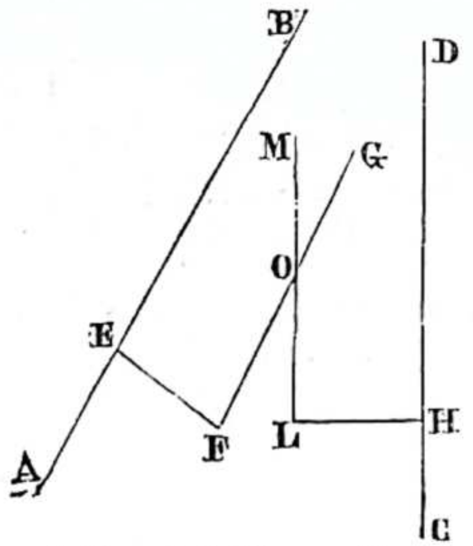
2º Se si deve dividere in due parti uguali l'angolo ACB,



si comincerà dal descrivere col vertice C come centro, e con un raggio qualunque l' arco AB; ed allora se dal vertice C si abbassi una perpendicolare sulla corda AB, questa retta dividerà in due parti uguali l' arco AB e quindi anche l' angolo ACB.

La costruzione è dunque ricondotta a quella del problema III.

Osservazione I. — Si può, con la stessa costruzione, dividere ciascuna metà AE, EB in due parti uguali; e così con suddivisioni successive, si dividerà un angolo o un arco dato in quattro parti uguali, in otto, in sedici, etc.

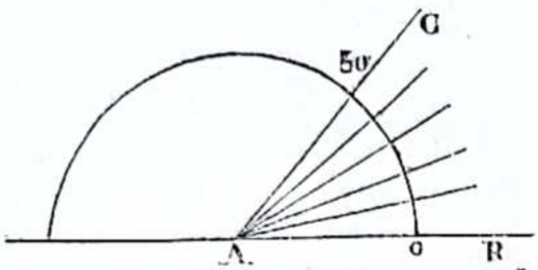


Osservazione II. Se le rette AB, CD, delle quali si vuol dividere l'angolo in due parti uguali, s'incontrano fuori dei limiti della carta, si condurrà da qualsiasi punto E della AB una perpendicolare a questa retta, sulla quale si prenderà una lunghezza qualunque EF, e dal punto F si condurrà FG parellela ad AB; poi da un punto H della CD s' innalzerà una perpendicolare HL uguale ad EF e si tirerà LM parallela a CD; il punto d'incontro O delle due parallele, essendo ugualmente distante da AB e da CD, appartiene alla bisettrice dell' angolo di queste rette.

Innalzando sopra AB e CD due altre perpendicolari uguali, e facendo la stessa costruzione, si troverà un secondo punto della bisettrice, quindi essa sarà completamente determinata.

Osservazione III. — Il semicerchio da tavolino può servire a dividere un angolo in due o più parti uguali.

Sia CAB un angolo da dividersi in 5 parti uguali, si metterà il diametro del quadrante sopra di AB e si esa-

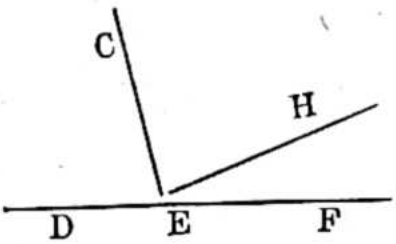


minerà a quale divisione corrisponde il secondo lato dell'angolo. Supponiamo che sia la 50ª; si dividerà 50 per 5, il che dà 10 gradi e si segneranno sulla carta a partire dallo zero del semicerchio, dei punti di 10 in 10 gradi; togliendo il semicerchio e congiungendo tutti questi punti col punto A, si sarà diviso l'angolo CAB in cinque parti uguali.

Questo procedimento non è puramente geometrico, perchè suppone un calcolo; e d'altra parte presenta qualche difficoltà di esecuzione quando il numero dei gradi che corrisponde all'angolo CAB non è divisibile per 5.

PROBLEMA VII.

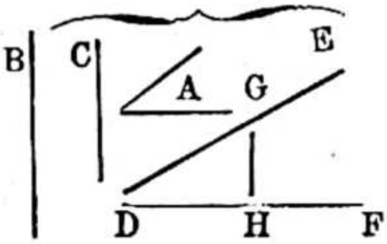
Dati due angoli A *e* B *di un triangolo, trovare il terzo.*



Tirata la retta indefinita DEF, si faccia al punto E l' angolo DEC=A e l' angolo CEH=B; l' angolo rimanente HEF sarà il terzo angolo cercato; poichè questi tre angoli presi insieme equivalgono a due angoli retti.

PROBLEMA VIII.

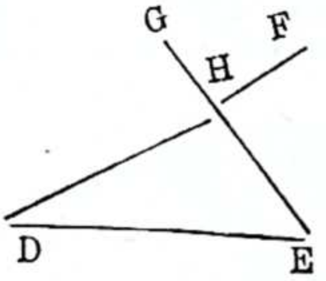
Dati i due lati B *e* C *d'un triangolo e l'angolo* A *da essi compreso, costruire il triangolo.*



Si tiri la retta indefinita DE, ed al punto D si faccia l' angolo EDF uguale all'angolo dato A; si prenda DG=B, DH=C e si tiri GH; DGH sarà i triangolo richiesto.

PROBLEMA IX.

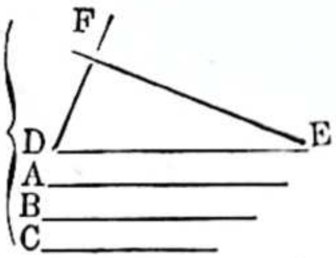
Dati un lato e due angoli di un triangolo, costruire il triangolo.



I due angoli dati possono essere o tutti e due adiacenti al lato dato o uno adiacente e l' altro opposto ; in questo ultimo caso si cerchi il terzo (prob. 7) e si avranno così i due angoli adiacenti. Posto ciò , si tiri la retta DE uguale al lato dato, si faccia al punto D l'angolo EDF uguale a uno degli angoli adiacenti e al punto E l'angolo DEG uguale all'altro; le due rette DF, EG si taglieranno in H, e DEH sarà il triangolo richiesto.

PROBLEMA X.

Dati i tre lati A, B, C *di un triangolo, costruire il triangolo.*



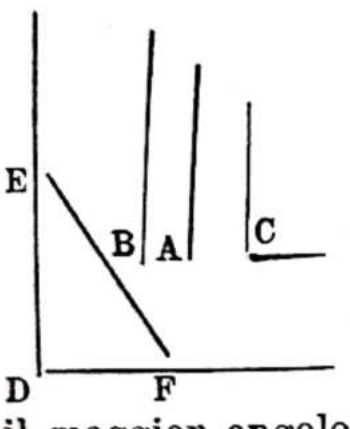
Si tiri DE uguale al lato A ; col punto E come centro e con un raggio uguale al secondo lato B, si descriva un arco; col punto D come centro e con un raggio uguale al terzo lato C, si descriva un' altro arco che taglierà il primo in F; si tirino DF, EF; il triangolo DEF sarà il triangolo richiesto.

Affinchè il problema sia possibile è necessario che le circonferenze si taglino; il che richiede (prob. 16,2) che uno dei lati DE sia minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

PROBLEMA XI.

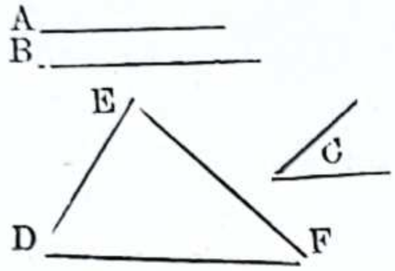
Essendo dati due lati A e B *di un triangolo e l'angolo* C *opposto al lato* B, *costruire il triangolo.*

Vi sono due casi: 1º se l' angolo C è retto o ottuso —



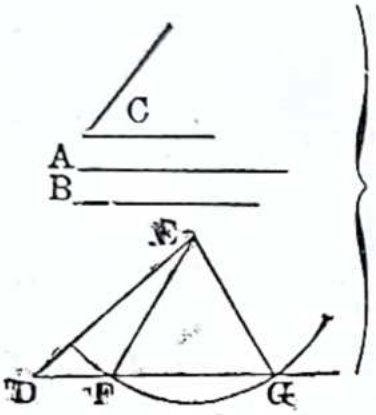
Si faccia l'angolo EDF uguale all'angolo C; si prenda DE=A; col punto E come centro e con un raggio uguale a B, si descriva un arco che taglia in F la linea DF ; si tiri EF, e DEF sarà il triangolo richiesto.

In questo primo caso bisogna che il lato B sia maggiore di A , poichè l'angolo C essendo retto o ottuso, è il maggior angolo del triangolo, e quindi il lato opposto deve essere anche il maggiore.



2.° Se l' angolo C è acuto e B è maggiore di A, si farà la stessa costruzione e DEF è il triangolo richiesto.

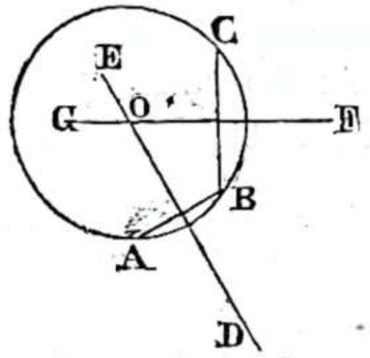
Ma se essendo l'angolo C acuto, ed il lato B è minore di A; allora l'arco descritto col centro E e col raggio EF=B taglierà il lato DF in due punti F e G situati dalla stessa parte di D, e quindi vi saranno due triangoli DEF, DEG, che soddisfano ugualmente al problema.



Scolio. Il problema sarà sempre impossibile, quando il lato B è minore della perpendicolare abbassata da E sulla DF.

PROBLEMA XII.

Trovare il centro di un cerchio o di un arco dato.

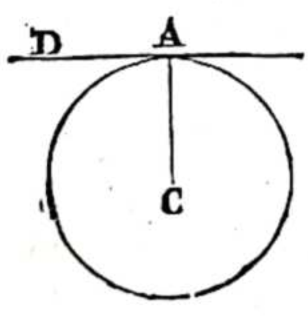


Presi ad arbitrio tre punti A, B, C sulla circonferenza o sull' arco, conduciamo o immaginiamo condotte le AB e BC; allora dividendo queste rette in due parti uguali per mezzo delle perpendicolari DE, FG, il punto O dove queste perpendicolari s'incontrano, sarà il centro cercato.

Scolio. La stessa costruzione serve a far passare una circonferenza per i tre punti dati A, B, C e anche a descrivere una circonferenza nella quale il triangolo dato ABC sia inscritto.

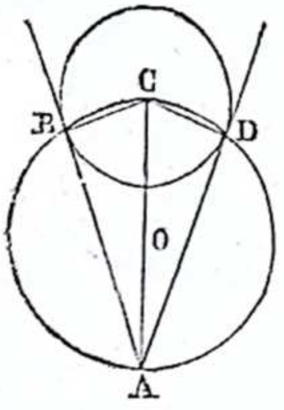
PROBLEMA XIII.

Da un punto dato condurre una tangente a un cerchio dato.



Se il punto dato A è sulla circonferenza, si tiri il raggio CA e si conduca AD perpendicolare a OA ; AD sarà la tangente dimandata (prop. 9,2).

Se il punto A è fuori del cerchio, si congiunga il punto A col centro per mezzo della retta CA; si divida CA in due parti



uguali in O; col punto O come centro e col raggio OC si descriva una circonferenza che taglierà la circonferenza data nel punto B, e si conduca AB, che sarà la tangente richiesta.

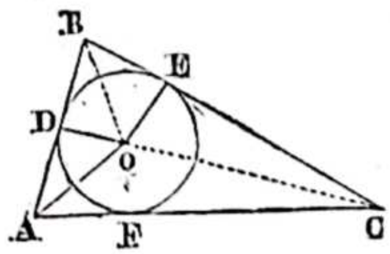
Poichè, congiungendo i punti B e C, l'angolo CBA inscritto nel semicerchio è un angolo retto (prop. 19,2); dunque AB essendo perpendicolare all'estremità del raggio CB, è tangente al cerchio.

Scolio. Il punto A trovandosi fuori del cerchio, si vede che vi sono sempre due tangenti uguali AB, AD che passano per il punto A: esse sono uguali perchè i triangoli rettangoli CBA, CDA avendo l'ipotenusa CA di comune ed il lato CB=CD, sono uguali (prop. 18,1); e perciò AD=AB e l'angolo CAD=CAB.

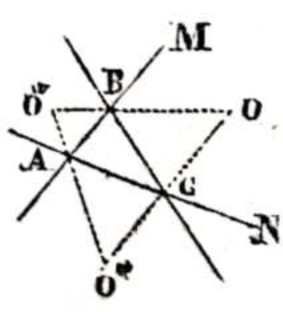
PROBLEMA XIV.

Inscrivere un cerchio in un triangolo dato ABC.

Si costruiscano le bisettrici AO, BO degli angoli A e B; queste rette si taglieranno in un punto O che sarà ugualmente distante dai tre lati AB, AC, BC. Se dunque da questo punto si abbassino le perpendicolari OD, OF, OE sopra i lati del triangolo, queste perpendicolari saranno uguali e la circonferenza descritta col punto O come centro e con OD come raggio, sarà tangente ai tre lati.



Osservazione. — Il punto O essendo ugualmente distante dai lati BC, AC appartiene alla bisettrice dell' angolo C; dunque *le tre bisettrici degli angoli d' un triangolo concorrono in un medesimo punto.*



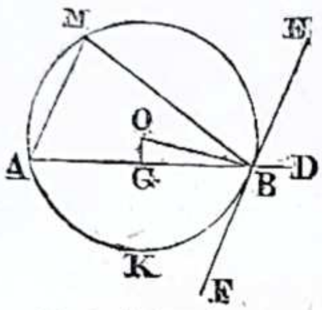
II. Se si costruiscono le bisettrici dei due angoli esterni MBC, BCN, il loro punto d'incontro O′ sarà il centro di un cerchio tangente al lato BC e ai prolungamenti degli altri due.

Nell' istesso modo si troveranno i centri O″, O‴ delle altre due circonferenze tangenti a uno dei lati del triangolo ed ai prolungamenti degli altri due.

In generale vi sono quattro circonferenze tangenti a tre rette date (*).

PROBLEMA XV.

Su di una retta data AB, *descrivere un segmento capace dell'angolo dato* C, *vale a dire, un segmento tale che tutti gli angoli in esso inscritti sono uguali all'angolo dato* C.



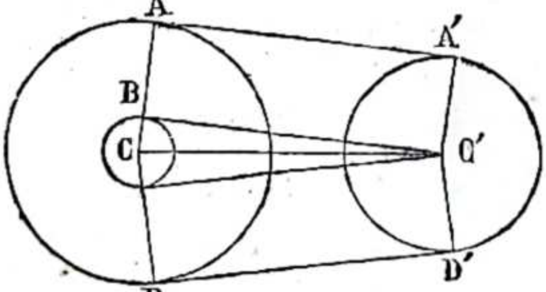
Si prolunghi AB verso D; si faccia al punto B l'angolo DBE=C; si tiri BO perpendicolare a BE e GO perpendicolare sul mezzo di AB; col punto d'incontro O come centro, e con OB per raggio si descriva una circonferenza; AMB sarà il segmento richiesto.

Poichè siccome BE è perpendicolare all'estremità del raggio OB, così BF è una tangente, e l'angolo ABF ha per misura la metà dell' arco AKB (prop. 20. 2); ma l'angolo AMB, come angolo inscritto ha anche per misura la metà dell' arco AKB, dunque l'angolo AMB=ABF=EBD=C; e però tutti gli angoli inscritti nel segmento AMB sono uguali all' angolo C.

Scolio—Se l' angolo dato è retto, il segmento cercato sarà il semicerchio descritto sopra il diametro AB.

PROBLEMA XVI.

Costruire una tangente comune a due circonferenze.



1.° Supponiamo il problema risoluto e sia AA′ una tangente comune esterna alle due circonferenze. Conduciamo i raggi CA, C′A′ ai punti di contatto e la retta C′B parallela ad AA′. I raggi CA, C′A′, essendo perpendicolari ad AA′, saranno anche

(*) Di queste quattro circonferenze, la sola interna ritiene il nome d'inscritta, e le altre tre si dicono ex-inscritte.

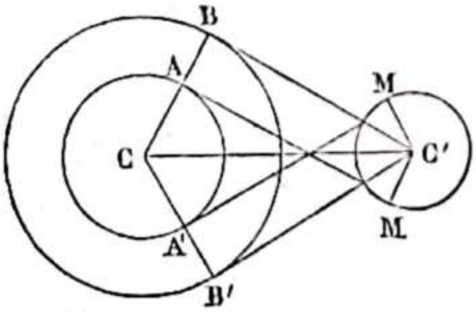
N. del Trud.

perpendicolari alla retta $C'B$; e quindi quest'ultima retta sarà tangente ad una circonferenza descritta col punto C come centro e col raggio CB uguale a $CA-C'A'$.

Da ciò che si è detto si deduce la seguente costruzione; si descriva una circonferenza col punto C come centro e con un raggio uguale a $CA-C'A'$, e si tiri dal punto C' una tangente a questa circonferenza. Conoscendo il punto B si tirerà la retta CBA, non che $C'A'$ parallela a CA e si congiungerà AA'.

La precedente costruzione fa vedere che vi sono due soluzioni del problema, poichè dal punto C' si possono condurre due tangenti alla circonferenza CB, e che il problema non è possibile che quando si ha $CC' \geqq CA-C'A'$; o in altri termini, quando le circonferenze non sono interne l' una all' altra.

2.° Proponiamoci ora di condurre una tangente comune interna alle due circonferenze i cui raggi sono CA e $C'M$, e sia AM' la retta cercata; conduciamo i raggi CA, $C'M'$ ai punti di contatto, e la retta $C'B$ parallela a AM'. La retta AM' essendo perpendicolare ai raggi CA, $C'M'$, sarà $C'B$ perpendicolare alle stesse rette; quindi sarà tangente a una circonferenza descritta col punto C come centro e con un raggio CB uguale a $CA+$ $+AB$ o $CA+C'M'$.

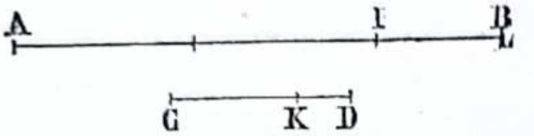


Per risolvere adunque il problema, si descriverà una circonferenza avente il suo centro in C ed il cui raggio sia la somma dei raggi delle due circonferenze date; si condurrà dal punto C' una tangente $C'B$ a questa circonferenza, ed il resto della costruzione si farà come nel caso precedente.

Questo problema ha due soluzioni e non è possibile se non quando si ha $CC' \geqq CA+C'M$; cioè quando le due circonferenze sono esterne o tangenti esternamente.

PROBLEMA XVII.

Trovare la massima comune misura di due rette AB, CD, *ed il loro rapporto numerico.*



La massima comune misura di due rette non potrà superare la minore CD; ed essa sarà uguale a CD se questa è contenuta esattamente nella maggiore AB.

Portiamo adunque CD sopra AB e supponiamo che si abbia AB=2CD+IB; io dico che la massima comune misura fra AB e CD è eguale a quella delle due rette CD e IB.

Infatti, ogni comune misura di AB e CD, dividendo CD, dividerà anche AI, e dividendo AB sarà contenuta esattamente nel resto IB; sarà dunque una comune misura di CD e IB.

Reciprocamente, ogni comune misura di CD e IB, essendo contenuta esattamente in AI ed in IB e per conseguenza in AB, sarà una comune misura di AB e CD.

In questo modo tutte le comuni misure di AB e CD essendo le stesse che quelle di CD e IB ne segue che tanto è cercare la massima comune misura delle due rette date, quanto quelle delle due CD, IB.

Portiamo dunque IB sopra CD e supponiamo che si abbia CD=IB+KD, si dimostrerà come nel caso precedente, che la massima comune misura fra CD e IB è uguale a quella fra IB e KD.

Portiamo ancora KD sopra IB e supponiamo che si abbia IB=2KD, sarà KD la massima comune misura delle due linee AB e CD; ma dalle operazioni precedenti risulta

$$CD=3\cdot KD$$
$$\text{e } AB=8\cdot KD;$$

dunque il rapporto delle due rette AB e CD è $\frac{8}{3}$.

Osservazione. — Noi abbiamo fin qui supposto che in questa serie di operazioni si giunge ad un resto zero: passeremo quindi a dimostrare che ciò avviene sempre per due rette che hanno una comune misura; mentre nel caso in cui esse sono incommensurabili, si dovrà certamente giungere a dei resti minori di ogni quantità assegnabile.

In effetti, siano A, B, le due rette sulle quali si opera; $r_1\ r_2\ r_3\ r_4\ r_5$ . . . i resti successivi; $q_1\ q_2\ q_3\ q_4$ . . . . i quozienti; si avranno le eguaglianze

$$\begin{aligned} A&=B\, q_1+r_1 \\ B&=r_1\, q_2+r_2 \\ r_1&=r_2\, q_3+r_3 \\ r_2&=r_3\, q_4+s_4 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ora r_1 è sempre minore di $\frac{A}{2}$; poichè se B è minore di $\frac{A}{2}$, con più forte ragione sarà r_1 minore di $\frac{A}{2}$, mentre se B è maggiore di $\frac{A}{2}$. sarà $r_1=A-B$; e quindi $r_1<\frac{A}{2}$.

Similmente si avrà:

$$r_3 < \frac{r_1}{2}, \text{ d'onde } r_3 < \frac{A}{4}$$

$$r_5 < \frac{r_3}{2}, \text{ d' onde } r_5 < \frac{A}{8}$$

$$r_7 < \frac{r_5}{2}, \text{ d' onde } r_7 < \frac{A}{16}$$

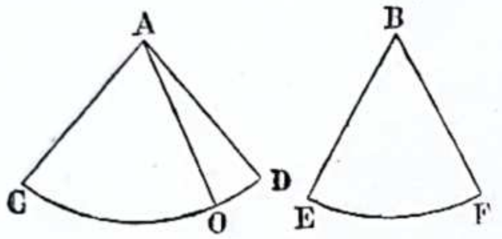
e così di seguito.

Si vede dunque che se l' operazione si prolungasse indefinitamente si arriverebbe a resti tanto piccoli quanto si vorrebbe; il che ci dice che se vi è una comune misura, si dovrà giungere ad un resto nullo; altrimenti si avrebbero dei resti minori della comune misura , il che è evidentemente assurdo, dopo la teoria precedente.

Nel caso in cui le linee sono incommensurabili, si potrà, dopo un certo numero di operazioni, trascurare l'ultimo resto ; il resto precedente servirà allora di comune misura e sarà un valore approssimato del rapporto delle due rette.

PROBLEMA XVIII.

Dati due angoli A *e* B, *trovare la loro comune misura, se ne hanno, e da questa ricavarne il rapporto numerico.*



Si descrivano con due raggi uguali gli archi CD , EF , che misurano gli angoli dati, edindi si paragonino tra loro gli archi come si è fatto nel problema precedente; giacchè un arco può adagiarsi sopra un altro arco dello stesso raggio, come una retta su di una altra retta data.

In questo modo si avrà la comune misura degli archi CD, EF e il loro rapporto numerico. Questo rapporto sarà lo stesso che quello degli angoli dati (prop. 18. 2) , e per conseguenza se DO è la comune misura degli archi, DAO sarà quella degli angoli.

Se i due archi sono incommensurabili , gli angoli saranno anche tali e non si può avere che un valore approssimato del loro rapporto.

LIBRO TERZO

MISURA DEI POLIGONI—SIMILITUDINE.

—

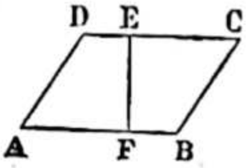
DEFINIZIONI.

I. L' *area* di una figura è il rapporto della sua estensione a quella dell'unità di superficie (1).

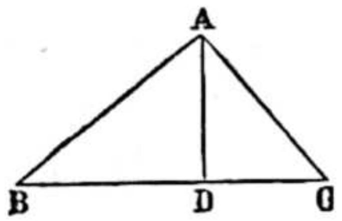
II. Due figure diconsi equivalenti quando hanno la stessa area.

Due figure possono essere equivalenti quantunque abbiano forme diverse; per esempio un cerchio può essere equivalente ad un quadrato , un triangolo ad un rettangolo, etc.

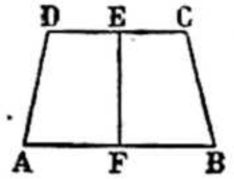
Il nome di figure uguali si dà a quelle che applicate l'una sull' altra, coincidono perfettamente; tali sono due cerchi che hanno i raggi uguali, due triangoli che hanno i lati rispettivamente uguali etc.



III. L'*altezza* di un parallelogrammo è la perpendicolare EF che misura la distanza dei due lati opposti AB , CD , presi per basi.



IV. L'*altezza* del triangolo è la perpendicolare AD abbassata dal vertice di un angolo A sul lato opposto BC preso per base.

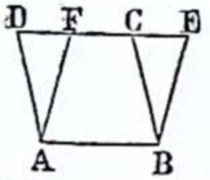


V. L'*altezza* del trapezio è la perpendicolare EF comune ai suoi lati paralleli AB, CD.

(1) Spesso si confonde nel discorso l' area con la superficie di una figura.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA — *I parallelogrammi che hanno basi uguali ed altezze uguali sono equivalenti.*

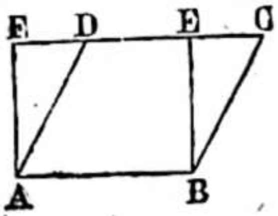


Sia AB la base comune dei due parallelogrammi ABCD, ABEF; avendo supposto che essi hanno la stessa altezza, ne risulta che le basi superiori DC, FE saranno situate su di una stessa linea retta parallela ad AB.

Oro per la natura dei parallelogrammi si ha AD=BC, AF=BE; e per la stessa ragione si ha DC=AB, FE=AB; dunque DC=FE, e perciò togliendo DC e FE dalla stessa linea retta DE; i resti CE e DF saranno uguali.

Da ciò ricavasi che i triangoli DAF, CBE sono equilateri fra loro e per conseguenza uguali.

Ma se dal quadrilatero ABED si toglie il triangolo ADF, resta il parallelogrammo ABEF; e se dallo stesso quadrilatero ABED si toglie il triangolo CBE, resta il parallelogrammo ABCD; dunque i due parallelogrammi ABCD e ABEF che hanno la stessa base e la stessa altezza, sono equivalenti.

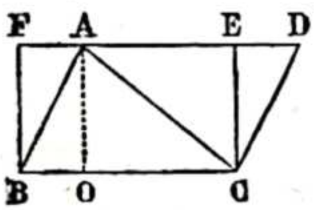


Corollario. Ogni parallelogrammo ABCD è equivalente al rettangolo ABEF della stessa base e della stessa altezza.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA — *Ogni triangolo* ABC *è la metà del parallelogrammo* ABCD *che ha la stessa base e la stessa altezza.*

Poichè i triangoli ABC, ACD; sono uguali (prop. 32.1).

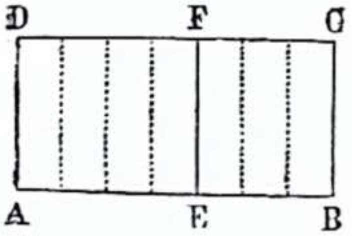


Corollario I. — Un triangolo ABC è la metà del rettangolo BCEF che ha la stessa base BC e la stessa altezza AO; giacchè il rettangolo BCEF è equivalente al parallellogrammo ABCD.

Corollario II. — Tutti i triangoli che hanno basi uguali ed altezze uguali sono equivalenti.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA – *Due rettangoli della stessa altezza stanno fra loro come le basi.*



Sieno ABCD, AEFD due rettangoli che hanno per altezza comune AD; dico che essi stanno fra loro come le basi AB, AE,

Supponiamo in 1º luogo che le basi siano commensurabili e stiano fra loro come 7 a 4; vale a dire che se si divide AB in 7 parti uguali, AE contiene 4 di queste parti.

Innalzando dai punti di divisione le perpendicolari alla base, verranno a formarsi 7 rettangoli parziali uguali fra loro, perchè hanno la stessa base e la stessa altezza; ma di questi il rettangolo ABCD ne contiene 7, mentre che AEFD ne contiene quattro; dunque il rettangolo ABCD sta al rettangolo AEFD come 7 sta a 4 o come AB ad AE.

Se le basi AB, AE fossero incommensurabili, si dimostrebbe come precedentemente (lib. 2 prop. 18) che la proposizione ha anche luogo.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA—*Due rettangoli stanno fra loro come i prodotti delle basi per le altezze.*

Sieno R, r, le superficie dei due rettangoli; B e H le due dimensioni del primo; b, h, le due dimensioni del secondo.

S' immagini un terzo rettangolo R′ che abbia la base B del primo è l' altezza h del secondo.

Si avrà, in virtù del teorema precedente:

$$\frac{R}{R'}=\frac{H}{h}.$$

$$\frac{R'}{r}=\frac{B}{b}.$$

Moltiplicando queste eguaglianze membro a membro e dividendo i due termini del primo rapporto per R′ si ha:

$$(1)\ \frac{R}{r}=\frac{B\times H}{b\times h}.$$

Misura del rettangolo—Misurare un rettangolo R, significa trovare il suo rapporto ad un altro rettangolo r preso per unità di misura.

Si vede dal teorema precedente, che questo rapporto si ottiene cercando quante volte le linee B, H, b, h, contengono una stessa unità, e dividendo il prodotto dei due primi numeri per il prodotto degli altri due.

Siano $B=6^{\text{met.}}$, $H=4^{\text{met.}}$, $b=3^{\text{met.}}$, $h=2^{\text{met.}}$

Si avrà $\frac{R}{r}=\frac{6\times4}{3\times2}=4$. In questo modo il rettangolo R contiene 4 volte il rettangolo preso per unità,

Si assume ordinariamente per unità di superficie il quadrato che ha per lato l' unità di lunghezza; allora i numeri che rappresentano b e h si riducono all' unità e la proporzione (1) diviene:

$$\frac{R}{r}=\frac{B\times H}{1}.$$

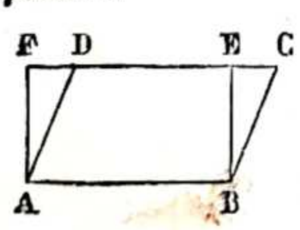
Si vede dunque che il rapporto di un rettangolo al quadrato costruito sull' unità di lunghezza, è uguale al prodotto dei numeri che esprimono quante volte la base e l' altezza contengono quest' unità lineare; il che si esprime più brevemente, dicendo che un rettangolo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.

Siano $B=3^m{,}53$, $H=2^m{,}25$.

La superficie del rettangolo sarà $7^{\text{metri quadrati}}{,}9425$, o 7 m.q., $94^{\text{dec. q.}}$, $25^{\text{cen.q.}}$.

PROPOSIZIONE V.

Teorema — *L' area di un parallelogrammo qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

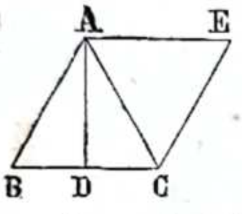


Infatti il parallelogrammo ABCD è equivalente al rettangolo ABEF che ha la stessa base e la stessa altezza: ma il rettangolo ha per misura AB×BE; dunque AB×BE è pure l'area del parallelogrammo.

Corollario. I parallelogrammi della stessa base stanno fra loro come le altezze, ed i parallelogrammi della stessa altezza stanno fra loro come le basi, poichè essendo A, B, C, tre grandezze qualunque, si ha identicamente $\frac{A \times C}{B \times C} = \frac{A}{B}$.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA—*L'area di un triangolo è uguale alla metà del prodotto della sua base per la sua altezza.*

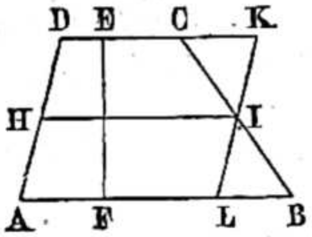


Infatti il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo ABCE che ha la stessa base BC e la stessa altezza AD: ma la superficie del parallelogrammo è uguale a $BC \times AD$ (prop. 5), dunque quella del triangolo è uguale a $\frac{1}{2}\,BC \times AD$ o $BC \times \frac{1}{2}\,AD$.

Corollario. Due triangoli della stessa altezza stanno fra loro come le basi e due triangoli della stessa base stanno fra loro come le altezze.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA — *L' area del trapezio* ABCD *è uguale alla sua altezza* EF *moltiplicata per la semisomma delle basi* AB, CD.



Dal punto I, che bisega il lato CB, si tiri KL parallela al lato opposto AD e si prolunghi DC fino all' incontro di KL.

I triangoli IBL, ICK avendo $IB = IC$ per costruzione, l' angolo $LIB = CIK$, e l' angolo $IBL = ICK$, per essere CK parallela a BL (prop. 25.1); sono uguali, (prop. 9,1) e quindi il trapezio ABCD è equivalente al parallelogrammo ADKL ed ha per misura $EF \times AL$.

Ma si ha $AL = DK$, e per l' eguaglianza dei triangoli IBL, KCI, è pure $BL = CK$; dunque sarà $AB + CD = AL + DK = 2AL$; (*) e però essendo AL la semisomma delle

(*) Per comprendere più facilmente questa identità, potrebbe dirsi $AB+CD=AL+LB+CD=AL+KC+CD=AL+DK$.
N. del Trad.

basi AB, CD, ne segue che l'area del trapezio ABCD è uguale all'altezza EF moltiplicata per la semisomma delle basi AB, CD; il che si esprime così:

$$ABCD=EF\times\left(\frac{AB+CD}{2}\right)$$

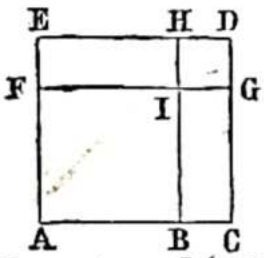
Scolto.— Se dal punto di mezzo I di BC, si conduce IH parallela alla base AB, il punto H sarà anche il punto di mezzo di AD, perchè le due figure AHIL a DHIK avendo i lati opposti paralleli, sono due parallelogrammi, e si ha AH=IL e DH=IK; ma dall' essere uguali i due triangoli BIL e CIK, risulta IL=IK, dunque AH=DH.

Se intanto si osservi che $HI=AL=\frac{AB+CD}{2}$, se ne deduce che l' area del trapezio può essere anche espressa da $EF\times HI$; vale a dire che è uguale alla sua altezza moltiplicata per la retta che unisce i punti di mezzo dei lati non paralleli.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA — *Se una retta* AC *è divisa in due parti* AB, BC, *il quadrato fatto sulla intera retta* AC *conterrà il quadrato fatto su di una parte* AB, *più il quadrato fatto sull'altra parte* BC, *più il doppio del rettangolo formato dalle due parti* AB, BC; *il che si esprime così:*

$$\overline{AC}^2 \text{ o } (AB+BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB\times BC.$$



Si costruisca il quadrato ACDE; prendasi AF=BA, e si conducano FG parallela ad AC, e BH parallela ad AE.

Il quadrato ACDE rimane così diviso in quattro parti: la prima ABIF è il quadrato fatto su di AB, perchè si è preso AF=AB; la seconda IGDH è il quadrato fatto su di BC; poichè siccome si ha AC=AE e AB=AF, così la differenza AC—AB è uguale alla differenza AE—AF, vale a dire BC=EF; ma per le parallele si ha pure IG=BC, DG=EF; dunque HIGD è uguale al quadrato fatto su di BC.

Togliendo queste due parti dal quadrato totale, resta-no i due rettangoli BCGI, EFIH, ciascuno dei quali ha per misura AB×BC; e quindi etc.

Scolio. Siano a, b, i numeri che rappresentano le due parti della retta AC; la moltiplicazione algebrica dà l'eguaglianza

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

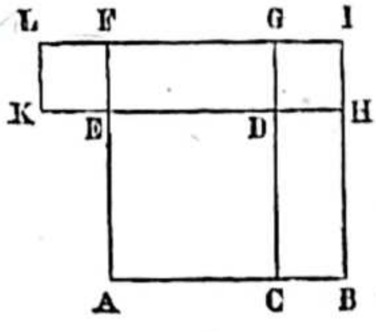
e, supponendo conosciuta la misura del rettangolo, questa eguaglianza dà una seconda dimostrazione del teorema precedente.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA — *Se la retta* AC *è la differenza delle due rette* AB, BC; *il quadrato fatto su di* AC *conterrà il quadrato di* AB *più il quadrato di* BC, *meno il doppio rettangolo fatto su di* AB *e* BC, *cioè si avrà:*

$$\overline{AC}^2 \text{ o } (AB-BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\times BC.$$

Costruiscasi il quadrato ABIF, prendasi AE=AC; si conducano CG parallela a BI, KH parallela ad AB e completisi il quadrato EFKL.



I due rettangoli CBIG, GLKD, hanno ciascuno per misura AB×BC; sicchè togliendoli dall'intera figura ABILKEA, che ha per valore $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, resterà il quadrato ACDE; dunque etc.

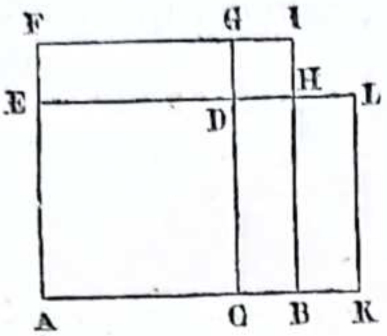
Scolio. Questa proposizione si deduce anche dalla formola algebrica.

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab.$$

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA. — *Il rettangolo fatto sulla somma e sulla differenza di due rette* AB, BC, *è uguale alla differenza dei quadrati di queste rette, cioè sarà;*

$$(AB+BC)\times(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2.$$



Si costruiscano su di AB ed AC i quadrati ABIF, ACDE; si prolunghi AB d'una quantità BK=BC e si compléti il rettangolo AKLE.

La base AK di questo rettangolo essendo la somma delle due rette AB, BC , mentre la sua altezza AE è la differenza di queste stesse linee, ne segue che il rettangolo AKLE=(AB+BC)×(AB−BC , Ora questo rettangolo è composto delle due parti ABHE e BH LK; e la parte BHLK è uguale al rettangolo EDGF, perchè BH=DE e BK=EF; quindi AKLE=ABHE+EDGF; ma queste due parti formano il quadrato ABIF meno il quadrato DHIG, che è il quadrato fatto su di BC; dunque

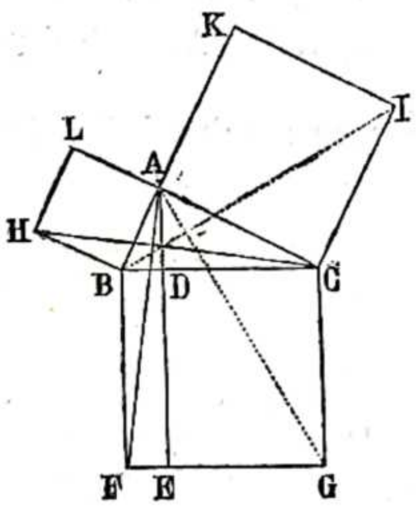
$$(AB+BC)\times(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2.$$

Scolio. Questa proposizione si deduce anche dalla formola algebrica.

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

PROPOSIZIONE XI.

Teorema. — *Il quadrato fatto sull' ipotenusa di un triangolo rettangolo, è uguale alla somma dei quadrati fatti sugli altri due lati.*

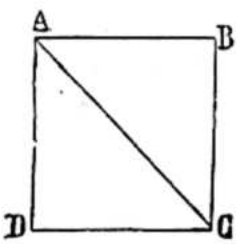


Sia ABC un triangolo rettangolo; dopo di aver costruiti i quadrati sopra i suoi tre lati, si abbassi dal vertice dell' angolo retto una perpendicolare AD sull' ipotenusa; si prolunghi questa perpendicolare finchè incontra il lato FG in E , e si conducano le diagonali AF, CH.

L'angolo ABF è composto dell'angolo ABC e dell'angolo retto CBF; l'angolo CBH è composto dello stesso angolo ABC e dell' angolo retto ABH; dunque l'angolo ABF=HBC. Si ha inoltre AB=BH, come lati di uno stesso quadrato, e BF=BC, per la medesima ragione ; e però i triangoli ABF , HBC , avendo un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali, sono uguali; ma il triangolo ABF è la metà del rettangolo BE col quale ha di comune la base BF e l' altezza BD (prop. 2) ; e il triangolo HBC è la metà del quadrato AH col quale ha di comune la base BH e l' altezza AB, giacchè per gli angoli retti BAC, BAL, i lati AC, AL formano una sola retta parallela a BH ; dunque dall' essere ABF=HBC, sarà pure il rettangolo BDEF doppio del primo, equivalente al quadrato AH doppio del secondo. Nello stesso modo si dimostra che il rettangolo CDEG è equivalente al quadrato AI ; e però riflettendo che i due rettangoli BDEF, CDEG, presi insieme, formano il quadrato BCGF ; rimane dimostrato che il quadrato BCGF fatto sull' ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati ABHL, ACIK, fatti sugli altri due lati.

Siccome un quadrato ha per misura il quadrato del numero che rappresenta il suo lato , così si ha l' eguaglianza $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, la qual cosa esprime che il quadrato del numero che rappresenta l' ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei numeri che rappresentano i due lati dell' angolo retto.

Corollario I. — Il quadrato di uno dei lati che comprendono l' angolo retto , è uguale al quadrato dell' ipotenusa, meno il quadrato dell' altro lato, il che si esprime così: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.



II. Sia ABCD un quadrato , AC la sua diagonale ; il triangolo ABC essendo rettangolo ed isoscele , ci darà $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$; dunque *il quadrato fatto sulla diagonale* AC *è doppio del quadrato fatto sul lato* AB.

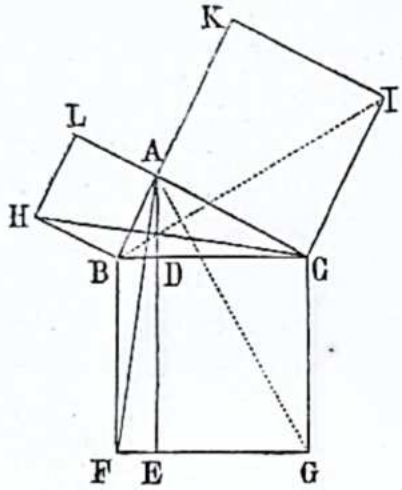
Dopo di ciò, essendo

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{2}{1}$$

estraendo la radice quadrata si ha:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

dunque *la diagonale di un quadrato è incommensurabile col suo lato.*



III. Si è dimostrato che il quadrato AH è equivalente al rettangolo BDEF ; ma per l'altezza comune BF , il quadrato BCGF sta al rettangolo BDEF , come la base BC sta alla base BD; e quindi sarà pure

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{BC}{BD}.$$

vale a dire che *il quadrato dell'ipotenusa sta al quadrato d' uno dei lati dell'angolo retto, come l'ipotenusa sta al segmento adiacente a questo lato* : intendendosi per *segmento* la parte dell' ipotenusa determinata dalla perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto. Così BD è il segmento adiacente al lato AB, e DC è il segmento adiacente al lato AC. Si avrebbe similmente

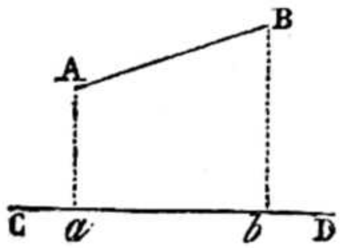
$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{BC}{CD}.$$

IV. I rettangoli BDEF, DCGE, avendo anche la stessa altezza , stanno fra loro come le basi BD , CD : ma questi rettangoli essendo equivalenti ai quadrati $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$ si ha

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{BD}{DC}$$

Dunque *i quadrati dei due lati dell'angolo retto, stanno fra loro come i segmenti dell' ipotenusa adiacenti a questi lati.*

DEFINIZIONE

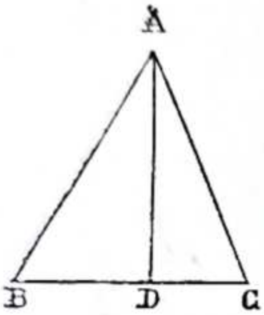


Chiamasi *proiezione* di una retta AB, su di un' altra CD, la porzione *ab* compresa fra i piedi delle perpendicolari abbassate dai punti A e B sulla retta CD.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA — *In ogni triangolo, il quadrato del lato opposto ad un angolo acuto è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno due volte il rettangolo d' uno di questi lati per la proiezione dell' altro su di esso.*

Sia C un angolo acuto del triangolo ABC, dico che abbassando AD perpendicolare su di BC, si avrà:



$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$$

Possono darsi due casi: 1.° Se la perpendicolare cade dentro del triangolo ABC; si ha $BD = BC - CD$ e per conseguenza (prop. 9),

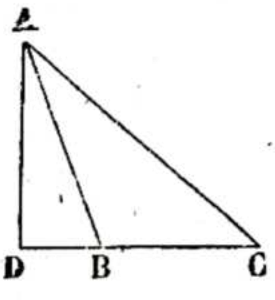
$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD.$$

Aggiungendo ad ambo le parti $\overline{AD}^2$, ed osservando che i triangoli rettangoli ADB, ADC, danno

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 \text{ e } \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2,$$

si avrà

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD.$$



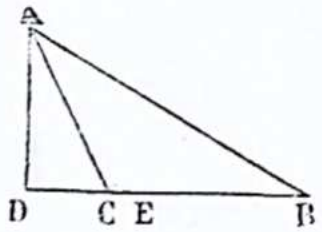
2.° Se la perpendicolare cade fuori del triangolo ABC, si ha: $BD = CD - BC$, e per conseguenza (prop. 9) $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2CD \times BC$.

Aggiungendo all'una parte ed all'altra $\overline{AD}^2$, si avrà:

$$AB^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD.$$

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA — *In ogni triangolo ottusangolo, il quadrato del lato opposto all' angolo ottuso è uguale alla somma* *dei quadrati degli altri due lati, più due volte il rettangolo di uno di questi lati per la proiezione dell'altro su di esso.*



Sia AB il lato opposto all' angolo ottuso C del triangolo ABC ; conducendo AD perpendicolare su di BC; io dico che si avrà:

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2BC\times CD.$$

È primieramente a notarsi che la perpendicolare non può cadere dentro del triangolo; poichè se essa cadesse, per esempio, in E , il triangolo ACE avrebbe contemporaneamente l' angolo E retto e l' angolo ottuso C , il che è impossibile; dunque essa cade al di fuori, e si ha BD=BC+CD. Da ciò risulta (prop. 8)

$$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+2BC\times CD.$$

Aggiungendo all' una parte ed all' altra $\overline{AD}^2$, e facendo le riduzioni come nel teorema precedente, si avrà:

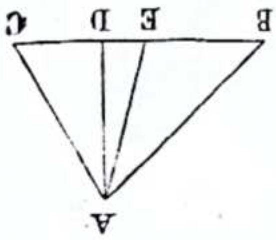
$$AB^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2BC\times CD.$$

Scolio. Il triangolo rettangolo è il solo in cui la somma dei quadrati di due lati sia uguale al quadrato del terzo: poichè, se l' angolo compreso da questi lati è acuto, la somma dei loro quadrati sarà maggiore del quadrato del lato opposto; se è ottuso; sarà minore.

PROPOSIZIONE XIV.

Teorema – *Se si unisce il vertice* A *d' un triangolo qualunque* ABC, *col punto di mezzo della base, dico che si avrà:*

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EB}^2.$$



Abbassando la perpendicolare AD sulla base BC, i due triangoli AEC, ABE daranno pei due teoremi che precedono

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2EC \times ED.$$

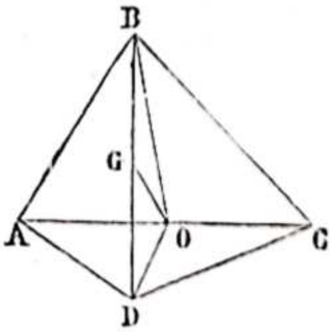
$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + 2EB \times ED.$$

Sommando, ed osservando che EB=EC, si avrà

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{EB}^2.$$

Osservazione—Questo teorema stabilisce una relazione fra le lunghezze dei tre lati di un triangolo e la lunghezza d' una mediana. (Chiamasi *mediana* di un triangolo la retta che unisce uno dei vertici col punto di mezzo del lato opposto).

PROPOSIZIONE XV.



TEOREMA — *In ogni quadrilatero, la somma dei quadrati dei quattro lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali, più quattro volte il quadrato della retta che unisce i punti di mezzo di queste diagonali.*

Sieno AC, BD, le diagonali del quadrilatero ABCD, O e G i loro punti di mezzo; si conducano le rette BO, DO, OG.

Dal teorema precedente si ha:

pel triangolo ABC, $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{BO}^2 + 2\overline{AO}^2$

pel triangolo ADC, $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{DO}^2 + 2\overline{AO}^2.$

Sommando, si ottiene

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + AD^2 + \overline{DC}^2 = 2(\overline{BO}^2 + \overline{DO}^2) + 4\overline{AO}^2$$

Ma pel triangolo BOD, si ha pure

$$\overline{BO}^2 + \overline{DO}^2 = 2\overline{BG}^2 + 2\overline{OG}^2$$

dunque

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 4\overline{BG}^2 + 4\overline{OG}^2 + 4\overline{AO}^2.$$

e siccome

$$\overline{AC}^2 = 4\overline{AO}^2 \qquad \overline{BD}^2 = 4\overline{BG}^2.$$

così si avrà infine

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 4\overline{OG}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2.$$

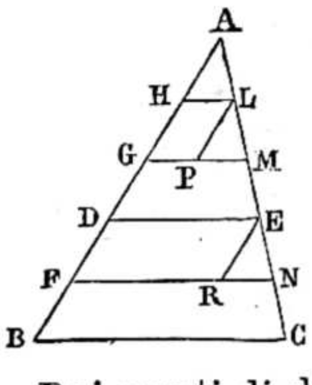
Corollario. Se il quadrilatero fosse un parallelogrammo, la retta GO sarebbe nulla; e quindi, in ogni parallelogrammo, la somma dei quadrati dei quattro lati è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

La reciproca di quest'ultimo teorema è anche vera.

DELLE LINEE PROPORZIONALI

E DELLA SIMILITUDINE

PROPOSIZIONE XVI



Teorema – *Ogni retta* DE, *parallela ad uno dei lati* BC *di un triangolo* ABC, *divide gli altri due lati* AB, AC, *in parti proporzionali.*

Suppongasi primieramente che le rette AD, DB, abbiano una comune misura contenuta 3 volte in AD e 2 volte in DB: il rapporto di AD a DB sarà così rappresentato da $\frac{3}{2}$.

Dai punti di divisione di AB, si conducano le parallele a BC fino all'incontro colla AC: dico che tutte le parti AL, LM, ME, EN, NC di questa retta risultano uguali fra di loro

Infatti, condotte le LP, ER, parallele ad AB: i triangoli LPM, ERN, hanno i lati LP, ER, uguali, perchè rispettivamente uguali alle rette HG DF, che sono uguali per ipotesi: gli angoli PLM, REN, uguali, come corrispondenti; gli angoli LPM, ERN uguali, avendo i lati paralleli e diretti nello stesso senso; e però i suddetti due triangoli LPM, ERN, essendo uguali, sarà LM=EN.

Risulta da ciò, che la retta AE rimane divisa in 3 parti uguali, e che EC contiene due di queste parti.

Il rapporto di AE ad EC essendo adunque uguale a $\frac{3}{2}$, sarà:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}.$$

Se le rette AD, DB, non hanno una comune misura, si dimostrerà come nel libro II, prop. 18, che i rapporti $\frac{AD}{DB}$, $\frac{AE}{EC}$, sono compresi fra due numeri consecutivi di decimi, centesimi, millesimi etc., e che per conseguenza, essi possono considerarsi eguali.

Corollario I. La proporzione $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ (1) si può scrivere sotto la forma $\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}$; ed eseguendo il componendo sulla (1) si deduce l' altra

$$\frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC} \text{ o } \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

che si può scrivere sotto la forma $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$.

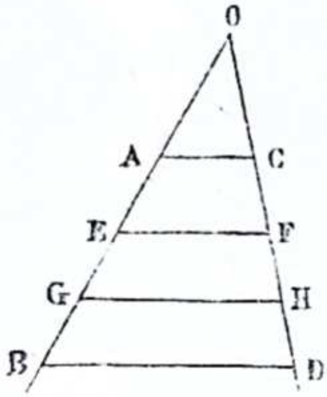
Infine dalla medesima proporzione (1) si ricava anche

$$\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EG} \text{ o } \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC},$$

o ancora

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{EC}.$$

II. I segmenti di due rette, determinati da più parallele AC, EF, GH, BD etc., sono proporzionali.



Infatti, sia O il punto d'incontro delle rette AB, CD; nel triangolo OEF, la AC essendo parallela alla base EF, si ha

$$\frac{OE}{OF} = \frac{AE}{CF}$$

Nel triangolo OGH, si ha similmente:

$$\frac{OE}{OF} = \frac{GE}{FH}$$

Quindi pel rapporto comune $\frac{OE}{OF}$, si avrà infine

$$\frac{AE}{CF} = \frac{GE}{FH}.$$

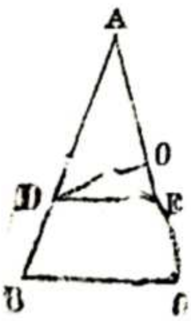
Si dimostrerebbe nell'istesso modo che $\frac{GE}{FH} = \frac{BG}{HD}$; dunque, etc.

PROPOSIZIONE XVII.

Teorema — *Reciprocamente, se i lati* AB, AC, *di un triangolo* ABC, *sono tagliati in parti proporzionali dalla retta* DE, *in modo che si abbia*

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

la DE *sarà parallela alla base* BC.



Poichè, se DE non è parallela a BC, supponiamo che lo sia DO; allora, pel teorema precedente, si avrà

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AO}{OC}$$

ma per ipotesi

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC},$$

dunque

$$\frac{AO}{OC}=\frac{AE}{EC},$$

proporzione impossibile, poichè, da una parte AE è maggiore di AO, e dall' altra, EC è minore di OC ; e però la DE sarà parallela alla base.

Scolio. — La stessa conchiusione avrebbe luogo se si considerasse la proporzione

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE},$$

perchè questa proporzione darebbe coll'eseguire il dividendo

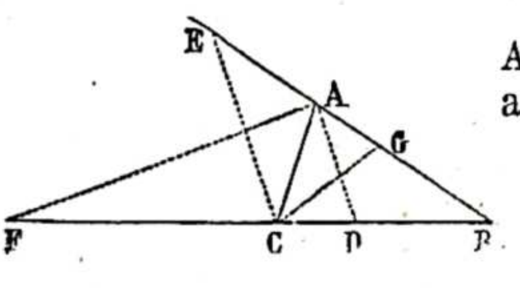
$$\frac{AB-AD}{AD}=\frac{AC-AE}{AE} \text{ o } \frac{BD}{AD}=\frac{CE}{AE} \text{ o ancora } \frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}.$$

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA—1.° *La bisettrice* AD *dell'angolo* A *del triangolo* ABC, *divide la base* BC *in due segmenti* BD , DC , *proporzionali ai due lati* AB, AC.

2.° *La bisettrice* AF *dell' angolo esterno* CAE , *determina anche sulla base prolungata , due segmenti* BF , CF, *proporzionali agli stessi lati* AB, AC.

1.° Dal punto C si tiri CE parallela ad AD fino all' incontro di BA prolungato.



Nel triangolo BCE, essendo AD parallela alla base CE , si avrà la proporzione (prop.16.)

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AE}.$$

Ma il triangolo ACE è isoscele ; giacchè per le parallele AD, CE, l' angolo ACE=DAC, e l' angolo AEC=BAD;

ed è inoltre per ipotesi, DAC=BAD; dunque l'angolo ACE=AEC e per conseguenza AE=AC. Sostituendo AC in vece di AE nella proporzione precedente, si avrà:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

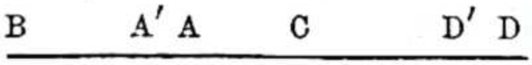
2º Si conduca CG parallela ad AF; pel triangolo **BAF**, si ha:

$$\frac{BF}{FC}=\frac{AB}{AG}.$$

Si farebbe poi vedere, come nel caso precedente, che il triangolo AGC è isoscele, e che AG = AC; dunque si avrà

$$\frac{BF}{FC}=\frac{AB}{AC}.$$

Osservazione. Da questi teoremi si può facilmente dedurre il luogo geometrico dei punti, le di cui distanze da due punti B, C, sono in un rapporto dato $\frac{m}{n}$.



Principieremo dall' osservare che sulla retta che congiunge i punti B e C, non vi esistono che due punti, le di cui distanze ai punti B e C sono nel rapporto di $\frac{m}{n}$

Infatti, fra B e C, non vi è che A tale che si abbia $\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n}$; poichè, se per il punto A′ si avesse $\frac{A'B}{A'C}=\frac{m}{n}$, risulterebbe $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B}{A'C}$, proporzione evidentemente impossibile.

Supponendo ora $m>n$, dico che non vi è sul prolungamento di BC, che un sol punto D, tale che si abbia $\frac{DB}{DC}=\frac{m}{n}$.

Giacchè, se per un altro punto D′ si avesse $\frac{D'B}{D'C}=\frac{m}{n}$, se ne dedurrebbe

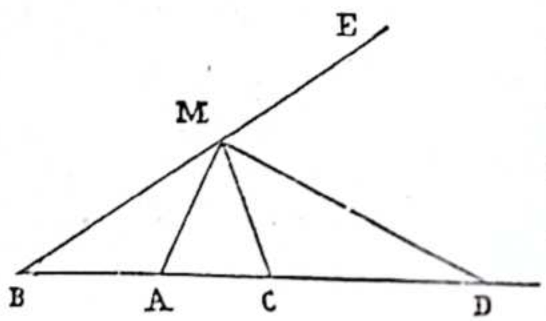
$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{DB}{DC};$$

donde

$$\frac{D'B-D'C}{D'C}=\frac{DB-DC}{DC}, \text{ o } \frac{BC}{D'C}=\frac{BC}{DC},$$

proporzione evidentemente assurda.

Ciò posto, sia M un punto del piano, tale che $\frac{MB}{MC}=\frac{m}{n}$.



Si costruisca la bisettrice dell' angolo BMC ; si avrà, in virtù del teorema precedente $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$; ma si aveva

$$\frac{MB}{MC}=\frac{m}{n}$$

dunque

$$\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n}.$$

Similmente, se si costruisce la bisettrice dell' angolo esterno CME, si avrà:

$$\frac{BM}{MC}=\frac{DB}{DC};$$

e siccome è pure,

$$\frac{BM}{MC}=\frac{m}{n},$$

così se ne deduce

$$\frac{DB}{DC}=\frac{m}{n}.$$

Si vede adunque che per ogni punto M del luogo geometrico, le bisettrici degli angoli BMC, CME, incontreranno la retta BC in due punti fissi A e D, tali che le loro distanze dai punti B e C stanno fra loro nel rapporto di m ad n.

D' altronde le MA, MD, bisettrici di due angoli adiacenti, sono perpendicolari fra loro (prop. 20. 1); dunque ogni punto del luogo geometrico trovasi situato sulla circonferenza descritta su di AD come diametro.

Si potrebbe anche dimostrare, che reciprocamente, ogni punto di questa circonferenza è un punto del luogo geometrico richiesto.

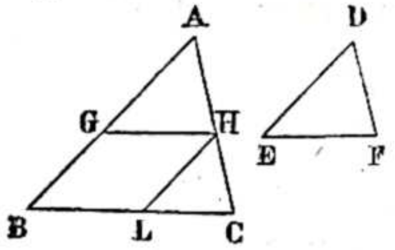
DEFINIZIONI

Chiamansi triangoli simili due triangoli che hanno gli angoli uguali ed i lati omologhi proporzionali, (s'intende per lati omologhi quelli che sono opposti agli angoli uguali).

In generale chiameremo poligoni simili quelli che hanno gli angoli rispettivamente uguali, ed i lati omologhi proporzionali (intendendosi per lati omologhi quelli che sono adiacenti agli angoli uguali).

PROPOSIZIONE XIX.

Teorema—*Due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali.*



Siano ABC, DEF, due triangoli che hanno gli angoli uguali rispettivamente, cioè, A=D, B=E, C=F; io dico che i lati omologhi saranno proporzionali, sicchè si avrà:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}.$$

Si tagli AG=DE, AH=DF, e si tiri GH; i triangoli AGH, DEF avendo un angolo uguale, compreso fra lati uguali sono uguali, e sarà l' angolo AGH uguale all' angolo E; ma si ha pure E=B; dunque l'angolo B=AGH; e per conseguenza GH risultando parallela a BC, si ha (prop, 16) la proporzione

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH}.$$

Similmente, tirando HL parallela ad AB, si ha (prop. 16) la proporzione

$$\frac{AC}{AH}=\frac{BC}{BL} \text{ o } \frac{AC}{AH}=\frac{BC}{GH}$$

perchè le rette BL e GH sono uguali come parallele comprese fra parallele; e però paragonando l'ultima proporzione colla precedente, si deduce

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH}=\frac{BC}{GH},$$

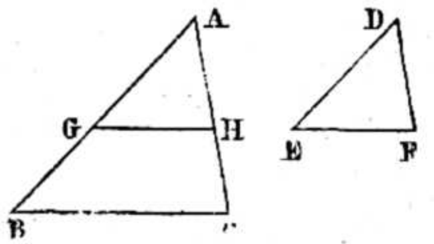
o

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}.$$

Corollario—Affinchè due triangoli siano simili, è sufficiente che abbiano due angoli rispettivamente uguali; poichè allora il terzo angolo sarà uguale al terzo, e i due triangoli saranno equiangoli.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA – *Due triangoli che hanno i lati proporzionali, sono ancora equiangoli e quindi simili.*



Suppongasi che si abbia

$$\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF};$$

io dico che i triangoli ABC, DEF, avranno gli angoli uguali, cioè A=D, B=E, C=F.

Si tagli AG=DE, AH=DF e si tiri GH; avendosi per ipotesi la proporzione

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$$

o

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH},$$

risulterà GH parallela a BC, (prop. 17) e per conseguenza l'angolo AGH=ABC:

Dopo di ciò, i triangoli ABC, AGH, essendo equiangoli, danno (prop. precedente)

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH}=\frac{BC}{GH},$$

ma si ha inoltre per ipotesi

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF},$$

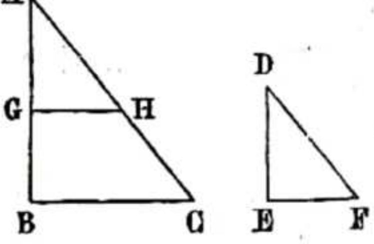
e però essendo AG=DE e AH=DF, se ne conchiude GH=EF; e quindi i triangoli AGH, DEF, avendo i tre lati uguali, sarà DEF=AGH=ABC, DFE=AHG=ACB e D=A.

Scolio I. Bisogna osservare che gli angoli uguali di due triangoli simili sono opposti ai lati proporzionali.

Scolio II. Le due proposizioni precedenti che propriamente ne formano una sola, unite a quella del quadrato dell' ipotenusa, sono le proposizioni le più importanti e le più feconde della geometria; esse bastano quasi sole a tutte le applicazioni e alla risoluzione di tutti i problemi; per la ragione che tutte le figure possono dividersi in triangoli, ed un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli. E però le proprietà generali dei triangoli comprendono implicitamente quelle di tutte le figure.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA—*Due triangoli che hanno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali, sono simili.*



Sia l' angolo A = D e suppongasi che si abbia

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF};$$

dico che il triangolo ABC è simile a DEF.

Si prenda AG=DE e si tiri GH parallela a BC: l' angolo AGH sarà uguale a ABC (prop. 25, lib. 1) ed il triangolo AGH sarà equiangolo al triangolo ABC: quindi si avrà:

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AC}{AH}.$$

Ma, per ipotesi,

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF},$$

e per costruzione AG=DE; dunque AH=DF, e i due triangoli AGH, DEF, avendo un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali, sono uguali; e quindi il triangolo AGH essendo simile ad ABC, sarà pure DEF simile ad ABC.

Osservazione. Due triangoli ABC, DEF, per essere simili, dovrebbero adempiere a quattro condizioni; cioè

$$A=D$$

$$B=E,$$

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF},$$

$$\frac{AB}{DE}\quad\frac{BC}{EF}.$$

Ma risulta dai tre teoremi precedenti che bastano due sole di queste condizioni.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA—*Due triangoli che hanno i lati paralleli o perpendicolari, sono simili.*

Infatti, siano A, B, C, gli angoli d'uno dei triangoli, A′, B′, C′, quelli dell'altro.

Si sa che due angoli che hanno i lati paralleli o perpendicolari sono uguali o supplementari, e quindi non si può fare che una delle tre ipotesi seguenti:

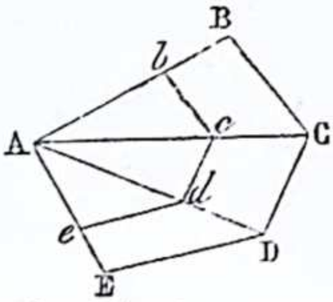
1° $A+A'=2r$ $\quad B+B'=2r$ $\quad C+C'=2r$;
2° $A+A'=2r$ $\quad B+B'=2r$ $\quad C=C'$;
3° $A=A'$ $\quad B=B'$. e per conseguenza $C=C'$:

ma nella prima ipotesi, la somma degli angoli dei due triangoli sarebbe uguale a sei retti, e nella seconda ipotesi questa somma sarebbe maggiore di quattro retti: e però la terza ipotesi essendo la sola ammissibile, ne segue che i triangoli debbono essere equiangoli e quindi simili.

Osservazione—I lati omologhi dei due triangoli, sono i lati paralleli o perpendicolari.

PROPOSIZIONE XXIII.

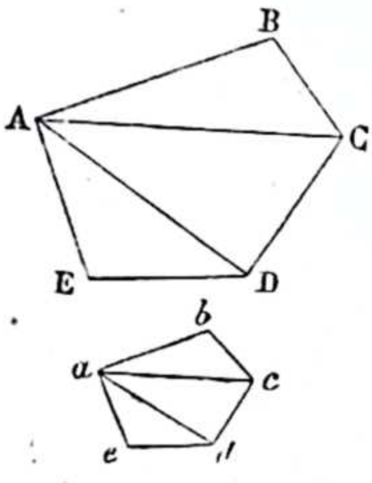
Teorema — *Essendo dato un poligono, se ne può sempre costruire un altro, in guisa che questi due poligoni siano composti di uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti.*



Infatti, sia ABCDE il poligono dato; dopo di aver tirate dal vertice A le diagonali AC, AD, si prenda sul lato AB un punto *b* ad arbitrio, e da questo si conduca la *bc* parallela a BC, nonchè la *cd* parallela a CD, ed in ultimo la *de* parallela a DE: i triangoli *Abc*, *Acd*,... saranno rispettivamente simili ai triangoli ABC, ACD,... ed i due poligoni ABCDE, *Abcde*, comunque disposti l'uno per rapporto all' altro, risulteranno composti di uno stesso numero di trianeoli simili e similmente disposti.

PROPOSIZIONE XXIV.

Teorema — *Due poligoni* ABCDE, *abcde*, *composti di uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti, hanno gli angoli uguali ciascuno a ciascuno ed i lati omologhi proporzionali, e per conseguenza sono simili.*



Infatti, per la similitudine dei triangoli ABC, *abc*, l' angolo ABC=*abc*, e l' angolo BCA=*bca*; per la similitudine dei triangoli ACD, *acd*, l'angolo ACD=*acd*, donde si ricava BCD=*bcd*, e così di seguito.

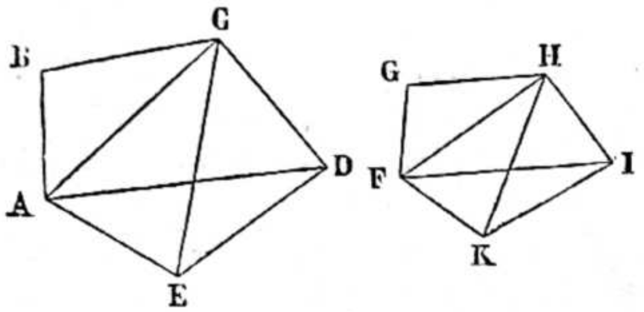
Inoltre, per gli stessi triangoli sim!li, si ha la serie di rapporti uguali.

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}=\frac{AD}{ad}=\frac{DE}{de}=\frac{AE}{ae};$$

dunque i due poligoni avendo gli angoli uguali ed i lati omologhi proporzionali, sono simili.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA — *Reciprocamente, due poligoni simili possono essere decomposti in uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti.*



Dal vertice A del poligono ABCDE si tirino le diagonali AC, AD, agli altri vertici; e nell'altro poligono FGHIK, si conducano similmente dal vertice F, omologo di A, le diagonali FH, FI agli altri vertici.

Siccome i poligoni sono simili, così l'angolo ABC è uguale al suo omologo FGH ed i lati AB, BC, sono proporzionali ai lati FG, GH; di guisa che si ha:

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}.$$

Dunque i triangoli ABC, FGH, avendo un' angolo uguale compreso fra lati proporzionali sono simili; (prop. 21), e sarà BCA=GHF. Sottraendo inoltre questi due angoli dagli angoli uguali BCD, GHI, i residui ACD, FHI, saranno anche uguali; e siccome per i triangoli ABC, FGH, simili, si ha

$$\frac{AC}{FH}=\frac{BC}{GH};$$

e d' altronde per la similitudine dei poligoni si ha pure

$$\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HI};$$

sicchè

$$\frac{AC}{FH}=\frac{CD}{HI};$$

così i due triangoli ACD, FHI, avranno un angolo uguale compreso fra lati proporzionali e perciò sono simili. Nell' istesso modo si dimostrerebbe la similitudine degli altri triangoli, qualunque sia il numero dei lati del poligono proposto; dunque due poligoni simili sono composti di uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti.

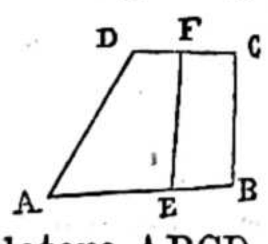
Osservazione I. La decomposizione si può fare in più maniere col condurre le diagonali da due vertici omologhi qualunque. Risulta da ciò, che in due poligoni simili, due diagonali omologhe CE, HK, stanno fra loro come due lati omologhi; poichè esse sono lati omologhi dei triaogoli simili CDE, HIK, i quali fanno parte dei due poligoni.

Osservazione II. Affinchè due poligoni di n lati siano simili, è necessario secondo la definizione, che abbiano gli angoli uguali, il che dà $n-1$ eguaglianze; e che abbiano i lati omologhi proporzionali, il che conduce ancora ad $n-1$ eguaglianze.

Perchè dunque due poligoni di n lati siano simili, si richiederebbero $2n-2$ condizioni, ma è facile l' assicurarsi che $2n-4$ sono sufficienti.

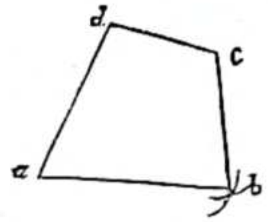
Infatti, due poligoni di n lati saranno simili se sono composti di uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti: ma due condizioni sono sufficienti per la simiglianza dei triangoli, dunque il numero delle condizioni sufficienti affinchè due poligoni di n lati siano simili, è uguale a 2 moltiplicato per il numero dei triangoli, o per $n-2$; cioè è uguale a $2n-4$.

Osservazione III. Si è veduto che nei triangoli, l'eguaglianza degli angoli è una conseguenza della proporzionalità dei lati, e reciprocamente. Ma non succede lo stesso nelle figure di più di tre lati, giacchè principiando dai quadrilateri, si può, senza cambiare gli angoli, alterare la proporzionalità dei lati, o senza alterare i lati, cambiare gli angoli: per esempio, tirando EF parallela a BC,



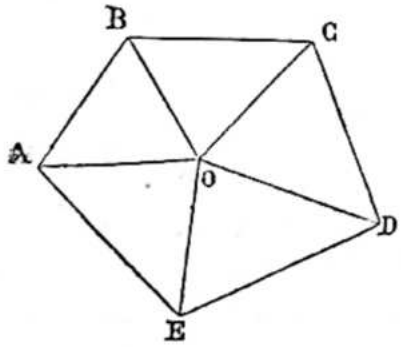
nel mentre che gli angoli del quadrilatero AEFD sono uguali a quelli del quadrilatero ABCD, non si verifica la proporzione dei lati omologhi.

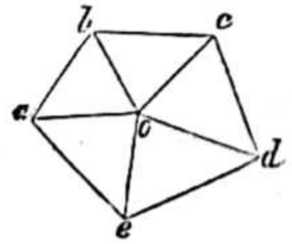
Come pure coi quattro lati del quadrilatero ABCD, si può formare un altro quadrilatero che non abbia gli stessi angoli.



Infatti, si tiri $ad = AD$, al punto d facciasi un angolo qualunque diverso da D; si prenda $dc = DC$. e dai punti a e c, come centri e con due raggi rispettivamente uguali ad AB e CD, si descrivano due circonferenze che si tagliano in b; il quadrilatero $abcd$ avrà gli stessi lati di ABCD, mentre gli angoli sono diversi.

DEFINIZIONI.





I. Due punti O e o si dicono omologhi per rapporto ai due poligoni simili ABCDE, *abcde*, allorchè congiungendoli cogli estremi di due lati omologhi AB, *ab*, i triangoli AOB, *aob*, risultano simili e similmente disposti.

II. Due rette sono omologhe per rapporto a due poligoni simili, allorchè uniscono punti omologhi due a due.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA – *Se si congiungono i punti omologhi* O *ed* o *dei poligoni simili* ABCDE, abcde, *coi vertici di questi poligoni; i triangoli* OBC, OCD, *etc. sono rispettivamente simili ai triangoli* obc, ocd, *etc.* (*).

Infatti, per la similitudine dei poligoni, l'angolo ABC è uguale all'angolo *abc*; e per la similitudine dei triangoli ABO, *abo*, l'angolo ABO è uguale all'angolo *abo*, dunque gli angoli OBC, *obc*, sono uguali come differenze di angoli rispettivamente uguali.

(*) Questo teorema potrebbe enunciarsi anche nel seguente modo:

Se due punti O, o sono omologhi rispetto a due lati omologhi AB, *ab* di due poligoni simili ABCDE, *abcde*, lo saranno pure rispetto a qualunque altra coppia di lati omologhi; o in altri termini: se i due triangoli ABO, *abo*, sono simili, anche gli altri triangoli BOC, *boc*; COD, *cod*, risulteranno simili.

N. del Trad.

Si ha inoltre

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc},$$

e pei triangoli simili ABO, *abo*, si ha pure

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BO}{bo},$$

quindi se ne ricava

$$\frac{BO}{bo} = \frac{BC}{bc}.$$

I triangoli BOC, *boc*, avendo adunque un angolo uguale compreso fra lati proporzionali, sono simili.

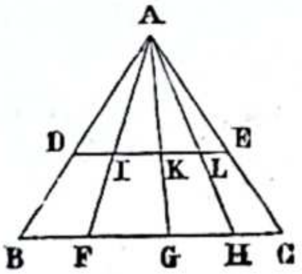
Nell'istesso modo si dimostrerebbe che i triangoli OCD, *ocd*, sono simili, e così di seguito.

Osservazione. — Con considerazioni analoghe, si dimostrerebbe che in due poligoni simili, due rette omologhe stanno fra loro come due lati omologhi.

PROPOSIZIONE XXVII.

Teorema — *Le rette* AF, AG, etc. *condotte dal vertice di un triangolo dividono la base* BC *e la sua parallela* DE *in parti proporzionali; in modo che si ha*

$$\frac{DI}{BF} = \frac{IK}{FG} = \frac{KL}{GH} \text{ etc.}$$



Dappoichè, essendo DI parallela a BF, il triangolo ADI è equiangolo ad ABF e si ha la proporzione

$$\frac{DI}{BF} = \frac{AI}{AF};$$

similmente, essendo IK parallela ad FG, si ha:

$$\frac{AI}{AF} = \frac{IK}{FG}.$$

e però in forza del rapporto comune si ha:

$$\frac{DI}{BF} = \frac{IK}{FG}.$$

Si troverà similmente $\frac{IK}{FG} = \frac{KL}{GH}$, etc.; dunque la retta DE è divisa nei punti I, K, L, come la base BC lo è ne' punti F, G, H.

Corollario. — Se BC è divisa in parti uguali nei punti F, G, H, la parallela DE rimane anche divisa in parti uguali nei punti I, K, L.

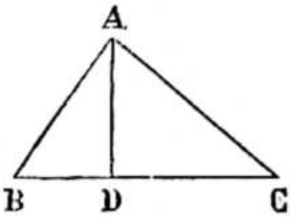
PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA — *Se dall'angolo retto* A *del triangolo rettangolo* ABC *si abbassa la perpendicolare* AD *sull' ipotenusa:*

1.° *I due triangoli parziali* ABD, ADC, *saranno simili fra loro ed al triangolo totale* ABC.

2.° *Ogni lato* AB, AC *sarà medio proporzionale fra l' ipotenusa* BC *e il segmento adiacente* BD *o* DC.

3.° *La perpendicolare* AD *sarà media proporzionale fra i due segmenti* BD, DC.



1.° I due triangoli BAD, e BAC avendo l'angolo B di comune e l'angolo retto BDA uguale all' angolo retto BAC, il terzo angolo BAD dell'uno sarà uguale al terzo C dell'altro, e quindi questi due triangoli come equiangoli, sono simili. Nell'istesso modo si dimostrerà che il triangolo DAC è simile al triangolo BAC, e però i tre triangoli sono equiangoli e simili fra loro.

2.° Siccome il triangolo BAD è simile al triangolo BAC, così i loro lati omologhi sono proporzionali: ma il lato BD nel piccolo triangolo è omologo a BA nel grande, perchè opposti agli angoli uguali BAD, BCA; e l'ipotenusa BA del piccolo è omologo all' ipotenusa BC del grande, si può quindi formare la proporzione

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BC};$$

Similmente si avrà

$$\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC};$$

dunque, 2.° ciascuno dei lati AB, AC è medio proporzionale fra l' ipotenusa ed il segmento adiacente a questo lato.

3.° Infine, la similitudine dei triangoli ABD, ACD, dà, col paragone dei lati omologhi:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC};$$

dunque, 3.° la perpendicolare AD è media proporzionale fra i segmenti BD, DC, dell' ipotenusa.

Scolio.—Dalla proporzione

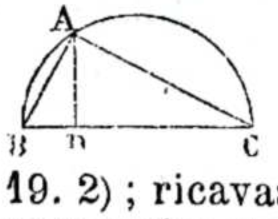
$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

ricavasi coll'eguagliare il prodotto degli estremi a quello dei medi, $\overline{AB}^2 = BD \times BC$.

Similmente dall' altra proporzione $\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ ricavasi $\overline{AC}^2 = DC \times BC$; dunque $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times BC + DC \times BC$; ma il 2.° membro è lo stesso che $(BD+DC) \times BC$, e si riduce a $BC \times BC$ o $\overline{BC}^2$; quindi si ha

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2;$$

cioè che il quadrato fatto sull'ipotenusa BC è uguale alla somma dei quadrati fatti sugli altri due lati. Si sarà così ritornati sulla proprietà del quadrato dell'ipotenusa, ma per una via diversa; il che ci fa vedere che, propriamente parlando, la proposizione del quadrato dell' ipotenusa è una conseguenza della proporzionalità dei lati dei triangoli simili.



Corollario.—Se da un punto A della circonferenza si tirano le due corde AB.AC, alle estremità del diametro BC, il triangolo FAC essendo rettangolo in A (prop. 19. 2); ricavasi 1.° *che la perpendicolare* AD *è media proporzionale fra i due segmenti* BD, DC, *del diametro*; *ovvero che il quadrato* $\overline{AD}^2$ *è uguale al rettangolo* $BD \times DC$

2.° *Che la corda* AB *è media proporzionale fra il diametro* BC *ed il segmento* BD, *ovvero* $\overline{AB}^2 = BD \times BC$; *non* *che*

$$\overline{AC}^2 = CD \times BC.$$

Se si dividono queste due eguaglianze membro a membro si ha

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{DC};$$

e se si divide $\overline{AB}^2$ per $\overline{BC}^2$, si avrà similmente

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{BD}{BC},$$

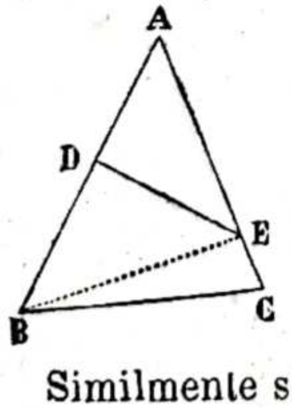
e così pure

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{DC}{BC}.$$

Questi rapporti dei quadrati dei lati sia fra loro, sia col quadrato dell'ipotenusa, sonosi già dimostrati nei corollarii III e IV della proposizione XI.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA—*Due triangoli che hanno un angolo uguale ad un angolo, stanno fra loro come i rettangoli dei lati che comprendono gli angoli eguali. Vale a dire che il triangolo* ABC *sta al triangolo* ADE *come il rettangolo* AB×AC *sta al rettangolo* AD×AE.



Si tiri la BE; i due triangoli ABE, ADE il cui vertice comune è in E, avendo la stessa altezza, stanno fra loro come le basi AB, AD (prop. 6); sicchè si avrà

$$\frac{ABE}{ADE} = \frac{AB}{AD}.$$

Similmente si ha

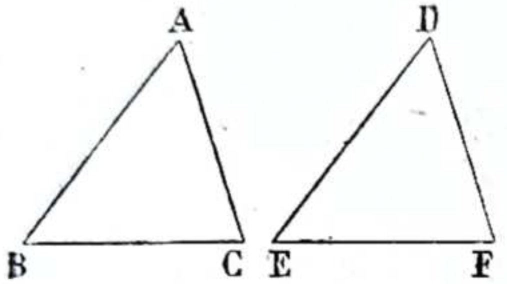
$$\frac{ABC}{ABE} = \frac{AC}{AE};$$

E però, moltiplicando queste due proporzioni per ordine, ed omettendo il termine comune ABE, risulterà

$$\frac{ABC}{ADE}=\frac{AB\times AC}{AD\times AC}.$$

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA — *Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.*



Essendo per la similitudine dei triangoli l' angolo A = D e l'angolo B=E; si avrà pel teorema precedente

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AB\times AC}{DE\times DF},$$

che si può scrivere sotto la forma

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{AC}{DF}.$$

Ma per la stessa similitudine si ha pure

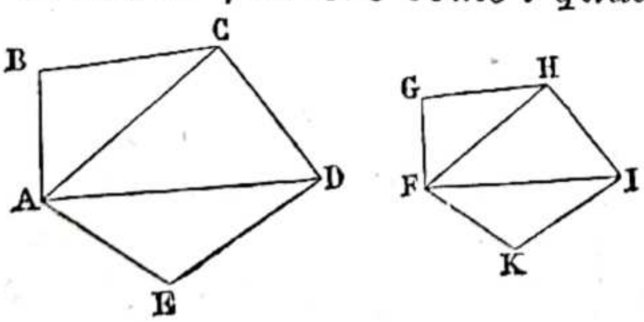
$$\frac{AC}{DF}=\frac{AB}{DE};$$

dunque

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{AB}{DE}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{DE}^2}$$

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA — *I contorni o perimetri dei poligoni simili stanno fra loro come i lati omologhi, e le loro superficie stanno fra loro come i quadrati dei medesimi lati.*



1.° Siccome si ha, per la natura delle figure simili,

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HI}, \text{ etc.,}$$

così si ricava da questa serie di rapporti uguali

$$\frac{AB+BC+CD...}{FG+GH+HI...}=\frac{AB}{FG},$$

ciò che dimostra la prima parte del teorema.

2.° I triangoli simili ACB, FGH, essendo simili[1], si ha

$$\frac{ACB}{FGH}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{FH}^2};$$

ma i triangoli simili ACD, FHI danno pure

$$\frac{ACD}{FHI}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{FH}^2};$$

e quindi pel rapporto comune si avrà

$$\frac{ABC}{FGH}=\frac{ACD}{FHI};$$

Con un ragionamento simile si troverebbe

$$\frac{ACD}{FHI}=\frac{ADE}{FIK};$$

e così di seguito per tutti gli altri triangoli del poligono.

Da questa serie di rapporti uguali ricavandosi adunque

$$\frac{ABC+ACD+ADE}{FGH+FHI+FIK}=\frac{ABC}{FGH}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{FH}^2} \text{ o } =\frac{\overline{AB}^2}{\overline{FG}^2}$$

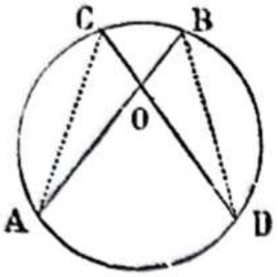
ne segue che le superficie dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

PROPOSIZIONE XXXII.

Teorema — *Le parti di due corde* AB, CD, *che si tagliano in un cerchio, sono reciprocamente proporzionali; cioè si avrà*

$$\frac{AO}{DO}=\frac{CO}{OB}.$$

Condotte le corde AC e BD; i due triangoli ACO, BOD, avendo gli angoli in O uguali come opposti al vertice, l' angolo A uguale all'angolo D perchè inscritti nello stesso segmento (prop. 19. 2) e per la stessa ragione l' angolo C=B, sono simili ed i lati omologhi danno la proporzione



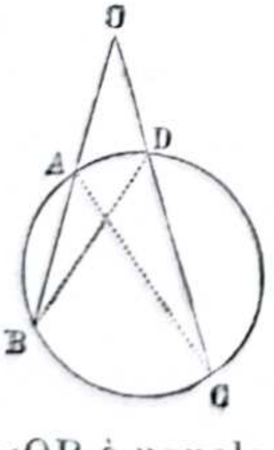
$$\frac{AO}{DO}=\frac{CO}{OB}.$$

Corollario — Da quest' ultima relazione derivandone l'altra $AO \times OB = DO \times CO$; ne segue che il rettangolo delle due parti di una delle corde è uguale al rettangolo delle due parti dell'altra.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Teorema. — *Se da un punto* O, *preso fuori di un cerchio, si conducono le secanti* OB, OC, *terminate all'arco concavo* BC; *le intiere secanti saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne; cioè si avrà:*

$$\frac{OB}{OC}=\frac{OD}{OA},$$



Poichè tirando AC, BD, i triangoli OAC, OBD, avendo l' angolo O di comune, e l'angolo B=C (prop. 19.2), sono simili; ed i lati omologhi daranno la proporzione

$$\frac{OB}{OC}=\frac{OD}{OA}.$$

Corollario. — Dunque il rettangolo $OA \times OB$ è uguale al rettangolo $OC \times OD$.

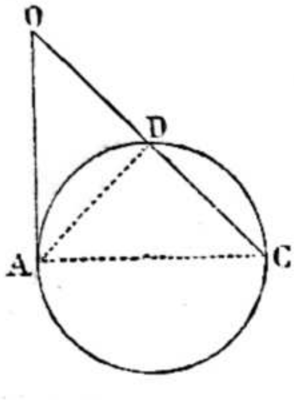
Scolio — Si può osservare che questa proporzione completa la precedente, giacchè le due corde AB, CD, invece di tagliarsi dentro del cerchio, si tagliano fuori di esso.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA — *Se da un punto* O, *preso fuori di un cerchio, si tira una tangente* OA *e una secante* OC; *la tangente sarà media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna; sicchè si avrà*

$$\frac{OC}{OA}=\frac{OA}{OD}.$$

ovvero $\overline{OA}^2=OC\times OD$



Poichè, tirando AD e AC, i triangoli OAD, OAC hanno l'angolo O di comune; inoltre l'angolo OAD formato da una tangente e da una corda, ha per misura (prop. 20.2) la metà dell'arco AD, e l'angolo C ha la stessa misura; quindi l'angolo OAD=C; e perciò i due triangoli essendo simili danno la proporzione

$$\frac{OC}{OA}=\frac{OA}{OD},$$

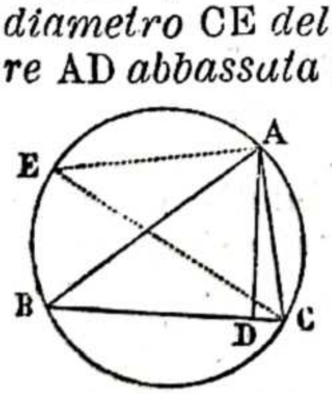
dalla quale risulta

$$\overline{OA}^2=OC\times OD$$

Scolio — Questa proposizione può dedursi dalla precedente, considerando la tangente OA come il limite delle posizioni che prende una secante allorchè gira intorno al punto O.

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA — *In ogni triangolo* ABC, *il rettangolo di due lati* AB, AC, *è uguale al rettangolo che ha per lati il diametro* CE *del cerchio circoscritto e la perpendicolare* AD *abbassata sul terzo lato* BC.



Poichè tirando AE, i triangoli ABD, AEC rettangoli l'uno in D e l'altro in A avendo l'angolo B=E, sono simili e danno la proporzione

$$\frac{AB}{CE}=\frac{AD}{AC};$$

donde risulta

$$AB \times AC = CE \times AD.$$

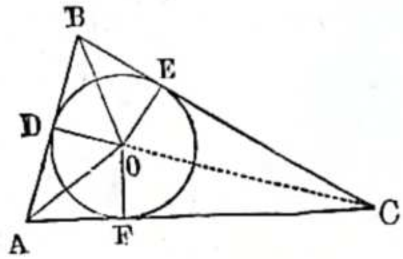
Corollario — Se si moltiplicano questi prodotti uguali per la stessa quantità BC, si avrà

$$AB \times AC \times BC = CE \times AD \times BC.$$

Ma $AD \times BC$ è il doppio della superficie del triangolo (prop. 6); dunque *il prodotto dei tre lati di un triangolo è uguale alla sua superficie moltiplicata per il doppio del diametro del cerchio circoscritto.* (*)

Il prodotto di tre rette chiamasi *solido*, per una ragione che si vedrà dopo. Il suo valore si concepisce facilmente, con l'immaginare le linee ridotte in numeri, e col moltiplicare i numeri dei quali si tratta.

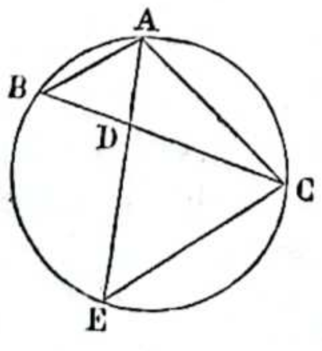
Scolio. Si può anche dimostrare che *la superficie di un triangolo è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio inscritto.*



Poichè i triangoli AOB, BOC, AOC, che hanno il vertice comune in O, hanno pure per altezza comune il raggio del cerchio inscritto; quindi la somma di questi triangoli essendo uguale alla somma delle basi AB, BC, AC, moltiplicata per la metà del raggio OD, ne segue che la superficie del triangolo ABC è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio inscritto.

PROPOSIZIONE XXXVI.

Teorema—*In un triangolo* ABC, *se si divide l'angolo* A *in due parti uguali per mezzo della retta* AD, *il rettangolo dei lati* AB, AC *sarà uguale al rettangolo dei segmenti* BD, CD, *più il quadrato della secante* AD.



Facciasi passare una circonferenza per i tre punti A, B, C; prolunghisi AD, fino alla circonferenza e si conduca la CE.

Il triangolo BAD è simile al triangolo EAC; poichè, per ipotesi, l'angolo BAD=EAC e l'angolo B=E avendo entrambi per misura la metà dell'arco

(*) Dal suddetto corollario risulta una seconda espressione

AC; avremo dunque la proporzione

$$\frac{BA}{AE}=\frac{AD}{AC}$$

donde risulta $BA \times AC = AE \times AD$; ma $AE = AD + DE$, e moltiplicando ambo i membri di questa eguaglianza per AD si ha

$$AE \times AD = \overline{AD}^2 + AD \times DE;$$

ed è inoltre

$$AD \times DE = BD \times DC, \text{ (prop. 32)}$$

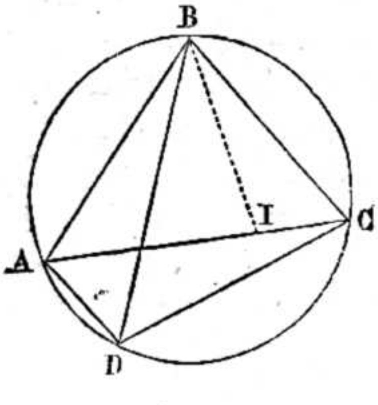
dunque infine si avrà

$$BA \times AC = \overline{AD}^2 + BD \times DC.$$

PROPOSIZIONE XXXVII.

Teorema — *In ogni quadrilatero inscritto* ABCD *il rettangolo delle due diagonali* AC, BD, *è uguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti*; *sicchè si ha*

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$



Al punto B facciasi l'angolo CBI uguale ad ABD e prolunghisi BI fino ad incontrare AC.

Gli angoli ADB, BCI essendo uguali perchè inscritti nello stesso segmento ACB; ed essendo l'angolo ABD=CBI, per costruzione; il triangolo ABD è simile al triangolo IBC e si ha la proporzione

$$\frac{AD}{CI}=\frac{BD}{BC}$$

dalla quale risulta

$$AD \times BC = CI \times BD \qquad (1)$$

Essendo inoltre ABD=CBI, se si aggiunge all'uno e all'altro DBI, si avrà ABI=DBC; ma gli angoli BAI e BDC

dell'area di un triangolo, che come vedesi è uguale al prodotto dei tre lati diviso pel doppio diametro del cerchio circoscritto. *N. del Trad.*

sono pure uguali perchè inscritti nello stesso segmento; dunque i triangoli ABI, DBC, sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AI}{DC},$$

dalla quale ricavasi

$$AB\times CD=AI\times BD. \qquad (2)$$

Sommando le eguaglianze (1) e (2), ed osservando che

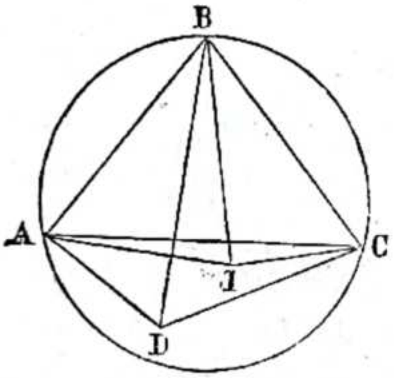
$$AI\times BD+CI\times BD=(AI+CI)\times BD=AC\times BD,$$

si avrà

$$AD\times BC+AB\times CD=AC\times BD.$$

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA — *In ogni quadrilatero non inscrittibile il rettangolo delle diagonali è minore della somma dei rettangoli dei lati opposti.*



Per i tre punti A, B, C, si faccia passare una circonferenza che certamente non conterrà il quarto vertice D; si costruisca l'angolo ABI = DBC e l'angolo BAI=BDC. La retta AI non potrà coincidere con AC, poichè il punto D non trovandosi sulla circonferenza, l'angolo BDC è diverso da BAC: in fine congiungasi il punto I col punto C.

I triangoli ABI, BDC, equiangoli per costruzione, danno la proporzione

$$\frac{AB}{AI}=\frac{BD}{DC},$$

donde

$$AI\times BD=AB\times DC. \qquad (1)$$

Inoltre, se dagli angoli uguali ABI, DBC, si toglie la parte comune DBI, resta l'angolo ABD=IBC; e per la similitudine dei triangoli ABI, DBC si ha la proporzione

$$\frac{AB}{BD}=\frac{BI}{BC};$$

quindi i triangoli ABD, IBC, avendo un angolo uguale compreso fra lati proporzionali, sono simili e danno la proporzione

$$\frac{AD}{IC}=\frac{BD}{BC};$$

dalla quale ricavasi

$$IC\times BD=AD\times BC \qquad (2)$$

Sommando le eguaglianze (1) e (2) si ha

$$BD\times(AI+IC)=AB\times DC+AD\times BC$$

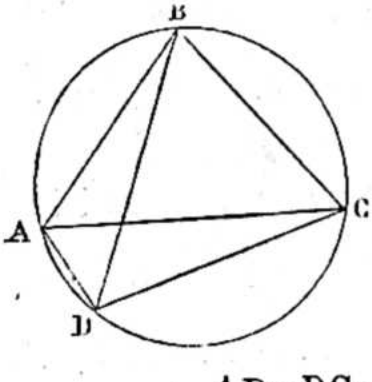
e siccome $AI+IC$ è maggiore di AC, così sarà

$$BD\times AC<AB\times DC+AD\times BC.$$

Scolio. — Da ciò che si è detto si deduce che se in un quadrilatero, il rettangolo delle diagonali è uguale alla somma de'rettangoli de'lati opposti, questo quadrilatero è inscrittibile.

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA.—*Le diagonali di un quadrilatero inscritto stanno fra loro come le somme dei rettangoli dei lati che terminano alle loro estremità.*



Il quadrilatero ABCD essendo decomposto dalla diagonale AC in due triangoli ABC, ADC, se indichiamo con R il raggio del cerchio circoscritto, si avrà

$$AB\times BC\times AC=4R\times ABC$$

ed

$$AD\times DC\times AC=4R\times ADC \text{ (prop. 35).}$$

Sommando, avremo

$$AC\times(AB\times BC+AD\times DC)=4R\times ABCD.$$

Ma se si decompone il quadrilatero in triangoli per mezzo della diagonale BD, si troverà pure

$$BD\times(AB\times AD+BC\times DC)=4R\times ABCD;$$

e però essendo

$$AC\times(AB\times BC+AD\times DC)=BD\times(AB\times AD+BC\times DC),$$

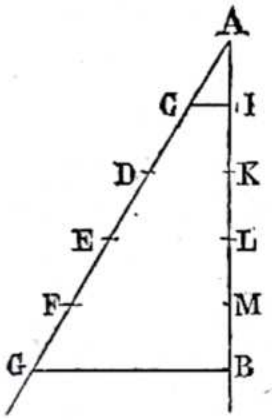
si avrà la proporzione

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\times BC+AD\times DC}{AB\times BC+AD\times DC}\cdot$$

PROBLEMI RELATIVI AL LIBRO III.

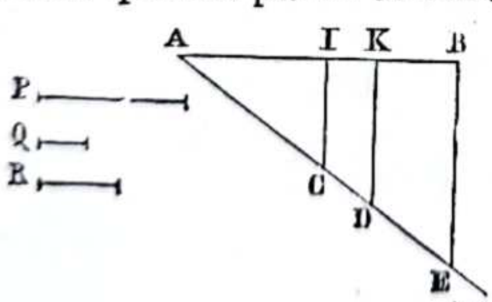
PROBLEMA I.

Dividere una retta data in parti uguali o in parti proporzionali a più rette date.



1º Suppongasi che si debba dividere la retta AB in cinque parti uguali. Dall'estremo A si tiri comunque la retta indefinita AG e prendendo una lunghezza arbitraria AC, si porti 5 volte su di AG. Congiungendo l'ultimo punto di divisione G coll'estremo B, e conducendo CI parallela a CB, io dico che AI sarà la quinta parte della retta AB; e che per conseguenza portando AI cinque volte su di AB, la retta AB resterà divisa in cinque parti uguali.

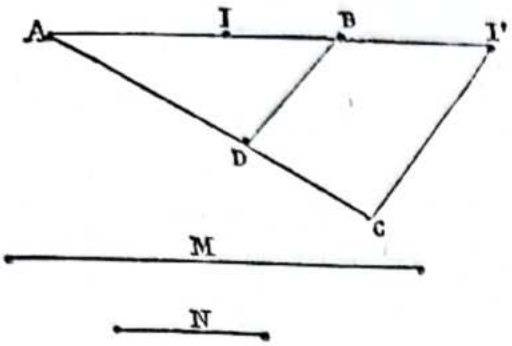
Infatti, essendo CI parallela a GB ne segue che i lati AG e AB, rimangono divisi proporzionalmente in C ed I (prop. 16); ma AC è la quinta parte di AG, quindi AI sarà la quinta parte di AB.



2º Sia a dividersi la retta AB in parti proporzionali alle rette date P, Q, R.

Dall' estremità A si tiri la retta indefinita AG e prendansi AC=P, CD=Q, DE=R. Se si congiungono gli estremi E e B, e dai punti C e D si conducono CI, DK parallele a EB, resterà la retta AB divisa nelle parti AI, IK, KB, proporzionali alle rette date P, Q, R, giacchè per le parallele CI, DK, EB, le parti AI, IK, KB sono proporzionali alle parti AC, CD, DE (prop. 16); che per costruzione sono uguali alle rette date P, Q, R.

Osservazione—Se si volessero trovare sulla retta che



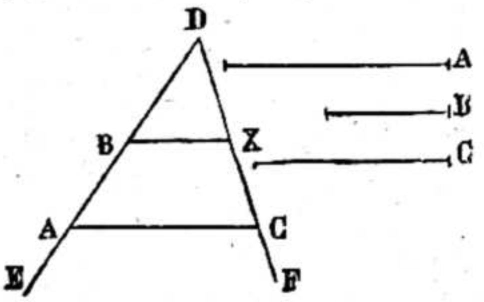
congiunge i punti A, e B, due punti tali che le loro distanze dai punti A e B fossero nel rapporto di M ad N (essendo M maggiore di N); basterebbe dividere per mezzo della costruzione precedente, la retta AB in due parti AI, IB, che stiano nel rapporto di M ad N.

Per trovare poi sul prolungamento di AB, il punto che gode della stessa proprietà, si prenderà AC=M e CD=N, si congiungerà DB e si tirerà CI′ parallela a DB. I′ sarà il punto dimandato; perchè si ha la proporzione

$$\frac{AI'}{BI'}=\frac{AC}{CD}=\frac{M}{N}.$$

PROBLEMA II.

Trovare una quarta proporzionale in ordine a tre rette date A, B, C.



Si tirino due rette indefinite DE, DF che facciano un angolo qualunque; sulla DE si prendano DA=A e DB=B; sulla DF si prenda DC=C, congiungasi A con C e dal punto B conducasi BX parallela ad AC; io dico che DX sarà la quarta proporzionale richiesta; poichè siccome BX è parallela ad AO, così si ha la proporzione

$$\frac{DA}{DB}=\frac{DC}{DX},$$

Ma i tre primi termini di questa proporzione sono uguali alle tre rette date, dunque DX è la retta cercata.

Osservazione I. Essendo A, B, C, le tre rette date ed essendo X la quarta proporzionale domandata, si avrà

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{X},$$

donde

$$X = \frac{B \times C}{A}.$$

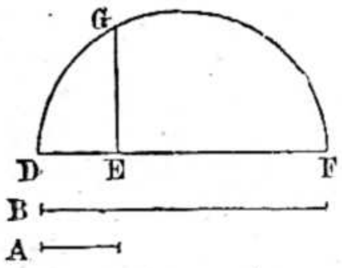
Osservazione II. Se C è uguale a B, la retta X prende il nome di terza proporzionale in ordine alle rette A e B, e si ha

$$X = \frac{B^2}{A};$$

la costruzione però è assolutamente la stessa.

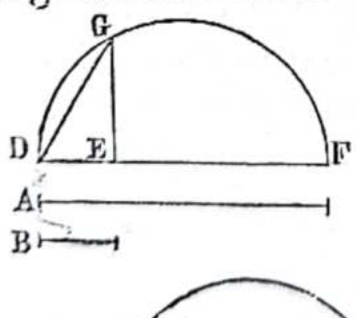
PROBLEMA III.

Trovare una media proporzionale fra due rette date A e B.

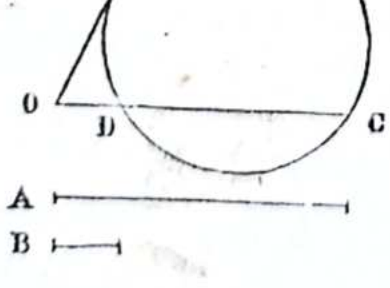


Sulla retta indefinita DF si prendano DE=A, EF=B; sulla DF come diametro, descrivasi la semicirconferenza DGF e dal punto E s'innalzi sul diametro la perpendicolare EG che incontra la circonferenza in G; io dico che EG sarà la media proporzionale cercata.

Poichè la perpendicolare GE, abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti DE, EF, i quali sono rispettivamente uguali alle rette A e B.



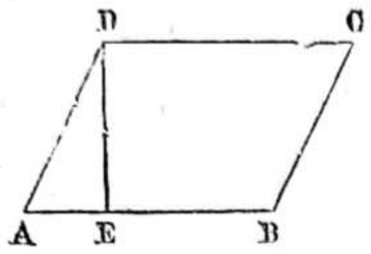
Seconda costruzione—Prese DF = =A, DE=B, si descriva una circonferenza su di DF come diametro; s'innalzi EG perpendicolare a DF e si congiunga il punto G col punto D; la retta GD sarà media proporzionale fra A e B (Cor. della prop. 28).



Terza costruzione—Prendasi OC =A, OD=C, facciasi passare per i punti D e C una circonferenza qualunque e dal punto O tirisi una tangente OA a questa circonferenza; la retta OA sarà media proporzionale fra A e B. (prop. 34).

PROBLEMA IV.

Costruire un quadrato equivalente ad un parallelogrammo o ad un triangolo dato.



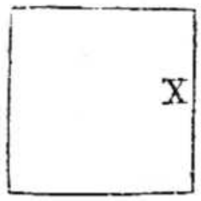
1° Siano AB la base del parallelogrammo dato, DE la sua altezza ed X il lato del quadrato cercato; si deve avere

$$X^2 = AB \times DE$$

o

$$\frac{AB}{X} = \frac{X}{DE}.$$

dunque il lato X è una media proporzionale fra AB e DE.

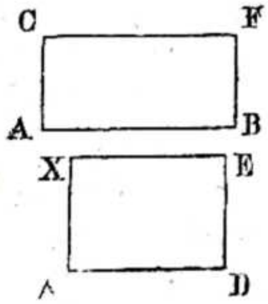


2° Si vedrà similmente che il lato del quadrato equivalente ad un triangolo dato è una media proporzionale fra la base del triangolo e la metà della sua altezza.

PROBLEMA V.

Costruire sulla retta AD *un rettangolo* ADEX *equivalente al rettangolo dato* ABFC.

Sia AX l' altezza incognita del rettangolo; siccome i due rettangoli debbono essere equivalenti, così si avrà l'eguaglianza $AD \times AX = AB \times AC$, dalla quale si ricava la proporzione



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AX}.$$

Dunque la retta cercata AX è una quarta proporzionale in ordine alle tre rette AD, AB, AC.

PROBLEMA VI.

Trovare due rette che stiano fra loro nell'istesso rapporto di due rettangoli dati.

Sieno A e B le dimensioni del primo rettangolo; C e D, quelle del secondo.

Una delle due rette cercate potendo essere scelta arbitrariamente; sia essa uguale ad A, e sia X la seconda retta.

Dovrà essere, per l'enunciato

$$\frac{A\times B}{C\times D}=\frac{A}{X},$$

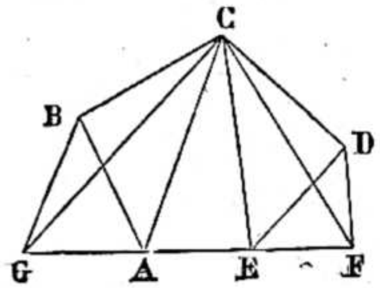
donde

$$X=\frac{C\times D\times A}{A\times B}=\frac{C\times D}{B}.$$

La retta cercata X sarà adunque una quarta proporzionale in ordine alle tre rette B, C, D.

PROBLEMA VII.

Costruire un triangolo equivalente ad un poligono dato.



Sia ABCDE il poligono dato: si comincerà dal tirare la diagonale CE che distaccherà dal poligono il triangolo CDE; dal punto D si tiri DF parallela a CE fino all'incontro di AE prolungata, e si congiunga CF; il poligono ABCDE sarà così equivalente al poligono ABCF che ha un lato di meno.

Poichè i triangoli CDE, CFE, avendo la base comune CE, ed avendo la stessa altezza per avere i loro vertici D, F su di una retta DF parallela alla base; sono equivalenti. Aggiungendo all'una parte e all'altra la figura ABCE, si avrà, da una parte il poligono ABCDE, e dall'altra il poligono ABCF i quali perciò saranno equivalenti.

Con un procedimento simile si può sopprimere l'angolo B, col sostituire al triangolo ABC il suo equivalente AGC; e così il pentagono ABCDE sarà cambiato in un triangolo equivalente GCF.

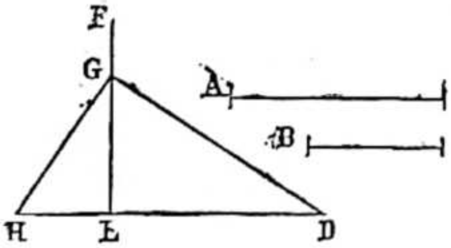
Lo stesso procedimento è applicabile a qualunque altra figura, poichè diminuendo uno alla volta il numero dei lati, si finirà per cadere sul triangolo equivalente.

Scolio.—Avendo veduto che ogni triangolo può essere cambiato in un quadrato equivalente (prop. 4), ne segue che è sempre possibile costruire un quadrato equivalente ad una figura rettilinea data; la quale operazione chiamasi *quadrare* la figura rettilinea o trovarne la *quadratura.*

PROBLEMA VIII.

Costruire un quadrato che sia uguale alla somma e alla differenza di due quadrati dati.

Siano A e B i lati dei quadrati dati.



1° Se si deve trovare un quadrato uguale alla somma di questi quadrati, basterà tirare le due rette indefinite ED, EF, che facciano un angolo retto, prendere ED = A, EG=B, e congiungere DG, che sarà il lato del quadrato cercato.

Poichè il triangolo DEG, essendo rettangolo, il quadrato fatto sopra DG è uguale alla somma dei quadrati fatti sopra ED e EG.

2° Se poi deve trovarsi un quadrato uguale alla differenza dei quadrati dati, dopo di aver tracciato l'angolo retto FEH, si prenderà GE uguale al minore dei lati A o B; e dal punto G, come centro, e con un raggio GH uguale all'altro lato, si descriverà un arco che taglia EH in H; io dico che il quadrato fatto su di EH sarà uguale alla differenza dei quadrati fatti sulle rette A e B.

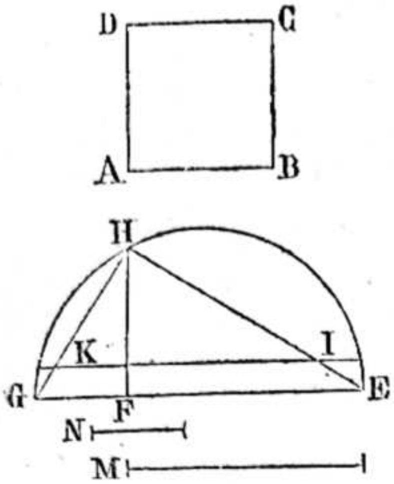
Ed infatti, il triangolo rettangolo GEH avendo l'ipotenusa GH=A, e il lato GE=B, sarà il quadrato fatto su di EH, etc.

Scolio—Si può anche trovare un quadrato uguale alla somma di più quadrati; poichè la costruzione che ne riduce due ad un solo, ne riduce tre a due, e questi due ad uno e così per gli altri.

Avverrà lo stesso se qualcuno dei quadrati debb'essere sottratto dalla somma degli altri.

PROBLEMA IX.

Costruire un quadrato che stia ad un quadrato dato ABCD, *come la retta* M *sta alla retta* N.



Sulla retta indefinita EG si prendano EF=M, FG=N; sopra EG come diametro, si descriva una semicirconferenza e dal punto s'innalzi sul diametro la perpendicolare FH. Dal punto H si conducano le corde HG, HE; sulla prima si prenda HK eguale al lato AB del quadrato dato, e dal punto K si conduca KI parallela ad EG; io dico che HI sarà il lato del quadrato cercato.

Infatti, per le parallele KI, GE, si ha

$$\frac{HI}{HK}=\frac{HE}{HG};$$

e, per conseguenza

$$\frac{\overline{HI}^2}{\overline{HK}^2}=\frac{\overline{HE}^2}{\overline{HG}^2}.$$

Ma, pel triangolo rettangolo EHG, si ha pure

$$\frac{\overline{HE}^2}{\overline{HG}^2}=\frac{EF}{FG}=\frac{M}{N};$$

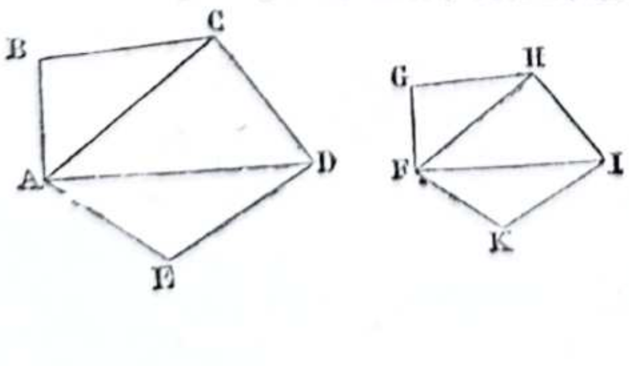
dunque

$$\frac{\overline{HI}^2}{\overline{HK}^2}=\frac{M}{N};$$

ed essendo HK=AB; ne segue che il quadrato fatto su di HI sta al quadrato fatto sopra AB come M sta ad N.

PROBLEMA X.

Sul lato FG, *omologo di* AB, *costruire un poligono simile al poligono dato* ABCDE.



Tirate le diagonali AC, AD: al punto F facciasi l'angolo GFH=BAC e al punto G l'angolo FGH==ABC; le rette FH, GH si taglieranno in H e FGH sarà un triangolo simile ad ABC: similmente su di FH, omologo di AC; costruiscasi il triangolo FHI simile ad ADC, e sopra FI, omologo di AD, il triangolo FIK, simile ad ADE. Il poligono FGHIK sarà il poligono richiesto, simile ad ABCDE.

Perchè questi due poligoni sono composti di uno stesso numero di triangoli simili e similmente situati.

PROBLEMA XI.

Dati due poligoni simili, costruirne un terzo simile ad essi ed uguale alla loro somma o alla loro differenza.

Siano P e Q le superficie dei poligoni dati; A e B due lati omologhi di questi poligoni; sia X la superficie del poligono cercato, x il lato omologo di A e B.

Siccome i poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi, così si avrà:

$$\frac{P}{Q}=\frac{A^2}{B^2},$$

donde

$$\frac{P}{P+Q}=\frac{A^2}{A^2+B^2}$$

Per la medesima ragione si ha

$$\frac{P}{X}=\frac{A^3}{x^2};$$

Ma X=P+Q, e quindi queste due proporzioni avendo i tre primi termini eguali, sarà pure

$$x^2=A^2+B^2.$$

Sicchè il lato x è l' ipotenusa di un triangolo rettangolo, i di cui cateti sono A e B.

Conoscendo così il lato x, la quistione sarà ricondotta al problema precedente.

Se il poligono X dovesse essere uguale a P − Q, si avrebbe pure la proporzione.

$$\frac{P}{Q}=\frac{A^2}{B^2},$$

da cui

$$\frac{P}{P-Q}=\frac{A^2}{A^2-B^2}.$$

Si ha inoltre

$$\frac{P}{X}=\frac{A^2}{x^2},$$

quindi se ne conchiude

$$x^2=A^2-B^2.$$

PROBLEMA XII.

Costruire un poligono simile ad un poligono dato e che stia a questo nel rapporto di m *ad* n.

Sia P la superficie della figura data, A una dei suoi lati; sia ancora X la superficie della figura cercata, x il lato omologo di A.

Dall' enunciato del problema, si ha

$$\frac{X}{P}=\frac{m}{n}.$$

E, per la similitudine dei poligoni, si ha pure

$$\frac{X}{P}=\frac{x^2}{A^2},$$

donde

$$\frac{x^2}{A^2}=\frac{m}{n}.$$

Dunque il lato x si troverà per mezzo del problema IX.

PROBLEMA XIII.

Costruire un poligono simile al poligono P, *ed equivalente al poligono* Q.

Siano A un lato del poligone P, ed x il lato omologo della figura cercata X.

Si avrà, per la similitudine dei poligoni.

$$\frac{P}{X}=\frac{A^3}{x^2}.$$

E siccome X deve essere equivalente a Q, così si avrà

$$\frac{P}{Q}=\frac{A^2}{x^2}.$$

Se si costruiscono inoltre due quadrati M^2, N^2, equivalenti a P e Q, si ha

$$\frac{M^2}{N^2}=\frac{A^2}{x^2},$$

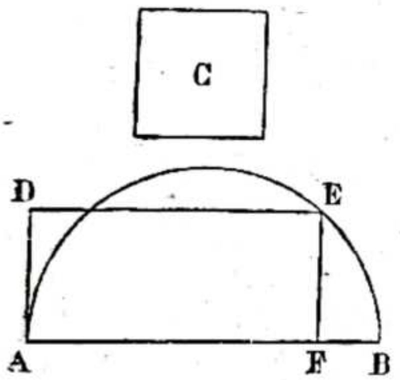
donde

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{x}.$$

La retta x sarà adunque una quarta proporzionale in ordine alle tre rette M, N, A.

PROBLEMA XIV.

Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato, e tale che la somma dei lati adiacenti sia uguale alla retta data AB.



Sulla AB come diametro, si descriva una semicirconferenza; si tiri parallelamente al diametro la retta ED ad una distanza AD uguale al lato del quadrato dato C. Dal punto E ove la parallela taglia la circonferenza, si abbassi sul diametro la perpendicolare EF; io dico che AF ed FB saranno i lati del rettangolo cercato.

Poichè la loro somma è uguale ad AB, ed il rettangolo AF×FB è uguale al quadrato di EF o al quadrato di AD, che è appunto il quadrato dato.

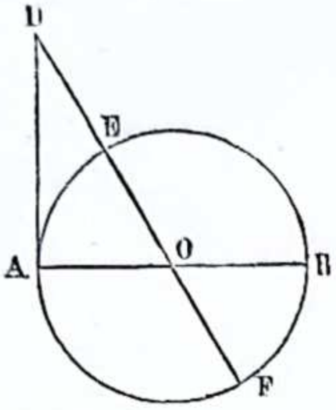
Scolio.—Affinchè il problema sia possibile, è necessario che la distanza AD non ecceda il raggio, cioè il lato del quadrato C non ecceda la metà della retta AB.

Perciò, di tutti i rettangoli nei quali la somma dei lati adiacenti è uguale ad una retta data AB, il rettangolo massimo è il quadrato costruito sulla metà di AB.

PROBLEMA XV.

Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato C, *e tale che la differenza dei lati adiacenti sia uguale alla retta data* AB.

Sulla retta data AB come diametro si descriva una



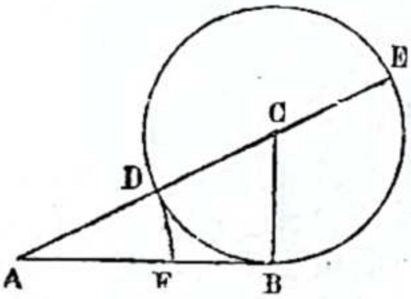
circonferenza; all'èstremità del diametro si tiri la tangente AD uguale al lato del quadrato C, e pel punto D ed il centro C si conduca la secante DF; dico che DE e DF saranno i lati adiacenti del rettangolo dimandato.

Poichè, 1º la differenza di questi lati è uguale al diametro EF o AB: 2º il rettangolo $DE \times DF$ è uguale ad $\overline{AD}^2$, cioè al quadrato dato.

Questo problema ed il precedente danno la costruzione geometrica delle radici reali di una equazione di 2º grado.

PROBLEMA XVI.

Dividere una retta AB *in media ed estrema ragione cioè in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale fra la intera retta e la parte minore*



All' estremità B della retta AB s' innalzi la perpendicolare BC uguale alla metà di AB; dal punto C, come centro e col raggio CB si descriva una circonferenza; si tiri AC che taglierà la circonferenza in D, e si prenda AF=AD; io dico che la retta AB resterà divisa in F nel modo domandato.

Infatti, se si prolunghi AC fino a che incontra nuovamente la circonferenza, la AB, essendo tangente, si avrà la proporzione

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AD},$$

da cui ricavasi

$$\frac{AE-AB}{AB}=\frac{AB-AD}{AD},$$

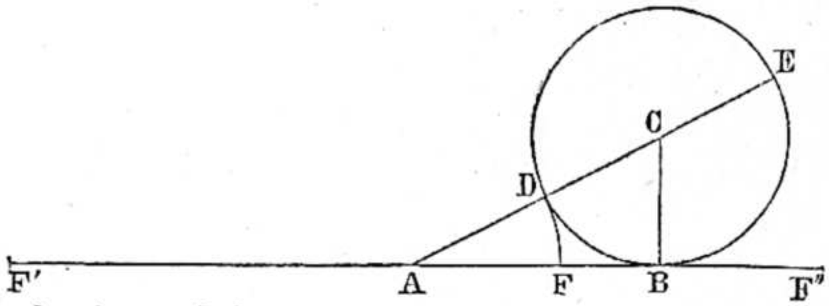
ovvero

$$\frac{AE-DE}{AB}=\frac{AB-AF}{AF} \text{ o } \frac{AD}{AB}=\frac{BF}{AF},$$

o infine

$$\frac{AF}{AB}=\frac{BF}{AF}.$$

L' enunciato di questo problema può presentarsi sotto la forma più generale: *Trovare sulla retta indefinita che congiunge due punti* A *e* B, *un punto tale che la sua distanza dal punto* A *sia media proporzionale fra la sua distanza dal punto* B *e la distanza* AB.



In tal caso è evidente che il punto F ottenuto colla costruzione precedente è una prima soluzione del problema.

Io dico inoltre che si avrà una seconda soluzione, prendendo a sinistra del punto A una lunghezza AF′ uguale ad AE.

Infatti, la proporzione

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AD},$$

dà

$$\frac{AE+AB}{AE}=\frac{AB+AD}{AB}.$$

Ma

$$AE=AF',\ AE+AB=F'B,$$

e

$$AB+AD=DE+AD=AE=AF',$$

dunque si avrà la proporzione

$$\frac{F'B}{AF'}=\frac{AF'}{AB}.$$

Scolio—Sia $AB=a$; si ha $AF=AD=AC-CD$.

Ora $AC=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{5}$, e $CD=\frac{a}{2}$, quindi $AF=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$.

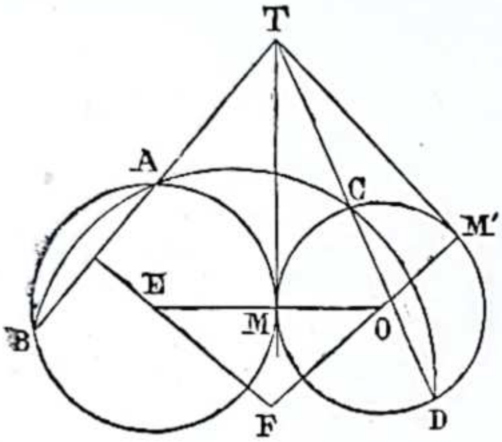
Similmente si ha

$$AF'=AC+CE,$$

ovvero

$$AF' = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

PROBLEMA XVII.



Costruire un cerchio che passi per due punti A *e* B *e sia tangente ad un cerchio dato* O.

Suppongasi il problema risoluto e dal punto di contatto M delle due circonferenze si conduca la tangente comune MT; si tiri la retta AB fino all'incontro di MT; infine da un punto qualunque C preso sulla circonferenza O, si conduca la retta TCD.

In virtù del teorema XXXIV del libro III, si ha:

$$\overline{MT}^2 = TB \times TA,$$

e

$$\overline{MT}^2 = TD \times TC,$$

donde

$$TB \times TA = TD \times TC.$$

Da ciò si deduce fácilmente che i quattro punti B, A, C, D, stanno sulla stessa circonferenza.

E perciò se si costruisce il cerchio che passa per i punti conosciuti, B, A, C, il secondo punto d'intersezione di questo cerchio col cerchio dato O, sarà il punto D.

Tirando inoltre le rette BA, DC, la loro intersezione determinerà il punto T dal quale conducendo una tangente alla circonferenza O, si verrà a determinare il punto di contatto M.

Il centro E del cerchio dimandato sarà dunque determinato dall'incontro della retta OM colla perpendicolare innalzata dal punto di mezzo di AB. Dal punto T si può condurre una seconda tangente TM' alla circonferenza O; e coll'aiuto del punto M' si determinerà il centro F di un secondo cerchio che passerà per i punti A e B e che toccherà il cerchio O inviluppandolo.

La soluzione del problema sarà assolutamente la stessa se i due punti A e B trovansi nell'interno del cerchio; e diverrà impossibile, se uno dei punti dati è esterno al cerchio e l'altro è interno.

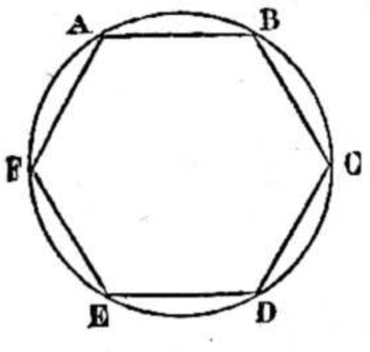
LIBRO QUARTO

I POLIGONI REGOLARI E LA MISURA DEL CERCHIO.

DEFINIZIONI

I. Un poligono che nello stesso tempo è equiangolo ed equilatero, chiamasi *poligono regolare.*

Vi sono poligoni regolari di qualunque numero di lati; poichè, se si concepisce una circonferenza divisa in m parti uguali e si congiungono con delle rette i punti di divisione consecutivi A, B, C, si formerà un poligono di m lati, i quali saranno tutti uguali, perchè sottendono archi eguali; e quindi anche gli angoli A, B, C, saranno uguali come angoli iscritti che comprendono parti uguali della circonferenza.



Il triangolo equilatero è il poligono regolare di tre lati; il quadrato quello di quattro, e così di seguito.

II. Se si divide una circonferenza in m parti eguali e si congiunge ogni punto di divisione col punto che segue, si avrà il poligono regolare di m lati: ma se i suddetti punti si congiungono di n in n, essendo n primo con m, non si potrà ritornare al punto di partenza che dopo m operazioni.

Ed in effetti, se s'indica con C la circonferenza, l'arco sotteso da ciascuna corda sarà uguale a $\frac{nC}{m}$; ora affinchè portando questa corda sulla circonferenza si ricada sul punto di partenza, è necessario che l' arco $\frac{nC}{m}$ ripetuto un certo numero di volte x, dia un numero intero di circonferenze.

Si avrà, adunque $\frac{nCx}{m}=KC$ (essendo K un numero intero),

o (1)
$$\frac{nx}{m}=K;$$

sicchè dovendo essere K intero, ed essendo n primo con m, dovrà essere x multiplo di m; vale a dire che m dev' essere il più piccolo valore di x.

La figura così formata è un poligono regolare stellato.

Tutti i suoi lati sono uguali e si vede facilmente che gli angoli formati da due lati consecutivi, sono tutti uguali.

Osservando inoltre che si ottiene la stessa figura congiungendo i punti di divisione di n in n, o di $m-n$ in $m-n$, ne segue che si avranno tutti i poligoni regolari di m lati, col cercare tutti i numeri, a partire da 1, che sono primi con m e che sono minori di $\frac{m}{2}$.

Se supponiamo che m ed n abbiano un fattore comune α, e che si abbia $n=n'\alpha$ $m=m'\alpha$, l' eguaglianza (1) diverrà $\frac{n'\alpha x}{m'\alpha}=K$ o $\frac{n'x}{m'}=K$ (2); ciò dimostra che dando ad x il valore m', si ricadrà sul punto di partenza e che si otterrà un altro poligono regolare di m' lati.

Applichiamo queste nozioni ad alcuni esempii.

1.° Supponiamo divisa la circonferenza in 5 parti uguali.

Congiungendo successivamente i punti di divisione, si ha il pentagono regolare convesso.

Congiungendo i punti di divisione di 2 in 2, non si ricadrà sul punto di partenza che dopo cinque operazioni, perchè 2 è primo con 5. In questo modo si ha il pentagono regolare stellato.

2.° Se si divide la circonferenza in 10 parti uguali, si ottiene il decagono regolare convesso col congiungere i punti di divisione consecutivi; ed il decagono regolare stellato col congiungere i punti di divisione di 3 in 3.

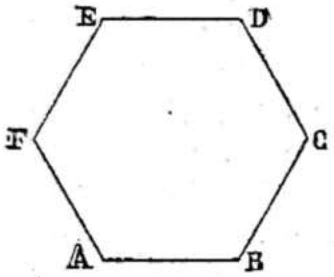
3.° Se dividesi la circonferenza in 15 parti uguali, si ottiene il pentedecagono regolare convesso congiungendo i punti di divisione consecutivi; e tre pentedecagoni regolari stellati coll'unire i punti di divisione di 2 in 2, di 4 in 4, di 7 in 7.

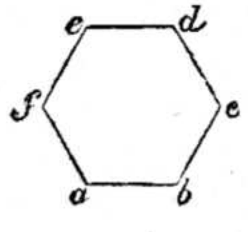
III. Chiamasi linea *spezzata regolare* una linea poligonale che ha i lati uguali e gli angoli uguali.

Una linea spezzata regolare non fa sempre parte d'un poligono regolare convesso; ma essa partecipa di alcune proprietà dei poligoni regolari.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA — *Due poligoni regolari di uno stesso numero di lati, sono due figure simili.*





Siano ABCDEF, *abcdef*, due poligoni regolari di n lati. La somma degli angoli interni essendo uguale a $2n-4$ nell'una e nell'altra figura; ne segue che gli angoli A ed a hanno per valore comune $\frac{2n-4}{n}$ e sono perciò uguali; lo stesso avviene di B e b, di C e c, etc.

Inoltre, siccome per la natura di questi poligoni i lati AB, BC, CD, etc., sono uguali, come pure ab, bc, cd, etc., così si hanno le proporzioni

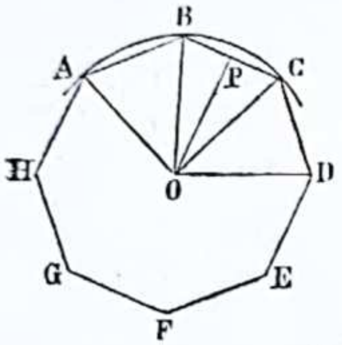
$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd};$$

dunque le due figure delle quali si tratta avendo gli angoli uguali ed i lati omologhi proporzionali, sono simili.

Corollario—I perimetri di due poligoni regolari di uno stesso numero di lati stanno fra loro come i lati omologhi, e le loro superficie stanno come i quadrati dei medesimi lati.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA—*Ogni poligono regolare può essere inscritto o circoscritto ad un cerchio.*



Sia ABCDE, etc., il poligono del quale si tratta; immaginiamo che si faccia passare una circonferenza per i tre punti A, B, C; sia O il centro di questa circonferenza, ed OP la perpendicolare abbassata sul punto di mezzo del lato BC; congiungiamo AO e OD.

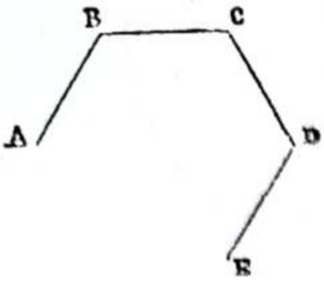
I due quadrilateri OPCD, OPBA possono sovrapporsi; infatti il lato OP è di comune, gli angoli OPC, OPB, sono uguali, perchè retti, dunque il lato PC coinciderà col suo uguale PB ed il punto C cadrà in in B: ma per la natura del poligono, l'angolo PCD=PBA, quindi CD prenderà la direzione di BA; e siccome CD = =BA, così il punto D cadrà in A, ed i due quadrilateri coincideranno in tutta la loro estensione. La distanza OD essendo adunque uguale ad AO, la circonferenza che passa per i tre punti A, B, C, passerà anche pel punto D; con un ragionamento simile si dimostrerà che la circonferenza che passa per i tre vertici B, C, D, passa per gli altri vertici, e però il poligono rimane inscritto nel cerchio.

In secondo luogo, per rapporto a questa circonferenza, tutti i lati AB, BC, CD, etc., sono corde uguali, e perciò ugualmente distanti dal centro; quindi se dal punto O come centro, e col raggio OP, si descrive una circonferenza, questa toccherà il lato BC, non che tutti gli altri lati del poligono nei rispettivi punti di mezzo; e la circonferenza sarà inscritta nel poligono, o il poligono circoscritto alla circonferenza.

Scolio I.—Il punto O, centro comune del cerchio inscritto e del cerchio circoscritto, chiamasi centro del poligono; e si chiama *angolo al centro* l'angolo AOB formato da due raggi condotti alle estremità di uno stesso lato AB.

Siccome tutte le corde AB, BC, etc., sono uguali, così è chiaro che tutti gli angoli al centro sono uguali, e che il valore di ciascuno si trova dividendo quattro angoli retti per il numero dei lati del poligono.

Scolio II. — La dimostrazione del teorema precedente essendo fondata unicamente sulla proprietà che hanno i lati successivi AB, BC, CD di essere uguali e for-

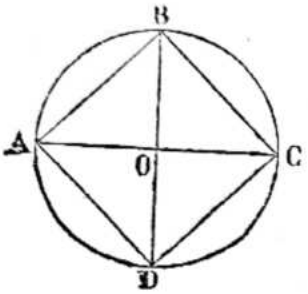


mare angoli uguali, è applicabile ad una linea spezzata regolare.

Così ogni linea spezzata regolare ABCDE è inscrittibile in un cerchio ed è circoscrittibile ad un altro cerchio che ha lo stesso centro del primo.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA—*Inscrivere un quadrato in un dato cerchio.*



Condotti due diametri AC, BD ad angolo retto, si congiungano gli estremi A, B, C, D; la figura ABCD sarà il quadrato inscritto; poichè gli angoli AOB, BOC, etc., essendo uguali, le corde AB, BC, etc., sono anche uguali.

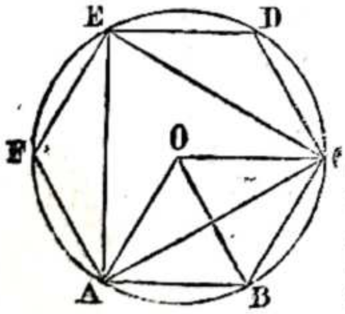
Scolio.—Il triangolo BOC essendo rettangolo ed isoscele, si ha

$$\frac{BC}{BO}=\frac{\sqrt{2}}{1}; \text{ (pr. II, lib. 3. cor. 1.)};$$

dunque *il lato del quadrato inscritto sta al raggio come la radice quadrata di* 2 *sta all'unità.*

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA — *Inscrivere un esagono regolare ed un triangolo equilatero in un cerchio dato.*



Supponiamo il problema risoluto e sia AB un lato dell' esagono inscritto; se si tirano i raggi AO, OB, il triangolo AOB sarà equilatero;

Ed infatti, essendo per ipotesi l'angolo AOB la sesta parte di quattro angoli retti, ne segue che prendendo l'angolo retto per unità, si avrà AOB $=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; dopo di che i due altri angoli ABO, BAO dello stesso triangolo, presi insieme equivarranno a $2-\frac{2}{3}$ o a $\frac{4}{3}$; ma essi sono uguali per essere AO=

OB, e però risulterà ciascuno uguale a $\frac{2}{3}$. Il triangolo ABO essendo dunque equilatero, ne segue che il lato dell'esagono regolare inscritto è uguale al raggio.

Risulta da ciò che, per inscrivere un esagono regolare in un cerchio, basta portare il raggio sei volte sulla circonferenza.

L'esagono ABCDEF essendo inscritto, se si congiungono i vertici degli angoli alternativamente, si formerà il triangolo ACE equilatero inscritto.

Scolio — La figura ABCO è un parallelogrammo, ed anche una losanga, perchè AB=BC=CO=AO, quindi la somma dei quadrati delle diagonali è uguale alla somma dei quadrati dei lati (cor. della prop. 15), cioè

$$\overline{AC}^2+\overline{BO}^2=4\overline{AB}^2=4\overline{BO}^2;$$

togliendo da una parte e dall'altra $\overline{BO}^2$, resterà

$$\overline{AC}^2=3\,\overline{BO}^2,$$

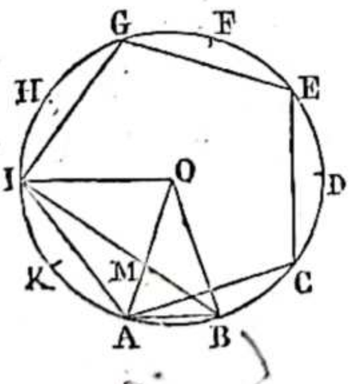
da cui

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BO}^2}=\frac{3}{1} \text{ o } \frac{AC}{BO}=\frac{\sqrt{3}}{1};$$

dunque *il lato del triangolo equilatero inscritto sta al raggio come la radice quadrata di* 3 *sta all'unità.*

PROPOSIZIONE V.

Problema — *Inscrivere un decagono regolare in un cerchio.*



Suppongasi il problema risoluto, e sia AB un lato del decagono inscritto; l'angolo al centro AOB essendo così uguale a $\frac{4}{10}$ o $\frac{2}{5}$, la somma degli angoli OBA, OAB risulterà uguale a $2-\frac{2}{5}$ o $\frac{8}{5}$; e per conseguenza ciascuno di essi sarà $\frac{4}{5}$ di un retto.

Se ora si conduce la bisettrice BM dell'angolo OBA, il triangolo MOB sarà isoscele, perchè gli angoli MOB, OBM, equivalgono ciascuno ai $\frac{2}{5}$ di un retto, e si ha OM=MB; ma il triangolo AMB è anche isoscele, perchè l' angolo MBA essendo uguale a $\frac{2}{5}$ e l'angolo BAM a $\frac{4}{5}$, il terzo angolo AMB risulta necessariamente $\frac{4}{5}$; sarà dunque

$$AB = BM = MO.$$

Avendosi infine (prop. 18 lib. 3)

$$\frac{BO}{BA} = \frac{MO}{AM},$$

si avrà pure

$$\frac{AO}{OM} = \frac{OM}{AM},$$

Si vede dunque che il raggio OA rimane diviso nel punto M in media ed estrema ragione, e che il più grande segmento OM è uguale al lato del decagono inscritto.

Osservazione I. – Il lato del decagono inscritto in un cerchio di raggio R è uguale a

$$\frac{R\,(\sqrt{5}-1)}{2}.\ (*)$$

Osservazione II. — Supposta divisa la circonferenza in 10 parti uguale nei punti B, A, K, I, II, etc., se si prolunga la retta BM fino all'incontro della circonferenza, io dico che il punto d' incontro sarà l' estremità della 3ª divisione a partire dal punto B.

Infatti, il triangolo OIB essendo isoscele e l' angolo OBI essendo uguale a $\frac{2}{3}$, sarà anche l' angolo OIB uguale a $\frac{2}{5}$, dunque l' angolo IOB sarà uguale a $\frac{6}{5}$, cioè a 3 volte l'angolo AOB.

La retta BI trovasi in tal guisa essere il lato del decagono regolare stellato; e per averlo in funzione del

(*) Per dimostrare questa formola, indichiamo con x il lato del decagono, cioè la parte maggiore del raggio R diviso in media ed estrema ragione: Si avrà così $R : x :: x : R-x$, dalla quale ricavandosi $x^2+Rx=R^2$, si troverà subito

$$x = -\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4}+R^2} = -\frac{R}{2} + \frac{R}{2}\sqrt{1+4} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$$

N. del Trad.

raggio, si osssrvi che nel triangolo OIM l'angolo IOM= $\frac{4}{5}$, che OMI è anche uguale a $\frac{4}{5}$ (*); e che per conseguenza

$$IM=OI=R.$$

Si avrà dunque

$$BI=R+MB=R+AB=R+\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)=\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$$

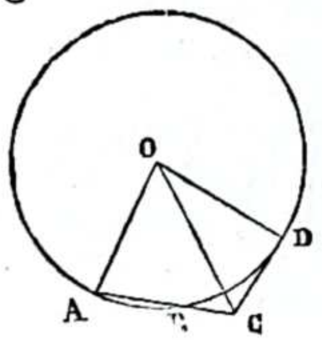
Da ciò risulta che il lato del decagono regolare stellato si ottiene dividendo il raggio in media ed estrema ragione e prendendo il segmento che corrisponde alla seconda soluzione di quest'ultimo problema.

PROPOSIZIONE VI.

Problema. — *Inscrivere in un cerchio un pentagono regolare*

Supposta divisa la circonferenza in 10 parti uguali, se si congiungono i punti di divisione di 2 in 2, si formerà il pentagono regolare inscritto.

Per calcolare il lato di questo pentagono in funzione del raggio, dimostreremo che il lato del pentagono regolare è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti il raggio del cerchio ed il lato del decagono regolare.



Infatti, si prolunghi il lato AB del decagono regolare inscritto finchè sia AC=OA, e dal punto C si conduca la CD tangente alla circonferenza: sarà CD = AB: giacchè da una parte si ha

$$\overline{CD}^2=AC\times BC,\ \text{(prop. 34, 3)}$$

e dall' altra essendo AB il maggior segmento del raggio diviso in media ed estrema ragione, si ha

$$\overline{AB}^2=AC\times BC.$$

(*) Giacchè l'angolo IOA comprendendo $\frac{2}{10}$ o $\frac{1}{5}$ di 4 retti, esso sarà $\frac{4}{5}$ di un retto; ed in quanto all'angolo OMI, esso come esterno rispetto al triangolo isoscele OMB, sarà eguale a $MOB+MBO=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$.

N. del Trad.

Ora io dico che OC è il lato del pentagono regolare inscritto.

In effetti, il cerchio descritto dal punto A come centro e con AO per raggio, passa per il punto C ed è uguale al cerchio dato; e per conseguenza essendo in questo secondo cerchio l'angolo OAC uguale a $\frac{4}{5}$, sarà OC il lato del pentagono regolare inscritto. (*)

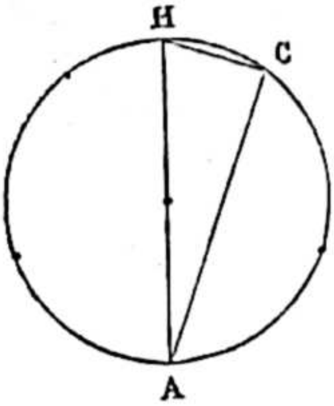
Condotta infine la OD, si vede che OC è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che per cateti il raggio del cerchio ed il lato del decagono regolare.

Dopo di ciò, si avrà subito per la proprietà del triangolo rettangolo

$$\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DC}^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 = \frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5}),$$

donde

$$OC = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$



Osservazione. — Supposta divisa la circonferenza in 5 parti uguali, se si congiungono i punti di divisione di due in due, si formerà il pentagono regolare stellato.

Per calcolare il lato AC di questo pentagono, si tiri il diametro AH e si congiunga H con C.

Pel triangolo rettangolo ACH si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{HC}^2.$$

Ma

$$AH = 2R \text{ e } HC = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1);$$

quindi si ha

$$\overline{AC}^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(6-2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(10+2\sqrt{5}).$$

E si può agevolmente verificare che il quadrato di

(*) L' essere OAC o OAB uguale ai $\frac{4}{5}$ di un retto si è dimostrato al principio del teorema precedente. *N. del Trad.*

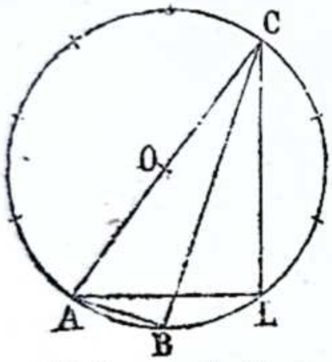
questo lato è uguale al quadrato del raggio più il quadrato del lato del decagono regolare stellato: infatti

$$R^2+\frac{R^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2=\frac{R^2}{4}(10+2\sqrt{5});$$

dunque il lato del pentagono regolare stellato è l'ipotenusa di un triangolo settangolo che ha per cateti il raggio del cerchio ed il lato del decagono regolare stellato.

PROPOSIZIONE VII.

Problema — *Inscrivere in un cerchio un pentedecagono regolare.*



Sia AB il lato del decagono regolare ed AL il lato dell' esagono ; l' arco LB sarà per rapporto alla circonferenza, $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$ o $\frac{1}{15}$; dunque la corda BL sarà il lato del pentedecagono regolare.

Per calcolare il lato di questo poligono in funzione del raggio, si tirino il diametro AOC, e le rette CL, CB.

Nel quadrilatero inscritto ABLC si ha (prop. 37.1)

$$AC\times BL+CL\times AB\times AL\times CB \qquad (1).$$

Indichiamo BL con x ed AC con 2R: essendo CL il lato del triangolo equilatero inscritto, si ha

$$CL=R\sqrt{3}.$$

Inoltre AB è il lato del decagono regolare, e per conseguenza

$$AB=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Infine, CB rappresentando il lato del pentagono regolare stellato, sarà

$$CB=\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Sostituendo questi valori nell' eguaglianza (1), questa diverrà

$$2Rx+R\sqrt{3}\times\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)=R\times\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

donde

$$x=\frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right].$$

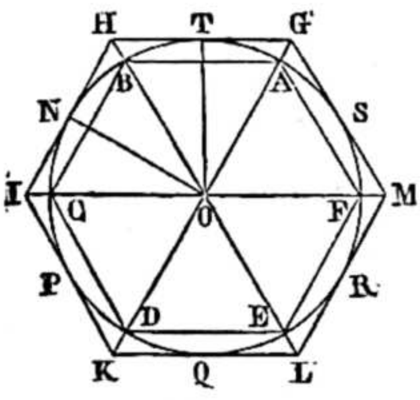
Osservazione—Dopo di aver divisa la circonferenza in 15 parti uguali, si ottengono i tre pentedecagoni regolari stellati, col congiungere i punti di divisione di 2 in 2, di 4 in 4 o di 7 in 7.

Si potrebbero anche calcolare i lati di questi poligoni col mezzo della proprietà del quadrilatero inscritto impiegata precedentemente; ma questi valori che sono molto complicati non offrirebbero alcun interesse.

Scolio — Se si dividono in due parti uguali gli archi sottesi dai lati di un poligono regolare inscritto, e si tirano le corde corrispondenti, queste formeranno un nuovo poligono regolare d'un numero doppio di lati; così il quadrato può servire ad inscrivere successivamente i poligoni di 8, 16, 32, etc., lati. L'esagono servirà ad inscrivere i poligoni di 12, 24, 48, etc., lati; il decagono quelli di 20, 40, 80, etc., lati; il pentedecagono, quelli di 30, 60, 120, etc., lati (1).

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA—*Dato il poligono regolare inscritto* ABCD, *etc., circoscrivere alla stessa circonferenza un poligono simile.*



Al punto di mezzo T dell' arco AB, si tiri la tangente GH, che sarà parallela ad AB, e facciasi lo stesso ai punti di mezzo di tutti gli altri archi BC, CD, etc.; queste tangenti, intersecandosi, formeranno il poligono regolare circoscritto GHIK... simile al poligono inscritto.

(1) Per molto tempo si è creduto che questi poligoni fossero i soli che potessero essere inscritti con i procedimenti della Geometria elementare, o ciò che torna lo stesso, con la risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado; ma Gauss ha provato, in un'opera intitolata *Disquisitiones Arithmeticae Lipsiae* 1801, che si possono inscrivere, con simili procedimenti i poligoni regolari di dieciassette lati, e in generale quelli di 2^n+1 lati, ammesso che 2^n+1 sia un numero primo.

In primo luogo si vede facilmente che i tre punti O, B, H, sono in linea retta, poichè i triangoli rettangoli OTH, OHN, avendo l'ipotenusa di comune OH, ed il lato OT = ON, sono uguali e sarà l'angolo TOH = HON; per conseguenza la retta OH passerà per il punto di mezzo B dell'arco TN. Per la stessa ragione il punto I trovasi sul prolungamento di OC, etc. Ma dall'essere GH parallela ad AB non che HI a BC, l'angolo GHI=ABC; e similmente HIK=BCD, etc., dunque gli angoli del poligono circoscritto essendo uguali a quelli del poligono inscritto, risultano anche essi uguali fra di loro.

Inoltre, per le stesse parallele avendosi

$$\frac{GH}{AB}=\frac{OH}{OB} + \text{e} \quad \frac{HI}{BC}=\frac{OH}{OB};$$

ne risulta

$$\frac{GH}{AB}=\frac{HI}{BC}.$$

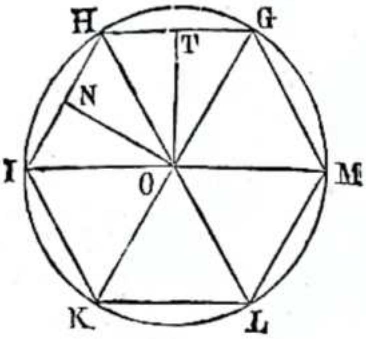
Ma AB=BC, dunque GH=HI. Per la stessa ragione HI =IK etc., e però il poligono GHIK avendo non solo gli angoli, ma anche i lati eguali, è regolare, e dippiù simile al poligono inscritto.

Corollario I. — Reciprocamente se fosse dato il poligono circoscritto GHI e si volesse tracciare il poligono inscritto ABC, basterebbe unire il centro con i vertici G, H, I, etc. del poligono dato per mezzo delle OG, OH, etc., che incontrando la circonferenza, determinerebbero i punti A, B, C, etc., i quali congiunti fra loro per mezzo delle corde AB, BC... formerebbero il poligono inscritto. Si potrebbe anche, nello stesso caso, congiungere semplicemente i punti di contatto T, N, P, etc. per mezzo delle corde TN, NP, etc., e si formerebbe così il poligono inscritto simile al circoscritto.

Corollario II. – Da ciò risulta che in un cerchio si possono circoscrivere tutti i poligoni che si sanno inscrivere in esso; e reciprocamente.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA — *L' area di un poligono regolare è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio inscritto.*

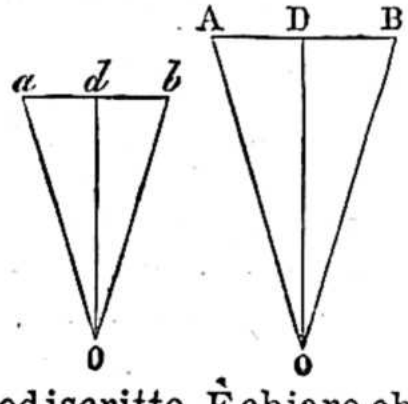


Sia, per esempio, il poligono regolare GHIK; il triangolo GOH ha per misura GH $\times \frac{1}{2}$ OT, ed il triangolo OHI ha per misura HI $\times \frac{1}{2}$ ON, ma ON=OT; dunque i due triangoli riuniti hanno per misura (GH+HI) $\times \frac{1}{2}$OT Continuando in questo modo per gli altri triangoli, si vedrà che la somma di essi o l'intero poligono ha per misura la somma delle basi GH, HI, IK etc., o il perimetro del poligono moltiplicato per $\frac{1}{2}$ OT, metà del raggio del cerchio inscritto.

Scolio—Il raggio del cerchio inscritto OT è la perpendicolare abbassata dal centro sopra uno dei lati; e suole anche chiamarsi l' *apotema* del poligono.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA — *I perimetri dei poligoni regolari di uno stesso numero di lati stanno fra loro come i raggi dei cerchi circonscritti ed anche come i raggi dei cerchi inscritti; e le loro superficie stanno fra loro come i quadrati di questi medesimi raggi.*



Sia AB un lato di uno dei poligoni dei quali si tratta, O il suo centro e per conseguenza OA il raggio del cerchio circoscritto ed OD, perpendicolare ad AB, il raggio del cerchio inscritto; sia similmente *ab* il lato di un altro poligono simile, *o* il suo centro, *oa* ed *od* i raggi dei cerchi circoscritto ed iscritto. È chiaro che i perimetri dei due poligoni stanno fra loro come i lati AB ed *ab*; ma, gli angoli A, *a* sono uguali, perchè ciascuno di essi è la metà dell'angolo del poligono, e lo stesso avviene per gli angoli B e *b*; dunque i triangoli ABO, *abo* essendo simili, come pure ADO, *ado*, si ha

$$\frac{AB}{ab}=\frac{AO}{ao}=\frac{DO}{do};$$

e quindi i perimetri dei poligoni stanno fra loro come i raggi AO, *ao*, dei cerchi circonscritti ed anche come i raggi DO, *do*, dei cerchi inscritti.

Le superficie di questi stessi poligoni stando inoltre fra loro come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*, ne segue che esse saranno pure proporzionali ai quadrati dei raggi dei cerchi circonscritti AO, *ao*, o ai quadrati dei raggi dei cerchi inscritti OD, *od*.

DEFINIZIONI.

I. Chiamasi quantità *variabile* una quantità suscettibile di passare successivamente per diversi stati di grandezza.

II. Si dice *limite* di una quantità variabile qualsiasi quantità costante alla quale la variabile può avvicinarsi sempre, senza però raggiungerla mai.

III. L'Aritmetica e la geometria presentano numerosi esempii di quantità variabili e di limiti verso i quali tendono queste variabili.

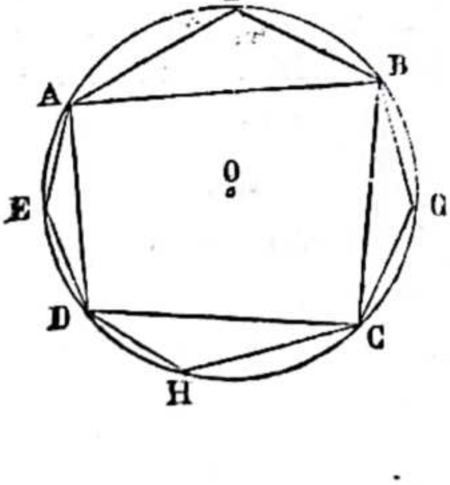
Si sa, per esempio, che l'angolo di un poligono regolare di m lati ha per valore

$$\frac{2m-4}{m} = 2^r - \frac{4}{m}.$$

Ora, se si suppone che il numero dei lati cresce fino all'infinito, si vede che il valore dell'angolo aumenterà; e siccome si può prendere m tanto grande da rendere la frazione $\frac{4}{m}$ minore di ogni quantità data, così se ne conchiude che i valori successivi dell'angolo del poligono, avranno per limite due retti.

Similmente se si prende il punto di mezzo c di una retta AB, poi il punto di mezzo c' della cB, e così di seguito, le linee Ac, Ac', Ac''. . . . avranno per limite AB.

IV. È evidente che se i fattori a, b, c, di un prodotto, hanno per limiti A, B, C; il prodotto $a \times b \times c$ avrà per limite $A \times B \times C$.



V. Sia ABCD un poligono inscritto in una circonferenza; il perimetro di questo poligono è minore della lunghezza della circonferenza, poichè ogni lato è minore dell'arco corrispondente. Se si prendono sugli archi AB, BC, CD... dei punti di divisione F, G, H, E, e si tirano le corde AF, FB, BG... verrà ad iscriversi un secondo poligono di un perimetro maggiore del primo; così pure prendendo dei nuovi punti di divisioni, si avrà un terzo poligono di un perimetro anche maggiore, e così di seguito.

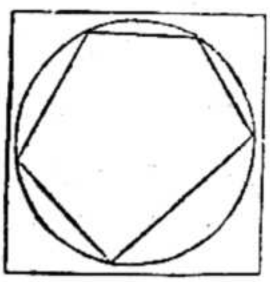
I perimetri di questi poligoni successivi vanno adunque avvicinandosi sempre alla lunghezza della circonferenza; e però si può ritenere come evidente, che se il numero dei lati del poligono diviene sufficientemente grande, la differenza fra la lunghezza della circonferenza ed il perimetro del poligono risulta minore di ogni quantità data; o in altri termini, che

La lunghezza della circonferenza è il limite verso il quale tende il perimetro di un poligono inscritto, di cui il numero dei lati cresce indefinitamente.

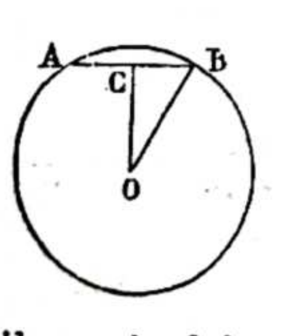
È pure facile osservare che le superficie dei poligoni successivi che sono tutte minori della superficie del cerchio, ne differiscono per quantità sempre più piccole; e però se si ammette che la differenza possa divenire minore di ogni quantità data, se ne conchiude che

L' area del cerchio è il limite dell' area di un poligono inscritto di cui il numero dei lati cresce indefinitamente.

VI. Risulta evidentemente da ciò che si è detto, che tutte le proprietà che avranno luogo per il perimetro o per la superficie di un poligono inscritto indipendenti dal numero dei lati, si applicano pure alla circonferenza o alla superficie del cerchio.



Così, per esempio, il perimetro di un poligono inscritto in un cerchio, essendo minore del perimetro di un altro poligono che inviluppa la circonferenza, se ne conchiude che la lunghezza della circonferenza è essa stessa minore del perimetro del poligono inviluppante.



Allorchè s'inscrivono in un cerchio due poligoni regolari di cui il numero dei lati va crescendo, le apoteme aumenteranno, giacchè i lati dei poligoni divenendo più piccoli, essi saranno più lontani dal centro.

Inoltre queste apoteme hanno per limite il raggio del cerchio.

Infatti sia AB il lato di un poligono regolare inscritto, OC l'apotema, ed OB il raggio.

Nel triangolo OBC si ha $OB-OC<CB$:

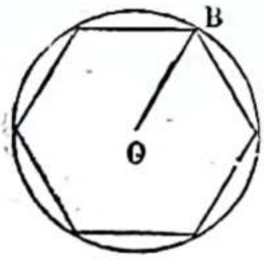
Ma CB, metà di AB, può diventare tanto piccola quanto si vorrà, dunque, *a fortiori*, $OB-OC$ potendo diventare minore di ogni quantità data, OB è il limite di OC.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA — 1° *Le circonferenze stanno fra loro come i raggi.*

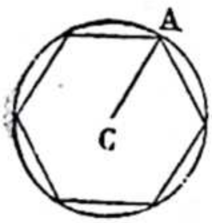
2° *Le superficie dei cerchi stanno come i quadrati dei raggi.*

1.° S'inscrivano nelle due circonferenze i di cui raggi sono OB e CA, due poligoni regolari simili.



Sieno P e p i perimetri di questi poligoni; s'indichino con R e r i raggi OB e CA, e con C e c le circonferenze, si avrà (prop. 10).

$$\frac{P}{p}=\frac{R}{r}.$$



Ora questa proporzione avendo sempre luogo, qualunque sia il numero dei lati dei poligoni, si applicherà ugualmente alle lunghezze delle circonferenze, e si avrà

$$\frac{C}{c}=\frac{R}{r}. \qquad (1)$$

2.° Sieno C', c', le superficie degli stessi cerchi; S e s le superficie di due poligoni regolari simile inscritti, si avrà (prop. 10)

$$\frac{S}{s}=\frac{R^2}{r^2};$$

e siccome questa proporzione è vera qualunque sia il numero dei lati dei poligoni, così ricavasi

$$\frac{C'}{c'}=\frac{R^2}{r^2}.$$

Scolio — Dall'ineguaglianza (1) si deduce anche

$$\frac{C}{2R}=\frac{c}{2r}.$$

Dunque il rapporto di una circonferenza al suo diametro è lo stesso per tutte le circonferenze. Questo rapporto, che s'indica ordinariamente con π, è incommensurabile, e quindi non può essere calcolato che approssimativamente. Il suo valore in decimali è

$$\pi=3{,}14159265358979 32, \text{ etc...}$$

Daremo fra breve un metodo elementare per calcolare approssimativamente il valore di π.

La conoscenza del numero π permette di valutare la lunghezza di una circonferenza il cui raggio è conosciuto, poichè dell'eguaglianza

$$\frac{C}{2R}=\pi \text{ si deduce } C=2\pi R.$$

Esempio — $R=18^m,35$; prendendo per π il valore approssimato 3,14, si ha

$$C=2\times3{,}14\times18{,}35=155^m{,}2380.$$

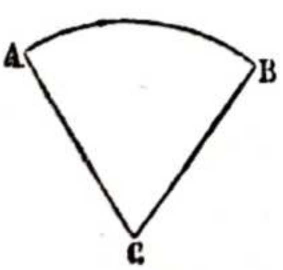
Osservazione — Per le applicazioni numeriche tornando utile conoscere il valore di $\frac{1}{\pi}$, si ha

$$\frac{1}{\pi}=0{,}3183098861837906.$$

DEFINIZIONI.

Chiamansi archi simili, settori simili, segmenti simili, quelli che corrispondono ad angoli al centro uguali.

PROPOSIZIONE XII.



Teorema — 1.° *Gli archi simili* AB, DE *stanno fra loro come i raggi* AC, OD.

2.° *I settori simili* BCA, DOE, *stanno fra loro come i quadrati dei raggi* AC, OD.

1.° Si ha (prop. 18. lib. 2)

$$\frac{\text{arco BA}}{\text{circ. AC}}=\frac{C}{4^{\text{retti}}}.$$

$$\frac{\text{arco DE}}{\text{circ. OD}}=\frac{O}{4^{\text{retti}}};$$

ma per l'eguaglianza degli angoli C ed O, i secondi membri sono eguali, dunque sarà

$$\frac{\text{arco BA}}{\text{arco DE}}=\frac{\text{circ. AC}}{\text{circ. OD}}=\frac{AC}{OD}.$$

2.º Similmente si ha (prop. 18, lib. 2)

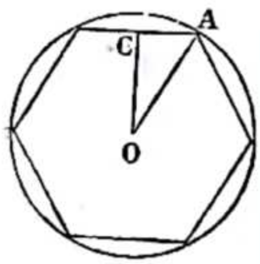
$$\frac{\text{sett. ACB}}{\text{cerc. AC}}=\frac{C}{4^{\text{retti}}},\quad \frac{\text{sett. DEO}}{\text{cerc. DO}}=\frac{O}{4^{\text{retti}}}$$

donde

$$\frac{\text{sett. ACB}}{\text{sett. DOE}}=\frac{\text{cerc. AC}}{\text{cerc. DO}}=\frac{\overline{CA}^2}{\overline{OD}^2}.$$

PROPOSIZIONE XIII.

Teorema. – *L'area del cerchio è uguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio.*



Nel cerchio che ha per raggio OA, s'inscriva un poligono regolare. Sia P il perimetro di questo poligono ed S la sua superficie; si ha (pro. 9)

$$S=P\times\tfrac{1}{2}OC.$$

Ora l' area del cerchio essendo il limite dell' area dei poligoni inscritti, di cui il numero dei lati cresce indefinitamente , se ne avrà la misura cercando il limite al quale tende il prodotto $P\times\frac{1}{2}OC$. Ma P ha per limite circ. OA ed OC ha per limite OA ; dunque

$$\text{sup. cerchio OA}=\text{circ. OA}\times\tfrac{1}{2}OA.$$

Osservazione. Se s'indica con R il raggio del cerchio, si ha

$$\text{circ. R}=2\pi R;$$

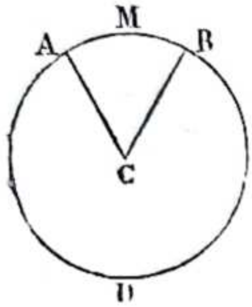
e quindi

$$\text{sup. cerchio} = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2.$$

Applicazione. — Sia $R = 3^m$, e prendiamo $\pi = 3,1415$, risulterà

$$\text{sup. cerchio} = 28^{m.q.}, 2735.$$

Corollario. — La superficie di un settore è uguale all'arco di questo settore moltiplicato per la metà del raggio.



Infatti, il settore ACB sta all'intero cerchio come l'arco AMB sta all'intera circonferenza ABD (prop. 18, lib. 2) o come $AMB \times \frac{1}{2}AC$ sta ad $ABD \times \frac{AC}{2}$; ma l'intero cerchio ha per misura $ABD \times \frac{1}{2}AC$, dunque il settore ACB ha per misura $AMB \times \frac{1}{2}AC$.

Osservazione I. Nelle applicazioni numeriche suole assegnarsi il raggio R del cerchio ed il numero di gradi n dell'arco AMB; ed allora per determinare la lunghezza x dell'arco corrispondente ad n gradi si stabilirà la proporzione

$$\frac{x}{2\pi R} = \frac{n}{360},$$

donde

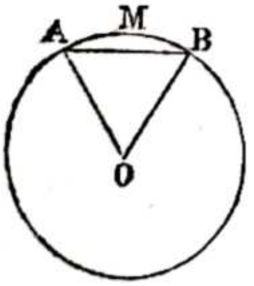
$$\pi = 2\pi R \times \frac{n}{360}:$$

Dopo di che la superficie del settore avrà per misura

$$2\pi R \times \frac{n}{360} \times \frac{R}{2} \quad \text{o} \quad \pi R^2 \times \frac{n}{360}.$$

Applicazione. Sia $R = 12^m$, e $n = 60^0$ si ha

$$\text{settore} = \frac{\pi . 12^2 \times 69}{360} = 24\pi = 75^{m.q.}, 3960.$$



Osservazione II. — La superficie di un segmento circolare AMB è uguale alla superficie del settore circolare OAMB, meno la superficie del triangolo AOB.

$$\text{Ora settore } OAMB = \pi R^2 \times \frac{n}{360};$$

ed in quanto al triangolo AOB, non si può valutare la sua superficie col mezzo della geometria se non quando il numero dei gradi n dell' arco AB corrisponde ad uno dei poligoni che si sanno inscrivere, altrimenti bisogna ricorrere alla trigonometria che ci dà

$$\mathrm{AOB}=\frac{\mathrm{R}^2\sin.n}{2}:$$

Dunque segmento $\mathrm{AMB}=\pi\mathrm{R}^2\times\frac{n}{360}-\frac{\mathrm{R}^2\sin.n}{2}$.

Applicazione. Sia $\mathrm{AC}=12^m$, e supponiamo che l' arco AMB contenga 60^0. Per trovare la lunghezza di questo arco si stabilirà la proporzione

$$\frac{\text{arco AMB}}{2\pi\mathrm{R}}=\frac{60}{360}$$

donde

$$\text{arco AMB}=\frac{2\pi\mathrm{R}\times60}{360}=\frac{\pi.\mathrm{R}}{3}=\frac{\pi.12}{3}=4\pi\,;$$

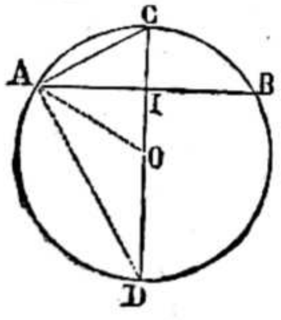
si ha dunque

$$\text{settore AOB}=4\pi\times6=24\pi=75^{m.q.},\,3960.$$

PROBLEMI SUI POLIGONI REGOLARI; DETERMINAZIONE DEL RAPPORTO DELLA CIRCONFERENZA AL DIAMETRO.

PROPOSIZIONE XIV.

Problema — *Conoscendo il lato* AB *di un poligono regolare inscritto ed il raggio* OC *del cerchio, calcolare il lato* AC *del poligono regolare inscritto di un numero doppio di lati.*



Siano $\mathrm{AB}=a$, $\mathrm{OC}=\mathrm{R}$ ed $\mathrm{AC}=c$; tirate AD e AO, pel triangolo rettangolo CAD si ha

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\mathrm{CD}\times\mathrm{CI},\ \text{o}\ c^2=2\mathrm{R}\times\mathrm{CI};$$

ma

$$\mathrm{CI}=\mathrm{CO}-\mathrm{OI}=\mathrm{R}-\mathrm{OI}\,;$$

e pel triangolo rettangolo AOI,

$$OI = \sqrt{R^2 - \overline{AI}^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}};$$

quindi sarà

$$CI = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}:$$

e per conseguenza

$$c^2 = 2R \times \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \right). \qquad (1)$$

Reciprocamente, si può proporre di calcolare a conoscendo c; ed allora bisognerà risolvere l'equazione (1) rispetto ad a, e si otterrà

$$a^2 = \frac{c^2(4R^2 - c^2)}{R^2}. \qquad (2)$$

Per fare un'applicazione della formola (1), supponiamo che a sia il lato dell'esagono, ovvero sia $a = R$; si avrà per il lato del dodecagono regolare inscritto.

$$c = \sqrt{2R\left(R^2 - \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}\right)} = \sqrt{2R^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Per applicare la formola (2), prendiamo c uguale al lato del decagono e cerchiamo il lato del pentagono regolare.

Essendo

$$c = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2}; \text{ (prop. 5)}$$

se ne ricava

$$a^2 = \frac{\frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}\left[4R^2 - \frac{R^2(6 - 2\sqrt{5})}{4}\right]}{R^2} = \frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5});$$

donde

$$a=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Osservazione. — Sommando il quadrato del lato del decagono col quadrato del raggio, si trova che la somma

$$R^2+\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}$$

è uguale a

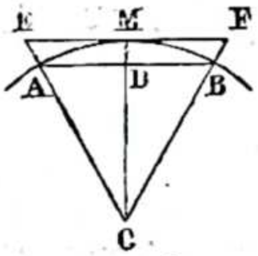
$$\frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{4},$$

cioè al quadrato del lato del pentagono regolare: e si ricade così nella proprietà già conosciuta che: *Il lato del pentagono regolare inscritto è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti il raggio ed il lato del decagono.*

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA — *Conoscendo il lato di un poligono regolare inscritto ed il raggio del cerchio, trovare il lato del poligono simile circoscritto.*

Siano $AB=a$, $CA=R$ ed $EF=x$



La similitudine dei triangoli ECF, ACB, dà la proporzione

$$\frac{EF}{AB}=\frac{CE}{CA}.$$

Ma si ha pure

$$\frac{EF}{AB}=\frac{CM}{CD},$$

dunque, pel rapporto comune, sarà

$$\frac{CE}{CA}=\frac{CM}{CD};$$

o

$$\frac{x}{a}=\frac{R}{CD}.$$

D' altronde, pel triangolo rettangolo ACD si ha

$$CD = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}};$$

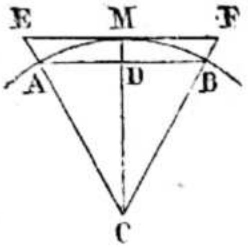
e però

$$\frac{x}{a} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

donde

$$x = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$$

PROPOSIZIONE XVI.



PROBLEMA - *Conoscendo il lato* AB *di un poligono regolare di* m *lati ed il raggio* CA *del cerchio circoscritto, trovare la superficie di questo poligono.*

Siano $AB = a$, $CA = R$ e sia S la superficie del poligono; si ha (prop. 9)

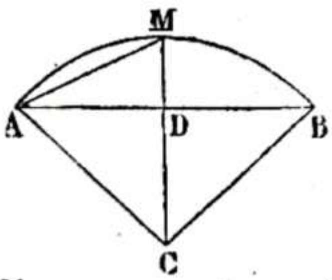
$$S = ma \times \frac{CD}{2} \text{ ma } CD = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2};$$

sarà dunque

$$S = \frac{ma\sqrt{4R^2 - a^2}}{4}$$

Applicazione. Se si vuole la superficie dell'esagono regolare, bisogna porre $a = R$, $m = 6$; e quindi

$$S = \frac{6R\sqrt{4R^2 - R^2}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$$



Osservazione – Con gli stessi dati si potrebbe anche calcolare la superficie del poligono regolare inscritto di $2m$ lati.

Infatti, sia M il punto di mezzo dell' arco AB, e quindi AM il lato del poligono regolare di $2m$ lati: la sua superficie (che indicheremo con S') si comporrà di $2m$ triangoli uguali ad ACM.

Ma

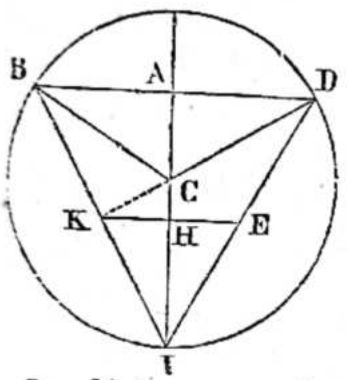
$$ACM = CM \times \frac{AD}{2} = \frac{R \times a}{4};$$

dunque
$$S'=2m\times\frac{R\times a}{4}=\frac{mRa}{2}.$$

Cerchiamo, come applicazione, la superficie del dodecagono regolare inscritto; si ha in tal caso
$$a=R\ m=6,\ \text{d'onde}\ S'=\frac{6R^2}{2}=3R^2.$$

PROPOSIZIONE XVII.

Problema — *Dati il raggio* CD=R, *e l' apotema* CA=r *di un poligono regolare, calcolare il raggio* R$'$ *e l' apotema* r$'$ *di un poligono regolare isoperimetro di un doppio numero di lati.*



Sia BD il lato del poligono regolare dato e C il centro di questo poligono. Prolungata l'apotema CA fino al suo incontro in I colla circonferenza circoscritta, e tirate le rette BI, DI; sarà BID l' angolo al centro del poligono cercato, perchè esso è la metà di BCD.

Inoltre, se si conduce CK perpendicolare a BI e KE parallela a BD, sarà KE la metà di BD e rappresenterà il lato del nuovo poligono; IK ne sarà il raggio ed HI l'apotema.

In conseguenza di una tal costruzione, essendo
$$HI=\frac{IA}{2}=\frac{CI+CA}{2};$$
ricavasi subito
$$r'=\frac{R+r}{2}. \qquad (2)$$

E pel triangolo rettangolo CKI, si ha
$$\overline{IK}^2=IC\times IH,\ \text{o}\ R'=\sqrt{R.\,r'}=\sqrt{R\times\frac{(R+r)}{2}} \qquad (2)$$

Scolio. — È facile lo assicurarsi, sia dalla figura, sia dalle formole, che r' è maggiore di r, e che al contrario R$'$ è minore di R; sicchè nel nuovo poligono la differenza fra il raggio e l' apotema è minore di quella del primo poligono.

Similmente, se si trasforma il secondo poligono in un terzo, poi il terzo in un quarto e così di seguito, si arriverà ad un poligono nel quale la differenza fra il raggio e l' apotema sarà minore di ogni grandezza data.

Infatti nel triangolo BCA, si ha

$$BC-CA<BA \text{ o } R-r<BA;$$

ma BA è la metà del lato del poligono e questo lato può rendersi minore di ogni grandezza data col raddoppiare indefinitamente il numero dei lati; dunque anche $R-r$ può divenire minore di ogni quantità assegnabile.

PROPOSIZIONE XVIII.

PROBLEMA — *Trovare un valore approssimato del rapporto della circonferenza al diametro.*

Si ha, per definizione

$$\pi = \frac{\text{circ. R}}{2R} \qquad (1)$$

e per dimostrazione

$$\pi = \frac{\text{cerchio R}}{R^2} \qquad (2)$$

Da ciò risultano quattro metodi per trovare il valore di π.

Poichè; se si considera la formola (1) si può, conoscendo la lunghezza della circonferenza, calcolare il raggio, o conoscendo il raggio, cercare la circonferenza; e se si considera la formola (2) si può, conoscendo il raggio. trovare la superficie del cerchio; oppure conoscendo l' area di un cerchio, si può calcolarne il raggio.

Noi esporremo i due primi metodi, proponendoci in primo luogo di calcolare il raggio di una circonferenza la cui lunghezza è 4.

Costruiscasi un quadrato, e prendendo il lato per unità, il suo perimetro sarà 4.

Siano R ed r il raggio e l'apotema di questo quadrato, si ha

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ r = \frac{1}{2}$$

Ora, potendo il suddetto quadrato essere trasformato in un ottagono regolare dello stesso perimetro, per le formole del problema precedente, si troverà per il raggio e l'apotema dell'ottagono:

$$R_1 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8}},\ r_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{4}.$$

Con un simile procedimento si calcolerebbero i raggi R_2, r_2 del poligono regolare isoperimetro di 16 lati, e così continuando si perverrebbe ad un poligono il cui perimetro essendo sempre 4, i raggi B_n, r_n differirebbero di tanto poco quanto si vorrebbe.

Ora le circonferenze descritte con R_n e r_n sono l'una maggiore e l'altra minore di 4; dunque il raggio della circonferenza uguale a 4 trovandosi compreso fra R_n e r_n, potrà ottenersi con quella approssimazione che si vuole.

Se i raggi R_n, r_n sono valutati in decimali, è evidente che i decimali comuni apparterranno al raggio cercato,

Ecco il quadro dei valori successivi del raggio e dell'apotema nei poligoni di 4, 8, 16... 8192 lati.

NUMERO dei lati	APOTEME	RAGGI
4	r_1 =0,5000000	R_1 =0,7071068
8	r_2 =0,6035534	R_2 =0,6532815
16	r_3 =0,6284174	R_3 =0,6407289
32	r_4 =0,6345731	R_4 =0,6376435
64	r_5 =0,6361083	R_5 =0,6368754
128	r_6 =0,6364919	R_6 =0,6366836
256	r_7 =0,6365878	R_7 =0,6366357
512	r_8 =0,6366117	R_8 =0,6366237
1024	r_9 =0,6366177	R_9 =0,6366207
2048	r_{10}=0,6366192	R_{10}=0,6366199
4096	r_{11}=0,6366195	R_{11}=0,6366197
8192	r_{12}=0,6366196	R_{12}=0,6366196

Così una circonferenza uguale a 4 ha per raggio

0,6366196... donde risulta che il rapporto della circonferenza al diametro, equivale

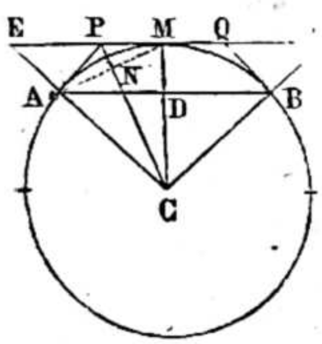
$$\frac{40000000}{12732392} = 3,1415926....$$

Archimede aveva trovato $\frac{22}{7}$ per valore approssimato di π; Mezio ha trovato per lo stesso numero, il valore molto più approssimato $\frac{353}{113}$.

PROPOSIZIONE XIX.

Problema—*Dati i perimetri p, P di due poligoni regolari simili inscritto e circoscritto ad uno stesso cerchio, calcolare i perimetri p', P', dei poligoni regolari inscritto e circoscritto di un numero doppio di lati.*

Siano AB, EF, i lati dei poligoni i cui perimetri sono p, P, e sia m il numero di questi lati. Conducasi la corda AM, ai punti A, B si applichino le tangenti AP, BQ; ed infine si tiri la PC; saranno AM e PQ, i lati dei poligoni inscritto e circoscritto di $2m$ lati di cui i perimetri sono p', P'.



Ciò posto, si ha

$$\frac{P}{p} = \frac{CE}{CA \text{ o } CM};$$

e siccome per essere CP la bisettrice dell'angolo ECM, si ha pure

$$\frac{PE}{PM} = \frac{CE}{CM};$$

così pel rapporto comune, sarà

$$\frac{P}{p} = \frac{PE}{PM},$$

donde risulta

$$\frac{P+p}{2p} = \frac{EM}{2PM \text{ o } PQ}.$$

ovvero per essere le rette EM, PQ, contenute $2m$ volte nei perimetri P, P',

$$\frac{P+p}{2p}=\frac{P}{P'},$$

da cui ricavasi

$$P'=\frac{2Pp}{P+p}. \qquad (1)$$

Per calcolare p è da osservarsi che i due triangoli PMN, MAD, equiangoli fra loro, sono simili e dànno la proporzione

$$\frac{AM}{AD}=\frac{PM}{MN}.$$

Ma le rette AM, AD sono contenute $2m$ volte in p' e p; e le rette PM, MN, sono contenute $4m$ volte in P' e p', dunque

$$\frac{p'}{p}=\frac{P'}{p'}, \text{ donde } p'=\sqrt{P'.p}. \qquad (2)$$

Corollario — Queste formole permettono di calcolare il numero π con quella approssimazione che si vuole, poichè, se in un cerchio che ha per raggio l'unità lineare, s' inscrivono e circonscrivono due quadrati i cui perimetri sono $4\sqrt{2}$ e 8, si potranno calcolare colle formole (1) e (2) i perimetri degli ottagoni regolari inscritto e circoscritto, e coll' aiuto degli ottagoni, si otterranno i perimetri dei poligoni regolari di 16 lati e così di seguito. Ma si sa che in questa serie di operazioni, i perimetri dei poligoni si avvicinano indefinitamente alla lunghezza della circonferenza, e però si potrà calcolare questa circonferenza con tutta l'approssimazione desiderabile; e dividendola per 2, si avrà il numero π.

—

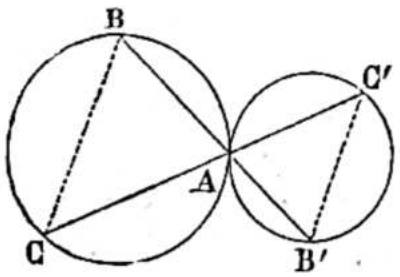
GEOMETRIA PIANA

—

TEOREMI DA DIMOSTRARSI

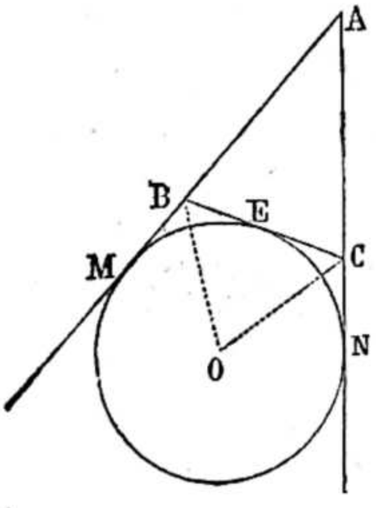
1. La figura che ha per vertici i punti di mezzo dei lati di un quadrilatero, è un parallelogrammo.

2. Se da un punto preso nell'interno d'un triangolo equilatero, si abbassano le perpendicolari sui tre lati, la somma di queste tre perpendicolari è costante. (Esaminare ciò che diviene il teorema, quando il punto è esterno al triangolo).



3. Se dal punto di contatto A di due cerchi tangenti, si tirano due secanti qualunque BB′, CC′; dimostrare che le rette BC, B′C′ sono parallele.

4. In ogni quadrilatero circoscritto ad un cerchio, la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due. (La reciproca è vera).



5. Se si suppone il cerchio O tangente ai due lati dell'angolo A, e si tira una tangente BEC terminata ai due lati dell'angolo; dimostrare, 1° che il perimetro del triangolo ABC è costante, qualunque sia il punto dell' arco MEN dal quale si tira la tangente; 2° che l'angolo BOC è costante.

6. Se si congiungono a due a due i piedi delle tre altezze di un triangolo, si forma un nuovo triangolo nel quale le bisettrici degli angoli sono le altezze del primo triangolo.

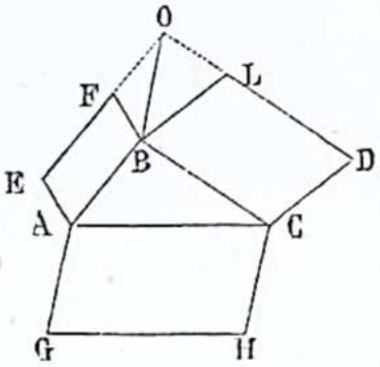
7. I piedi delle altezze di un triangolo ed i punti di mezzo dei tre lati stanno sopra una stessa circonferenza.

8. Dato un quadrilatero, se si costruiscono i cerchi tangenti a tre lati consecutivi, i centri dei quattro cerchi

che si ottengono, formano un quadrilatero inscrittibile.

9. Le bisettrici degli angoli formati dai lati opposti di un quadrilatero inscrittibile si tagliano ad angolo retto.

10. Se da un punto qualunque del cerchio circoscritto ad un triangolo si abbassano le perpendicolari sui tre lati, i piedi di queste perpendicolari sono in linea retta.



11. Si costruiscano sopra i due lati AB, BC di un triangolo ABC, i parallelogrammi qualunque ABFE, BCDL; si prolunghino EF e LD in O, e si tiri OB; infine si costruisca sopra AC un parallelogrammo di cui il lato adiacente sia eguale e parallelo ad OB: dimostrare che questo parallelogrammo è equivalente alla somma degli altri due. (Dedurne come conseguenza il quadrato dell' ipotenusa).

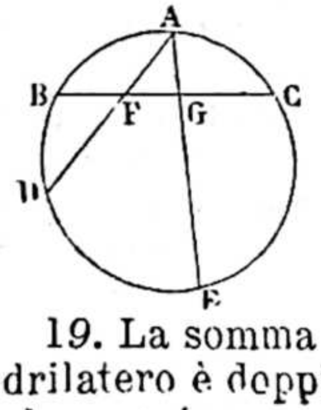
12. Le tre altezze di un triangolo s' incontrano in uno stesso punto.

13. Le rette che congiungono i vertici di un triangolo coi punti di mezzo dei lati opposti si tagliano nello stesso punto.

14. Il punto d' incontro delle altezze di un triangolo, il punto d' incontro delle mediane, ed il centro del cerchio circoscritto, sono in linea retta; e la distanza dei due primi punti è doppia di quella dei due ultimi.

15. Se da un punto dato si conducono ad un cerchio due secanti perpendicolari fra loro, la somma dei quadrati delle corde sarà costante.

16. Allorchè tre cerchi si tagliano a due a due, le tre corde d' intersezione si tagliano nello stesso punto.



17. Se dal punto di mezzo A dell'arco BC, si tirano le due secanti AFD, AGE, i quattro punti D, F, G, E, stanno sulla stessa circonferenza.

18. Allorchè tre cerchi sono tangenti a due a due, le tangenti menate ai punti di contatto si tagliano in uno stesso punto.

19. La somma dei quadrati delle diagonali di un quadrilatero è doppio della somma dei quadrati delle rette che congiungono i punti di mezzo dei lati opposti.

20. In un triangolo se si conduce una serie di parallele

alla base e si tirano le diagonali dei trapezi che ne risultano, dimostrare che i punti di concorso delle diagonali di questi trapezi si trovano sulla retta che unisce il vertice col punto di mezzo della base.

21. Dimostrare che in un quadrilatero inscritto, il prodotto delle perpendicolari abbassate da un punto della circonferenza sopra due lati opposti è uguale al prodotto delle perpendicolari abbassate dallo stesso punto sugli altri due lati.

22. Se da un punto preso nell' interno di un poligono regolare di m lati si abbassano le perpendicolari sopra tutti i lati, la somma di queste perpendicolari è uguale ad m volte il raggio del cerchio inscritto.

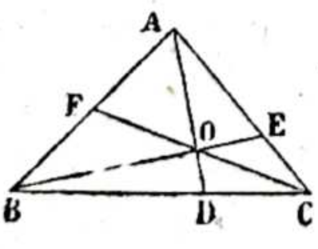
23. Se dai vertici di un poligono regolare si abbassano le perpendicolari sopra una retta qualunque che passa per il centro, la somma delle perpendicolari che cadono da una parte di questa retta è uguale alla somma di quelle che cadono dall'altra.

24. Dimostrare che se si fa ruotare un cerchio in un altro cerchio fisso di posizione e di raggio doppio, in modo che i due cerchi siano tangenti, un punto qualunque del primo cerchio descriverà in questo movimento una linea retta.

25. Dimostrare che le tre rette che congiungono i vertici di un triangolo coi vertici opposti dei triangoli equilateri costruiti sopra i lati, si tagliano in uno stesso punto.

26. Dimostrare che la somma delle perpendicolari abbassate sopra i lati di un triangolo dal centro del cerchio circoscritto, è uguale al raggio di questo cerchio coll'aggiunta del raggio del cerchio inscritto.

27. Dimostrare che in un trapezio la somma dei quadrati delle diagonali è uguale alla somma dei quadrati dei lati opposti non paralleli più due volte il rettangolo delle basi parallele.



28. Dimostrare che se, in un triangolo ABC, tre rette che partono dai vertici si tagliano in un punto O, si ha

$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$$

29. Date due circonferenze concentriche, dimostrare che la somma dei quadrati delle distanze di un punto qualunque di una di queste circonferenze agli estremi del diametro dell'altra, è costante.

30. Due quadrilateri sono equivalenti allorchè le loro diagonali sono uguali e formano fra di loro angoli uguali.

—

LUOGHI GEOMETRICI DA TROVARSI.

1. Trovare il luogo dei punti tali che la somma delle distanze di ciascuno di essi da due rette date sia uguale ad una retta data.

2. Trovare il luogo dei punti tali che la differenza delle distanze di ciascuno di essi da due rette, sia uguale ad una retta data.

3. Luogo geometrico dei centri dei cerchi che passano per due punti dati.

4. Luogo geometrico dei centri dei cerchi di raggi dati e tangenti ad una retta data.

5. Luogo geometrico dei centri dei cerchi di raggi dati e tangenti ad un cerchio dato.

6. Tirando da tutti i punti di una circonferenza delle rette parallele fra loro, e prendendo sopra ciascuna una lunghezza data; trovare il luogo geometrico delle estremità di tutte queste rette.

7. Trovare il luogo dei punti di mezzo delle corde di un cerchio le quali passano tutte per un punto dato.

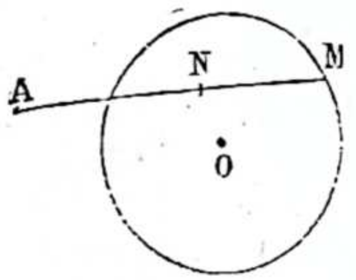
8. Trovare il luogo dei punti in cui le tangenti condotte ad un cerchio si tagliano sotto un angolo dato.

9. Trovare il luogo dei punti tali che i piedi delle perpendicolari abbassate da ciascuno di essi sopra i tre lati di un triangolo siano in linea retta.

10. Trovare il luogo dei punti le di cui distanze da due rette date sono in un rapporto dato.

11. Trovare il luogo dei punti tali che la somma o la differenza dei quadrati delle loro distanze da due punti dati sia uguale ad un quadrato dato.

12. Dati due cerchi, trovare il luogo dei punti tali che le tangenti tirate da questi punti ai due cerchi siano uguali.

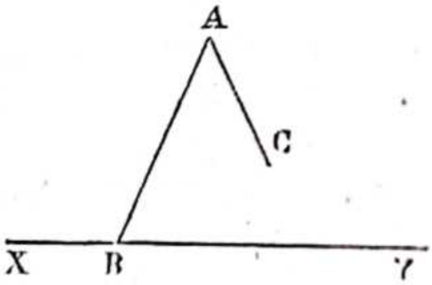


13. Se si tira da un punto A una retta AM terminata alla circonferenza O, e si divide questa retta nel punto N in modo che si abbia $\frac{AM}{AN}=\frac{m}{n}$; trovare il luogo del punto N.

14. Se dal punto dato A si tira la retta AM terminata alla circonferenza O, e si prende su di questa retta un punto N tale che sia $AM \times AN = K^2$; trovare il luogo del punto N.

Risolvere i due problemi precedenti sostituendo alla circonferenza una retta.

15. Se da un punto A si tira una retta AB terminata alla retta data XY; si conduce AC in modo che l'angolo BAC sia uguale ad un angolo dato e che si abbia $\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n}$ o pure $AB \times AC = K^2$, trovare il luogo del punto C.

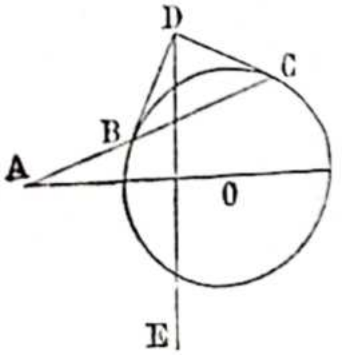


Gli stessi problemi, sostituendo alla retta XY una circonferenza.

16. Trovare il luogo dei punti dai quali due cerchi dati si vedono sotto lo stesso angolo.

17. Se sopra due rette ortogonali scorre una retta di data lunghezza; si domanda il luogo dei punti di mezzo delle ipotenuse dei triangoli che ne nascono.

18. Dato un triangolo equilatero, trovare il luogo dei punti tali che la distanza di uno di essi da uno dei vertici del triangolo equilatero sia uguale alla somma delle distanze dello stesso punto dagli altri vertici.

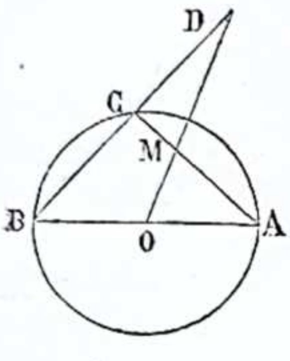


19. Conducendo da un punto A preso nel piano di un cerchio O, una secante AC e le tangenti ai punti B e C, si domanda il luogo dei punti D. (Il luogo è una retta DE, perpendicolare al diametro che passa per il punto A; questa retta chiamasi la polare del punto A, e questo punto è il polo della retta DE).

20. Trovare il luogo dei punti tali che la somma dei

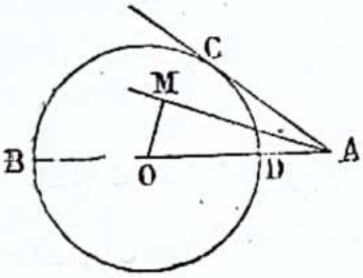
quadrati delle loro distanze dai vertici di un triangolo equilatero sia uguale ad un quadrato dato.

21. Lo stesso problema, sostituendo al triangolo equilatero un poligono regolare qualunque.

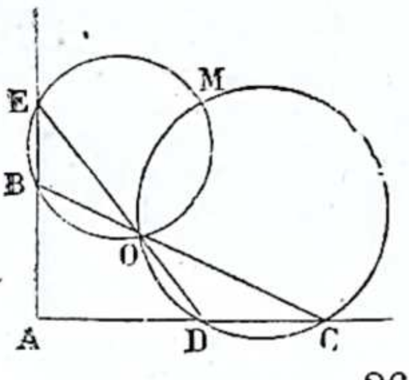


22. Trovare il luogo dei punti tali che la somma dei quadrati delle loro distanze dai lati di un poligono regolare sia uguale ad un quadrato dato.

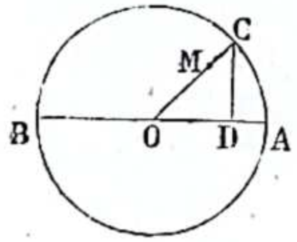
23. Sia AB un diametro del cerchio BO; se si conduce una secante BCD, si prende CD=BC, e congiungesi il punto D col centro del cerchio ed il punto C col punto A; si domanda il luogo del punto M d'intersezione delle rette AC, OD.



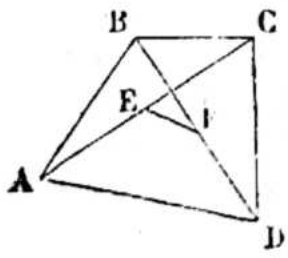
24. Conducendo da un punto qualunque A del prolungamento del diametro BD, la tangente AC, la bisettrice dell'angolo CAO, ed abbassando OM perpendicolare su di AM; si dimanda il luogo del punto M.



25. Se da un punto O dell'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC, conducesi una secante qualunque DE, e si descrivano i cerchi OBE, OCD; si domanda il luogo del punto M d'incontro di questi due cerchi.



26. Essendo dati un cerchio BO ed un diametro AB; se si conduce un raggio qualunque OC, si abbassa CD perpendicolare su di AB e si prende OM=CD: si domanda il luogo del punto M.

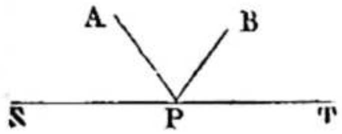


27. In un quadrilatero ABCD siano dati AB, BC, AC e CD; si domanda 1° il luogo geometrico del punto di mezzo della diagonale BD, 2° il luogo geometrico del punto di mezzo della retta EF che congiunge i punti di mezzo delle due diagonali.

28. Trovare il luogo di tutti i punti tali che la somma delle distanze di uno di questi punti a tre rette date sia uguale ad una retta data.

PROBLEMI DA RISOLVERSI.

1. Da un punto dato condurre una retta ugualmente distante da due punti dati.



2. Dati due punti A e B trovare sulla retta ST un punto P tale che gli angoli APS, BPT, siano uguali.

3. Da un punto menare una retta che mentre taglia due parallele, la parte di essa compresa fra queste due parallele sia uguale ad una retta data.

4. Costruire un quadrato, conoscendo la differenza fra la diagonale ed il suo lato.

5. Costruire un triangolo, conoscendo lâ base, l'angolo opposto, e la somma o la differenza degli altri due lati.

6. Con un dato raggio descrivere un cerchio:

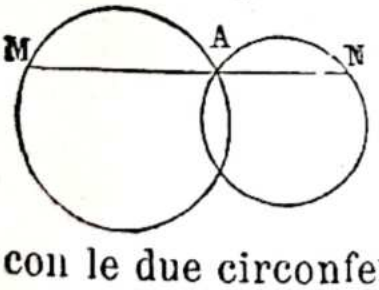
1. Che passi per due punti;
2. Che passi per un punto, e sia tangente ad una retta;
3. Tangente a due rette;
4. Tangente ad una retta e ad un cerchio;
5. Che passi per un punto, e sia tangente ad un cerchio.
6. Tangente a due cerchi.

7. Condurre in un cerchio una retta che passi per un punto dato e tale che la corda intercetta sia uguale ad una retta data.

8. Descrivere un cerchio tangente ad un altro cerchio e ad una retta in un punto dato.

9. Costruire un cerchio tangente ad un altro cerchio in un punto dato e che passi per un altro punto dato.

10. Costruire un triangolo uguale ad un triangolo dato, ed i cui lati passino per tre punti dati.



11. Date due circonferenze che si tagliano, condurre da uno dei punti d'intersezione una retta MN, tale che la distanza MN compresa fra i due punti d' intersezione di questa retta con le due circonferenze, sia uguale ad una retta data.

12. Condurre dal punto A la retta MAN in modo che si abbia $\frac{MA}{AN} = \frac{m}{n}$.

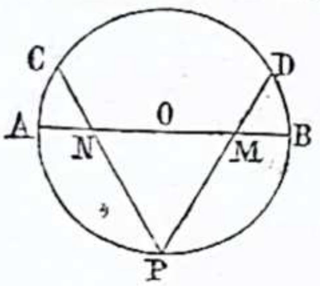
13. Dal punto A condurre una retta MAN, in modo che si abbia AM=AN.

14. Date due circonferenze, condurre una secante parallela ad una data direzione e tale che la somma delle corde sia uguale ad una retta data.

15. Costruire un quadrilatero, conoscendo due angoli opposti, le diagonali ed il loro angolo.

16. Dati due cerchi, trovare un punto tale che le tangenti condotte a questi cerchi siano uguali e facciano un angolo dato.

17. Dati l'arco CD ed il diametro AB, trovare sulla circonferenza un punto P tale, che tirando le rette PD, PC, si abbia OM=ON.



18. Inscrivere in un cerchio un triangolo isoscele, conoscendo la somma della base e dell' altezza.

19. Costruire un triangolo, conoscendo le tre mediane.

20. Costruire un triangolo, conoscendo le tre altezze

21. Costruire un triangolo, conoscendo gli angoli ed il perimetro, ovvero gli angoli e la superficie.

22. Costruire un triangolo conoscendo la base, l'angolo opposto ed il rapporto degli altri due làti.

23. Costruire un triangolo conoscendo la base, l'altezza ed il rettangolo degli altri due lati.

24. Essendo date due rette che per un ostacolo qualunque non possono prolungarsi fino a che s' incontrano, condurre per un punto dato una retta che prolungata andrebbe a passare pel punto d' incontro delle due prime.

25. Trovare in un triangolo un punto tale che congiungendolo coi tre vertici, il triangolo resti diviso in tre triangoli equivalenti.

26. Descrivere un cerchio che passi per un punto e sia tangente a due cerchi dati.

27. Descrivere un cerchio tangente a tre cerchi dati.

28. Costruire un trapezio, conoscendo gli angoli e le diagonali.

29. Date tre circonferenze concentriche, costruire un

triangolo simile ad un triangolo dato, ed i cui tre vertici stiano sulle date circonferenze.

Lo stesso problema, sostituendo alle circonferenze tre rette parallele.

30. Da un punto dato in un angolo condurre una retta tale che il prodotto dei segmenti compresi fra il punto ed i lati dell' angolo sia uguale ad un quadrato dato.

31. Da un punto dato nel piano di un cerchio, condurreuna retta tale che le distanze di questo punto dai punti d' intersezione della retta e del cerchio stiano fra loro nel rapporto di m a n.

32. Per un punto dato e per il centro di un cerchio, far passare una circonferenza tale che la corda comune sia uguale ad una retta data.

APPENDICE AL LIBRO III.

—

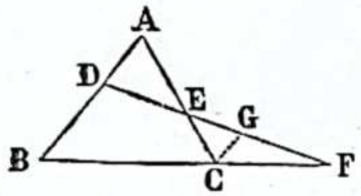
TEORIA DELLE TRASVERSALI

—

Chiamasi *trasversale* una retta che incontra un sistema di più rette.

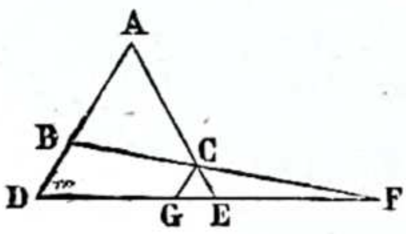
TEOREMA 1.

Se i tre lati di un triangolo, prolungati se occorre, sono tagliati da una trasversale, vi saranno sopra ogni lato due segmenti; e questi sei segmenti sono tali che il prodotto di tre di essi, non avendo alcuna estremità di comune, è uguale al prodotto degli altri tre.



Sia ABC il triangolo proposto, e DEF la trasversale. Dal punto C si tiri una parallela GC al lato AB fino all' incontro della trasversale.

I triangoli simili ADE, ECG danno la proporzione.



$$\frac{AE}{CE}=\frac{AD}{CG},$$

donde

$$AE\times CG=CE\times AD. \qquad (1)$$

I triangoli simili CGF, FBD danno pure la proporzione

$$\frac{CF}{BF}=\frac{CG}{BD},$$

donde si deduce

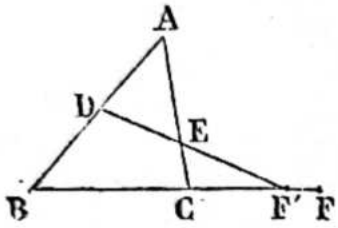
$$CF\times BD=BF\times CG. \qquad (2)$$

Se dunque si moltiplicano le eguaglianze (1) e (2) e si sopprime il fattore comune CG, si avrà

$$AE\times CF\times BD=AD\times BF\times CE.$$

TEOREMA II.

Reciprocamente, se tre punti presi in numero pari sui lati di un triangolo ed in numero dispari sui prolungamenti dei medesimi lati determinano sei segmenti tali che il prodotto di tre di essi non consecutivi sia uguale al prodotto degli altri tre, questi tre punti saranno in linea retta.



Sia ABC il triangolo e siano D, E, F, tre punti tali che

$$AD \times BF \times CE = BD \times CE \times AE; \qquad (1)$$

io dico che i tre punti D, E, F saranno in linea retta; poichè se la retta DE incontrasse BC in un punto F′ differente da F si avrebbe, in virtù del teorema precedente

$$AD \times BF' \times CE = BD \times CF' \times AE \qquad (2)$$

Dividendo l'eguaglianza (1) per l'eguagiianza (2) e sopprimendo i fattori comuni, si avrebbe

$$\frac{BF}{BF'} = \frac{CF}{CF'};$$

donde

$$\frac{BF - CF}{BF' - CF'} = \frac{BF}{BF'}$$

o ancora

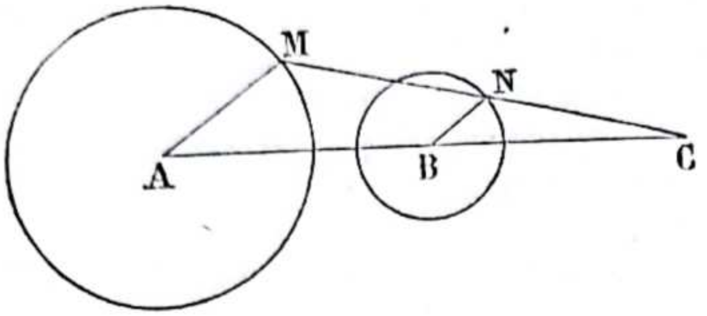
$$\frac{BC}{BC} = \frac{BF}{BF'};$$

proporzione evidentemente assurda meno il caso in cui il punto F′ si confonde con il punto F.

Osservazione. Questo teorema dà spesso il mezzo di riconoscere molto facilmente se tre punti sono in linea retta; andremo a darne un esempio.

LEMMA I.

Date due circonferenze A *e* B, *se si tirano due raggi* AM, BN *paralleli e diretti nello stesso senso, la retta* MN *che congiunge le loro estremità, incontrerà la linea dei centri in un punto* C *che sarà sempre lo stesso, qualunque sia la direzione dei raggi paralleli* AM, BN.



Infatti, i triangoli simili AMC, BNC danno la proporzione

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{BN},$$

donde

$$\frac{AC-BC}{BC}=\frac{AM-BN}{BN},$$

ovvero

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM-BN}{BN}.$$

Ma AB, AM−BN, BN, sono quantità costanti, dunque BC avrà anche un valore costante.

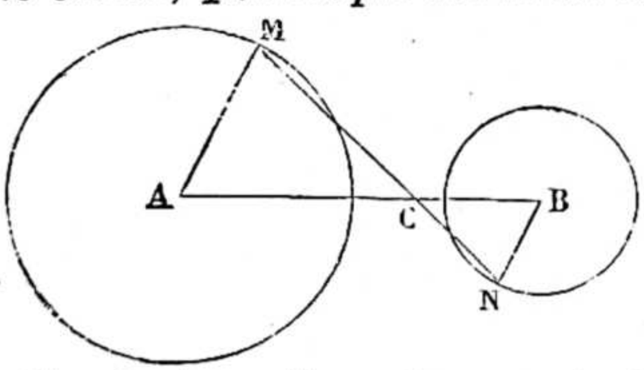
Questo punto C chiamasi *centro di similitudine diretta* delle due circonferenze, e la sua posizione sulla linea dei centri è determinata dalla proporzione

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{BN}.$$

Si vedrebbe inoltre facilmente che questo punto trovasi all'incontro delle tangenti comuni esterne.

LEMMA II.

Date due circonferenze A *e* B, *se si tirano i raggi* AM, BN *paralleli e diretti in senso contrario, la retta* MN *incontrerà la linea dei centri in un punto* C, *che sarà lo stesso, qualunque sia la direzione dei raggi* AM, BN.



Infatti, i triangoli simili AMC, BNC, danno proporzione

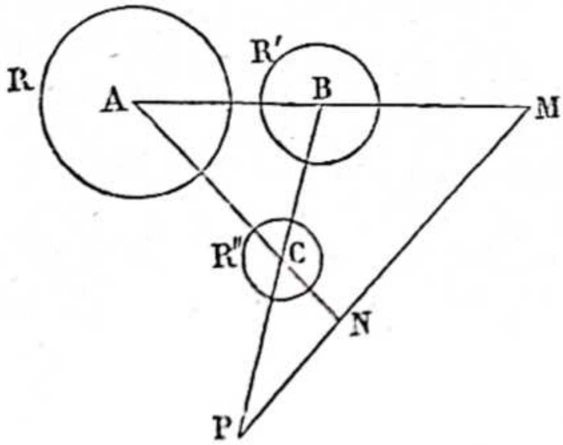
$$\frac{AC}{CB}=\frac{AM}{BN},$$

e quindi il punto C dividendo la retta nel rapporto dei due raggi, esso è costante.

Questo punto chiamasi *centro di similitudine inversa* delle due circonferenze. Si può vedere anche che esso è il punto d' incontro delle tangenti comuni interne.

TEOREMA III.

I centri di similitudine diretta di tre cerchi presi a due a due stanno in linea retta.



Sieno A, B, C i centri dei tre cerchi; R, R', R'' i loro raggi, e sieno M, N, P i centri di similitudine diretta di questi cerchi presi a due a due; si ha

$$\frac{AM}{BM}=\frac{R}{R'}$$

$$\frac{BP}{CP}=\frac{R'}{R''}$$

$$\frac{CN}{AN}=\frac{R''}{R}.$$

Moltiplicando queste proporzioni termine a termine, risulta

$$\frac{AM\times BP\times CN}{BM\times CP\times AN}=\frac{R\times R'\times R''}{R'\times R''\times R}=1;$$

donde

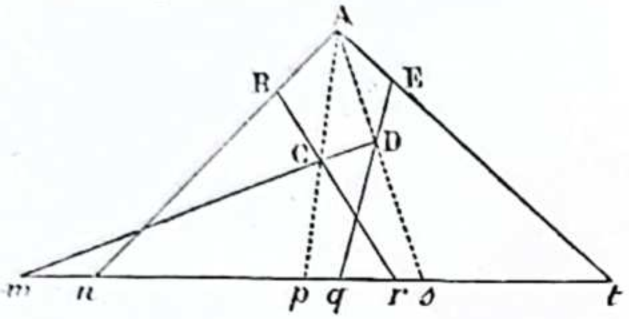
$$AM\times BP\times CN=BM\times CP\times AN.$$

Ma AM, BP, CN sono per rapporto al triangolo ABC tre segmenti che non hanno estremità comuni, e BM, CP, AN formano tre altri segmenti non consecutivi; e però essendo il prodotto dei tre primi uguale al prodotto degli altri tre, i punti M, N, P sono in linea retta (teorema 2.)

Osservazione—Lo stesso teorema avrebbe luogo se si prendessero due centri di similitudine inversa e uno di similitudine diretta.

TEOREMA IV.

Se i lati di un poligono piano, o i loro prolungamenti, *sono tagliati da una trasversale, questa segnerà sopra ciascun lato due segmenti tali che il prodotto di quelli che non hanno estremi comuni sarà uguale al prodotto di tutti gli altri.*



Sia, per esempio, il pentagono ABCDE tagliato dalla trasversale *mnpqr*; io dico che si avrà

$$An \cdot Br \cdot Cm \cdot Dq \cdot Et \cdot = Bn \cdot Cr \cdot Dm \cdot Eq \cdot At \cdot$$

Infatti, da uno dei vertici A del poligono, tiriamo le diagonali a tutti gli altri vertici e prolunghiamole fino all'incontro colla trasversale.

I triangoli ABC, ACD, AED considerati separatamente come tagliati dalla trasversale, daranno

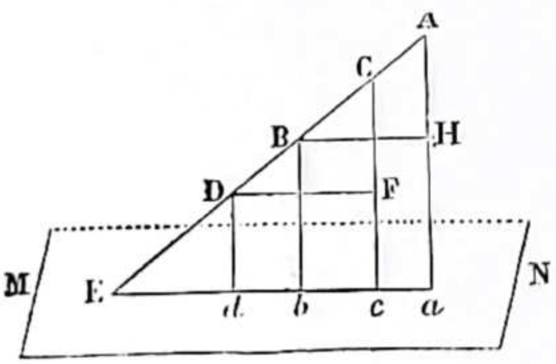
$$An \cdot Br \cdot Cp \cdot = Bn \cdot Cr \cdot Ap \cdot$$
$$Ap \cdot Cm \cdot Ds \cdot = Cp \cdot Dm \cdot As \cdot$$
$$As \cdot Dq \cdot Et \cdot = Ds \cdot Eq \cdot At \cdot$$

Moltiplicando queste eguaglianze e sopprimendo i fattori comuni si avrà

$$An \cdot Br \cdot Cm \cdot Dq \cdot Et \cdot = Bn \cdot Cr \cdot Dm \cdot Eq \cdot At \cdot$$

TEOREMA V.

Se si proiettano su di un piano le diverse parti di una retta, ogni proiezione sarà uguale alla parte di retta corrispondente, moltiplicata per un numero costante per tutte queste rette.



Proiettiamo sul piano MN le parti AB, CD della retta AE, e sieno *ab*, *cd* le loro proiezioni; conduciamo DF e BH parallele ad E*a*.

I triangoli simili CDF, ABH danno la proporzione

$$\frac{DF}{DC} = \frac{BH}{AB};$$

o, per essere dc=DF e ba=BH,

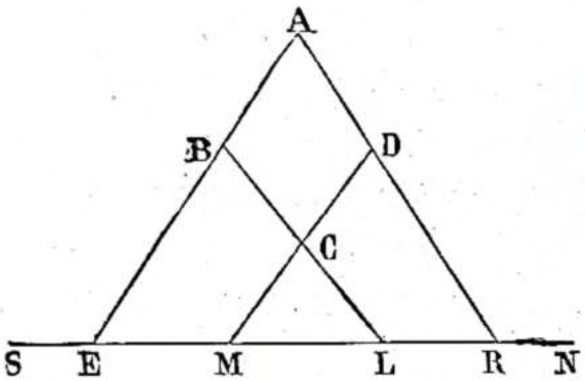
$$\frac{dc}{DC}=\frac{ab}{AB};$$

e però se $\dfrac{dc}{DC}=m$, donde $dc=DC\times m$,

si avrà pure $\dfrac{ab}{AB}=m$, da cui $ab=AB\times m$.

TEOREMA VI.

Se i lati di un poligono storto o i loro prolungamenti, sono tagliati da un piano trasversale, vi saranno sopra ciascun lato due segmenti tali, che il prodotto di tutti quelli che non hanno estremità comune, sarà uguale al prodotto di tutti gli altri (*).



Sia $\alpha\beta\gamma\delta$ il poligono proposto e sieno ε, λ, μ, ρ, i punti dove i lati $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\delta\gamma$, $\alpha\delta$. incontrano il piano trasversale. Proiettiamo questo poligono su di un piano perpendicolare al piano trasversale: e supponiamo che ABCD sia questa proiezione e che SN sia l' intersezione del piano di proiezione col piano trasversale.

Prolungando i lati del poligono ABCD fino all'incontro con SN, si avrà dal teorema IV.

$$AE\cdot BL\cdot CM\cdot DR=BE\cdot CL\cdot DM\cdot AR\cdot \qquad (1)$$

Ma AE e BE sono le proiezioni su di uno stesso piano dei segmenti $\alpha\varepsilon$, $\beta\varepsilon$ del poligono storto ; dunque si avrà (teorema V)

$$AE=\alpha\varepsilon\cdot m; \qquad BE=\beta\varepsilon\cdot m;$$

similmente si ha

$$BL=\beta\lambda\cdot n, \qquad CL=\gamma\lambda\cdot n,$$
$$CM=\gamma\mu\cdot p, \qquad DM=\delta\mu . p,$$
$$DR=\delta\rho\cdot r, \qquad AR=\alpha\rho\cdot r.$$

(*) Un poligono si chiama *storto* allorchè non ha tutti i suoi vertici situati in un medesimo piano.

N. del Trad.

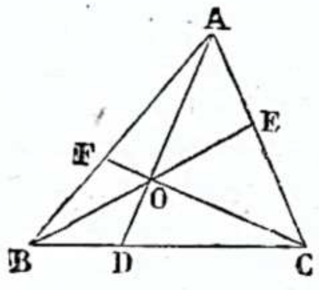
Sostituendo nell' eguaglianza (1) in luogo di AE , BE , BL , CL...., i loro valori , e dividendo i due membri per *mnpr*, si ottiene

$$\alpha\varepsilon.\beta\lambda.\gamma\mu.\delta\rho=\beta\varepsilon.\gamma\lambda.\delta\mu.\alpha\rho,$$

ciò che bisognava dimostrare.

Teorema VII.

Se si congiunge un punto O *preso nel piano di un triangolo* ABC,*coi tre vertici di questo triangolo; queste rette determineranno sui lati del triangolo , o sui loro prolungamenti sei segmenti tali che il prodotto* AF. BD. CE *dei tre segmenti non consecutivi , è uguale al prodotto* FB. DC. AE *degli altri tre.*

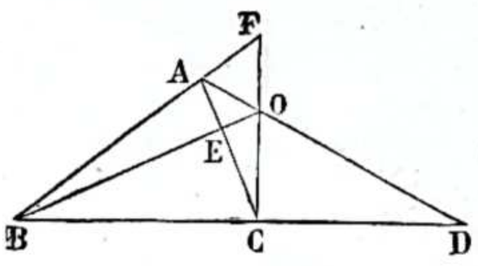


In effetti , il triangolo ABD , tagliato dalla trasversale FC , dà l' eguaglianza

$$AF.BC.DO=BF\ DC.AO. \qquad (1)$$

Similmente , il triangolo ADC , tagliato dalla trasversale BE, ci dà

$$AO.BD.EC=OD.BC.AE. \qquad (2)$$

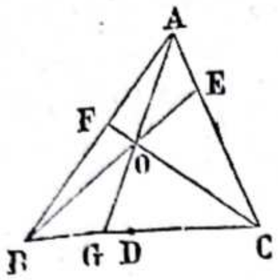


Moltiplicando membro a membro le eguaglianze (1) e (2) e sopprimendo i fattori comuni , si avrà

$$AF.BD.EC=BF.DC.AE.$$

Teorema VIII.

Reciprocamente , se tre punti F, D, E *in numero dispari sui lati di un triangolo* ABC *ed in numero pari sui prolungamenti, sono tali che il prodotto di tre segmenti non consecutivi* AF. BD. EG *è uguale al prodotto degli altri tre, le rette che congiungono questi punti ai vertici opposti, si taglieranno in uno stesso punto.*

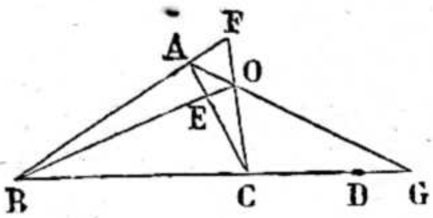


Infatti, se la retta AD non passa per il punto d' incontro O delle rette CF, BE, si potrà sempre tirare la retta AO che incontra BC nel punto G; ed allora si avrebbe, in virtù del teorema precedente

$$AF.BG.EC=BF.GC.AE; \qquad (1)$$

ma per ipotesi si ha pure

$$AF.BD.EC=BF.DC.AE; \qquad (2)$$

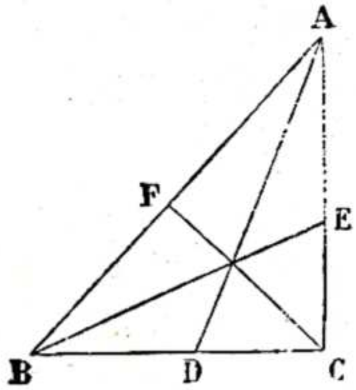


e quindi, dividendo membro a membro, dovrebbe essere

$$\frac{BG}{BD}=\frac{GC}{DC} \qquad \frac{BG}{GC}=\frac{BD}{DC}$$

il che non può aver luogo se non quando il punto G si confonde col punto D.

Corollario. Le bisettrici AD, BE, CF degli angoli di un triangolo ABC, si tagliano in uno stesso punto. Infatti, essendo AD la bisettrice dell' angolo BAC, si ha



$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

similmente si ha

$$\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC}$$

$$\frac{CE}{AE}=\frac{BC}{AB}$$

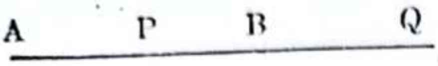
Che moltiplicate membro a membro, danno

$$\frac{BD.AF.CE}{DC.FB.AE}=1 \text{ o } BD.AF.CE=DC.FB.AE.$$

Dunque, le bisettrici debbono concorrere in uno stesso punto.

Si dimostrerebbe similmente che le tre altezze di un triangolo concorrono in uno stesso punto e che avviene lo stesso per le rette che congiungono i vertici di un triangolo con i punti di mezzo dei lati opposti.

DEFINIZIONI.



I. Una retta AB è divisa *armonicamente* nei punti P e Q, allorchè

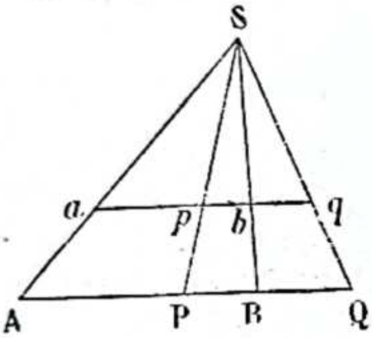
$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{BQ};$$

e siccome si ha pure

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{PB}{BQ}.$$

Così la retta PQ è anche divisa armonicamente nei punti A e B.

II. I quattro punti A, B, P, Q, si dicono *armonici* ed A e B si dicono *coniugati*, come pure P e Q.

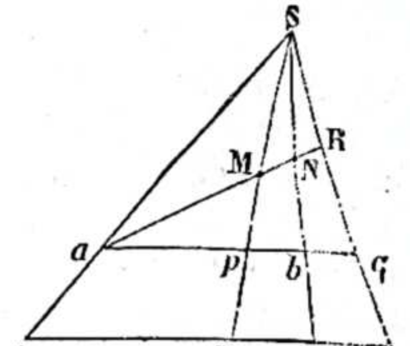


III. Se si congiungono i quattro punti armonici A, B, P, Q con un punto S, si avrà un sistema di quattro rette SA, SB, SP, SQ, che prende il nome di *fascio armonico*.

È evidente che ogni retta *apbq* parallela ad APBQ, rimane divisa armonicamente dal fascio.

TEOREMA IX.

Ogni retta aMNR *che taglia un fascio armonico* SABPQ, *è divisa armonicamente da questo fascio, e si ha*



$$\frac{aM}{MN}=\frac{aR}{NR}.$$

In effetti, se dal punto a si conduce aq parallela ad AQ e si considera il triangolo aNb tagliato dalla trasversale Sp, si ha

$$aM.pb.SN=MN.ap.Sb;$$

donde

$$\frac{aM}{MN}\cdot\frac{pb}{ap}\cdot\frac{SN}{Sb}=1. \qquad (1)$$

Lo stesso triangolo aNb, tagliato dalla trasversale Sq, ci dà —

$$aR.bq.SN=NR.aq.Sb;$$

donde

$$\frac{aR}{NR} \cdot \frac{bq}{aq} \cdot \frac{Sb}{SN} = 1. \qquad (2)$$

Paragonando le eguaglianze (1) e (2), si ricava

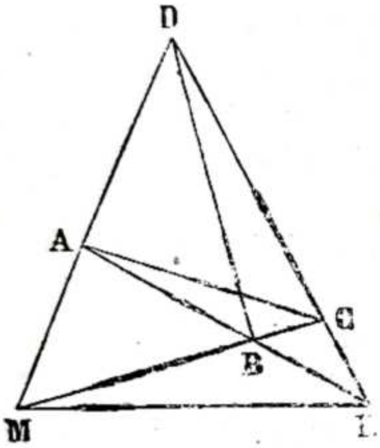
$$\frac{aM}{MN} \cdot \frac{pb}{ap} \cdot \frac{SN}{Sb} = \frac{aR}{NR} \cdot \frac{bq}{aq} \cdot \frac{SN}{Sb}.$$

Ma la retta ab essendo divisa armonicamente nei punti p e q, dà pure

$$\frac{pb}{ab} = \frac{bq}{aq}$$

dunque

$$\frac{aM}{MN} = \frac{aR}{NR}$$

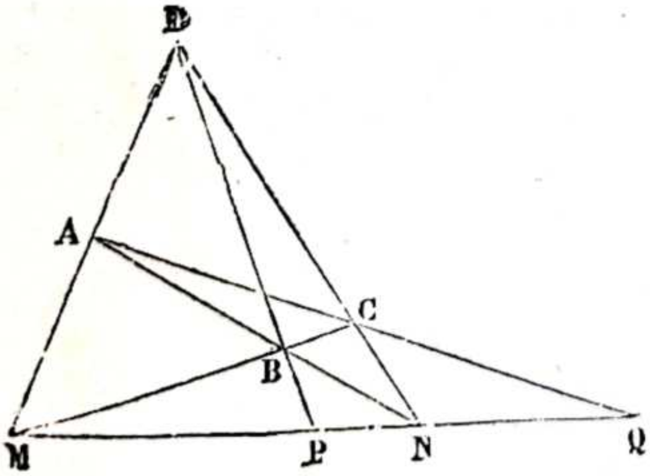


DEFINIZIONE

Se si prolungano i lati opposti di un quadrilatero ABCD fino al loro incontro in M ed in N, la retta MN dicesi la *terza diagonale* del quadrilatero, ed il quadrilatero semplice ABCD riunito al quadrilatero non convesso DMBN. forma ciò che chiamasi *quadrilatero completo*.

TEOREMA X.

Ogni diagonale di un quadrilatero completo è divisa armonicamente dalle altre due.



Sia ABCDMN il quadrilatero completo, e siano AC, BD, MN le sue diagonali; io dico che una di esse, p. e. MN, è tagliata armonicamente dalle altre due nei punti P e Q.

Infatti il triangolo DMN, tagliato dalla trasversale ACQ ci dà

$$QM.NC.DA = QN.CD.AM;$$

donde

$$\frac{QM}{QN} \times \frac{NC}{CD} \times \frac{DA}{AM} = 1. \qquad (1)$$

Nello stesso triangolo, le rette PD, CM, NA, partendo dai vertici e tagliandosi in B, danno

$$PM.NC.DA = PN.CD.AM$$

donde

$$\frac{PM}{PN} \cdot \frac{NC}{CD} \cdot \frac{DA}{AM} = 1. \qquad (2)$$

Paragonando le eguaglianze (1) e (2) se ne deduce

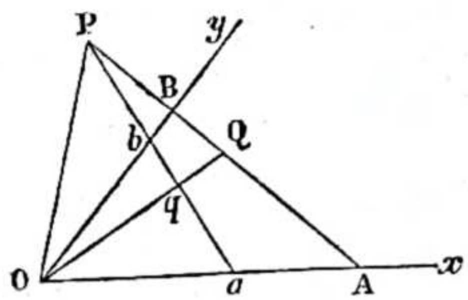
$$\frac{PM}{PN} = \frac{QM}{QN}.$$

Si dimostrerebbe similmente che ciascuna delle diagonali AC, BD è divisa armonicamente dalle altre due.

DEL POLO E DELLA POLARE PER RAPPORTO AD UN SISTEMA DI DUE RETTE.

TEOREMA XI.

Date due rette Oy, Ox, *ed un punto* P, *se si conduce da questo punto una secante* PAB, *e si determina il coniugato armonico* Q *del punto* P, *per rapporto alla retta* AB; *facendo variare la secante* PAB, *il punto* Q *descriverà la retta* OQ *che è il quarto ramo del fascio armonico di cui* OP, OA, OB *sono gli altri tre.*



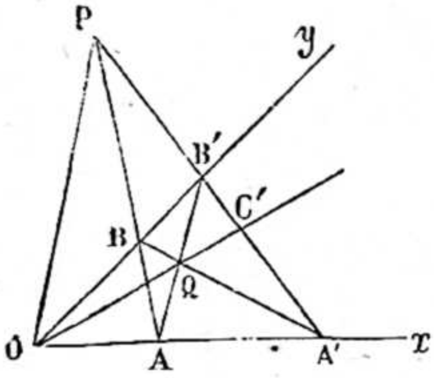
Infatti, se si tirano le rette OP, OQ, la figura OPBQA, formando un fascio armonico, ogni secante *Pbqa* resterà divisa armonicamente dal fascio e quindi ogni punto coniugato armonico di P si trova sulla retta OQ.

Questa retta OQ è chiamata *polare* del punto P, per rapporto alle due rette Oy, Ox. (*)

(*) Volendo definire nettamente la polare di un punto per rapporto al sistema di due rette, diremo essere *il luogo dei*

TEOREMA XII.

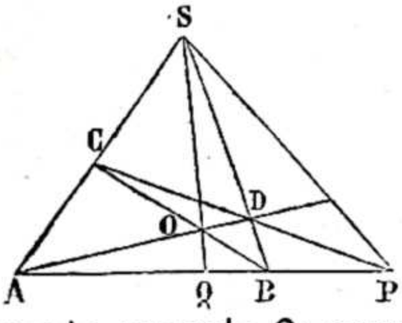
Date due rette Oy, Ox, *ed un punto* P, *se dal punto si conducono due secanti* PBA, P′B′A′, *e le due rette* BA′, B′A; *il punto d' incontro* Q *di queste ultime rette descriverà, nel far variar la secante, una retta* OQ *che è la polare del punto* P *per rapporto alle prime due rette* Oy, Ox.



Infatti consideriamo il quadrilatero completo OBQA, B′A′; la diagonale B′A′ essendo tagliata armonicamente dalle altre due OQ, AB nei punti C′ e P, ne segue che le quattro rette OP, Oy, OC′, Ox formano un fascio armonico, giacchè la retta PB′C′A′ è divisa armonicamente, e la retta OC′ è la polare del punto P, per rapporto alle due rette Oy, Ox; ma ogni punto Q del luogo geometrico è situato sopra OC′; dunque, il luogo geometrico cercato è la polare del punto P, per rapporto alle due rette Oy, Ox.

Scolio. Da quanto precede deducesi il modo di risolvere solamente con la riga il seguente problema:

Data una retta AB ed un punto di essa P, trovare il coniugato armonico di P, per rapporto alla retta AB.



Per far ciò si congiunga un punto qualunque S coi tre punti dati A, B, P; si tiri dal punto P una retta qualunque PDC, si conducano le rette AD e BC che si tagliano in O, e si congiunga SO; quest'ultima retta prolungata incontrerà AB nel punto cercato Q: come risulta evidentemente dal teorema ora dimostrato.

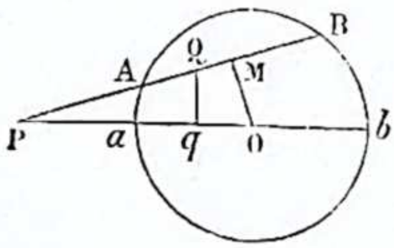
punti coniugati armonici del dato punto rispetto alle medesime rette. *N. del Trad.*

DEL POLO E DELLA POLARE PER RAPPORTO AL CERCHIO.

—

Teorema XIII.

Se da un punto P *preso nel piano di un cerchio, si tira una secante qualunque* PAB, *e si determina il coniugato armonico* Q *del punto* P, *per rapporto ad* AB, *il luogo geometrico del punto* Q *quando si fa variare la secante* PAB, *è una linea retta*, (Questa retta è chiamata *la polare del punto* P *per rapporto al cerchio*, ed il punto P ne è *il polo*).



Tiriamo il diametro che passa per il punto P, e costruiamo il coniugato armonico q del punto P per rapporto al diametro ab; congiungiamo Qq, ed abbassiamo OM perpendicolare su di AB.

I quattro punti armonici P, A, Q, B, danno la proporzione

$$\frac{PB}{PA}=\frac{QB}{QA},$$

donde

$$\frac{PB+PA}{PA}=\frac{QB+QA}{QA};$$

e siccome

$$QB+QA=AB=PB-AP,$$

così si ricava

$$\frac{PB+PA}{PA}=\frac{PB-PA}{QA},$$

ovvero

$$\frac{PB+PA}{PB-PA}=\frac{PA}{QA}.$$

Eseguendo il componendo si ha

$$\frac{PB+PA+PB-PA}{PB+PA}=\frac{PA+QA}{PA},$$

da cui

$$\frac{PB+PA}{2PB}=\frac{PA}{PA+QA}=\frac{PA}{PQ}.$$

Ma il punto M essendo il punto di mezzo di AB, si ha

$$PA+PB=2PM;$$

dunque la proporzione (1) diviene

$$\frac{2PM}{2PB}=\frac{PA}{PQ} \quad \text{o} \quad \frac{PM}{PB}=\frac{PA}{PQ};$$

donde

$$PQ\times PM=PB\times PA. \qquad (1)$$

Si dimostrerebbe assolutamente nell'istesso modo che

$$Pq\times PO=Pa\times Pb.$$

Ma

$$PA\times PB=Pa\times Pb;$$

dunque

$$PQ\times PM=Pq\times PO,$$

o

$$\frac{PQ}{Pq}=\frac{PO}{PM}$$

Da ciò segue che i due triangoli PQq, PMO avendo un angolo uguale P compreso fra lati proporzionali, sono simili; e siccome l'angolo PMO è retto, così l'angolo PqQ essendo anche tale, ne segue che il luogo geometrico descritto dal punto Q è una retta perpendicolare a Pab nel punto q coniugato armonico del punto P per rapporto al diametro ab.

Corollario. La posizione del punto q è determinata dall'eguaglianza

$$Pq\times PO=Pa\times Pb; \qquad (1)$$

ora

$$Pa\times Pb=(PO+Oa)\,(PO-Oa(=\overline{PO}^2-\overline{Oa}^2,$$

ed è inoltre

$$Pq=PO-Oq,$$

dunque la relazione (1) diviene

$$(PO-Oq)\,PO=\overline{PO}^2-\overline{Oa}^2,$$

o

$$PO \times Oq = \overline{Oa}^2.$$

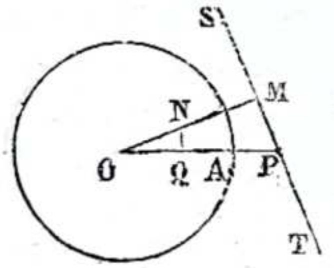
Quest' ultima relazione mostra che se PO divenisse uguale a Oa, Oa sarebbe uguale ad Oq; dunque la polare di un dei due punti P e Q passa per l' altro punto.

Risulta anche da questa relazione che se il punto P si avvicina al punto a, il punto q si avvicina ugualmente al medesimo punto; e se PO fosse uguale ad Oa, Oq sarebbe pure uguale ad Oa; dunque *la polare di un punto della circonferenza è la tangente in questo punto.*

Se PO diviene più piccolo di Oa, Oq diverrà più grande del raggio, e la polare è esterna al cerchio; infine se PO divenisse uguale a zero, Oq diverrebbe infinitamente grande; il che dimostra che la polare del centro trovasi all'infinito.

TEOREMA XIV.

Allorchè un punto P *si muove su di una retta* ST, *la polare di questo punto passa costantemente per il polo della retta.*



Tiriamo la retta OP, e determiniamo il punto Q in modo che si abbia

$$OQ \times OP = \overline{OA}^2;$$

la retta QN, perpendicolare ad OP, sarà la polare del punto P; ora io dico che essa conterrà il polo della retta ST.

Abbassiamo OM perpendicolarmente sopra ST, la quale taglia NQ in N; il quadrilatero MNQP è inscrittibile poichè due angoli opposti sono retti. Si avrà dunque

$$OM \times ON = OP \times OQ,$$

e siccome

$$OQ \times OP = \overline{OA}^2;$$

così si avrà

$$OM \times ON = \overline{OA}^2;$$

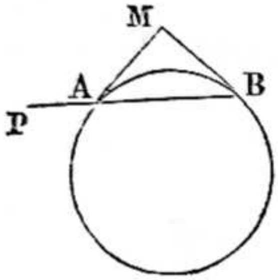
e però il punto N è il polo di ST.

Corollario I. Risulta dalla dimostrazione precedente *che se la retta* ST *gira intorno al punto* P, *il polo di questa retta percorre la polare del punto* P.

Corollario II. La retta che congiunge i poli di due rette è la polare del loro punto d' incontro. Poichè secondo il corollario I, il polo di questa retta deve trovarsi contemporaneamente sulle due rette date.

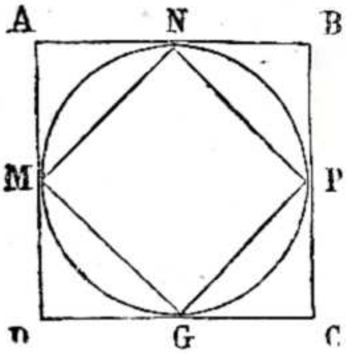
Corollario III. Se due poligoni ABCD, abcd *di uno stesso numero di lati, tracciati nel piano di una circonferenza sono tali che i vertici* A, B, C, D *dell' uno sono i poli dei lati dell' altro, reciprocamente i vertici* a, b, c, d *del secondo saranno i poli dei lati del primo.* Per questa proprietà, i due poligoni vengono chiamati *polari reciproci* l'uno dell' altro.

PROBLEMA XV.



Se da un punto P *preso nel piano di un cerchio, si tira una secante* PAB, *e le due tangenti* AM, BM *ai punti* A *e* B, *il luogo geometrico descritto dal punto* M *al variare della secante, sarà la polare del punto* P.

Infatti la tangente AM è la polare del punto A, la tangente BM è altresì la polare del punto B, dunque il punto d' incontro M delle due tangenti è il polo della retta AB; ma il punto P sta sulla retta AB; e però la polare di questo punto passa per il punto M.

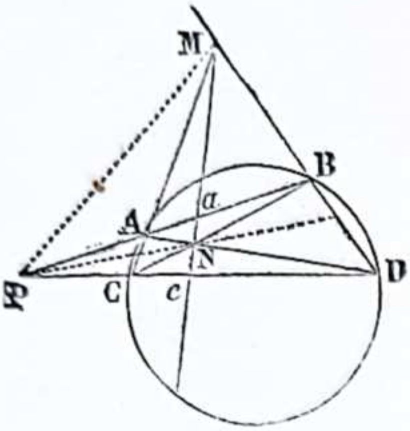


Corollario I. La polare di un punto M preso fuori del cerchio, è la corda dei contatti AB dell'angolo circoscritto che ha questo punto per vertice.

Corollario II. Se un poligono ABCD è circoscritto al cerchio, il poligono MNPG, formato coll'unire i punti di contatto consecutivi, sarà il polare reciproco di ABCD.

PROBLEMA XVI.

Se da un punto P *preso nel piano di un cerchio, si tirano le secanti* PAB, PCD *e si conducono le rette* AC, BD *che si tagliano in* M, *non che le rette* BC, AD, *che si tagliano in* N, *il luogo geometrico dei punti* M *o* N *allorchè si fanno variare le secanti* PAB, PCD, *è una retta che è la polare del punto* P.



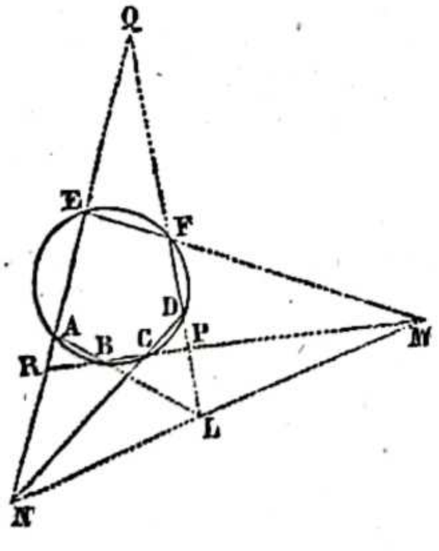
Tiriamo la retta MN che taglia AB, CD in a, c; in virtù del teorema del quadrilatero completo MANB CD le secanti AB, CD saranno tagliate armonicamente, la prima in P, a e la seconda in P, c; la retta ac è dunque la polare del punto P. Ma i punti M e N stanno sopra questa retta, e però, il luogo geometrico dei punti M o N è la polare del punto P.

Osservazione I. Se il punto N fosse interno alla circonferenza, conducendo due secanti qualunque CB, AD e congiungendo AC, BD da una parte ed AB, CD dall'altra, si tratterebbe di trovare il luogo geometrico del punto M o del punto P: ora io dico, che questo luogo sarà sempre la polare del punto N. Infatti si è veduto che il punto P è il polo della retta MN; per la stessa ragione il punto M è il polo della retta PN, dunque il punto d'incontro delle rette MN, PN è il polo della retta PM.

Osservazione II. Il teorema precedente fornisce il mezzo di costruire la polare di un punto impiegando solamente la riga.

Se il punto dato P è esterno alla circonferenza, la polare MN è la corda de'contatti dell'angolo circoscritto il cui vertice è in P. L'inserzione di questa retta con il cerchio darà dunque i punti di contatto delle tangenti che si possono condurre alla circonferenza dal punto P.

TEOREMA XVII.



In ogni esagono inscritto, i punti d'incontro dei lati opposti sono in linea retta.

Prolunghiamo tre lati non consecutivi BC, DF, AE dell'esagono; questi lati, intersecandosi, determinano il triangolo QRP che è tagliato dalle trasversali EFM, ABL, DCN; si hanno dunque, in virtù del teorema fondamentale delle trasversali, le eguaglianze.

$$QE\times RM\times PF=RE\times PM\times QF\ ,$$
$$QA\times RB\times PL=RA\times PB\times QL\ ,$$
$$QN\times RC\times PD=RN\times PC\times QD.$$

Moltiplicandole membro a membro ed osservando che

$$QE\times QA=QF\times QD\ ,\qquad PF\times PD=PB\times PC,$$

e

$$RB\times RC=RE\times RA,$$

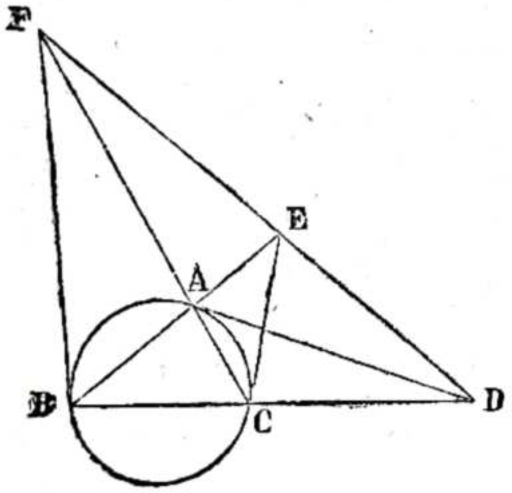
si ricava

$$RM\times QN\times PL=RN\times PM\times QL.$$

Dunque i tre punti M, N, L si trovano sopra una stessa linea retta che è una trasversale del triangolo QRP.

Osservazione I. Il teorema precedente sarebbe ugualmente vero se l'esagono inscritto non fosse convesso.

Osservazione II. Il teorema avendo luogo qualunque sia la grandezza dei lati, s'applica anche quando alcuni lati dell'esagono si riducono a zero; e siccome essi diventano tangenti alla circonferenza, così ne risulterebbero parecchi altri teoremi, di cui il lettore formerà facilmente gli enunciati. Noi ci limiteremo a citare il seguente:

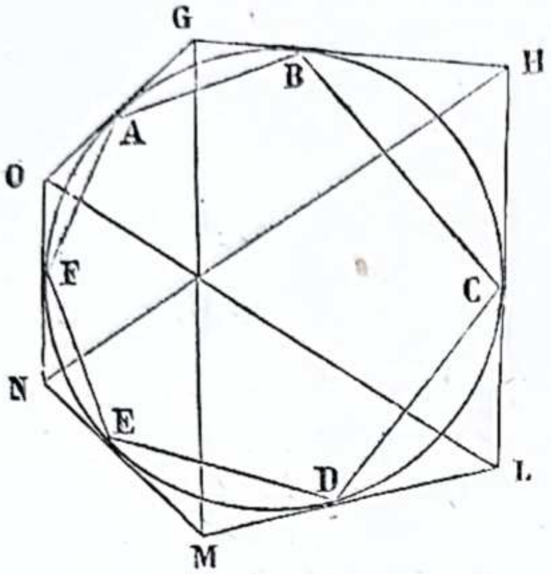


Se s' inscrive un triangolo in un cerchio, i punti d'incontro delle tangenti in ciascun vertice con i lati opposti, sono in linea retta.

TEOREMA XVIII.

In ogni esagono circoscritto ad una circonferenza, le diagonali che congiungono i vertici opposti si tagliano in uno stesso punto.

Sia GHLMNO l'esagono circoscritto; congiungendo i punti di contatto consecutivi, si formerà un esagono inscritto ABCDEF, che è il polare reciproco di GHLMNO.



Il punto d' incontro dei lati BC, EF, che indicheremo con P, sarà il polo della diagonale HN; similmente, il punto d'incontro dei lati AB, GD, che indicheremo con R, sarà il polo della retta GM; in fine il punto d' incontro delle rette AF, CD, che indicheremo con S, sarà il polo della retta GL. Ma i tre punti P, R, S si trovano sopra una stessa retta; dunque le loro polari HN, GM, OL si tagliano in uno stesso punto.

—

APPENDICE AL LIBRO IV.

DEFINIZIONI.

I. Chiamasi *massimo* la quantità più grande di tutte quelle della stessa specie; *minimo* la più piccola.

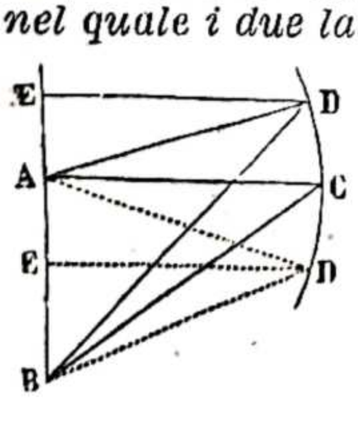
Così il diametro del cerchio è un *massimo* fra tutte le rette che congiungono due punti della circonferenza, e la perpendicolare è un *minimo* fra tutte le rette condotte da un punto dato ad una retta data.

II. Chiamansi figure *isoperimetre* quelle che hanno eguali perimetri.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Di tutti i triangoli formati con due lati dati che fanno fra loro un angolo qualunque, il massimo è quello nel quale i due lati dati fanno un angolo retto.



Siano i due triangoli BAC, BAD, che hanno il lato AB di comune, ed il lato AC=AD; se l' angolo BAC è retto, io dico che il triangolo BAC sarà più grande del triangolo BAD, nel quale l'angolo in A è acuto o ottuso.

Infatti questi due triangoli avendo la stessa base stanno fra loro come le altezze AC, DE, ma la perpendicolare DE è più corta dell'obbliqua AD o della sua uguale AC; dunque il triangolo BAD è minore di BAC.

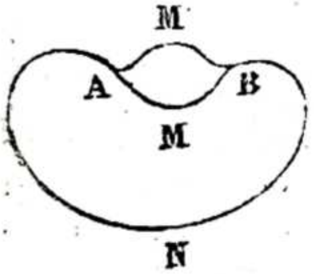
PROPOSIZIONE II.

Teorema.

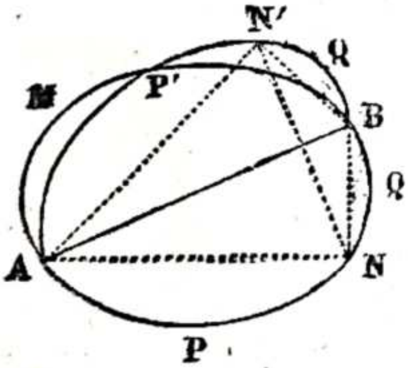
Il cerchio è maggiore di ogni figura piana isoperimetra.

I. È evidente primieramente che vi sono infinite figure che hanno lo stesso perimetro, quantunque presentino forme ed aree diverse; ed è pure evidente che le suddette aree non possono crescere indefinitamente. Da ciò ricavasi che fra le figure di un dato perimetro vi esistono sempre uno o più massimi.

2. Ogni figura che comprende un'area massima in un perimetro dato, è convessa.



Poichè, se AMBN è una linea chiusa non convessa; e si fa girare la parte rientrante AMB intorno ai punti A e B in modo che essa occupi la posizione AM'B, la figura AM'BN avendo lo stesso perimetro della prima comprenderà un'area maggiore.



3. Sia AMBN una figura massima per un perimetro dato, io dico che ogni retta AB che divide il perimetro in due parti uguali, dividerà anche l'area in due parti equivalenti; poichè se la porzione ANB fosse più grande di AMB, facendo girare ANB intorno ad AB, in modo da occupare la posizione AN'B, la figura AN'BN avrebbe lo stesso perimetro di AMBN, ed un'area maggiore; e quindi AMBN non sarebbe un massimo.

Risulta ancora da ciò che precede che se AMBN è una figura massima, AN'BN è anche tale, e si vede che in quest'ultima figura, ogni perpendicolare NN' ad AB rimane divisa da questa retta in due parti uguali, in modo che i triangoli ANB, AN'B risultano uguali.

Ciò posto, se gli angoli ANB, AN'B non fossero retti, si potrebbero aumentare simultaneamente le aree dei triangoli ANB, AN'B, senza alterare nè la grandezza dei lati AN, NB, AN', N'B, nè quella dei segmenti APN,NQB, AP'N', N'Q'B, cangiando solo la base comune AB; ma in tal caso l'area della figura aumenterebbe indipendentemente dal perimetro il che è contrario all'ipotesi; dunque gli angoli N,N' essendo retti, debbono essere inscrittibili in un semicerchio; ed essendo il punto N preso comunque sulla curva ANB,ne segue che questa linea è una semicirconferenza.

Da ciò risulta, che se una retta divide la figura massima in due metà, ciascuna di queste metà sarà un semicerchio, e però l'intera figura è un cerchio.

PROPOSIZIONE III.

Teorema.

Fra tutte le figure piane che hanno la stessa area, il cerchio ha il perimetro minore.

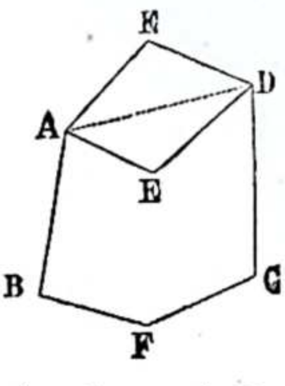
Poichè se una figura qualunque di cui l'area è A, avesse un perimetro minore del cerchio della stessa area, si potrebbe, col teorema precedente, trasformarla in un cerchio dello stesso perimetro e di un'area D>A.

Questo secondo cerchio avrebbe dunque un'area maggiore del primo ed un perimetro minore, il che è assurdo.

PROPOSIZIONE IV.

Teorema.

Ogni poligono di m *lati che comprende una superficie massima di un perimetro dato, è convesso.*

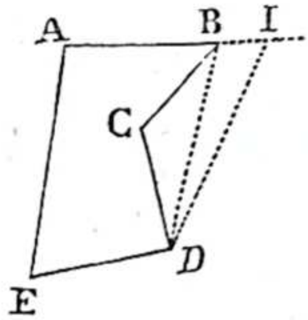


Infatti sia AEDCFB un poligono di *m* lati, che contiene un angolo rientrante AED; se si fa girare la parte rientrante AED intorno alla retta AD, in modo che essa occupi la posizione AE'D, il poligono AE'DCFB avrà lo stesso perimetro del primo ed una superficie maggiore; il poligono AEDCFB non può dunque essere *massimo* fra tutti quelli dello stesso perimetro e dello stesso numero di lati.

PROPOSIZIONE V.

LEMMA.

Ogni poligono ABCDE *che contiene un angolo rientrante può essere trasformato in un poligono di una superficie maggiore avente lo stesso perimetro e un lato di meno.*



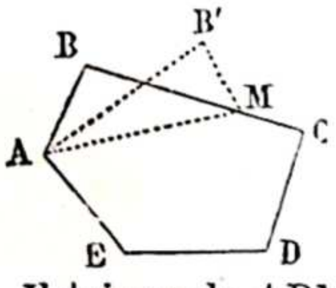
Poichè se si prolunga AB e si congiungono tutti i punti di questo prolungamento col punto D, la somma BI+ID crescendo in modo continuo da BD fino all' infinito, vi sarà un punto I nel quale si ah BI+ID=BC+CD, ed allora si ottiene un poligono ABIDE evidentemente maggiore di ABCDE che ha lo stesso perimetro ed un lato di meno.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Di tutti i poligoni isoperimetri e di uno stesso numero di lati, il poligono regolare è il maggiore.

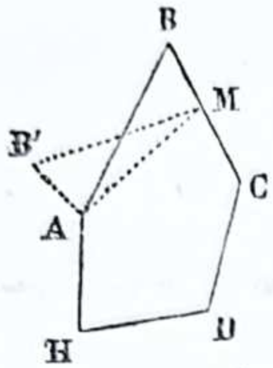
Andremo successivamente a dimostrare che se un poligono non ha tutti i suoi lati uguali ed i suoi angoli uguali, non può esser massimo fra gl' isoperimetri di uno stesso numero di lati.



1. Supponiamo che il poligono ABCDE abbia m lati, e sia AB<BC. Prendiamo su di BC il punto M tanto vicino a C da essere anche AB < BM. Facciamo in seguito l'angolo AMB'=BAM; prendiamo MB'=AB e congiungiamo AB'.

Il triangolo ABM essendo uguale al triangolo AB'M, si potrà al poligono ABCDE sostituire il poligono AB'MCDE, senza cambiare nè il perimetro nè la superficie; solamente questo nuovo poligono avrebbe $m+1$ lati ed un angolo rientrante, poichè AB essendo più piccolo di BM, sarebbe l' angolo BMA < BAM o di B'MA.

Ma questo poligono può essere trasformato in un altro di m lati, dello stesso perimetro e di una superficie maggiore, dunque ABCDE non sarebbe il maggiore fra gl'isoperimetri di m lati.



2. Supponiamo che nel poligono ABCDH di m lati, si abbia l'angolo $A>B$. Prendiamo un punto M abbastanza vicino a B perchè l'angolo MAH risulti maggiore di AMC.

Facciasi pure l'angolo $MAB'=AMB$, prendasi $AB'=MB$ e congiungasi MB'; il triangolo MAB' è uguale a ABM, e il poligono $AB'MCDH$ ha la stessa superficie e lo stesso perimetro di ABCDH; ma esso ha $m+1$ lati ed un angolo rientrante, perchè la somma $AMC+AMB$, essendo uguale a 2 retti, si ha $MAH+MAB'>2$ retti; dunque questo poligono potrà essere trasformato in un altro di m lati, dello stesso perimetro e di un' area maggiore, e perciò ABCDH non sarà un *massimo*.

PROPOSIZIONE VII.

Teorema.

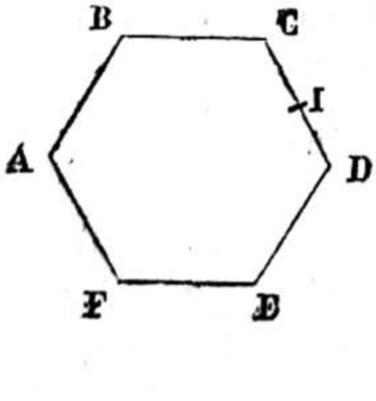
Di tutti i poligoni della stessa superficie e di uno stesso numero di lati, il poligono regolare ha il perimetro minore.

Poichè se un poligono irregolare di m lati, di cui l'area è A avesse un perimetro minore di quello del poligono regolare della stessa area e dello stesso numero di lati, si potrebbe trasformarlo in un poligono regolare isoperimetro di m lati, avente un area $B>A$; questo secondo poligono regolare avrebbe dunque lo stesso numero di lati del primo, con un perimetro minore e con un'area maggiore, il che è assurdo.

PROPOSIZIONE VIII.

Teorema.

Di due poligoni regolari dello stesso perimetro, quello che ha più lati è il maggiore.



Infatti, sia ABCDEF un poligono regolare di 6 lati. Se si prende un punto I sopra uno dei lati, si può considerare questo poligono come un poligono irregolare di 7 lati nel quale i lati IC, ID farebbero un angolo uguale a due retti; ma questo poligono è minore del poligono regolare di 7 lati e dello stesso perimetro; dunque, etc.

LIBRO V.

DEL PIANO E DELLA RETTA CONSIDERATI NELLO SPAZIO.

Definizioni.

I. Una retta è *perpendicolare ad un piano* allorchè è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo *piede* nel piano (prop. 4). Reciprocamente, il piano è perpendicolare alla retta.

Il *piede* della perpendicolare è il punto in cui questa retta incontra il piano.

II. Una retta è *parallela ad un piano* allorchè non può incontrarlo, a qualunque distanza si prolunghi l'una e l' altro. Reciprocamente, il piano è parallelo alla retta.

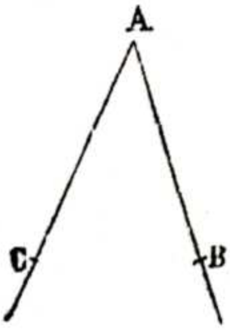
III. Due *piani* sono *paralleli* fra loro, allorchè non possono incontrarsi a qualunque distanza essi si prolunghino.

IV. Per rappresentare i piani nelle figure, si è obbligati ad assegnarli dei limiti, ma ciò non toglie che bisogna sempre concepirli indefiniti.

V. Nella geometria dello spazio si chiama *luogo geometrico* quella serie di punti che soddisfano ad una o due condizioni date; e quindi il luogo geometrico è una superficie o una linea secondo che i punti debbono adempiere ad una o a due condizioni.

PROPOSIZIONE I.

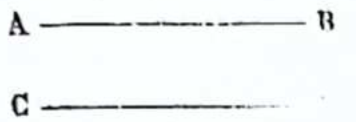
Teorema — *Per due rette che si tagliano si può far sempre passare un piano e non se ne può far passare che un solo.*



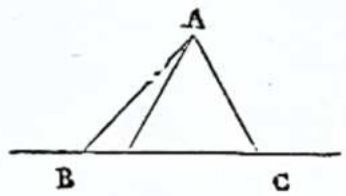
Siano AB, AC due rette che si tagliano, se si concepisce un piano sul quale si trovi la retta AB e si fa girare questo piano intorno ad AB fino a che passi per il punto C, allora la retta AC avendo due dei suoi punti nel piano, vi sarà interamente compresa, e la posizione del piano sarà determinata nello spazio.

Se si continua a far girare il piano intorno ad AB, è evidente che esso non conterrà più il punto C; dunque per le due rette AB, AC non si può far passare che un solo piano.

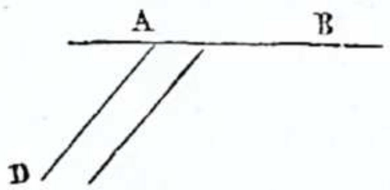
Corollario I. Un triangolo ABC o tre punti A, B, C non in linea retta, determinano la posizione di un piano.



Corollario II. Due parallele AB, CD determinano anche la posizione di un piano, poichè già si conosce che due parallele stanno in uno stesso piano; nè si può supporre che due piani diversi comprendano queste rette; poichè ognuno di essi dovrebbe in tal caso contenere due punti di AB ed un punto di CD, cioè tre punti non in linea retta.



Corollario III. Un piano può essere generato da una retta che passa per un punto A e che s' appoggia sopra un' altra retta BC.



Corollario IV. Un piano può anche essere generato da una retta AD che si muove parallelamente a sè stessa appoggiandosi su di un'altra retta AB.

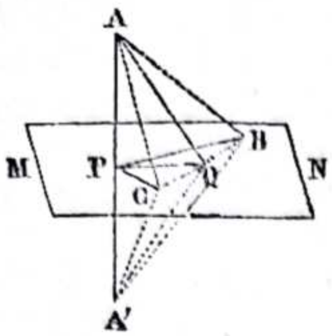
PROPOSIZIONE II.

Teorema — *L' intersezione di due piani è una linea retta.*

Infatti, se fra i punti comuni ai due piani ve ne fossero tre non in linea retta, i suddetti piani passando ciascuno per questi tre punti, dovrebbero coincidere (prop. 1) e quindi non formare che un solo e medesimo piano; il che è contrario all' ipotesi.

PROPOSIZIONE III.

Teorema—*Se una retta* AP *è perpendicolare a due altre rette* PB, PC, *condotte pel suo piede nel piano* MN, *essa sarà perpendicolare a qualunque altra retta* PQ *condotta per lo stesso punto* P *nello stesso piano, e quindi sarà perpendicolare al piano.*



Si conduca nel piano MN una retta BC che tagli comunque le tre rette PB, PQ, PC; si prolunghi AP di una lunghezza OA'=AP; e si uniscano i punti A, A' cogli altri B, Q, C.

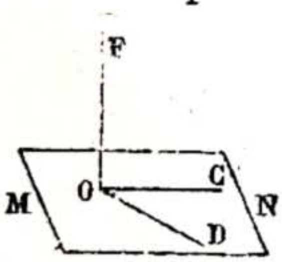
La retta PC essendo perpendicolare nel punto di mezzo di AA', le obblique CA, QA' sono fra loro eguali: per una simile ragione BA=BA'; e però i due triangoli BCA, BCA', avendo il lato BC di comune e gli altri lati rispettivamente eguali, sono eguali. Se ora si fa girare il triangolo BCA' intorno di BC per applicarlo sul suo eguale BCA, il punto A' cadrà in A, e siccome il punto Q rimane immobile, così la retta QA' si applicherà esattamente su di QA.

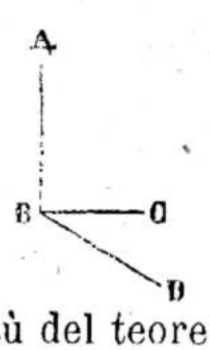
Da ciò risulta che la retta PQ avendo due dei suoi punti P, Q egualmente distanti dagli estremi della retta AA', le sarà perpendicolare.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA—*Per un punto dato si può sempre condurre una perpendicolare ad un piano dato, e non se ne può condurre che una sola.*

1.° Supponiamo in 1° luogo che il dato punto O sia situato sul piano MN.



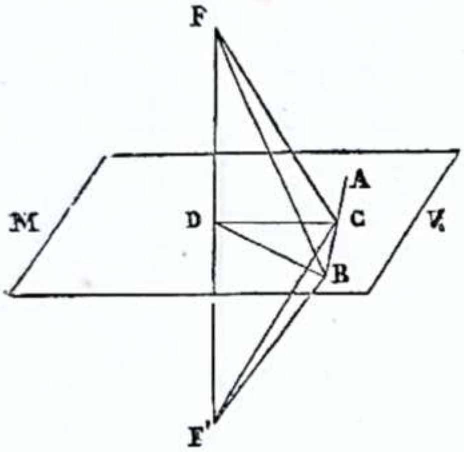


Conducasi primieramente una retta qualunque AB: per questa retta si facciano passare due piani, e dal punto B s'innalzino su di AB le due perpendicolari BC, BD situate in questi due piani. In virtù del teorema precedente, sarà AB perpendicolare al piano delle due rette BC, BD. Ciò posto, si trasporti questa figura in modo che il piano CBD coincida coll' altro MN, e si faccia muovere il primo sul secondo finchè il punto B cada in O; le rette BC, BD prenderanno le posizioni OC, OD, e quindi la retta BA prenderà la posizione OF evidentemente perpendicolare al piano MN.

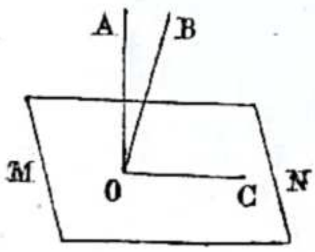
Supponiamo in 2° luogo che il punto F sia dato fuori del piano MN.

Si tracci sul piano MN una retta qualunque AB; dal punto F si abbassi FC perpendicolare ad AB; dal piede C di questa perpendicolare si tiri la retta CD anche perpendicolare ad AB ma situata nel piano MN; ed infine si abbassi da F la FD perpendicolare a CD: dico che FD sarà perpendicolare al piano MN.

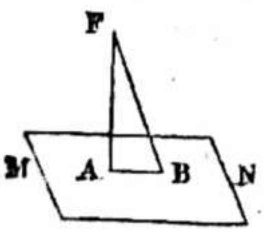
Infatti, essendo FD perpendicolare a DC, basterà dimostrare che FD è anche perpendicolare ad un'altra retta DB condotta pel suo piede nel medesimo piano.



Si prolunghi FD al disotto del piano MN di una lunghezza DF' = DF; e si conducano le rette FB, F'B, F'C. La retta BC essendo perpendicolare alle due rette DC, FC, è perpendicolare al piano DCF e per conseguenza alla retta CF'; sicchè i due triangoli rettangoli FCB, F'CB avendo il cateto BC di comune e gli altri due cateti FC, F'C uguali come obblique che distano egualmente dal piede D della perpendicolare CD, sono eguali; e sarà per conseguenza FB = F'B; e quindi sarà BD perpendicolare ad FD.



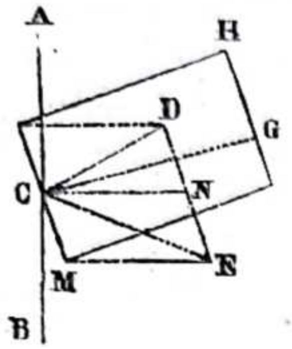
2.° Da un punto O dato sul piano MN, non si può innalzare che una sola perpendicolare su questo piano; giacchè se si potesse innalzarne due OA, OB, conducendo per queste due rette un piano la cui intersezione con MN sia OC, avverrebbe che le due rette OA, OB sarebbero entrambe perpendicolari ad OC nel medesimo punto e nello stesso piano, il che è impossibile.



Similmente, è impossibile abbassare da un punto fuori di un piano due perpendicolari su di questo piano; giacchè se FA, FB fossero queste due perpendicolari, il triangolo FAB avrebbe due angoli retti, il che è impossibile.

PROPOSIZIONE V.

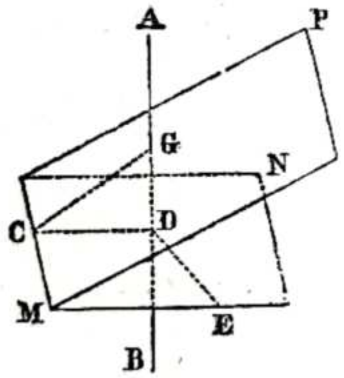
TEOREMA. — *Da un punto si può sempre condurre un piano perpendicolare ad una retta e non se ne può condurre che un solo*



1.° Supponiamo che il punto dato C sia situato sulla retta AB. Si conducano per questa retta due piani, ed in questi piani s'innalzino CD e CE perpendicolari ad AB: il piano MD condotto per queste due rette, sarà evidentemente perpendicolare ad AB.

Inoltre nessun altro piano MH che passa per il punto C può essere perpendicolare ad AB, poichè se ciò potesse aver luogo, un piano qualunque condotto per la retta AB taglierebbe MD e MH secondo due rette CN, CG che sarebbero tutte e due perpendicolari ad AB nello stesso punto e nello stesso piano; il che è impossibile.

2.° Supponiamo che il punto C sia situato fuori della retta AB.

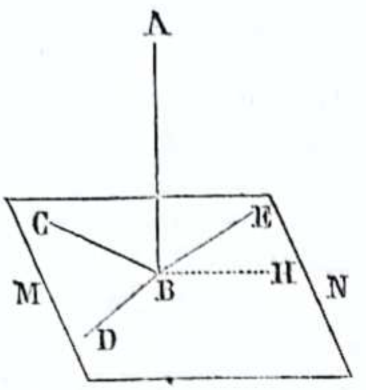


S'abbassi CD perpendicolare ad AB, ed in un piano che passa per AB s'innalzi DE perpendicolare a questa retta. Il piano MN condotto per le due rette CD, DE sarà perpendicolare ad AB.

In ultimo, nessun' altro piano MP condotto pel punto C può essere perpendicolare ad AB; poichè se ciò fosse, il piano ABC intersegherebbe l'altro piano MP secondo una retta CG diversa da CD (*); e quindi dal punto C si potrebbero abbassare due perpendicolari su di AB.

Corollario. Tutte le perpendicolari BC, BD, BE, innalzate da un punto B sulla retta AB si trovano in uno stesso piano perpendicolare a questa retta.

(*) Il punto G non può confondersi col punto D, poichè dal primo caso risulta che da un punto di una retta non si può condurre che un sol piano perpendicolare a questa retta.



Infatti, il piano MN condotto per le due rette BC, BD essendo perpendicolare ad AB, basterà dimostrare che questo piano contiene tutte le altre perpendicolari. Ora se BE non si trovasse nel piano MN, il piano menato per le due rette AB, BE, taglierebbe MN secondo la retta BH, e si avrebbero nello stesso punto e nello stesso piano due rette BE, BH perpendicolari ad AB.

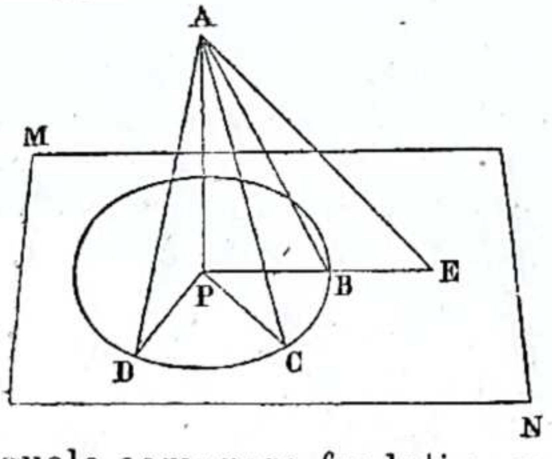
PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA. — *Se da un punto* A *fuori del piano* MN, *si conduce la perpendicolare* AP *e le oblique* AD, AC, AE.

1.° *La perpendicolare è minore di qualunque obbliqua.*

2.° *Le obblique ugualmente lontane dal piede della perpendicolare, sono uguali*

3.° *Di due obblique disugualmente lontane dal piede della perpendicolare, quella che più se ne allontana è la maggiore.*



1.° Il triangolo APC è rettangolo in P e per conseguenza l'obbliqua AC opposta all' angolo retto, è maggiore della perpendicolare AP.

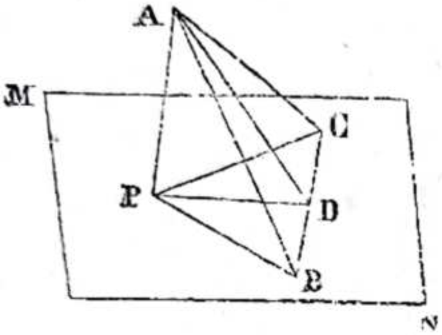
2.° Gli angoli APC, APD essendo retti, se si suppone PC=PD, i triangoli APC, APD, avendo un angolo uguale compreso fra lati uguali, saranno uguali, e si avrà AC=AD.

3.° Se la distanza PE è maggiore di PD, si prenda PB =PD e si congiunga AB; si avrà AB=AD; ma AB è minore di AE (prop. 16. 1.) dunque AD è minore di AE.

Corollario. Tutte le obblique uguali AB, AC, AD etc. terminano sulla circonferenza descritta dal piede della perpendicolare P come centro; quindi se essendo dato un punto A fuori di un piano, si vuole trovare sopra questo piano il punto P ove cade la perpendicolare abbassata da A, bisognerà segnare su di questo piano tre punti B, C, D ugualmente lontani dal punto A e cercare il centro del cerchio che passa per questi punti.

PROPOSIZIONE VII.

Teorema. — *Se una retta* AP *è perpendicolare al piano* MN, *e se dal piede* P *della suddetta perpendicolare si abbassa una perpendicolare* PD *su di una retta* BC *situata nel piano* MN, *la retta* AD *che unisce il punto* A *col piede* D *di questa seconda perpendicolare risulta anche perpendicolare a* BC.

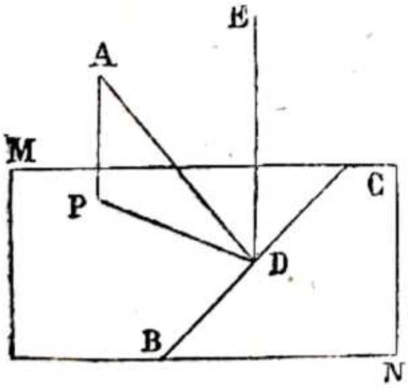


Si prenda DB=DC e si conducano PB, PC, AB, AC; siccome DB=DC, così l'obbliqua PB=PC; similmente, essendo PB=PC, le due obblique AB, AC che distano ugualmente dal piede della perpendicolare AP, sono eguali: e però la retta AD avendo due punti egualmente lontani dalle estremità B e C, sarà perpendicolare nel punto di mezzo di BC.

Corollario. Si vede nello stesso tempo che BC è perpendicolare al piano APD, perchè BC è perpendicolare contemporaneamente alle due rette AD, PD.

PROPOSIZIONE VIII.

Teorema. — *Se la retta* AP *è perpendicolare al piano* MN, *ogni retta* DE *parallela ad* AP *sarà perpendicolare allo stesso piano*



Per le parallele AP, DE si faccia passare un piano che taglia il piano MN secondo la retta PD; nel piano MN si tiri BC perpendicolare a PD, e si conduca AD.

Dal corollario del teorema precedente risultando BC perpendicolare al piano APDE, l'angolo BDE è retto; ma l'angolo EDP è anche retto perchè AP è perpendicolare a PD e DE è parallela ad AP; dunque la retta DE essendo perpendicolare alle due rette DP, DB, è perpendicolare al loro piano.

Corollario I. Reciprocamente, se le rette AP, DE sono perpendicolari al piano MN, esse saranno parallele; poichè se non sono tali, conducasi dal punto D una parallela ad AP, la quale dovendo essere perpendicolare al piano MN, ne segue che dallo stesso punto D si potrebbero innalzare due perpendicolari su di uno stesso piano, il che è impossibile (prop. 4).

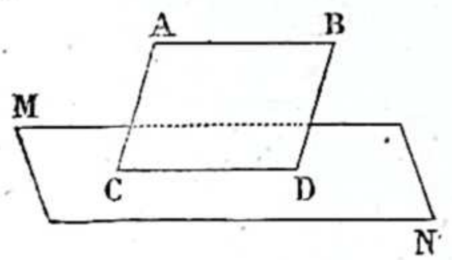
Corollario II. Due rette A e B parallele ad una terza C, sono parallele fra loro; poichè immaginando un piano perpendicolare alla retta C, le rette A e B parallele a questa perpendicolare, saranno perpendicolari allo stesso piano; e quindi pel corollario precedente, esse saranno parallele fra loro.

È evidente che le tre rette non si trovano nello stesso piano, senza di che la proposizione sarebbe di già conosciuta.

RETTE PARALLELE AI PIANI.

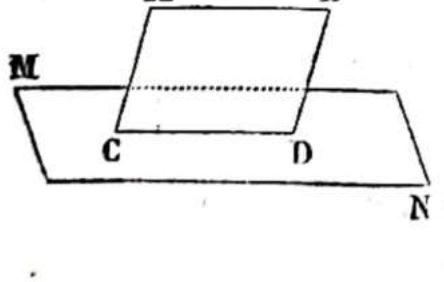
PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA. *Se la retta* AB *è parallela ad una retta* CD *giacente nel piano* MN, *essa sarà parallela a questo piano.*



Poichè se la retta AB, che sta nel piano ABCD, incontrasse il piano MN, ciò non potrebbe accadere che in qualche punto della retta CD, intersezione comune dei due piani; ma AB non può incontrare CD, poichè l'è parallela; dunque essa non potendo incontrare il piano MN, sarà parallela a questo piano.

PROPOSIZIONE X.

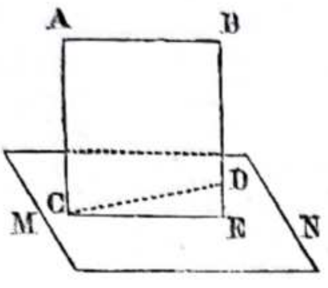


TEOREMA. *Se una retta* AB *è parallela al piano* MN, *ogni piano* ABCD *condotto per* AB *taglierà* MN *secondo una retta* CD *parallela ad* AB.

Infatti, le rette AC, CD essendo

nello stesso piano ABCD, se la retta AB incontrasse CD, essa incontrerebbe pure il piano MN, il che è contro l'ipotesi.

PROPOSIZIONE XI.

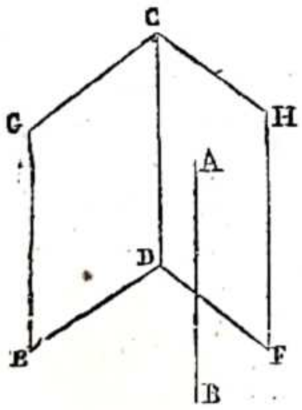


TEOREMA. *Se dal punto* C *di un piano* MN *parallelo alla retta* AB, *si conduce una parallela a questa retta, questa parallela dovrà trovarsi situata nel piano* MN.

Ed infatti, se ciò non fosse, il piano condotto per la retta AB e pel punto C C taglierebbe MN secondo una retta CD parallela ad AB, e quindi per lo stesso punto si potrebbero condurre due parallele ad una stessa retta.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA. *Allorchè una retta* AB *è parallela a due piani* CDE, CDF *che si tagliano, essa è parallela alla loro intersezione* CD.



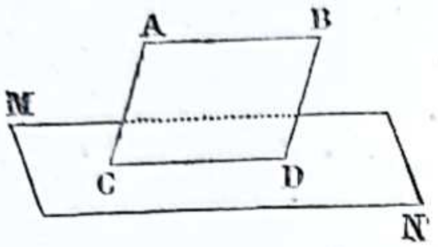
In effetti, se da un punto C preso sulla retta CD si tira una parallela ad AB, questa parallela, in virtù del teorema precedente dovrà essere situata contemporaneamente nel piano CDF e nel piano CDE; dunque essa sarà la intersezione CD di questi due piani.

Corollario. Se due piani CDEG, CDFH passano per due rette parallele GE, FH; la loro intersezione è parallela a queste rette.

Poichè se si tira una retta AB parallela a GE, essa sarà anche parallela ad FH; dunque in virtù del teorema ora dimostrato, CD sarà parallela ad AB e per conseguenza alle rette GE e FH.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA. *Due rette parallele* AC, BD, *comprese fra una retta* AB *ed un piano* MN *paralleli, sono eguali.*



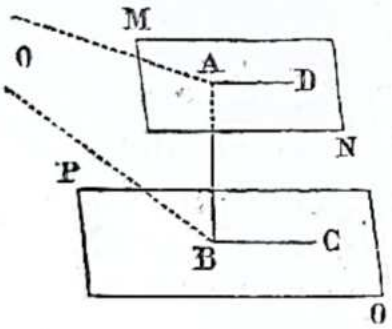
Infatti, il piano delle parallele AC, BD tagliando il piano MN secondo una retta CD parallela ad AB, la figura ABCD è un parallelogrammo, e perciò AC=BD.

Corollario. Se le rette AC, BD fossero perpendicolari al piano MN, esse misurerebbero le distanze dei punti A e B dal piano MN: dunque tutti i punti della retta AB sono equidistanti dal piano MN, o in altri termini *una retta ed un piano paralleli sono dappertutto equidistanti.*

PIANI PARALLELI

PROPOSIZIONE XIV.

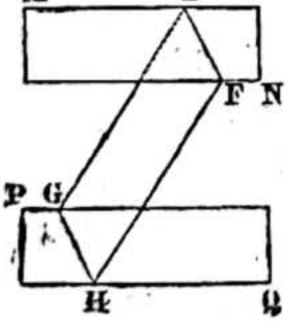
Teorema. *Due piani* MN, PQ *perpendicolari ad una stessa retta* AB, *sono paralleli fra loro.*



Poichè nella ipotesi che essi s' incontrano, sia O uno dei loro punti comuni; si conducano OA, OB; la retta AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta OA menata pel suo piede in questo piano; per la stessa ragione AB è perpendicolare a BO; dunque OA e OB sarebbero due perpendicolari abbassate dallo stesso punto O sulla stessa retta AB, il che è impossibile; e però i due piani MN, PQ, non potendo incontrarsi, sono paralleli.

PROPOSIZIONE XV.

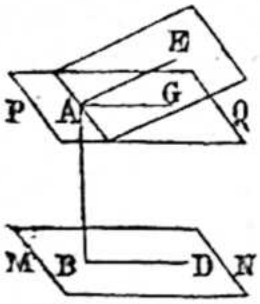
Teorema. *Le intersezioni* EF, GH *di due piani paralleli* MN, PQ, *con un terzo piano* FG, *sono parallele,*



Poichè, se le rette EF, GH, situate in uno stesso piano, non sono parallele, prolungate si debbono incontrare, ed allora s' incontrerebbero anche i piani MN, PQ, nei quali esse stanno situate, e quindi questi non sarebbero paralleli.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA—*Da un punto* A *si può sempre condurre un piano parallelo al piano* MN, *e non se ne può condurre che un solo.*

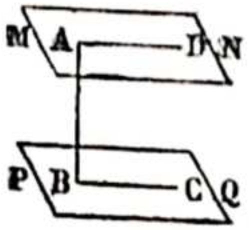


1.° Dal punto A si abbassi AB perpendicolare su di MN, e dallo stesso punto A si conduca il piano PQ perpendicolare ad AB; sarà PQ parallelo ad MN.

2.° Se inoltre esistesse un altro piano AE condotto pel punto A parallelo ad MN, un piano qualunque condotto per AB taglierebbe i piani MN, PQ, AE secondo le rette BD, AG, AE; ma le rette AG, BD sono parallele, perchè intersezione di due piani paralleli con un terzo; e lo stesso avverrebbe per le altre due AE, BD; dunque, anche AE sarebbe parallela ad AG, il che è un assurdo.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA—*La retta* AB *perpendicolare al piano* MN, *è perpendicolare al piano* PQ *parallelo ad* MN.

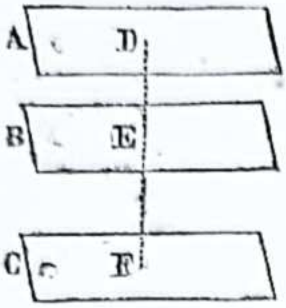


Dopo di aver tirata arbitrariamente la retta AD nel piano MN, si faccia passare un piano per le due rette AB, AD; questo dovrà necessariamente incontrare il piano PQ, senza di che si potrebbero dal punto A condurre due piani paralleli a PQ. Essendo dunque l'intersezione BC del piano BAD col piano PQ parallela ad AD, ne segue che la retta AB, perpendicolare al piano MN e quindi alla retta AD, sarà anche perpendicolare alla sua parallela BC.

Si vedrà similmente che AB sarà perpendicolare ad ogni altra retta che passa pel suo piede nel piano PQ; dunque essa è perpendicolare a questo piano.

PROPOSIZIONE XVIII.

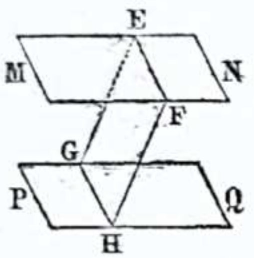
TEOREMA—*Due piani* A *e* B *paralleli ad un terzo* C, *sono paralleli fra loro.*



Conducasi DF perpendicolare al piano C; questa retta sarà perpendicolare ai piani A e B in virtù del teorema precedente; dunque questi piani essendo perpendicolari ad una stessa retta, sono paralleli fra di loro.

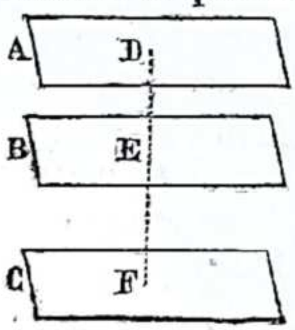
PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA—*Le parallele* EG, FH *comprese fra due piani paralleli* MN, PQ, *sono uguali.*



Per le parallele EG, FH si conduca il piano EGHF che incontrerà i piani paralleli secondo EF e GH: ma le intersezioni EF, GH sono parallele fra loro, (prop. 15), come pure EG, FH; dunque la figura EGHF essendo un parallelogrammo, sarà EG = = FH.

Corollario I. Segue da ciò che *due piani paralleli sono sempre ugnalmente distanti;* poichè se EG ed FH sono perpendicolari ai due piani MN, PQ, esse saranno parallele e quindi eguali fra di loro.

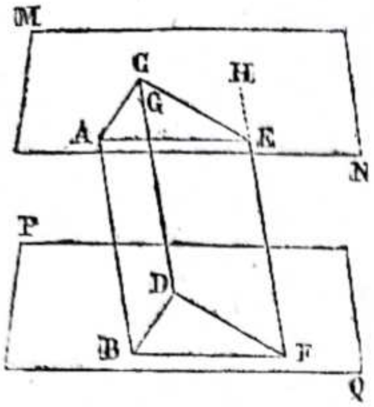


Corollario II. Il luogo geometrico dei punti situati ad una data distanza dal piano B, si compone di due piani paralleli a B condotti da una parte e dall' altra di questo piano a distanze DE, EF uguali alla lunghezza data.

Poichè tutti i punti dei piani A e C sono distanti dal piano B per la quantità data; mentre facilmente si vede che tutti i punti situati fuori di questi piani non godranno della stessa proprietà.

PROPOSIZIONE XX.

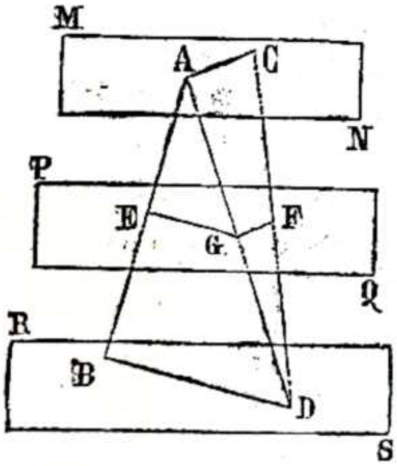
TEOREMA—*Se due angoli* CAE, DBF, *non situati nello stesso piano, hanno i loro lati paralleli e diretti nello stesso senso, saranno uguali ed i loro piani saranno paralleli.*



Si prendano AC=BD , AE=BF , e si conducano CE, DF, AB, CD , EF. Siccome AC è uguale e parallela a BD, così la figura ABDC essendo un parallelogrammo, sarà CD uguale e parallela ad AB. Per la stessa ragione EF è uguale e parallela ad AB , dunque anche CD è uguale e parallela ad EF ; e quindi la figura CEFD essendo un parallelogrammo, sarà il lato CE uguale e parallelo a DF; dopo di che i due triangoli CAE , DBF , essendo equilateri fra loro , sarà l' angolo CAE=DBF.

In secondo luogo io dico che il piano AEC è parallelo al piano BDF; poichè , supposto che il piano parallelo a BDF menato per il punto A, incontri le rette CD , EF in punti differenti da C e E, per esempio in G e H , allora , secondo la proposizione 19, le tre rette AB, GD , FH dovrebbero essere uguali; ma le tre rette AB, CD, EF, sono pure uguali,dunque si avrebbe CD=GD e FH=EF, il che è assurdo; e però il piano AEC è parallelo a BDF.

PROPOSIZIONE XXI.



TEOREMA. *Due rette comprese fra tre piani paralleli, sono tagliate in parti proporzionali.*

Supposto che la retta AB incontra i piani paralleli MN , PQ , RS in A , E , B , e che la retta OD incontra gli stessi piani in C , F , D ; io dico che si avrà

$$\frac{AE}{BE}=\frac{CF}{FD}.$$

Si tiri AD, che incontra il piano PQ in G , e si conducano AC, EG, GF, BD: le intersezioni dei piani paralleli PQ, RS col piano ABD, essendo parallele, si ha

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AG}{GD};$$

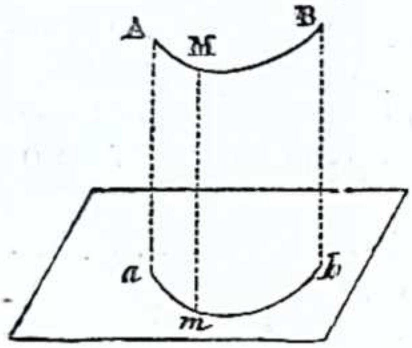
similmente le intersezioni AC , GF , essendo parallele , si ha

$$\frac{AG}{GD}=\frac{CF}{FD};$$

e però queste due proporzioni avendo un rapporto di comune, daranno

$$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}.$$

DEFINIZIONI.

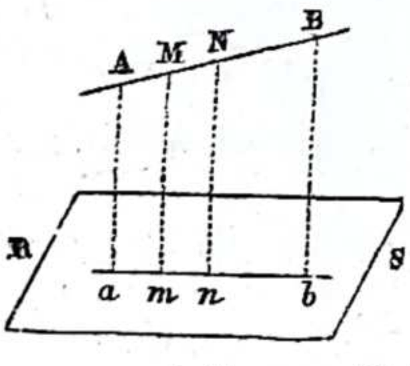


Si chiama *proiezione di un punto su di un piano* il piede della perpendicolare abbassata da questo punto sul piano.

La proiezione di una linea AMB sopra di un piano è la linea *amb* formata dalle proiezioni di tutti i punti della AMB.

PROPOSIZIONE XXII.

Teorema. *La proiezione di una retta sopra un piano è una retta.*



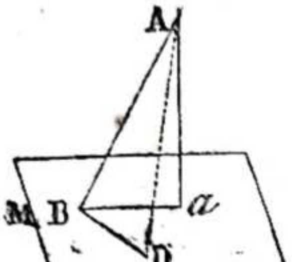
Da un punto A della retta AB si abbassi la perpendicolare Aa sul piano RS, e per le rette AB, Aa si conduca un piano che taglia RS secondo ab.

Dopo di ciò, se dai punti M, N della retta AB si abbassano delle perpendicolari sul piano RS, esse saranno tutte parallele ad Aa e saranno situate nel piano BAa; epperò non potranno incontrare il piano HS che secondo la retta ab.

ANGOLO DI UNA RETTA E DI UN PIANO

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA. *L'angolo acuto* ABa *formato dalla retta* AB *colla sua proiezione* Ba *sul piano* MN, *è minore dell'angolo* ABD , *che fa la stessa retta con un' altra* BD , *che passa pel suo piede nel piano.*



Si prenda BD=B*a* e si conduca AD ; i due triangoli AB*a* , ABD , hanno il lato AB comune , e B*a*=BD per costruzione; ma il terzo lato A*a* del primo triangolo è minore del terzo lato AD del secondo triangolo , perchè A*a* è perpendicolare al piano MN e AD è un'obbliqua; dunque l'angolo AB*a* è minore dell' angolo ABD.

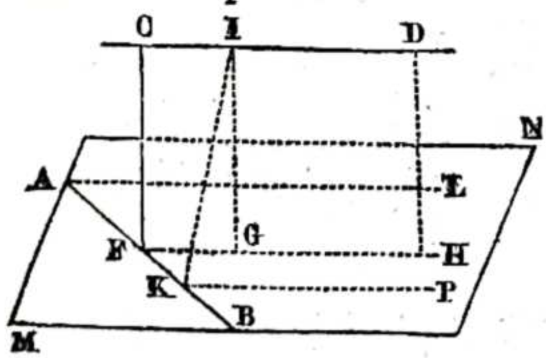
Scolio I. L'angolo acuto che fa una retta colla sua proiezione su di un piano , essendo l' angolo minimo , l' angolo ottuso è massimo.

Scolio II. L' angolo acuto che fa una retta colla sua proiezione sopra un piano, per la proprietà dimostrata , è chiamato *angolo della retta col piano.*

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA. *Date due rette* AB , CD *non situate in uno stesso piano*, 1.° *si può sempre condurre una perpendicolare comune a queste due rette*, 2.° *non se ne può condurre che una sola*, 3.° *essa è la più corta distanza delle due rette.*

1.° Da un punto A della retta AB , si tiri AL parallela a CD e si conduca per le due rette AB , AL il piano MN parallelo a CD.



Da un punto qualunque D preso su di CD si abbassi DH perpendicolare al piano MN e dal punto H si tiri HF parallela a CD ; infine da F si tiri CF parallela a DH; FC sarà una perpendicolare comune alle due rette.

Infatti , la FC , qual parallela a DH , è perpendicolar al piano MN e quindi anche alle due rette AB, FH che passano pel suo piede in questo piano; e per conseguenza sarà pure perpendicolare a CD parallela ad FH.

2.° FC è la sola perpendicolare comune; poichè, se si supponesse che un'altra retta IK fosse perpendicolare ad AB e CD, essa sarebbe anche perpendicolare alla retta KP parallela a CD, e quindi al piano MN (prop. 8); d'altronde la retta IG parallela a DH è perpendicolare allo stesso piano; e però da un punto si potrebbero abbassare due perpendicolari su di un piano.

3.° FC è la più corta distanza delle due rette; infatti, sia IK un' altra retta che incontra AB e CD; se si conduce IG parallela a DH, sarà IG perpendicolare ad MN e quindi minore di IK; ma IG=FC; dunque FC<IK.

Osservazione. – Allorchè due rette non sono situate in uno stesso piano, si chiama *angolo di queste rette* l' angolo formato da una di esse con una parallela all' altra retta, condotta da uno dei suoi punti.

ANGOLI FORMATI DA PIANI.

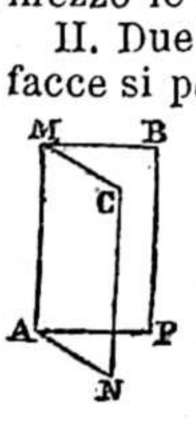
DEFINIZIONI

I. Allorchè due piani s' incontrano, la figura che formano questi piani, terminati alla loro intersezione comune, si chiama *angolo diedro*.

L' intersezione dei due piani chiamasi *costola* o spigolo dell' angolo diedro, ed i piani che lo formano ne sono le facce.

Un angolo diedro s' indica con quattro lettere; due di esse servono ad indicare la costola e le altre due rappresentano le due facce. Bisogna aver cura di mettere nel mezzo le due lettere che indicano la costola.

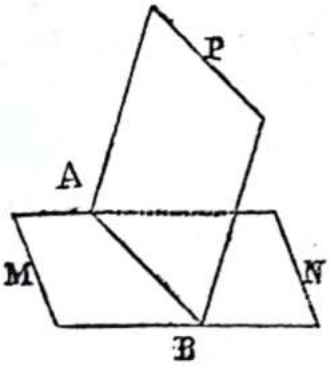
II. Due angoli diedri si dicono uguali, allorchè le loro facce si possono far coincidere.



III. L' angolo NAP, formato dalle perpendicolari NA, AP condotte nelle due facce dell'angolo diedro PMAN, in uno stesso punto della costola MA, è l' *angolo piano* corrispondente all' angolo diedro.

L' angolo piano così formato, è lo stesso per tutti i punti della costola; poichè, se al punto

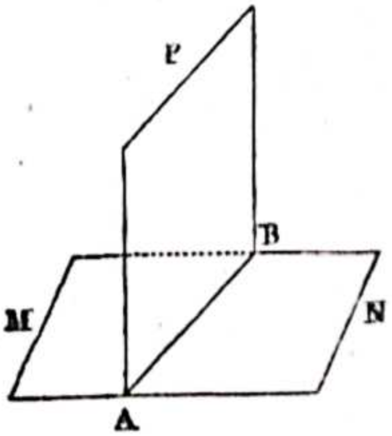
M si forma l'angolo piano CMB, le rette MC, AN, essendo parallele, perchè situate in uno stesso piano, sono entrambe perpendicolari ad MA; similmente MB è parallela ad AP, dunque CMB=NAP.



IV. Allorchè un piano PB ne incontra un'altro MN, forma con questo due angoli diedri adiacenti PABM, PABN. Se questi angoli adiacenti sono uguali, il piano PB dicesi perpendicolare ad MN e gli angoli diedri uguali si chiamano angoli diedri *retti*, (si dimostrerà che tutti gli angoli diedri retti sono uguali).

PROPOSIZIONE XXV.

Teorema. —*Per una retta* AB *situata nel piano* MN *si può sempre condurre un piano perpendicolare ad* MN *e questo non può essere che un solo.*



Corollario. Tutti gli angoli diedri retti sono uguali.

La dimostrazione di questo teorema e del corollario essendo interamente simile a quella data nel libro I, proposizione I, lasceremo al lettore la cura d'imitarla.

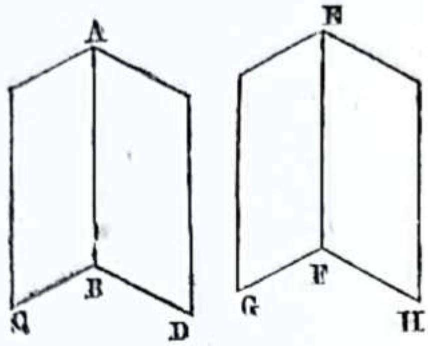
PROPOSIZIONE XXVI.

Teorema—*Ogni piano che ne incontra un'altro, forma con questo due angoli diedri adiacenti la cui somma è uguale a quella di due angoli diedri retti.*

Corollario. Se un piano è perpendicolare ad un altro, questo secondo piano è perpendicolare al primo (Vedasi lib. I, prop. 2.).

PROPOSIZIONE XXVII.

Teorema. *Se due angoli diedri* CABD, GEFH *sono uguali, i loro angoli piani* CBD, GFH *saranno uguali.*



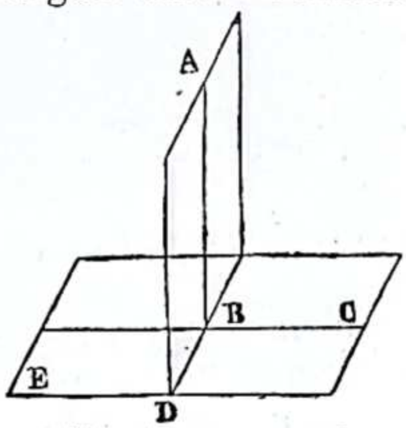
In effetti, si porti il secondo diedro sul primo, in modo che EF cada su di AB, il punto F in B, ed il piano EFG sul piano ABC; gli angoli EFG, ABC essendo retti, FG prenderà la direzione di BC; ma per l' eguaglianza degli angoli diedri il piano EFH si applicherà su di ABD; e però gli angoli EFH, ABD essendo retti, FH coinciderà con BD.

Corollario. L'angolo diedro retto ha per angolo piano un angolo retto.

Poichè, quando un piano è perpendicolare ad un altro, gli angoli diedri adiacenti sono eguali; e quindi gli angoli piani corrispondenti sono anche uguali; ma questi sono adiacenti, dunque sono retti.

Reciprocamente. Se gli angoli piani CBD, GFH, che corrispondono a due angoli diedri sono uguali, anche gli angoli diedri sono uguali.

Infatti portiamo l' angolo diedro GEFH sopra CABD, in modo che l'angolo GFH s'applichi sul suo uguale CBD; la retta EF perpendicolare al piano GFH, coinciderà con AB che è perpendicolare al piano CBD; e quindi i due angoli diedri coincidendo sono eguali.

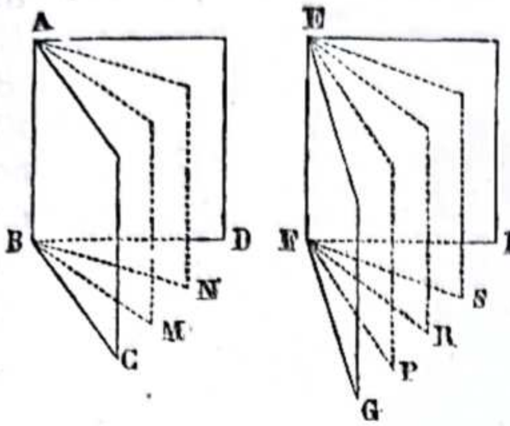


Si deduce da ciò che quando l'angolo piano ABC di un angolo diedro ADBC è retto, l' angolo diedro è anche tale.

Poichè, se l'angolo ABC è retto, l' angolo adiacente ABE è pure un angolo retto; ed allora gli angoli piani che corrispondono agli angoli diedri ADBC, ADBE essendo uguali, ne segue che anche i diedri sono uguali; e per conseguenza il piano ADB è perpendicolare a DBC.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA. *Due angoli diedri* CABD, GEFH *stanno fra loro nello stesso rapporto dei loro angoli piani* CBD, GFH.



Suppongasi che i due angoli diedri abbiano una comune misura, e che dividendo CABD in tre parti uguali, GEFH comprenda quattro di queste parti: si avrà

$$\frac{CABD}{GEFH}=\frac{3}{4}.$$

Si conducano i piani CBD, GFH, rispettivamente perpendicolari alle costole AB, EF; questi piani taglieranno le facce di divisione secondo le rette BC, BM,... FG, FP, FR... rispettivamente perpendicolari ad AB ed EF, e con ciò gli angoli piani CBM, MBN... GFP, PFR... risulteranno uguali come corrispondenti a diedri uguali; ma CBD contiene tre di questi angoli, e GFH ne contiene quattro, dunque si avrà pure

$$\frac{CBD}{GFH}=\frac{3}{4};$$

ed infine

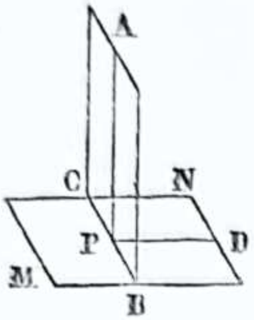
$$\frac{CABD}{GEFH}=\frac{CBD}{GFH}.$$

Se i due angoli diedri non avessero una comune misura, si farebbe vedere col solito ragionamento per assurdo che la proporzione sussiste sempre.

Scolio. Risulta da questo teorema che se si vuole misurare un angolo diedro D, cioè trovare il rapporto di D ad un angolo diedro preso per unità (l'angolo diedro retto, per esempio), basterà cercare il rapporto dell' angolo piano di D all' angolo retto.

PROPOSIZIONE XXIX.

Teorema. *La retta* AP *essendo perpendicolare al piano* MN, *ogni piano* APB *condotto per* AP, *sarà perpendicolare al piano* MN.

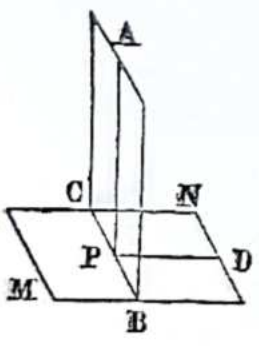


Sia BC l'intersezione dei piani AB, MN; se nel piano MN si tira PD perpendicolare a BP, la retta AP essendo perpendicolare al piano MN, sarà perpendicolare a ciascuna delle due rette BC, PD; ma l'angolo APD formato dalle due perpendicolari PA, PD all' intersezione comune BP, misura l' angolo dei due piani AB, MN; dunque siccome quest' angolo è retto, così i due piani sono perpendicolari fra loro.

Scolio. Allorchè tre rette come le AP, BP, DP sono perpendicolari fra loro, ciascuna di queste rette è perpendicolare al piano delle altre due, ed i tre piani sono perpendicolari fra loro.

PROPOSIZIONE XXX.

Teorema. *Se un piano* AB *è perpendicolare ad un altro piano* MN, *ogni retta* PA *condotta nel primo perpendicolarmente alla comune intersezione* PB, *risulta perpendicolare all' altro piano* MN.

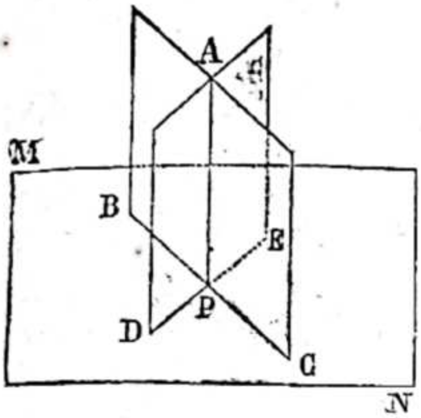


Poichè se nel piano MN si tira PD perpendicolare a PB, l'angolo APD sarà retto per essere i piani perpendicolari fra loro; e quindi la retta AP essendo perpendicolare alle due rette PB, PD, è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario. Se il piano AB è perpendicolare al piano MN, e da un punto A del primo si abbassa una perpendicolare sul piano MN, questa perpendicolare starà nel piano AB; poichè se ciò non fosse, si potrebbe sempre dal punto A condurre nel piano AB una perpendicolare AP all' intersezione comune BP, la quale dovendo essere contemporaneamente perpendicolare al piano MN, ne seguirebbe che dallo stesso punto A si potrebbero abbassare due perpendicolari sul piano MN, il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XXXI.

Teorema. *Se due piani* AB, AD *sono perpendicolari ad un terzo* MN, *la loro intersezione comune* AP *sarà perpendicolare a questo terzo piano*.

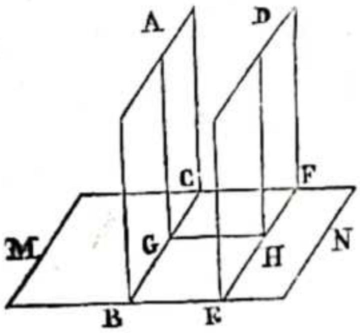


Poichè se da un punto A preso sull'intersezione si abbassa una perpendicolare sul piano MN, questa deve trovarsi contemporaneamente nel piano AB e nel piano AD; e perciò essa è la loro intersezione comune AP.

PROPOSIZIONE XXXII.

Teorema. *Se due piani* ABC, DEF *sono paralleli, ogni piano* MN *perpendicolare ad* ABC *è perpendicolare al piano* DEF.

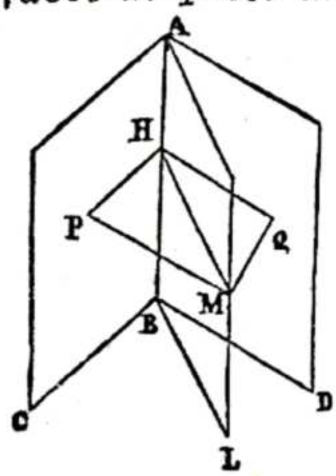
Infatti, se nel piano ABC si tira la retta AG perpendicolare a BC, questa sarà pure perpendicolare al piano MN.



Se inoltre per la retta AG si conduce un piano, questo taglierà il piano DEF secondo una retta HD parallela ad AG e quindi perpendicolare al piano MN; dunque il piano DEF che passa per questa retta è perpendicolare al piano MN.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Teorema. *Ogni punto* M *preso sul piano bisettore dell' angolo diedro* CABD, *è ugualmente distante dalle due facce di quest' angolo diedro.*



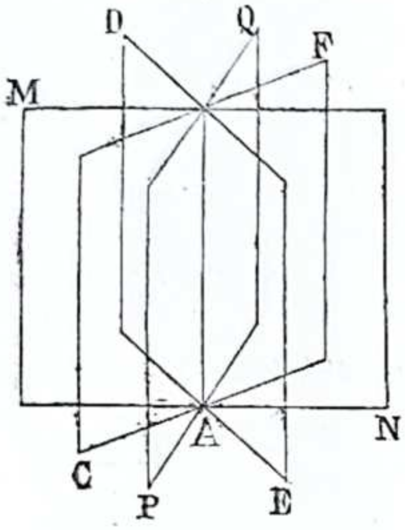
Se dal punto M si abbassino le rette MP, MQ rispettivamente perpendicolari alle facce ABC, ABD, il piano PMQ che passa per esse essendo perpendicolare alle facce ABC, ABD, è perpendicolare alla loro intersezione AB; e perciò taglierà i piani ABC, ABL, ABD secondo tre rette HP, HM, HQ perpendicolari ad AB.

Ciò posto, i triangoli rettangoli

PMH, QMH, avendo l'ipotenusa MH di comune e gli angoli MHP, MHQ, che misurano gli angoli diedri CABL, DABL, uguali; sono uguali, e per conseguenza MP=MQ.

Reciprocamente. Se un punto M situato nell'interno dell'angolo diedro CABD, è ugualmente distante dalle due facce dell'angolo diedro, questo punto appartiene al piano bisettore.

In effetti, conducendo come precedentemente, il piano PMQ e le rette HP, HM, HQ; i triangoli rettangoli MHP, MHQ avranno l'ipotenusa MH di comune ed i lati MP, MQ uguali per ipotesi; dunque questi triangoli sono uguali, e per conseguenza gli angoli MHP, MHQ che misurano gli angoli diedri CABM DABM risulteranno uguali.



Corollario. Il luogo geometrico dei punti ugualmente distanti dai due piani indefiniti FAC, DAE si compone dei piani MN, PQ bisettori degli angoli diedri adiacenti formati dai due piani dati. È d'altronde facile riconoscere che questi piani bisettori sono perpendicolari fra loro.

DEFINIZIONI

I. Si chiama angolo *solido* o *poliedro* la figura formata da più piani che si tagliano in uno stesso punto.

II. Le intersezioni dei piani sono le costole dell'angolo solido; il punto d'incontro delle costole ne è il vertice.

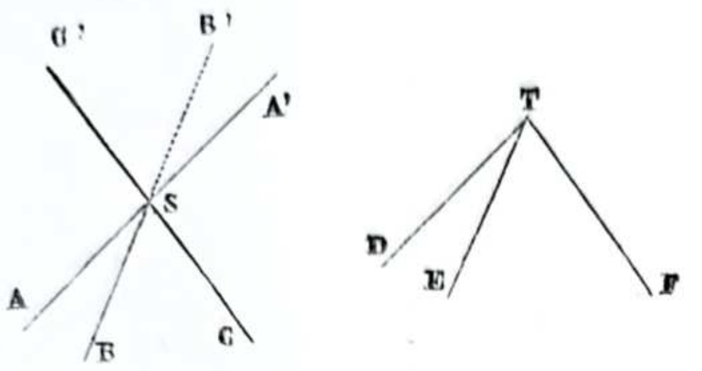
Gli angoli formati dalle costole chiamansi *facce* o angoli piani dell'angolo solido.

III. Allorchè il numero dei piani è uguale a tre, l'angolo solido si chiama *angolo triedro*.

IV. Noi non consideremo che gli angoli solidi convessi, cioè quelli che sono situati interamente dalla stessa parte di una delle loro facce prolungata.

V. Dato un angolo solido SABCD, se si prolungano le costole SA, SB...., al di là del punto S, si forma un nuovo angolo solido che si dice *simmetrico* del primo.

È evidente che questo nuovo angolo solido ha gli stessi angoli piani e gli stessi angoli diedri del primo.



Sia ASC=DTF, l'angolo diedro SA=DT e l' angolo diedro SC=TF.

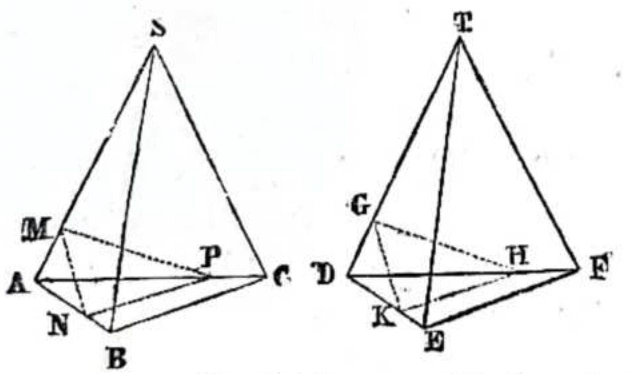
Facciasi coincidere la faccia DTF colla sua uguale ASC; per l'eguaglianza degli angoli diedri SA e TD, SC e TF, i piani DTE, FTE andranno ad applicarsi rispettivamente sulle facce ASB, CSB; e però la costola TE unica intersezione dei primi coincidendo con SB, i due angoli diedri avranno tutte le loro parti uguali.

Se gli angoli diedri uguali fossero inversamente situati per rapporto alle facce uguali, si sovrapporrebbe l'angolo triedro T al simmetrico del triedro S, e si giungerebbe allo stesso risultato.

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA. *Se due angoli triedri hanno le facce rispettivamente uguali, gli angoli diedri opposti alle facce uguali saranno uguali fra di loro.*

Sia ASB=DTE, ASC=DTF, BSC=ETF.



Si prendano le sei lunghezze uguali SA, SB, SC, TD, TE, TF, e si tirino le rette AB, AC, BC, DE, DF, EF. I triangoli isosceli SAB TDE sono uguali avendo un angolo uguale compreso fra lati uguali; lo stesso avviene dei triangoli SBC, TEF, non che dei triangoli SAC, TDF; e però i due triangoli ABC, DEF avendo i tre lati rispettivamente uguali, risulteranno uguali.

Ciò posto, per un punto M della costola SA si conducano nei piani delle facce SAB, SAC le rette MN, MP perpendicolari ad SA; queste rette incontreranno i lati AB ed AC, perchè i triangoli SAB, SAC essendo isosceli, gli angoli della base SAB, SAC sono acuti; si tiri infine la retta NP.

Si prenda inoltre DG=AM, e si ripeta nel secondo triedro la costruzione precedente.

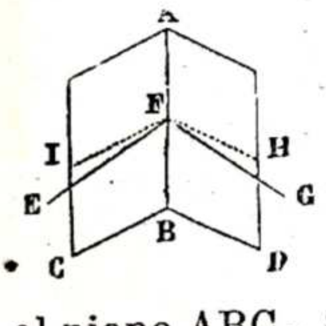
I triangoli rettangoli AMN, DGK, essendo eguali per essere il lato AM=DG e l'angolo acuto MAN=GDK, sarà pure AN=DK ed MN=GK. Similmente si dimostrerebbe che MP=GH ed AP=DH.

Ora anche i triangoli PAN, HDK sono uguali, avendo un angolo uguale compreso fra lati uguali, d'onde se ne conchiude NP=KH; e però i triangoli NMP, KGH, avendo i tre lati rispettivamente uguali, sarà l'angolo NMP, che misura il diedro , SA eguale a KGH che misura il diedro TD.

Scolio. Se i due angoli solidi hanno inoltre le loro facce similmente disposte , essi saranno uguali per sovrapposizione; nel caso contrario, essi saranno simmetrici.

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA. *Allorchè da un punto* F *preso sulla costola di un angolo diedro* AB, *s'innalza sulla faccia* AC *una perpendicolare dalla parte del piano* ABC *dove si dirige la faccia* ABD, *e sulla faccia* ABD *una perpendicolare* FE *dalla parte del piano* ABD *dove si dirige la faccia* ABC, *l'angolo* EFG *è il supplemento dell'angolo piano che misura l'angolo diedro.*

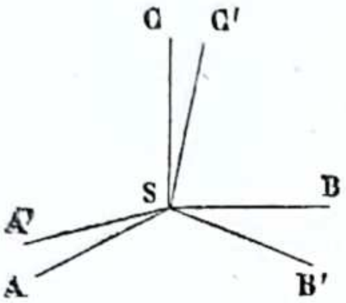


Infatti, le due rette EF, FG perpendicolari ad AB , determinano un piano perpendicolare ad AB, che tagliando le due facce dell'angolo diedro secondo le rette FI , FH entrambe perpendicolari ad AB, l'angolo IFH misurerà l'angolo diedro. Ora FG essendo perpendicolare al piano ABC , si ha GFI=1^{ret} , e per la stessa ragione EFH=1^{ret}; e però, sommando, si avrà GFI+EFH=2^{ret}, o EFG+IFH=2^{ret}.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA. *Allorchè dal vertice di un angolo triedro* SABC *s' innalza sopra ogni faccia una perpendicolare dalla parte del piano di questa faccia dove trovasi la terza costola, l'angolo triedro che ha per costole queste tre perpendicolari, e l'angolo triedro dato sono supple-*

mentari. (Due angoli triedri si dicono supplementari, allorchè gli angoli piani dell'uno sono i supplementi degli angoli che misurano gli angoli diedri degl'altri.



Sia SC′ perpendicolare alla faccia ASB dalla stessa parte del piano ASB dove si trova la costola SC; SB′ perpendicolare alla faccia ASC dalla parte del piano ASC dove trovasi la costola SB; infine sia SA′ perpendicolare al piano CSB dalla partedi questo piano dove trovasi la costola SA.

1.° La retta SC′ essendo perpendicolare al piano ASB dalla parte di questo piano dove trovasi la faccia CSB, e la retta SA′ essendo perpendicolare al piano CSB dalla parte di questo piano dove trovasi la faccia ASB, sarà (prop. 37) l'angolo C′SA′ il supplemento dell'angolo corrispondente all' angolo diedro SB. Si vedrebbe similmente che l'angolo C′SB′ è il supplemento dell' angolo che corrisponde all' angolo diedro SA e che A′SB′ è il supplemento dell' angolo che misura l' angolo diedro SC. Dunque 1.° gli angoli piani di SA′B′C′ sono i supplementi degli angoli diedri di SABC.

2.° La retta SA′ essendo perpendicolare al piano CSB, è perpendicolare ad SC; la retta SB′ perpendicolare al piano CSA, è perpendicolare ad SC, dunque la retta SC è perpendicolare al piano A′SB′; inoltre essendo SC′ perpendicolare al piano ASB e trovandosi dalla parte di questo piano dove trovasi SC, l' angolo CSC′ è acuto; e poichè SC è perpendicolare ad A′SB′ e forma con SC′ un angolo acuto, se ne conchiude che SC rimarrà situata dalla parte del piano A′SB′ dove trovasi SC′.

Si vedrebbe similmente che SB è perpendicolare al piano A′SC′ dalla parte di questo piano dove trovasi SB, e che SA è perpendicolare al piano C′SB′ dalla parte di questo piano dove trovasi SA′; o più brevemente, che l'angolo SABC è costruito per mezzo di SA′B′C′ nella stessa guisa che quest'ultimo è stato costruito per mezzo di SABC: e però gli angoli piani di SABC sono i supplementi degli angoli diedri di SA′B′C′.

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA. *Se due angoli triedri hanno gli angoli die* *dri rispettivamente uguali, essi hanno anche le facce uguali ciascuna a ciascuna.*

Sieno S ed S′ i due angoli triedri dati, T e T′ gli angoli triedri supplementari.

Siccome S ed S′ hanno i loro angoli diedri uguali, così gli angoli triedri T e T′ avranno le loro facce rispettivamente uguali, e per conseguenza i loro angoli diedri saranno pure uguali (prop. 36).

Infine, gli angoli triedri T e T′ avendo i loro angoli driedri uguali, gli angoli triedri S e S′ avranno le loro facce eguali.

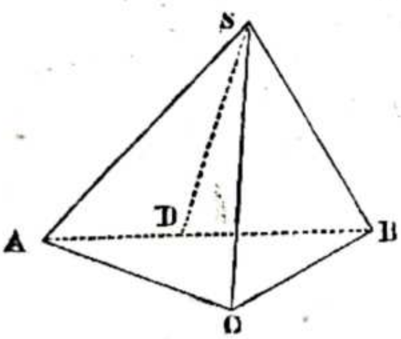
Scolio. Se le facce uguali dei due triedri sono similmente disposte, gli angoli triedri saranno uguali per sovrapposizione; in caso contrario saranno simmetrici.

PROPOSIZIONE XL.

Teorema. *Se un angolo solido è formato da tre angoli piani, la somma di due qualunque di questi angoli sarà maggiore del terzo.*

È evidente che non vi è luogo a dimostrare la proposizione che solamente quando l'angolo piano che si paragona alla somma degli altri due è maggiore di ciascuno di essi.

Sia dunque l'angolo solido S formato dai tre angoli piani ASB, ASC, BSC e supponiamo che l'angolo ASB sia il più grande dei tre; io dico che si avrà $ASC<ASC+CSB$.

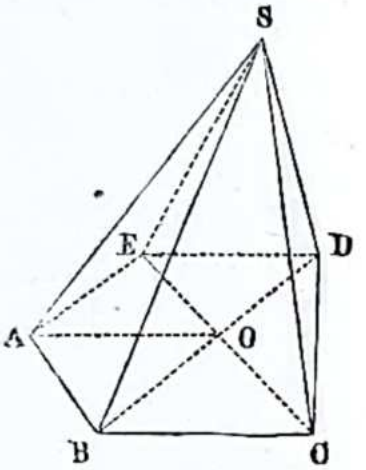


Nel piano ASB si faccia l'angolo BSD=BSC, si tiri ad arbitrio la retta ADB, e presa SC=SD, si conducano AC, BC.

Essendo SD=SC e l'angolo BSD=BSC, i due triangoli BSD, BSC sono uguali; e sarà BD=BC. Ma si ha $AB<AC+BC$, e togliendo da una parte BD e dall' altra la sua uguale BC, rimane $AD<AC$; e però i due triangoli ASD, ASC avendo i due lati AS, SD uguali ai due AS, SC, ed il terzo lato AD minore di AC, sarà l'angolo $ASD<ASC$, ed aggiungendo BSD=BSC, si avrà ASD+BSD o $ASB<ASC+BSC$.

PROPOSIZIONE XLI

Teorema. *La somma degli angoli piani che formano un angolo solido convesso è sempre minore di quattro angoli retti.*



Si tagli l'angolo solido S con un piano ABCDE che incontra tutte le costole; e da un punto O preso in questo piano si conducano a tutti i vertici le rette OA, OB, OC, OD, OE.

La somma degli angoli dei triangoli ASB, BSC, etc. formati intorno al vertice S, equivale alla somma degli angoli dello stesso numero di triangoli AOB, BOC, etc., formati intorno al vertice O. Ma al punto B gli angoli ABO, OBC presi insieme, formano l'angolo ABC minore della somma degli angoli ABS, SBC (prop. 40); similmente al punto C si ha BCO+OCD<BCS+SCD e così per tutti gli angoli del poligono ABCDE; dunque nei triangoli di cui il vertice è in O, la somma degli angoli alla base essendo minore della somma degli angoli alla base dei triangoli che hanno il vertice in S, deve essere, per compensazione, la somma degli angoli formati intorno al punto O maggiore della somma degli angoli formati intorno al punto S. Ma la somma degli angoli intorno al punto O è uguale a quattro angoli retti, e però la somma degli angoli piani che formano l'angolo solido S è minore di quattro angoli retti.

PROPOSIZIONE XLII.

Teorema. 1.° *In ogni angolo triedro, la somma dei tre angoli diedri è compresa fra 2 retti e 6 retti:* 2.° *il minore angolo diedro aumentato di due retti è maggiore della somma degli altri due.*

1.° Sieno a, b, c i tre angoli diedri dell'angolo triedro dato, e A, B, C le facce dell'angolo triedro supplementare. Si ha:

$$a=2r-A,\ b=2r-B,\ c=2r-C,$$

donde, sommando, ricavasi

$$a+b+c=6^r-(A+B+C).$$

Inoltre la somma $A+B+C$ è maggiore di zero ed è minore di 4^{ret}, dunque la somma $a+b+c$ è minore di 6 retti ed è maggiore di due retti.

2.° Essendo a, b, c gli angoli diedri dell'angolo triedro dato, ed a il più piccolo, saranno 2^r-a, 2^r-b, 2^r-c le facce dell'angolo triedro supplementare, di cui 2^r-a è la maggiore; e si avrà in virtù del teorema 40:

$$2^r-a<2^r-b+2^r-c;$$

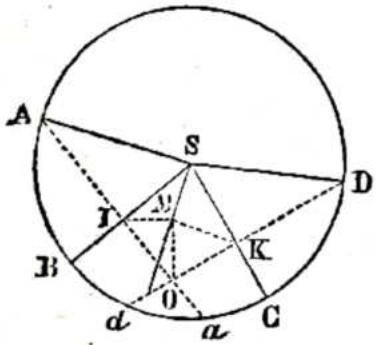
donde, aggiungendo da una parte e dall' altra $b+c+a$ e togliendo 2^r, ricavasi

$$b+c<2^r+a.$$

PROPOSIZIONE XLIII.

TEOREMA. *Per formare un angolo solido triedro con tre facce date, è necessario e sufficiente che la somma delle tre facce sia minore di quattro retti e che la maggiore sia più piccola della somma delle altre due.*

Avendo di già veduto che queste condizioni sono necessarie, resta a dimostrare che esse sono sufficienti.



Sieno BSC, ASB, DSC le tre facce date che supporremo situate su di uno stesso piano, e sia BC la maggiore.

Col punto S come centro e con un raggio arbitrario SA, si descriva una circonferenza, e si abbassino dai punti A e D le rette Aa, Dd perpendicolari a SB e ad SC.

L'angolo BSC essendo il maggiore dei tre, BC sarà più grande di ciascuno degli archi BA, CD; e siccome $Ba=BA$, così si vede che il punto a cade fra B e C; lo stesso avviene del punto d.

Si ha inoltre per ipotesi

$$BSC<ASB+CSD,$$

e per conseguenza

$$BC<+AB+CD;$$

dunque siccome $Ba=BA$ e $Cd=CD$, così il punto a trovasi sull'arco BC alla destra di d.

Infine la somma delle tre facce date essendo minore di 4 retti, il punto D si troverà dopo del punto C sulla circonferenza percorsa a partire dal punto A nel senso ABC.

Il punto d essendo così situato fra A ed a ed il punto a fra d e D, le corde Aa, Dd si taglieranno nell' interno della circonferenza.

Ciò posto, s' innalzi dal punto O una perpendicolare OM al piano BSC; e nel piano IOM si descriva col punto I come centro, e con AI per raggio, una circonferenza che taglierà OM in un punto M. e si conduca MS ; dico che l' angolo triedro SBMC è quello formato con le tre facce date.

Infatti, tirate MI ed MK, i triangoli ASI, MIS rettangoli in I, hanno SI di comune ed AI=IM: dunque essi sono uguali, e si ha l'angolo ASI=ISM. Similmente i triangoli rettangoli MSK, DSK sono uguali, perchè il lato SK è comune ed i lati SD, SM sono uguali tutti e due a SA, dunque l' angolo MSK=DSK.

Scolio. Per formare un angolo triedro con tre angoli diedri dati a, b, c, è necessario e sufficiente che la loro somma sia compresa fra 2 retti e 6 retti e che il più piccolo aumentato di 2 retti, sia maggiore della somma degli altri due.

Si sa già che queste condizioni sono necessarie; e dippiù esse sono sufficienti; poichè si può facilmente vedere che, quando queste condizioni sonosi verificate, si può costruire l' angolo triedro supplementare con le facce 2^r-a, 2^r-b, 2^r-c; e quindi si potrà anche costruire un angolo triedro con i tre angoli diedri a, b, c.

LIBRO VI.

DEI POLIEDRI.

—

DEFINIZIONI.

I. Si chiama *solido poliedro* o semplicemente *poliedro*, ogni solido terminato da piani o da facce piane. (Questi piani sono necessariamente terminati da linee rette). Si chiama in particolare *tetraedro* il solido che ha quattro facce; *esaedro* quello che ne ha sei; *ottaedro* quello che ne ha otto; *dodecaedro* quello che ne ha dodici, *icosaedro* quello che ne ha venti, etc.

Il tetraedro è il più semplice dei poliedri; poichè vi bisognano almeno tre piani per formare un angolo solido, e questi tre piani lasciano uno spazio vuoto che per essere chiuso esige almeno un quarto piano.

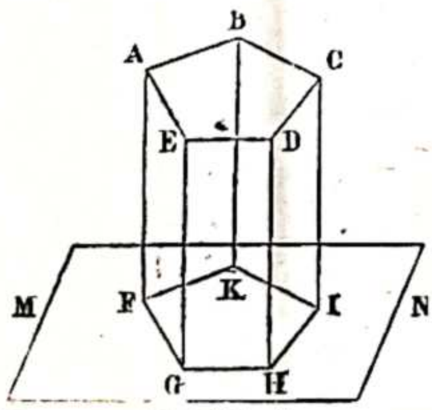
II. L'intersezione di due facce adiacenti di un poliedro, si chiama *lato* o *costola* del poliedro.

III. Chiamasi *poliedro regolare* quello che ha per facce poligoni regolari uguali ed ha tutti gli angoli solidi uguali fra loro. Questi poliedri sono in numero di cinque (*Vedi l'appendice ai libri VI e VII*).

IV. Il *prisma* è un solido di cui tutte le facce laterali sono parallelogrammi ed è terminato da ambo le parti da due poligoni uguali e paralleli

Per costruire questo solido sia ABCDE un poligono qualunque ed MN un piano parallelo ad ABCDE.

Dal punto A si tiri la retta AF che incontra il piano MN in F; dai punti B, C, D, E si conducano le parallele ad AF fino all'incontro dello stesso piano MN; ed infine si congiungano i punti d'incontro per mezzo delle rette FG, GH, HI: dico che il solido compreso dai due poligoni ABCDE, FGHIK è un prisma. Infatti, essendo AF e GE uguali e parallele, ne segue che la figura AEGF è un parallelogrammo; per la stessa ra-



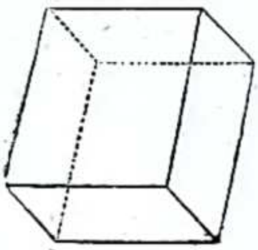
rallelogrammo; per la stessa ragione tutte le altre facce laterali sono parallelogrammi; ed in quando ai due poligoni ABCDE, FGHIK, essi avendo i loro lati uguali e paralleli, sono uguali.

V. I poligoni uguali e paralleli ABCDE . FGHIK chiamansi *le basi del prisma;* gli altri piani parallelogrammi presi insieme costituiscono la *superficie laterale* o *convessa del prisma*, e le rette uguali AF, BK, CI, etc. chiamansi *lati* del prisma.

VI. L' altezza di un prisma è la distanza delle sue due basi o la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sul piano della base inferiore.

VII. Un *prisma* è *retto* allorchè i lati AF , BK , etc. , sono perpendicolari ai piani delle basi , ed in tal caso ciascun lato è uguale all' altezza del prisma (*). In ogni altro caso il prisma è *obbliquo* e l' altezza è minore del lato.

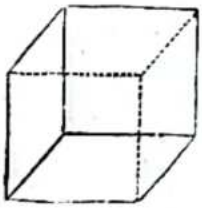
VIII. Un *prisma* è *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*, *esagonale* , etc., secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono, etc.



IX. Il prisma che ha per base un parallelogrammo, ha tutte le sue facce parallelogramme, e si chiama *parallelepipedo*.

Il *parallelepipedo* è *retto* allorchè le costole sono perpendicolari alla base.

Se inoltre la base è un rettangolo , il parallelepipedo si dice *rettangolo*., ed è evidente che in questo caso tutte le facce sono rettangoli (**).



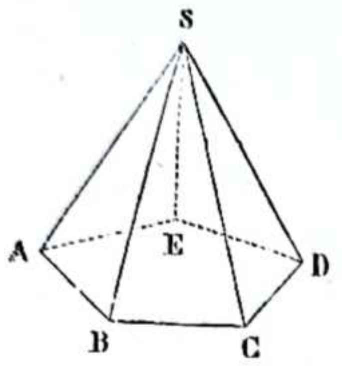
X. Fra i parallelepipedi rettangoli , si distingue il *cubo* o *esaedro regolare*, composto di sei quadrati uguali.

XI. La *piramide* è il solido che nasce dall' unire un punto S con tutti i vertici di un poligono piano ABCDE

(*) Nel prisma retto le facce sono rettangoli in luogo di parallelogrammi. *N. del Trad.*

(**) Anche il parallelepipedo retto ha le facce rettangolari, ma le basi sono parallelogrammi : mentre nel parallelepipedo rettangolo anche le basi sono rettangoli.

N. del Trad.



Il poligono ABCDE si c iama *base* della piramide, il punto S è il *vertice*, e l'assieme dei triangoli ASB, BSC, etc., forma la *superficie convessa* o *laterale* della piramide.

XII. L' *altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base, prolungato se occorre.

XIII. La piramide è *triangolare*, *quadrangolare*, etc., secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, etc.

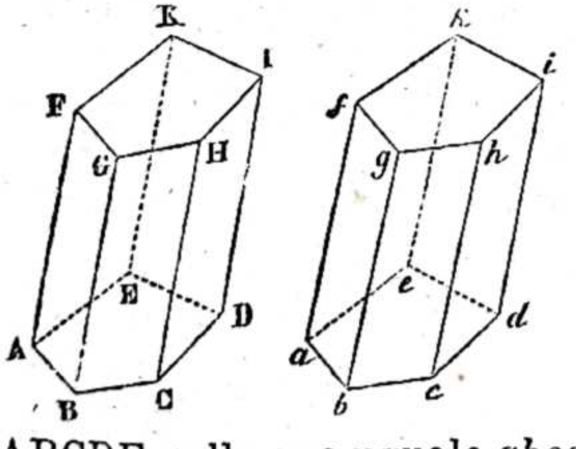
XIV. Una piramide è *regolare* allorchè la base è un poligono regolare, e nello stesso tempo la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base passa pel centro di questa base; questa retta si chiama allora *asse* della piramide.

XV. La *diagonale* di un poliedro è la retta che unisce i vertici di due angoli solidi non adiacenti.

I poliedri che noi considereremo sono tali che il piano di una faccia qualunque rimane tutto il solido da una stessa parte, in tal caso le superficie di questi poliedri si dicono *convesse*, ed i poliedri stessi si chiamano *poliedri convessi*.

PROPOSIZIONE I.

Teorema. *Due prismi sono uguali allorchè hanno un angolo solido compreso fra tre facce rispettivamente uguali e similmente disposte.*



Sia la base ABCDE uguale alla base *abcde*, il parallelogrammo ABGF uguale al parallelogrammo *abgf* ed il parallelogrammo BCHG uguale al parallelogrammo *bchg*; dico che il prisma ABCI sarà uguale al prisma *abci*.

Poichè, se si situa la base ABCDE sulla sua uguale *abcde*, queste due basi coincideranno: ma i tre angoli piani che formano l'angolo solido B sono uguali rispettivamente ai tre angoli piani che formano l' angolo solido b, cioè $ABC = abc$, $ABG = abg$, e $GBC=gbc$, ed inoltre questi angoli sono similmente disposti; dunque gli angoli solidi B e b sono uguali, e per conseguenza il lato BG cadrà sul suo uguale bg; similmente si dimostra che per i parallelogrammi uguali ABGF, e $abgf$, il lato GF deve cadere sul suo uguale gf come pure GH su di gh, e però la base superiore FGHIK coinciderà interamente colla sua uguale $fghik$ ed i due solidi si confonderanno in un solo.

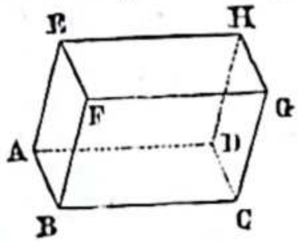
Osservazione. Se i prismi sono retti, il teorema prende la seguente forma molto più semplice.

Due prismi retti che hanno basi uguali ed altezze uguali sono uguali.

Infatti, portando la base $abcde$ sulla sua uguale ABCDE, l' altezza bg coinciderà con l' altezza BG, come pure ch coinciderà con CH, e così di seguito: dunque i due prismi coincideranno

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA. *In ogni parallelepipedo, le facce opposte sono uguali e parallele.*



Secondo la definizione di questo solido, le basi ABCD, EFGH essendo parallelogrammi uguali e paralleli; resta a dimostrare che lo stesso avviene per due facce laterali opposte, come AEHD, BFGC. Infatti, per essere ABCD un parallelogrammo, sarà AD uguale e parallela a BC, per una ragione simile AE è uguale e parallela a BF; dunque l'angolo DAE è uguale all'angolo CBF ed il piano DAE è parallelo a CBF, e perciò anche il parallelogrammo DAEH è uguale al parallelogrammo CBFG. Si dimostrerà similmente che i parallelogrammi opposti ABFE, DCGH sono uguali e paralleli.

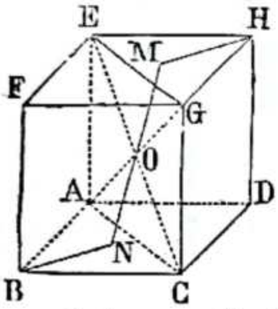
Corollario. Siccome il parallelepipedo è un solido compreso fra sei parallelogrammi di cui gli opposti sono uguali e paralleli, così ne risulta che una faccia qualunque e la sua opposta possono essere prese per basi del parallelepipedo.

Scolio. Date tre rette AB, AE, AD che passano per uno stesso punto A, e fanno fra loro angoli dati, si può sopra di esse costruire un parallelepipedo. Per ciò fare bisognerà condurre per l'estremità di ogni retta un piano parallelo al piano delle altre due; cioè, dal punto B un piano parallelo a DAE, dal punto D un piano parallelo a BAE e dal punto E un piano parallelo a BAD; gl'incontri scambievoli di questi piani formeranno il parallelepipedo richiesto.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA. *In ogni parallelepipedo, le diagonali si tagliano scambievolmente in due parti uguali.*

Infatti, condotte due diagonali EC, AG siccome AE è uguale e parallela a CG, così la figura AEGC è un parallelogrammo, e perciò le diagonali EC, AG si tagliano



scambievolmente in due parti uguali. Si dimostrerà similmente che la diagonale EC ed un'altra DF si tagliano anche in due parti uguali; dunque le quattro diagonali si taglieranno scambievolmente in due parti uguali e nello stesso punto.

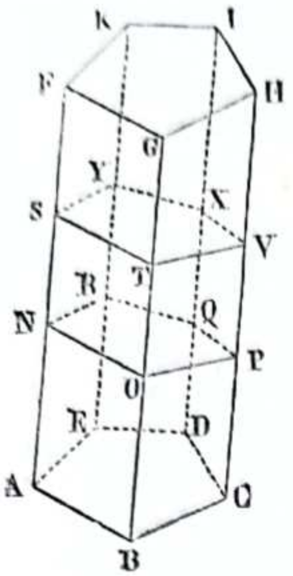
Questo punto O chiamasi *centro di figura* del parallelepipedo, perchè ogni retta MON che passa per questo punto e termina da una parte e dall'altra alla superficie del solido, rimane divisa al punto O in due parti uguali.

Infatti, condotte le rette MH, NB; i triangoli MOH, NOB avranno il lato OH uguale al lato OB, l'angolo MOH uguale all'angolo NOB, e l'angolo MHO=OBN per le due rette MH, NB parallele come intersezioni di due piani paralleli con un terzo. Essendo dunque uguali i triangoli, sarà OM=ON.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA. *In ogni prisma* ABCI, *le sezioni* NOPQR, STVXY, *fatte da piani paralleli, sono poligoni uguali.*

Infatti, i lati NO, ST sono paralleli, come intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano ABGF; ma questi stessi lati sono compresi fra le parallele NS, ST che sono lati del prisma, dunque NO è uguale ad OT. Per una simile ragione i lati OP PQ, QR etc., della se-

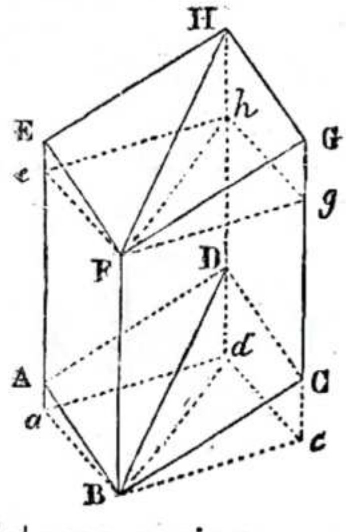


zione NOPQR sono uguali rispettivamente ai lati TV, VX, XY, etc., della sezione STVXY. Inoltre i lati uguali essendo nello stesso tempo paralleli, ne segue che gli angoli NOP, OPQ, etc., della prima sezione sono uguali rispettivamente agli angoli STV, TVX, etc., della secunda; e però le due sezioni NOPQR, STVXY sono ooligoni uguali.

Corollario. Ogni sezione fatta in un prisma parallelamente alla sua base, è uguale a questa base.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA. *Il piano che passa per due lati opposti* FB, DH *del paraltelepipedo* AG, *decompoue questo parallelepipede in due prismi triangolari equivalenti*.



Dai vertici B e F, si conducano perpendicolarmente al lato BF i piani *Cadc, Fehg*, che incontreranno da uua parte in *a*. *d*, *c* e dall' altra in *e*, *h*, *g* i tre altri lati AE, DH, CG dello stesso parallelepipedo; le sezioni *Badc*, *Fehg* saranno parallelogrammi uguali; infatti queste sezioni sono uguali, perchè fatte da piani perpendicolari ad una stessa retta e per conseguenza paralleli; e sono parallelogrammi perchè due lati opposti *aB*, *dc* di ona stessa sezione sono le intersezioni di due piani paralleli ABFE, DCGH con un terzo.

Per una simile ragione, la figura B*ae*F è un parallelogrammo come pure le altre facce laterali BF*gc*, *cdhg* *adhe* del solido B*adc* F*ehg*: dunque questo solido è uu prisma ed è retto, perchè il lato BF è perpendicolare al piano della base

Ciò posto; se per i due spigoli BF, DH si fa passare un piano, questo dividerà il prisma retto B*h* in due prismi triangolari retti *a*B*de*F*h*, B*dc*F*hg* ed il prisma obbliquo in due prismi triangolari obbliqui: ora io dico che il prisma triangolare obbliquo ABCDFH è equivalente al prisma triangolare retto *a*B*de*F*h*.

Infatti, questi due prismi avendo una parte comune ABD*he*F, rimarrà a dimostrare che le rimanenti parti, cioè i solidi B*a*AD*d*, F*e*EH*h* sono equivalenti fra loro.

Ora, in virtù dei parallelogrammi ABFE, *a*BF*e* i lati AE, *ae*, essendo uguali alla loro parallela BF, sono uguali fra loro, e però togliendone la parte comune A*e* resterà A*a*=C*e*.

Si dimostrerà similmente che D*d*=H*h*.

Dopo di ciò, per operare la sovrapposizione dei due solidi B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, s'immagini la base F*eh* sulla sua uguale B*ad*, allora il punto *e* cadendo in *a*, ed il punto *h* in *d*, i lati *e*E, *h*H, cadranno sui loro uguali *a*A, *d*D, essendo essi perpendicolari allo stesso piano B*ad*. Dunque i due solidi dei quali si tratta coincideranno interamente l'uno coll'altro e perciò il prisma obbliquo BADFEH è equivalente al prisma retto B*ad*F*eh*.

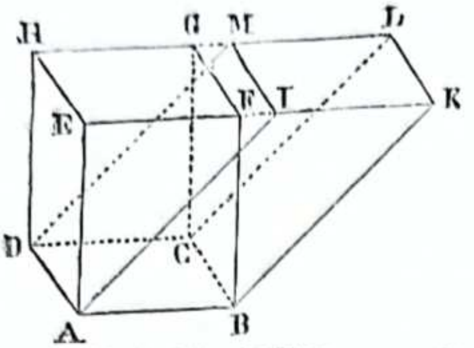
Si dimostrerà similmente che il prisma obbliquo BDCF HG è equivalente al prisma retto B*dc*F*hg*: ma i due prismi retti B*ad*F*ch*, B*dc*F*hg* sono uguali fra loro, poichè hanno la stessa altezza e le loro basi sono le metà di uno stesso parallelogrammo (cor. I.). Dunque i due prismi triangolari BADFEH, BDCFHG, equivalenti a due prismi uguali, sono equivalenti fra loro.

Corollario I. Ogni prisma triangolare ABDHEF è la metà del parallelepipedo AG costruito con lo stesso angolo solido A, ed avente i medesimi lati AB, AD.

Corollario II. Ogni prisma triangolare obbliquo, e per conseguenza ogni prisma obbliquo è equivalente ad un prisma retto avente per base la sezione fatta perpendicolarmente alle costole del prisma (che si chiama *sezione retta*) e per altezza una delle costole laterali del prisma.

PROPOSIZIONE VI

TEOREMA. *Due parallelepipedi* AG, AL *che hanno una base comune* ABCD, *e le loro basi superiori* EFGH, IKLM *situate in uno stesso piano e comprese fra le stesse parallele* EK, HL, *sono equivalenti.*



Dico in primo luogo che il prisma triangolare AEIDHM è uguale al prisma triangolare BFKCGL.

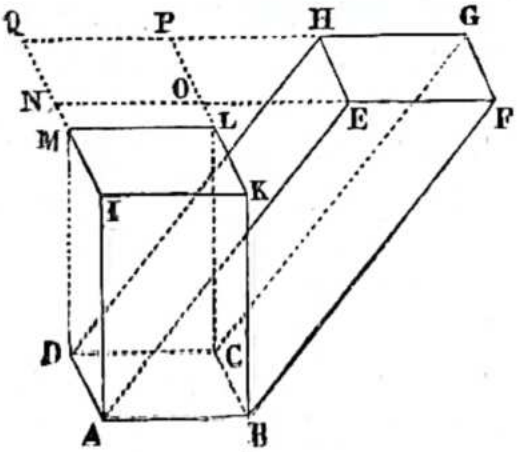
Infatti, essendo AE uguale a BF come lati opposti di un parallelogrammo, AI uguale a BK per la stessa ragione; e gli angoli EAI, FBK uguali per avere i lati paralleli; i triangoli EAI, FBK sono uguali.

Inoltre i parallelogrammi AH, BG sono uguali come facce opposte di un parallelepipedo, ed i parallelogrammi IH, KG sono uguali perchè EH=FG, EI=FK e l' angolo HEI=GFK; e però le tre facce che s'intersecano in E essendo rispettivamente uguali alle facce che s'intersecano in F, ne segue che gli angoli solidi E, F, per avere gli angoli piani rispettivamente uguali e similmente disposti, sono uguali (prop. I.) e quindi anche i prismi AEIDHM, BFKCGL saranno uguali.

Ora se dal solido AL si toglie il prisma AEM, rimane il parallelepipedo AIL, e se dallo stesso solido AL si toglie il prisma BFL, rimane il parallelepipedo AEG; dunque è vero che i due parallelepipedi AIL, AEG sono equivalenti fra loro.

PROPOSIZIONE VII.

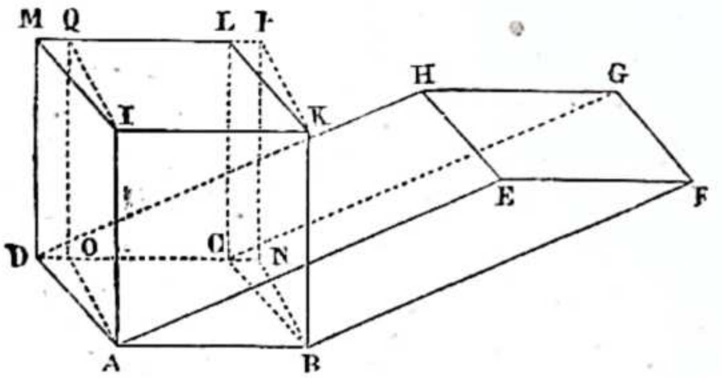
Teorema. *Due parallelepipedi della stessa base e della stessa altezza sono equivalenti.*



Sia ABCD la base comune dei due parallelepipedi AG, AL; siccome essi hanno la stessa altezza, così le loro basi superiori EFGH, IKLM debbono trovarsi nello stesso piano. Inoltre per essere i lati EF, AB uguali e paralleli, come pure IK e AB, sarà EF è uguale e parallela ad IK; per una ragione simile GF è uguale e parallela ad LK: e però se si prolunghino i lati EF, HG come pure LK, IM fino a che gli uni e gli altri formino colla loro intersezione il parallelogrammo NOPQ, è chiaro che questo parallelogrammo sarà uguale a ciascuna delle basi EFGH, IKLM. Si potrà dunque immaginare un terzo parallelepipedo che, colla stessa base inferiore ABCD, abbia per base superiore NOPQ; ed allora questo terzo parallelepipedo sarà equivalente tanto al parallelepipedo AG (prop. 6); poichè avendo la stessa base inferiore, le basi superiori sono comprese in uno stesso piano e fra le parallele GQ, FN; quanto al parallelepipedo AL per la medesima ragione. È quindi vero che i due parallelepipedi AG, AL che hanno la stessa base e la stessa altezza, sono equivalenti.

PROPOSIZIONE VIII.

Teorema. *Ogni parallelepipedo può essere trasformato in un parallelepipedo rettangolo equivalente che abbia la stessa altezza ed una base equivalente.*

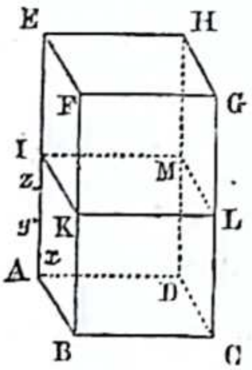


Sia AG il parallelepipedo proposto; conducendo da' punti A, B, C, D le rette AI, BK, CL, DM perpendicolari al piano della base, si formerà il parallelepipedo AL equivalente al parallelepipedo AG, e di cui le facce laterali sono rettangoli; e però se la base ABCD è pure un rettangolo, sarà AL il parallelepipedo rettangolo equivalente al parallelepipedo proposto AG.

Nel caso poi che ABCD non è un rettangolo, si conducano AO, BN perpendicolari a CD, ed indi OQ, NP perpendicolari alla base; si formerà così il solido ABNOIKPQ che sarà un parallelepipedo rettangolo: giacchè per costruzione, la base ABNO e la sua opposta IKPQ sono rettangoli; come pure sono rettangoli le facce laterali, per essere le costole AI, OQ etc., perpendicolari al piano della base. Ma i due parallelepipedi AP, AL possono considerarsi come aventi la stessa base ABKI e la stessa altezza AO, dunque essi sono equivalenti, e perciò il parallelepipedo AG che si era prima trasformato in un parallelepipedo retto equivalente AL, si troverà nuovamente trasformato in un parallelepipedo rettangolo equivalente AP, che ha la stessa altezza AI, e di cui la base ABNO è equivalente alla base ABCD.

PROPOSIZIONE IX.

Teorema. *Due parallelepipedi rettangoli* AG, AL *che hanno la stessa base* ABCD, *stanno fra loro come le loro altezze* AE, AI.



Suppongasi in primo luogo che le altezze AE, AI stiano fra loro come due numeri interi, per esempio, come 15 sta a 8. Se si divide AE in 15 parti uguali delle quali AI ne conterrà 8, e dai punti di divisione x, y, z, etc., si conducono dei piani paralleli alla base, questi piani divideranno il solido AG in 15 parallelepipedi parziali che saranno tutti uguali, avendo le altezze uguali per costruzione, e le basi uguali perchè ogni sezione MIKL fatta in un prisma parallelamente alla sua base ABCD è uguale a questa base (prop. 4). Ma di questi 15 parallelepipedi uguali, 8 sono contenuti in AL, dunque anche il solido AG sta al solido AL come 15 sta a 8, o come l'altezza AE sta all'altezza AI.

Se le altezze AE e AI fossero incommensurabili, si dimostrerebbe come precedentemente (lib. II prop. 18), che il loro rapporto sarà sempre uguale a quello dei medesimi parallelepipedi.

Osservazione. In un parallelepipedo rettangolo, se a, b, c sono tre costole contigue, e si prende una di esse per altezza, le due altre formeranno le due dimensioni della base.

PROPOSIZIONE X.

Teorema. *Due parallelepipedi rettangoli* P *e* P′ *che hanno una dimensione di comune, stanno fra loro come i prodotti delle altre due dimensioni; o altrimenti due parallelepipedi rettangoli della stessa altezza stanno fra loro come le basi.*

Sieno a, b, c le tre dimensioni del parallelepipedo P, a', b', c' quelle di P′.

Si costruisca un terzo parallelepipedo rettangolo P″ di cui le dimensioni sieno a, b, c'.

I due parallelepipedi P e P″ avendo due dimensioni di comune a e b, stanno fra loro come le altezze c e c'; sicchè si ha;

$$\frac{P}{P'}=\frac{c}{c'}.$$

Per la stessa ragione si ha

$$\frac{P''}{P'}=\frac{b}{b'}.$$

Moltiplicando per ordine, e dividendo per P″ i due termini del primo rapporto, si ricava

$$\frac{P}{P'}=\frac{b\times c}{b'\times c'}. \qquad (1)$$

Si sa d' altronde che le basi B, B′ dei due parallelepipedi stanno fra loro come i prodotti $b\times c$, $b'\times c'$ (prop. 4 del libro III); dunque anche:

$$\frac{P}{P'}=\frac{B}{B'} \qquad (2)$$

PROPOSIZIONE XI.

Teorema. *Due paralleledipedi rettangoli* P *e* P′ *stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni.*

Siano H l' altezza del parallelepipedo P, a e b le due dimensioni della base B.

Siano similmente H′ l' altezza del parallelepipedo P′, a' b' le due dimensioni della base B′.

Sia finalmente P″ un terzo parallelepipedo avente per altezza H e per base B′.

I parallelepipedi P e P″ avendo la stessa altezza, si ha dal teorema precedente

$$\frac{P}{P''}=\frac{H}{H'}$$

I parallelepipedi P″ e P′ avendo la stessa base, si ha (prop. 9).

$$\frac{P''}{P'}=\frac{H}{H'}.$$

Moltiplicando per ordine e dividendo i due termini del primo rapporto per P″, si ricava

$$\frac{P}{P'}=\frac{B\times H}{B'\times H}. \qquad (1)$$

Si sa d' altronde che le basi B e B′ stanno fra loro come i prodotti $a\times b$, $a'\times b'$,
dunque si ha pure

$$\frac{B\times H}{B'\times H'}=\frac{a\times b\times H}{a'\times b'\times H'};$$

donde si conchiude

$$\frac{P}{P'}=\frac{a\times b\times H}{a'\times b'\times H'} \qquad (2)$$

MISURA DEL PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO.

Misurare un parallelepipedo rettangolo P significa trovare il suo rapporto ad un altro parallelepipedo rettangolo P′ preso per unità: ma dalla proporzione (2) si ricava che per ottenere questo rapporto bisogna valutare a, b, H, a', b', H′ con una stessa unità lineare e dividere il prodotto dei tre primi numeri per il prodotto degli altri tre; e però questo calcolo diverrà molto più semplice coll'assumere per unità del volume P′ il cubo che ha per lato l' unità lineare; poichè allora i numeri che rappresentano a', b', H′ riducendosi all'unità, la proporzione (2) diviene:

$$\frac{P}{P'}=\frac{a\times b\times H}{1};$$

donde si deduce che la misura del parallelepipedo rettangolo è il prodotto delle sue tre dimensioni.

E siccome il prodotto $a\times b$ indica quante volte la base B del parallelepipedo P contiene il quadrato fatto sull'unità lineare; così la misura del parallelepipedo rettangolo può dirsi anche esser il prodotto della sua base per la sua altezza (prendendo per unità di superficie il quadrato fatto sull'unità di lunghezza e per unità di volume il cubo costruito sopra questa stessa unità).

Applicazioni—1.° Sieno $a=2^m,51$, $b=3^m,25$, $H=2^m,45$; la misura del parallelepipedo sarà

$$2,51\times3,25\times2,45 \text{ o } 19,985875.$$

Il volume del parallelepipedo conterrà dunque 19 metri cubi, più 985875 milionesimi di metro cubo, ovvero 19 metri cubi, 985 decimetri cubi, 875 centimetri cubi, giacchè il decimetro cubo è la millesima parte del metro cubo ed il centimetro cubo ne è la milionesima parte.

2.° Sieno $B=25^{m.q.},51$ e $H=12^{m.},5$; la misura del parallelepipedo sarà $25,51\times12,5$ o $318,875$; il volume del parallelepipedo rettangolo sarà adunque $318^{m.c.},875$.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA—*La misura di un parallelepipedo, ed in generale la misura di un prisma qualunque, è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Poichè 1.° un parallelepipedo qualunque è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo della stessa altezza e di base equivalente (prop. 8) ma la misura di questo è la sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque anche la misura del primo sarà il prodotto della sua base per la sua altezza.

2.° Ogni prisma triangolare è la metà del parallelepipedo che ha la stessa altezza ed una base doppia (prop. 5); ma la misura di questo è la sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque quella del prisma triangolare è anche il prodotto della sua base, metà di quella del parallelepipedo, per la sua altezza.

3.° Un prisma qualunque può essere diviso in tanti prismi triangolari della stessa altezza per quanti sono i triangoli in cui si può scomporre il poligono che gli serve di base, ma la misura di ogni prisma triangolare è il prodotto della sua base per la sua altezza, e l'altezza è la stessa per tutti questi prismi; e però la somma di tutti i prismi parziali sarà uguale alla somma di tutti i triangoli che loro servono di basi, moltiplicata per l'altezza comune; il che vuol dire che la misura di un prisma qualunque è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. Un prisma qualunque essendo equivalente al prisma retto che ha per base la sezione retta e per altezza una delle costole, avrà anche per misura il prodotto della sezione retta per la lunghezza di una delle costole.

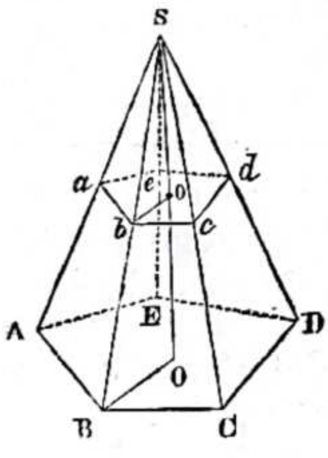
Corollario II. Se si paragonano due prismi che hanno la stessa altezza, i prodotti delle basi per le altezze staranno come le basi; dunque *due prismi della stessa altezza stanno fra loro come le basi*; e per una ragione simile, *due prismi della stessa base stanno fra loro come le loro altezze.*

PROPOSIZIONE XIII.

Teorema—*Se una piramide* SABCDE *è tagliata da un piano* abd *parallelo alla sua base.*

1.° *I lati* SA, SB, SC,.... *e l' altezza* SO *rimangono divisi proporzionalmente in* a, b, c,.... *e* o;

2.° *La sezione* abcde *è un poligono simile alla base* ABCDE.



Poichè 1.° i piani ABC, *abc* essendo paralleli, le loro intersezioni AB, *ab* con un terzo piano SAB, saranno parallele (Libro 5 prop. 15), e quindi i due triangoli SAB, S*ab* essendo simili, si ha la proporzione

$$\frac{SA}{Sa}=\frac{SB}{Sb},$$

similmente si dimostrebbe che

$$\frac{SB}{Sb}=\frac{SC}{Sc},$$

e così di seguito; dunque tutti lati SA, SB, SC, etc. sono tagliati proporzionalmente in *a, b, c,* etc.; ed in quanto all' altezza SO, essa è tagliata nello stesso rapporto nel punto *o;* giacchè BO, *bo* essendo parallele, si ha

$$\frac{SO}{So}=\frac{SB}{Sb}.$$

2.° Essendo ab parallela ad AB, bc a BC, cd a CD etc., sarà l' angolo abc=ABC, l' angolo bcd=BCD e così di seguito. Inoltre per i triangoli simili SAB, Sab si ha

$$\frac{AB}{ab}=\frac{SB}{Sb};$$

e per gli altri SBC, Sbc, si ha pure

$$\frac{SB}{Sb}=\frac{BC}{bc};$$

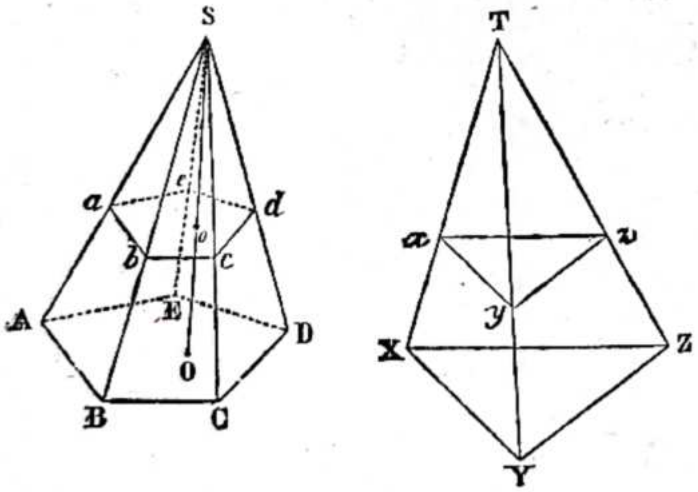
dunque

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}.$$

Similmente si dimostrebbe che

$$\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd},$$

e così di seguito ; dunque i poligoni ABCDE , $abcde$, avendo gli angoli rispettivamente uguali ed i lati omologhi proporzionali, sono simili.



Corollario. Siano SABCDE , TXYZ , due piramidi che hanno la stessa altezza e di cui le basi sono situate in uno stesso piano ; se si tagliano queste piramidi con uno stesso piano parallelo al piano delle basi, le sezioni $abcde$, xyz che ne risultano stanno fra loro come le basi ABCDE, XYZ.

Poichè i poligoni ABCDE, $abcde$ essendo simili, si ha

$$\frac{ABCDE}{abcde}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2};$$

ma

$$\frac{AB}{ab} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SO}{So},$$

dunque

$$\frac{ABCDE}{abcde} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{So}^2};$$

si avrebbe similmente

$$\frac{XYZ}{xyz} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO}^2};$$

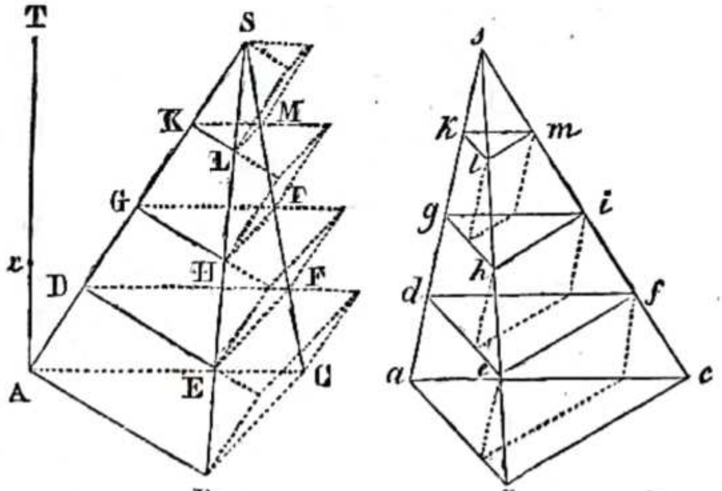
donde si conchiude che

$$\frac{ABCDE}{abcde} = \frac{XYZ}{xyz}.$$

Conseguenza di ciò è che se le basi sono equivalenti, le sezioni fatte ad uguale altezza sono anche equivalenti.

PROPOSIZIONE XIV.

Teorema. *Due piramidi triangolari che hanno basi equivalenti ed altezze uguali, sono equivalenti.*



Sieno SABC, *sabc* le due piramidi di cui le basi ABC, *abc* che si suppongono in uno stesso piano, sono equivalenti, e sia TA l'altezza comune. Se queste piramidi non sono equivalenti, si consideri *sabc* come la più piccola, e sia Ax l'altezza di un prisma che essendo costruito sulla base ABC, è uguale alla loro differenza.

Si divida l'altezza comune AT in parti uguali minori di Ax, e s'indichi con k una di queste parti; se per i punti di divisione dell'altezza si fanno passare dei piani paralleli al piano della base, si sa che le sezioni fatte da ciascuno di questi piani nelle due piramidi, come DEF e *def*, GHI e *ghi* etc., sono equivalenti (prop. 13). Ciò posto, sui triangoli ABC, DEF, GHI etc., presi per basi, si costruiscano dei prismi esterni che abbiano per costole le parti AD DG, GK etc. del lato SA; similmente sui triangoli *def*, *ghi*, *klm* etc. presi per basi, si costruiscano nella seconda piramide dei prismi interni che abbiano per costole le parti corrispondenti del lato *sa*; tutti questi prismi parziali avranno per altezza comune *h*; ma la somma dei prismi esterni della piramide SABC è maggiore di questa piramide, e la somma dei prismi interni della piramide *sabc* è minore di questa piramide; dunque per questa doppia ragione la differenza delle due somme di prismi dovrà essere maggiore della differenza delle due piramidi.

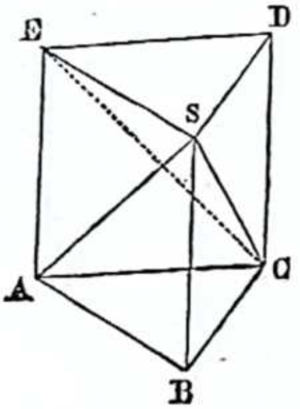
Ora a partire dalle basi ABC, *abc*, il secondo prisma esterno DEFG è equivalente al primo prisma interno *defa*, perchè avendo la stessa altezza *h*, le basi sono equivalenti; per la stessa ragione sono equivalenti il terzo prisma esterno GHIK ed il secondo interno *ghid*, il quarto esterno ed il terzo interno, e così di seguito fino all'ultimo: dunque i prismi esterni della piramide SABC, ad eccezione del prisma ABCD, avendo i loro equivalenti nei prismi interni della piramide *sabc*, sarà il prisma ABCD la differenza fra la somma dei prismi esterni della piramide ABC e la somma dei prismi interni della piramide *sabc*, ma la differenza di queste due somme è maggiore della differenza delle due piramidi; dovrebbe quindi il prisma ABCD esser maggiore del prisma ABCX, il che non avviene, poichè questi prismi avendo una stessa base ABC, l'altezza *h* del primo è minore dell' altezza Ax del secondo; e però l'ipotesi da cui si è partito non potendo aver luogo, ne segue che le due piramidi SABC, *sabc*, di basi equivalenti e di altezze uguali, sono equivalenti.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA. *Ogni piramide triangolare è il terzo del prisma triangolare della stessa base e della stessa altezza.*

Sieno SABC una piramide triangolare ed ABCDES un prisma triangolare della stessa base e della stessa altezza; dico che la piramide è il terzo del prisma.

Distaccando dal prisma la piramide SABC, resterà il solido SACDE, che si può considerare come una piramide quadrangolare avente per vertice S e per base il parallelogrammo ACDE; sicchè tirando la diagonale CE

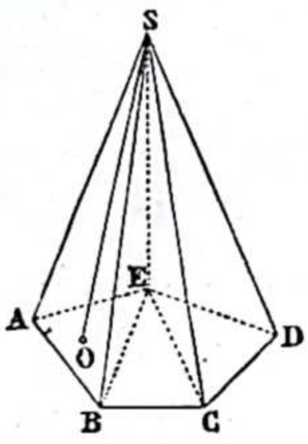


e conducendo il piano SCE, questo dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SDCE, le quali avendo per altezza comune la perpendicolare abbassata dal vertice S sul piano ACDE, e le basi uguali perchè metà dello stesso parallelogrammo, sono equivalenti; ma sono pure equivalenti la piramide SDCE e la piramide SABC perchè hanno le basi uguali ABC, DES, ed hanno anche la stessa altezza, essendo quest'altezza la distanza dei piani paralleli ABC, DES; dunque le tre piramidi SABC, SDCE, SACE che compongono il prisma ABD, essendo equivalenti fra loro, ne segue che la piramide SABC è il terzo del prisma ABD che ha la stessa base e la stessa altezza.

Corollario. La misura di una piramide triangolare è uguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA. *Ogni piramide* SABCDE *ha per misura il terzo del prodotto della sua base* ABCDE *per la sua altezza* SO.



Poichè facendo passare i piani SEB, SEC per le diagonali EB, EC, resterà la piramide poligonale SABCDE divisa in più piramidi triangolari che avranno tutte la stessa altezza SO; ma per il teorema precedente, ciascuna di queste piramidi si misura moltiplicando ognuna delle basi ABE, BCE, CDE, per il terzo della sua altezza SO; e però la somma delle piramidi triangolari, o la piramide poligonale SABCDE, avrà per misura la somma dei triangoli ABE, BCE, CDE, o il poligono ABCDE, moltiplicato per $\frac{1}{3}$ SO; restando così dimostrato che qualunque piramide ha per misura il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. Ogni piramide è il terzo del prisma della stessa base e della stessa altezze.

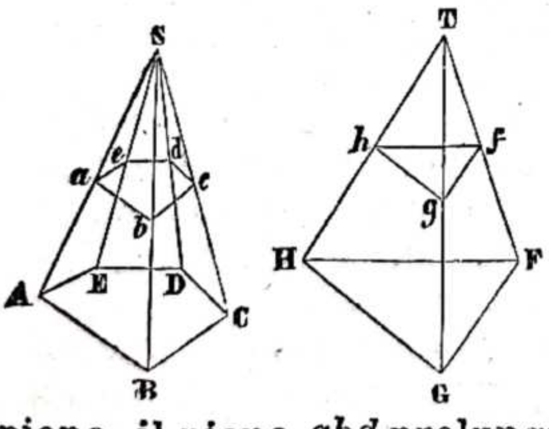
Corollario II. Due piramidi della stessa altezza stanno fra loro come le basi, e due piramidi della stessa base stanno fra loro come le altezze.

Scolio. Si può valutare il volume di ogni corpo poliedro col decomporlo in piramidi; e questa decomposizione può farsi in più maniere; una delle più semplici è di far passare i piani di divisione per il vertice di uno stesso angolo solido, perchè allora si avranno tante piramidi parziali quante sono le facce del poliedro meno quelle che formano l'angolo solido dal cui vertice partono i piani suddetti.

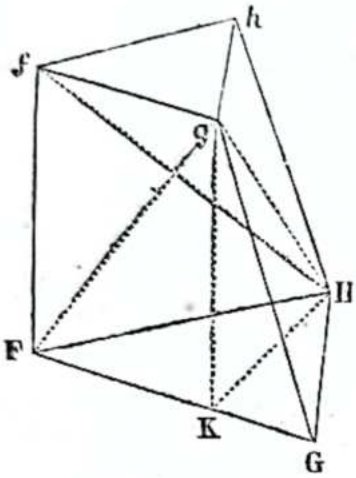
Queste piramidi poi possono decomporsi in tetraedri con dividere le loro basi in triangoli.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA. *Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base, il tronco che resta togliendo la piccola piramide, è uguale alla somma di tre piramidi che hanno per altezza comune l'altezza del tronco e per basi la base inferiore del tronco, la sua base superiore ed una media proporzionale fra queste due basi.*



Sia SABCDE una piramide tagliata dal piano *abd* parallelo alla base; sia TFGH una piramide triangolare di cui la base e l'altezza sieno uguali o equivalenti a quelle della piramide SABCDE. Potendo supporre le due basi situate sopra uno stesso piano, il piano *abd* prolungato determinerà nella piramide triangolare una sezione *fgh* alla stessa altezza del piano comune delle basi; donde risulta che la sezione *fgh* sta alla sezione *abd* come la base FGH sta alla base ABD (prop. 13); e siccome le basi sono equivalenti, così anche le sezioni saranno equivalenti. Essendo dunque equivalenti le piramidi S*abcde*, T*fgh*, non che le altre due SABCDE. TFGH per avere eguali altezze, e basi equivalenti, ne segue che anche i tronchi ABD*dab*, FGH*hfg* sono equivalenti; e per conseguenza basterà dimostrare la proposizione enunciata pel solo caso del tronco di piramide triangolare.



Sia FGH*hfg* un tronco di piramide triangolare a basi parallele: per i tre punti F, *g*, H conducendo il piano F*g*H, si staccherà dal tronco la piramide triangolare *g*FGH. Questa piramide ha per base la base inferiore FGH del tronco, ed ha per altezza l' altezza del tronco, perchè il vertice *g* sta sul piano della base superiore *fgh*.

Tolta questa piramide, resterà la piramide quadrangolare *gfh*HF, di cui il vertice è *g* e la base è *fh*HF: per i tre punti *f*, *g*, H si conduca il piano *fg*H, che dividerà la piramide quadrangolare nelle due triangolari *g*F*f*H, *gfh*H; ma quest' ultima ha per base la base superiore del tronco e per altezza quella del tronco per avere il vertice H sulla base inferiore, sarà dunque questa la seconda piramide di cui si compone il tronco; e quindi non rimane a considerare che la terza piramide *g*F*f*H.

Conducendo dal punto *g* la *g*K parallela ad *f*F, ed immaginando una novella piramide *f*FHK che ha per vertice K e per base F*f*H. queste due piramidi saranno equivalenti perchè hanno la base F*f*H di comune ed hanno la medesima altezza per trovarsi i vertici *g*, K sulla retta *g*K parallela al piano della base, ma la piramide *f*FKH può considerarsi come se avesse per base FKH, e per vertice il punto *f*: e però avendo la medesima altezza del tronco, non rimane a dimostrare che la sua base è media proporzionale fra quelle del tronco.

I triangoli FHK, *fgh*, avendo l' angolo in F eguale all'angolo in *f*, stanno fra di loro come i rettangoli dei due lati che comprendono gli angoli eguali; ma due di questi lati FK, *fg* sono eguali, dunque si avrà

$$\frac{FHK}{fgh}=\frac{FH}{fh}.$$

Per una simile ragione si ha pure

$$\frac{FHG}{FHK}=\frac{FG}{FK \text{ o pure } fg}.$$

Ma le seconde ragioni sono eguali per i triangoli simili FGH, *fgh;* quindi anche le rimanenti ragioni saranno eguali, e si avrà

$$\frac{FGH}{FHK}=\frac{FHK}{fgh}.$$

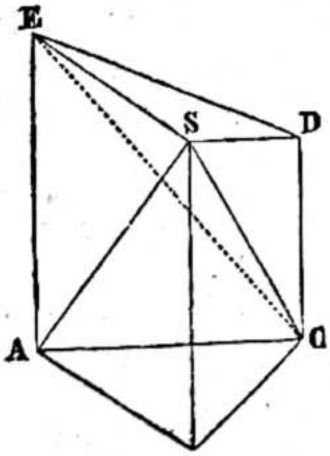
Dunque un tronco di piramide triangolare a basi parallele, equivale a tre piramidi che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e di cui le basi sono la base inferiore del tronco, la sua base superiore ed una media proporzionale fra queste due basi.

PROPOSIZIONE XVIII

Teorema. *Se si taglia un prisma triangolare di cui* ABC *è la base, con un piano* DES *inclinato a questa base, il solido* ABCDES *che ne risulta sarà uguale alla somma di tre piramidi che hanno per base comune la base* ABC *del tronco, e per vertici i vertici superiori* D, E, S *del medesimo tronco.*

Per i tre punti S, A, C si faccia passare il piano SAC che staccherà dal prisma troncato ABCDES la piramide triangolare SABC; questa piramide ha appunto per base ABC e per vertice S.

Tolta questa piramide, resterà la piramide quadrangolare SACDE di cui S è il vertice ed ACDE è la base. Per i tre punti S, E, C, conducasi ancora un piano SEC che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SCDE.



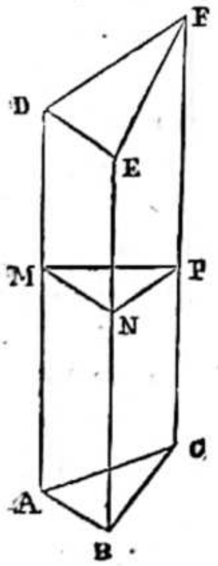
La piramide SAEC che ha per base il triangolo AEC e per vertice il punto S, è equivalente alla piramide EABC che ha la medesima base AEC e la medesima altezza, giacchè la linea SB dei vertici essendo parallela a ciascuna delle rette AE, CD è parallela al loro piano ACE; dunque la piramide EABC, la quale può essere considerata come avente per base ABC e per vertice il punto E, è la 2.ª piramide richiesta.

La terza piramide SCDE può essere trasformata prima in ASCD; poichè queste due piramidi avendo la stessa base SCD e la stessa altezza per essere AB parallela al piano SCD, sono equivalenti; ed in seguito in ABCD equivalente ad ASCD, giacchè avendo la stessa base ACD, hanno pure la medesim' altezza, per essere SB parallela al piano della base; ma quest' ultima piramide ABCD può riguardarsi come avente per base ABC e per vertice il punto D; dunque infine il prisma troncato ABCDES è uguale a tre piramidi che hanno per base comune ABC e di cui i vertici sono rispettivamente i punti D, E, S.

Corollario I. Se le costole AE, BS, CD sono perpendicolari al piano della base, esse saranno nello stesso tempo le altezze delle tre piramidi che compongono il prisma troncato, sicchè la misura del prisma troncato sarà espressa da $\frac{1}{3}$ ABC$\times$AE$+\frac{1}{3}$ ABC$\times$BS$+\frac{1}{3}$ ABC$\times$CD, quantità che si riduce a $\frac{1}{3}$ ABC$\times$(AE+BS+CD).

Corollario II. L' osservazione precedente conduce ad un' altra espressione della misura del prisma triangolare troncato.

Infatti; se ad un punto M della costola AD, si costruisca la sezione retta MNP, questa decomporrà il solido in due prismi triangolari troncati, che possono essere considerati come aventi per base comune MNP e di cui le costole sono perpendicolari al piano di questa base: ma il volume MNPDEF ha per misura



$$\text{MNP}\times\frac{(\text{DM}+\text{EN}+\text{FP})}{3};$$

ed il volume MNPABC ha per misura

$$\text{MN P}\times\frac{(\text{AM}+\text{NB}+\text{PC})}{3};$$

dunque il solido totale ha per misura

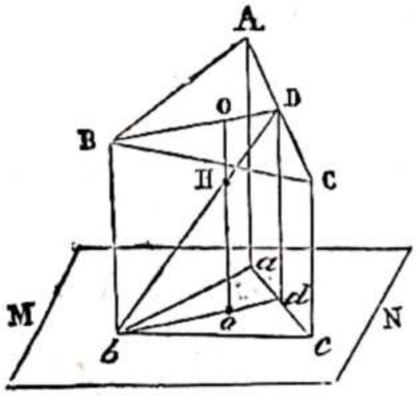
$$MNP \times \frac{(AD + BE + CF)}{3}.$$

E però si può dire che il volume di un prisma triangolare troncato ha per misura il prodotto della sezione retta per il terzo della somma delle tre costole.

Corollario III. Si può anche trovare un' altra espressione del volume del prisma triangolare troncato appoggiandosi sul seguente teorema, che crediamo utile dimostrare.

Se dai tre vertici del triangolo ABC si abbassano le perpendicolari sul piano MN, e se ne abbassa un' altra dal punto d'incontro O delle mediane del triangolo ABC (*), si avrà l'eguaglianza

$$Oo = \frac{Aa + Bb + Cc}{3}.$$



È da osservarsi in primo luogo che il punto O è situato ai due terzi della mediana BD a partire dal punto B, (**) dopo di che abbassata dal punto D la perpendicolare Dd sul piano MN, tirata la retta bod, ed infine condotta la bD, pel trapezio AC ac si ha primieramente

$2Dd = Aa + Cc$ (Scolio della pr. 7, lib. 3.) (1)

(*) Questo punto d' incontro è il centro di gravità dell' area del triangolo.

(**) Infatti se s' immagini tirata la retta DE che divida per metà i due lati AC, AB, essa risulterà parallela al terzo lato BC (prop. 17 lib. 3); e si avranno le due coppie di triangoli simili ABC, AED; e BOC, EOD, dai quali avendosi le due proporzioni $\frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD}$, $\frac{BC}{ED} = \frac{BO}{OD}$, se ne ricaverà l' altra $\frac{AC}{AD} = \frac{BO}{OD}$; ma per ipotesi AC=2AD, dunque sarà pure OB=2OD=2(BD−BO)=2BD−2OB; ovvero 3OB=2BD, o infine O$=\frac{2}{3}$BD. *N. del Trad.*

I triangoli simili DOH, DBb danno in seguito la proporzione

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{B}b}=\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{DB}}=\frac{1}{3},\ \text{donde}\ \mathrm{OH}=\frac{\mathrm{B}b}{3} \qquad (2)$$

I triangoli simili bHo, bDd danno infine la proporzione

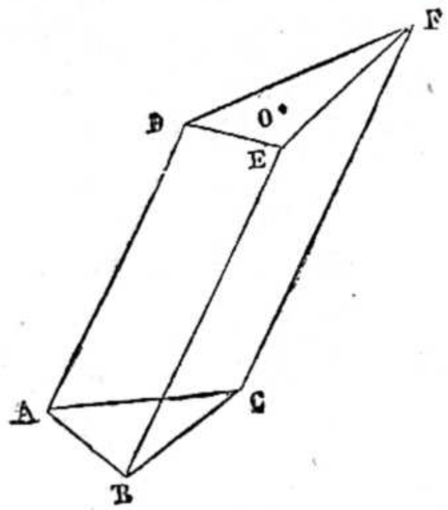
$$\frac{\mathrm{H}o}{\mathrm{D}d}=\frac{bo}{bd}=\frac{2}{3},\ \text{donde}\ \mathrm{H}o=\frac{2\mathrm{D}d}{3}. \qquad (3)$$

Addizionando le eguaglianze (2) e (3), si ha

$$\mathrm{O}o=\frac{\mathrm{B}b+2\mathrm{D}d}{3},$$

e sostituendo in quest'ultima in luogo di 2Dd il suo valore ricavato dall'eguaglianza (1), si ha

$$\mathrm{O}o=\frac{\mathrm{B}b+\mathrm{A}a+\mathrm{C}c}{3}.$$



Ciò premesso, se indichiamo con h, h', h'' le perpendicolari abbassate dai punti D, E, F sul piano ABC, e con H la perpendicolare abbassata dal centro di gravità del triangolo DEF sullo stesso piano, si avrà pel teorema 18

$$\text{volume ABCDEF}=\text{ABC}\times\frac{(h+h'+h'')}{3};$$

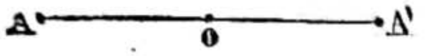
e però in virtù del teorema dimostrato, si avrà

$$\text{volume ABCDEF}=\text{ABC}\times\text{H}.$$

Il volume adunque di un prisma triangolare troncato ha per misura la sua base moltiplicata per la perpendicolare abbassata su di essa dal centro di gravità dell'altra base.

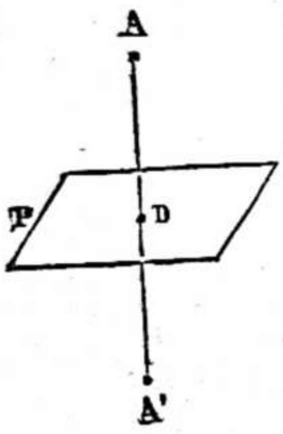
Osservazione. Quest' ultimo teorema s' applica ugualmente al volume di un prisma troncato a base qualunque: ma non può essere stabilito che da considerazioni estranee alla geometria pura.

TEORIA DELLA SIMMETRIA



I. Due punti A, A′ sono simmetrici per rapporto ad un terzo punto O, allorchè la retta AA′ passa per il punto O, e vi rimane divisa in due parti uguali.

Il punto O chiamasi *centro di simmetria.*

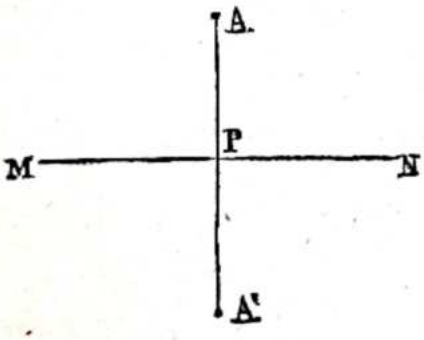


II. Due punti A, A′ sono simmetrici per rapporto ad un piano P, allorchè essi sono situati sopra una stessa perpendicolare al piano P, e ad uguale distanza da questo piano. Il piano P è in questo caso un piano di simmetria.

III. Infine due punti A, A′ situati su di una stessa perpendicolare alla retta MN e ad uguale distanza da questa retta si dicono simmetrici per rapporto alla medesima retta, la quale chiamasi *asse di simmetria.*

IV. Due figure qualunque sono simmetriche per rapporto ad un punto, ad un piano o ad una retta, allorchè ogni punto di una di queste figure ha il suo simmetrico sull'altra.

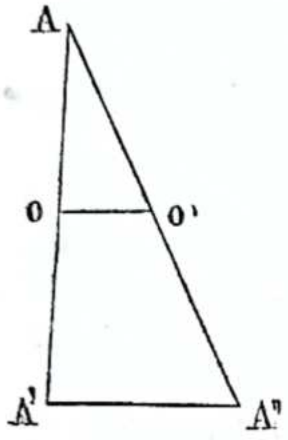
V. Due figure F, F′ simmetriche per rapporto ad una retta MN, sono uguali; poichè se si fa girare la figura F intorno ad MN, in modo che uno qualunque dei suoi punti A descriva un arco di 180°, la retta AP s'applicherà sopra A′P ed il punto A coinciderà col suo simmetrico A′.



Non rimane adunque ad occuparci che della sola simmetria per rapporto ad un piano, e per rapporto ad un punto.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA. *Se due figure* F′, F″ *sono simmetriche alla figura* F *per rapporto ai centri* O *e* O′, *queste figure possono esattamente sovrapporsi.*



Infatti, sia A un punto della figura F, A′ il suo simmetrico per rapporto al centro O, e A″ il suo simmetrico per rapporto al centro O′; se si conducono le rette OO′ ed A′A″, si vede che A′A″ è parallela ad OO′ ed è il doppio di questa retta.

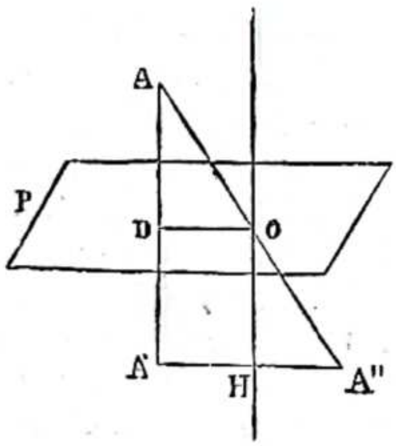
La figura F″ non è dunque altro che la figura F′ che si è spostata parallelamente ad OO′ d'una quantità uguale a 2 volte OO′.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA. *Una figura* F′, *simmetrica di* F *per rapporto ad un piano* P, *è uguale alla figura* F″, *simmetrica di* F *per rapporto ad un punto qualunque* O *del piano* P.

Sia A un punto della figura F, A′ il suo omologo nella figura F′ ed A″ il suo omologo nella figura F″.

Se si tirano le rette OD, A′A″ e l'altra OH perpendicolare



al piano P, si vede che quest'ultima retta è perpendicolare ad A′A″ e la divide in due parti uguali: e però le due figure F′ ed F″ risultando simmetriche per rapporto ad OH, sono uguali.

Corollario I. La figura F′ simmetrica di F per rapporto al piano P, è uguale alla figura F″ simmetrica di F per rapporto ad un centro qualunque O.

Corollario II. Le figure F′ e F″ simmetriche di F per rapporto a due piani P e Q, sono uguali; poichè esse sono uguali alla figura simmetrica di F per rapporto ad un centro preso arbitrariamente.

Osservazione. Una figura F non ammette che una sola simmetrica, qualunque sia il centro o il piano di simmetria.

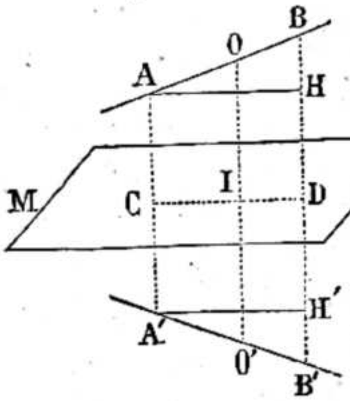
Si potrebbe adunque, se si trattasse solamente di studiare la forma delle figure, non considerare che la simmetria per rapporto ad un punto o per rapporto ad un piano. Ma non avviene lo stesso quando trattasi della disposizione delle figure, e per questa ragione si è creduto di dover separare le due teorie.

SIMMETRIA PER RAPPORTO AD UN PIANO

—

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA. *Una retta* AB *ha per simmetrica per rapporto al piano* MN, *un' altra retta* A'B', *e queste due rette sono ugualmente inclinate sul piano di simmetria.*



Si prendano sulla retta data due punti A e B e si determinino i loro simmetrici A' e B' con abbassare dai punti A e B le perpendicolari su di MN e col prolungare queste perpendicolari di una lunghezza eguale; si tirino A'B' e CD.

Per dimostrare che ogni punto O della retta AB ha il suo simmetrico su di A'B', si abbassi OI perpendicolare ad MN e si prolunghi questa retta fino al suo incontro con A'B'.

Facendo girare il quadrilatero ACBD intorno a CD per applicarlo sul piano CA'B'D, gli angoli ACD, A'CD essendo retti, CA prenderà la direzione di CA', e siccome CA =CA', così il punto A' cadrà in A. Per la stessa ragione BD si applicherà sopra DB'; sicchè AB coinciderà con A'B'. Inoltre, per gli angoli retti OIC, O'IC, OI prenderà la direzione di IO' ed il punto O dovendo cadere contemporaneamente su di A'B' e su di IO', cadrà in O'.

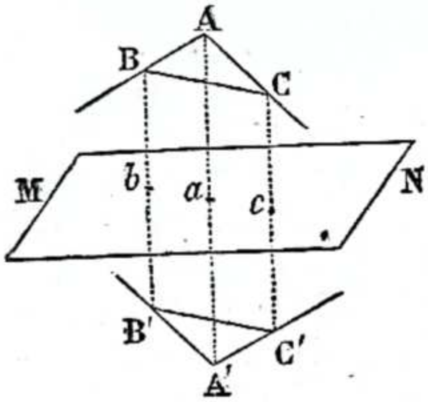
Avendosi dunque OI=IO', il punto O' è simmetrico del punto O.

Se infine si tirano le rette AH, A'H' parallele al piano MN, i triangoli rettangoli ABH, A'B'H' sono uguali, avendo i lati dell' angolo retto rispettivamente uguali: dunque gli angoli BAH, B'A'H' che misurano le inclinazioni delle rette AB, A'B' sul piano MN, sono uguali.

Corollario. Dalla stessa dimostrazione risulta che la retta AB, che unisce due punti A e B, è uguale alla retta A'B' che congiunge i loro simmetrici.

PROPOSIZIONE XXII.

Teorema. *L'angolo di due rette* AB, AC *è uguale all'angolo formato dalle loro simmetriche* A'B', A'C', *per rapporto al piano* MN.



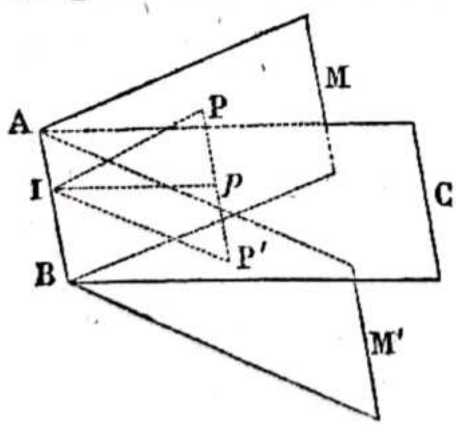
Osserviamo in primo luogo che il punto d' incontro A delle due rette AB, AC ha per simmetrico il punto A', poichè il simmetrico del punto A deve trovarsi contemporaneamente sopra A B' e sopra A'C'.

Ciò posto, si prendano su di AB ed AC due punti B e C; siano B' e C' i loro simmetrici; e si conducano le BC, B'C'.

I triangoli ABC, A'B'C', sono equilateri fra loro (prop. 21, cor.) dunque l'angolo BAC=B'A'C'.

PROPOSIZIONE XXIII.

Teorema. *Un piano ha per superficie simmetrica un altro piano, e questi due piani formano angoli uguali col piano di simmetria.*



Sia AB l'intersezione del piano MAB col piano di simmetria ABC, e conducasi per AB un piano ABM' che formi col piano di simmetria lo stesso angolo del piano MAB.

Si tratta di dimostrare che ogni punto P del piano ABM ha il suo simmetrico sopra ABM'. Per far ciò, si abbassi Pp perpendicolare ad ABC e si prolunghi questa retta fino al suo incontro col piano ABM′, si conduca pI perpendicolare ad AB e si tirino le PI, P′I.

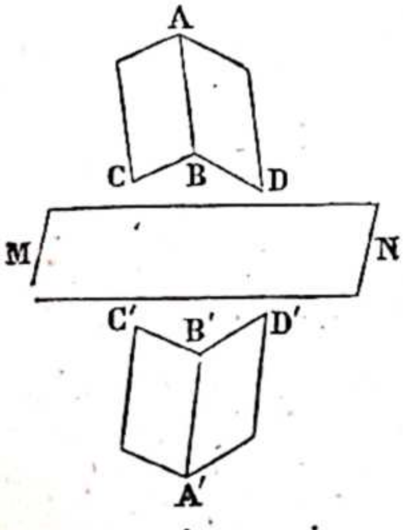
Le due rette PI, P′I essendo perpendicolari ad AB, e gli angoli PIp, P′Ip essendo uguali come corrispondenti dei diedri uguali MABC, M′ABC, i triangoli rettangoli PIp, P′Ip risulteranno uguali, giacchè hanno il lato Ip di comune ed un angolo acuto uguale; e però avendosi Pp=P′p; sarà P′ il simmetrico di P.

Osservazione I. Se il piano dato fosse parallelo al piano di simmetria ABC, è evidente che esso avrebbe per simmetrico un altro piano parallelo ad ABC ed alla stessa distanza da questo piano.

Osservazione II. Risulta da questo teorema, che un poliedro ha per figura simmetrica un altro poliedro, poichè a ciascuna faccia piana del poliedro dato corrisponde nella figura simmetrica una faccia piana.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA. *L'angolo diedro formato da due piani* ABC, ABD *è uguale all' angolo formato dai loro simmetrici* A′B′C′, A′B′D′.



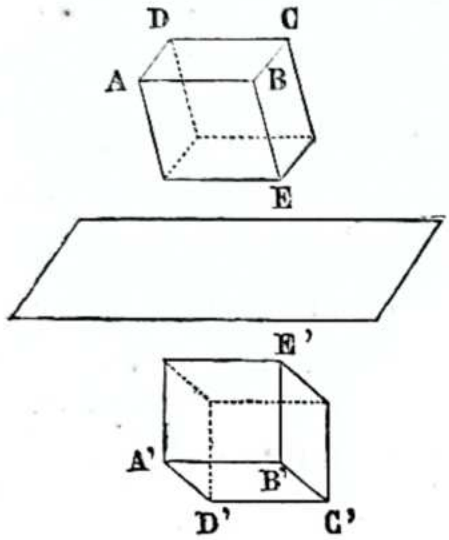
Principieremo dall'osservare che la retta AB, intersezione dei due piani ABC, ABD, ha per simmetrica A′B′, intersezione dei due piani A′B′C′, A′B′D′.

Ciò posto, al punto B si costruisca l'angolo piano CBD che misura l'angolo diedro AB; e similmente al punto B′, simmetrico di B, si costruisca l'angolo piano C′B′D′ che misura l' angolo diedro A′B′.

La retta BD, situata nel piano ABD, avrà per simmetrica una retta che passa pel punto B′ ed è situata nel piano A′B′D′. Inoltre, siccome BD è perpendicolare ad AB, così la retta simmetrica di BD, dovendo essere perpendicolare ad A′B′ (prop. 22); sarà B′D′. Si vedrà similmente che B′C′ è la simmetrica di BC; e però l'angolo CBD=C′B′D′ (prop. 22).

PROPOSIZIONE XXV.

Teorema. *Due poliedri simmetrici per rapporto ad un piano, hanno 1° le facce rispettivamente uguali; 2.° gli angoli solidi omologhi simmetrici* (Libro 5).



1° Sieno A, B, C, D i vertici della faccia di uno dei poliedri; di già si conosce che i loro simmetrici A′, B′, C′, D′ sono situati in uno stesso piano (prop. 23) e che i poligoni ABCD, A′B′C′D′ sono uguali, perchè hanno gli angoli uguali ed i lati uguali ciascuno a ciascuno (prop. 21 e 22).

2.° Due angoli solidi omologhi B e B′ avendo le loro facce uguali (prop. 22), ed i loro angoli diedri uguali ciascuno a ciascuno (prop. 24), ne segue che se si fa coincidere la faccia A′B′E′ sulla sua uguale ABE, in modo che le altre costole dei due angoli solidi cadano dalla stessa parte della faccia comune, si vede subito che gli altri angoli piani dei due angoli solidi si troveranno disposti in un ordine inverso; dunque l' angolo solido B′ è il simmetrico di B

Corollario. Se si decompone un poliedro P in piramidi triangolari che abbiano tutte per vertice comune uno dei vertici del poliedro; a ciascuna di queste piramidi corrisponderà nel poliedro simmetrico P′, una piramide simmetrica.

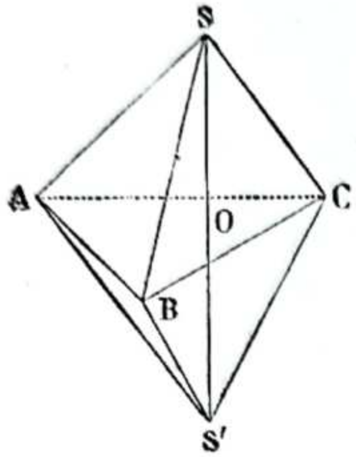
Si vede perciò che due poliedri simmetrici si possono decomporre in uno stesso numero di tetraedri simmetrici ciascuno a ciascuno.

Scolio. Due poliedri che hanno le loro facce rispettivamente uguali, ed i loro angoli solidi simmetrici, si dicono sempre simmetrici, qualunque sia la posizione che essi hanno l'uno per rapporto all' altro; ma bisogna osservare che in tal caso la simmetria non esiste che in quanto alla forma dei solidi.

N. B. Gli angoli solidi omologhi sono quelli i cui vertici sono simmetrici.

PROPOSIZIONE XXVI.

Teorema. *Due poliedri simmetrici sono equivalenti.*



Infatti, due poliedri simmetrici possono decomporsi in uno stesso numero di tetraedri simmetrici, epperò basta provare che due tetraedri simmetrici sono equivalenti.

Sia adunque SABC un tetraedro e si costruisca il suo simmetrico prendendo per piano di simmetria una delle facce ABC; i due tetraedri SABC, S'ABC sono equivalenti, poichè hanno la stessa base ABC, e le altezze SO, S'O uguali fra di loro.

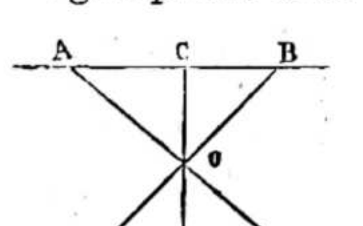
SIMMETRIA PER RAPPORTO AD UN PUNTO

PROPOSIZIONE XXVII.

Teorema. *Una retta* AB *ha per simmetrica, per rapporto al punto* O, *una seconda retta* A'B' *parallela ad* AB: *e queste due rette sono ugualmente distante dal punto* O.

Si abbassi dal punto O una perpendicolare OC su di AB e si prolunghi in senso contrario di una egual lunghezza OC', indi dal punto C' si conduca A'B' parallela ad AB.

Ogni punto A di AB ha il suo simmetrico su di A'B',



poichè se si tira la retta AOA', i triangoli rettangoli AOC, A'OC' sono uguali per essere OC=OC' e gli angoli AOC, A'OC' uguali fra di loro. Dunque AO è uguale ad A'O e perciò il punto A' è il simmetrico del punto A.

Sia B un secondo punto di AB, e B' il suo simmetrico. I due triangoli AOB, A'OB' avendo un angolo uguale compreso fra lati uguali, sono uguali e perciò AB=A'B'.

Da ciò risulta che la porzione di retta che congiunge due punti A e B è uguale alla retta che congiunge i loro simmetrici A' e B'.

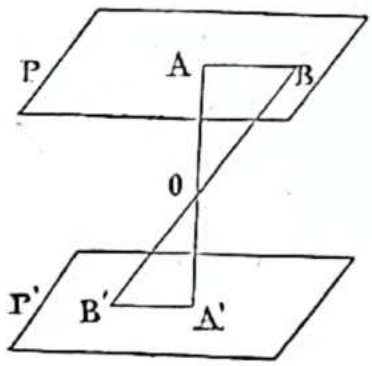
PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA. *L'angolo di due rette è uguale all'angolo delle loro simmetriche.*

La dimostrazione è analoga a quella della simmetria per rapporto ad un piano.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA. *Un piano* P *ha per simmetrico per rapporto ad un punto* O, *un altro piano* P' *parallelo a* P. *Inoltre questi due piani sono ugualmente distanti dal punto* O.



Si tiri OA perpendicolare al piano P, e si prolunghi questa retta in senso contrario di una lunghezza OA'=OA; indi dal punto A' si conduca un piano P' parallelo a P, dico che ogni punto B del piano P ha il suo simmetrico su di P'. Infatti, se si tira la retta BOB', i triangoli AOB, A'OB' risultano uguali, per essere OA=OA', ed AOB=A'OB'.

Si conchiude da ciò che OB=OB', e che perciò il punto B' è il simmetrico del punto B.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA. *L'angolo diedro formato da due piani è uguale all'angolo diedro formato dai loro simmetrici.*

La dimostrazione è analoga a quella della simmetria per rapporto ad un piano.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA. *Due poliedri simmetrici per rapporto a un punto, hanno le loro facce rispettivamente uguali ed i loro angoli solidi omologhi simmetrici.*

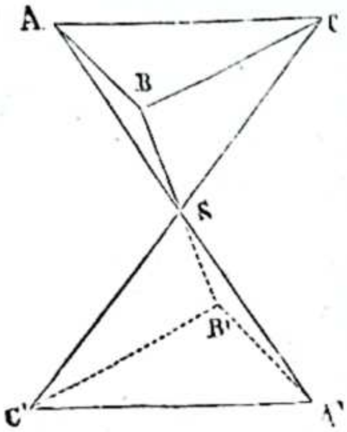
La dimostrazione è la stessa della proposizione 25.

Osservazione. Due poliedri simmetrici sono decomponibili in uno stesso numero di tetraedri simmetrici a due a due.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA. *Due tetraedri simmetrici sono equivalenti.*

Sia SABC il tetraedro dato; si prenda il punto S per centro di simmetria e si costruisca il tetraedro SA′B′C′ simmetrico di SABC.



In virtù del teorema precedente, i triangoli ABC, A′B′C′ sono uguali, ed i piani ABC, A′B′C′ sono paralleli ed equidistanti dal punto S.

I tetraedri SABC, SA′B′C′ avendo dunque basi uguali ed altezze uguali, sono equivalenti.

Corollario. Due poliedri simmetrici sono equivalenti.

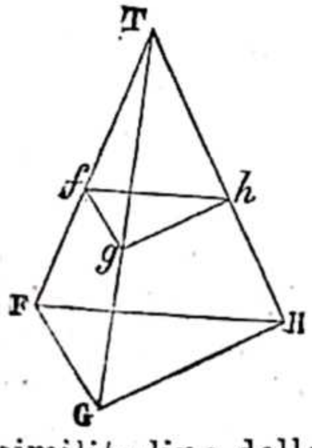
DELLA SIMILITUDINE

Chiamansi poliedri simili quelli che hanno le facce simili ciascuna a ciascuna e gli angoli solidi omologhi uguali. (Gli angoli solidi omologhi sono quelli formati dalle facce simili).

Le rette omologhe di due poliedri simili, sono quelle che congiungono i vertici omologhi.

PROPOSIZIONE XXXIII.

Teorema. — *Se si dividono nello stesso rapporto nei punti* f, g, h *le costole* TF, TG, TH *del tetraedro* TFGH, *e si tirano le* fg, fh, gh, *il tetraedro* Tfgh *così formato è simile al primo.*



Infatti, i triangoli T*fg*, TFG sono simili, avendo un angolo uguale compreso fra lati proporzionali; per la stessa ragione T*gh* è simile a TGH e T*fh* a TFH. Inoltre le rette *fg*, *gh* essendo parallele a FG, GH, il piano *fgh* è parallelo al piano FGH ed il triangolo *fgh* è simile a FGH (prop. 13).

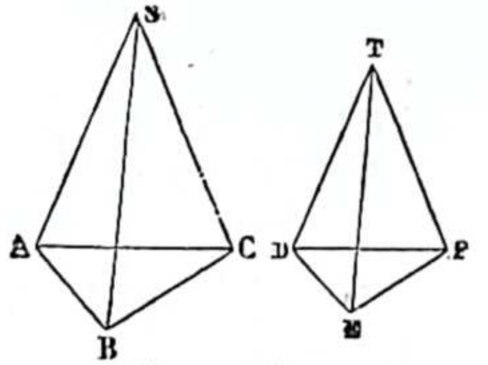
Infine due angoli solidi omologhi qualunque G, *g* sono uguali; poichè, per la similitudine delle facce, essi hanno i loro angoli piani rispettivamente uguali e similmente disposti; dunque i tetraedri avendo le loro facce simili e gli angoli solidi omologhi uguali, sono simili.

Scolio. Si può osservare che due tetraedri simili hanno tutte le loro costole omologhe proporzionali.

Reciprocamente, due tetraedri che hanno le loro costole proporzionali e similmente disposte, sono simili; poichè dalla proporzionalità dei lati si ricava immediatamente la similitudine delle facce, e le facce essendo simili e similmente disposte, gli angoli solidi omologhi sono uguali, avendo i loro angoli piani uguali ciascuno a ciascuno e similmente situati.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Teorema. *Due tetraedri* SABC, TDEF *che hanno un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili e similmente situate, sono simili.*



Supponiamo l'angolo diedro SB uguale all'angolo diedro TE; il triangolo SAB simile a TDE, ed SBC simile a TEF.

Gli angoli solidi S e T, avendo un'angolo diedro uguale compreso fra due facce uguali e similmente disposte, sono eguali, e sarà l'angolo ASC uguale a DTF. Inoltre per la similitudine dei triangoli ASB, e DTE, SBC e TEF, si ha

$$\frac{SB}{TE} = \frac{AS}{DT},$$

$$\frac{SB}{TE} = \frac{SC}{TF},$$

donde

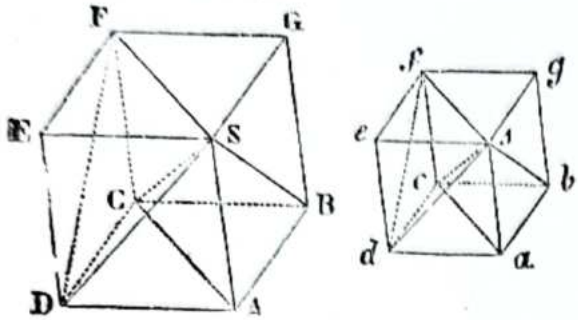
$$\frac{AS}{DT} = \frac{SC}{TF}.$$

E però i triangoli ASC, DTF avendo un angolo uguale compreso fra lati proporzionali, sono simili.

Nell'istesso modo si vedrebbe che gli angoli solidi B e E sono uguali, e che ABC è simile a DEF: ed infine che gli angoli solidi A e C sono rispettivamente uguali agli angoli D e F, avendo gli angoli piani rispettivamente uguali e similmente situati; dunque i tetraedri sono simili,

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA. *Due poliedri simili possono essere decomposti in uno stesso numero di tetraedri simili e similmente situati.*



Decomponendo in triangoli le facce del poliedro SEFGDABC non adiacenti al vertice S, questi triangoli saranno le basi dei tetraedri che avranno per vertice comune il punto S, e di cui la somma comporrà il primo poliedro.

Decomponendo anche in triangoli e nello stesso modo le facce del poliedro *sefgdabc* non adiacenti al vertice *s* omologo di S e congiungendo il punto *s* coi vertici di questi triangoli, questo secondo poliedro verrà decomposto in tetraedri; e quindi si tratta di dimostrare che questi tetraedri sono rispettivamente simili a quelli che formano il primo poliedro.

Paragonando i tetraedri SDCA, *sdca*, si vede che i triangoli SDA, CDA sono rispettivamente simili ai triangoli *sda*, *cda* per la similitudine delle facce EDAS, *edas* da una parte, e delle facce CDAB, *cdab* dall' altra; inoltre l' angolo diedro DA è uguale all' angolo diedro *da*, perchè le facce dei due poliedri sono ugualmente inclinate; dunque i due tetraedri, avendo un angolo diedro uguale compreso fra due facce simili e similmente disposte, sono simili.

Passando ai tetraedri SDCF, *sdcf*, si vede che i triangoli SDC, *sdc* sono simili come facce omologhe di tetraedri simili, e che FDC è simile a *fdc* per la similitudine dei poligoni FEDC. *fedc*. D' altronde i diedri FDCA, *fdca* sono uguali per ipotesi, ed i diedri SDCA. *sdca* sono uguali, per la similitudine dei tetraedri SDCA, *sdca;* dunque gli angoli diedri FDCS, *fdcs* risultando uguali, come differenze di angoli diedri uguali (prop. 34) i tetraedri SDCF, *sdcf*, sono simili, e così di seguito.

Osservazione I. È da osservarsi che la decomposizione precedente può effettuarsi partendo da due vertici omologhi qualunque.

Osservazione II. Emerge ancora dal teorema che si è dimostrato che in due poliedri simili due rette A, a, che congiungono vertici omologhi, sono proporzionali a due costole omologhe B, b, dei due poliedri.

Infatti, le rette A, a saranno le costole omologhe di due tetraedri simili che fanno parte dei due poliedri, e questi tetraedri contenendo necessariamente due costole omologhe C, c dei due poliedri, si avrà

$$\frac{A}{a} = \frac{C}{c}.$$

Ma nei poliedri simili le costole omologhe sono proporzionali per la similitudine delle facce, dunque si avrà pure

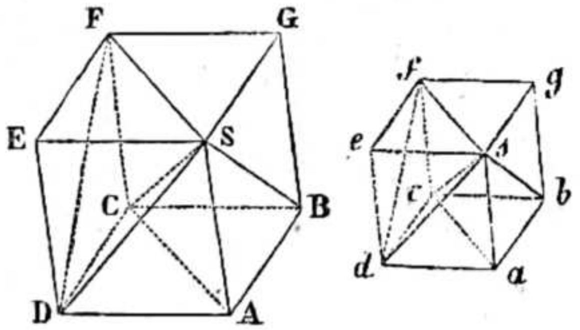
$$\frac{C}{c} = \frac{B}{b};$$

ed infine

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}.$$

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA. *Se due poliedri sono composti di uno stesso numero di tetraedri simili e similmente disposti, essi avranno le facce rispettivamente simili e gli angoli solidi uguali; e per conseguenza saranno simili.*



Sieno SABC, SADC, SCDF, ... le piramidi che compongono il primo poliedro, *sabc*, *sadc*, *scdf* quelle che formano il secondo.

1. I triangoli DCA, CAB che formano una faccia del primo poliedro, sono rispettivamente simili ai triangoli *dca, cab* situati sulla superficie del secondo poliedro, e ciò per la similitudine dei tetraedri. Inoltre, i triangoli DCA, CAB essendo in uno stesso piano, io dico che anche i triangoli *dca*, *cab* saranno in un medesimo piano.

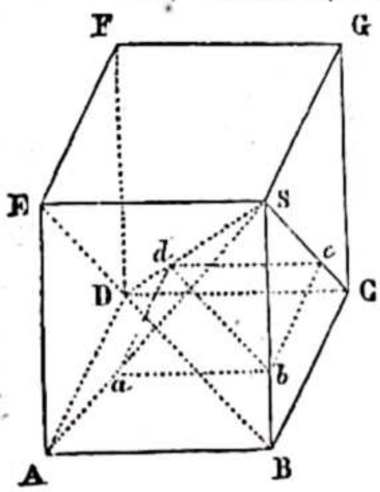
Infatti, per la similitudine dei tetraedri SCAD e *scad*, SABC e *sabc*, gli angoli diedri SCAD, SCAB sono rispettivamente eguali agli angoli diedri, *scad*, *scab* ma la somma dei due primi è uguale a due retti; dunque la somma dei due ultimi è anche uguale a due retti, e perciò i due poligoni DCBA, *dcba* sono simili, perchè composti di uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti; e lo stesso avviene delle altre facce prese a due a due.

2. Si vede ancora che l'angolo diedro SA, somma dei diedri CSAD, CSAB è uguale all'angolo diedro *sa*, somma degli angoli diedri *csad*, *csab*, rispettivamente uguali ai primi; e che in generale due angoli diedri omologhi dei due poliedri sono uguali, come somme di angoli diedri omologhi di tetraedri simili.

Da ciò risulta che due angoli solidi omologhi A e *a* sono uguali, poichè hanno le loro facce uguali ciascuna a ciascuna, similmente disposte ed egualmente inclinate.

Scolio. La dimostrazione poc'anzi accennata giustifica la definizione che si è data ai poliedri simili, giacchè è sempre possibile formare più poliedri composti di uno stesso numero di tetraedri simili e similmente disposti.

Infatti, decompongasi il poliedro SABDEFG in piramidi triangolari, che abbiano tutti i loro vertici in S; e siano SBDC, SADB, SDAE i tetraedri la cui somma forma il poliedro.



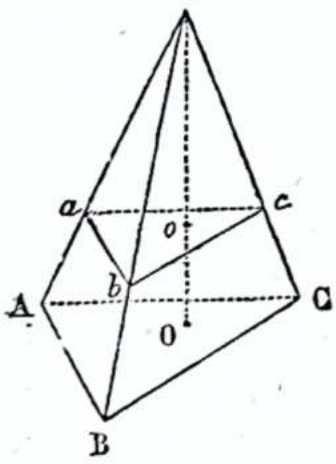
Se si dividono tutti gli spigoli che concorrono in S nello stesso rapporto nei punti *a*, *b*, *c*. *d*,... i tetraedri S*dc*, S*adb*,... saranno rispettivamente simili e similmente disposti (prop. 33) ai tetraedri SBDC, SADB..., e quindi la loro somma comporrà un secondo poliedro, che pel teorema precedente, sarà simile al primo.

Questo secondo poliedro potrà in seguito essere situato in una posizione qualunque per rapporto al primo.

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA. *Due tetraedri simili stanno fra loro come i cubi delle costole omologhe.*

Essendo simili i tetraedri, si può portare il più piccolo sul più grande, in modo che essi abbiano l'angolo so-



lido S di comune, ed allora le basi abc, ABC saranno parallele, perchè le costole SA, SB, SC sono divise in uno stesso rapporto nei punti a, b, c.

Sia ora SO perpendicolare ad ABC.

I triangoli ABC, abc essendo simili, si ha

$$\frac{ABC}{abc}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}. \tag{1}$$

Si ha inoltre

$$\frac{AB}{ab}=\frac{SA}{sa};$$

e

$$\frac{SO}{so}=\frac{SA}{sa};$$

da cui

$$\frac{SO}{so}=\frac{AB}{ab}. \tag{2}$$

e però moltiplicando per ordine le proporzioni (1) e (2) e dividendo i termini del primo rapporto per 3, si ricava

$$\frac{ABC\times\frac{SO}{3}}{abc\times\frac{So}{3}}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3}$$

Ma $ABC\times\frac{SO}{3}$ è la misura del tetraedro SABC ed $abc\times$ $\times\frac{So}{3}$ è la misura del tetraedro Sabc; dunque, etc.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Teorema. *Due poliedri simili stanno come i cubi delle loro costole omologhe.*

Conoscendosi che due poliedri simili sono decomponibili in uno stesso numero di tetraedri simili, rappresentiamo con T, T', T''... i tetraedri che formano il poliedro P; e con t, t', t''... i tetraedri che compongono p.

Siano ancora A, A', A''... le costole dei tetraedri T, T', T''..., a, a', a''... le loro omologhe nei tetraedri t, t' t''... si avrà pel teorema precedente

$$\frac{T}{t}=\frac{A^3}{a^3},$$

$$\frac{T'}{t'}=\frac{A'^3}{a'^3},$$

$$\frac{T''}{t''}=\frac{A''^3}{a''^3};$$

e siccome le rette omologhe dei poliedri simili sono proporzionali, così se ne conchiude

$$\frac{T}{t}=\frac{T'}{t'}=\frac{T''}{t''}\cdots.$$

da cui

$$\frac{T+T'+T''\ldots}{t+t'+t''\ldots}=\frac{T}{t}=\frac{A^3}{a^3},$$

ovvero

$$\frac{P}{p}=\frac{A^3}{a^3}.$$

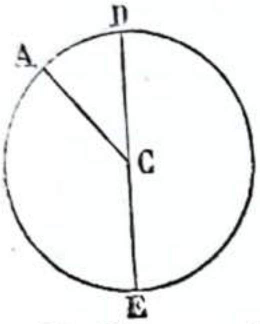
——

LIBRO VII.

DELLA SFERA.

Definizioni.

I. La *sfera* è un solido terminato da una superficie curva, di cui tutti i punti sono ugualmente distanti da un punto interno che si chiama *centro*.



Si può immaginare che la sfera vien prodotta dalla rivoluzione del semi-cerchio DAE intorno al diametro DE; poichè la superficie descritta nel movimento della curva DAE, avrà tutti i suoi punti a distanze uguali dal centro C.

II. Il *raggio della sfera* è una linea retta condotta dal centro ad un punto della superficie; il *diametro* o *asse* è una retta che passando pel centro termina da ambo le parti alla superficie.

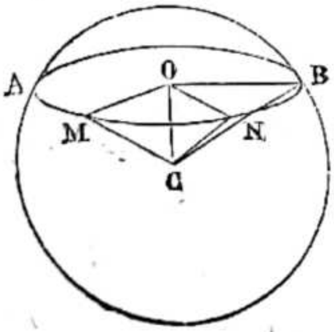
Tutti i raggi della sfera sono adunque uguali; come pure tutti i diametri sono uguali e doppi del raggio.

III. Un piano è *tangente* alla sfera allorchè non ha che un punto di comune colla sua superficie.

IV. Due sfere sono tangenti, allorchè le loro superficie non hanno che un sol punto di comune.

PROPOSIZIONE I.

Teorema. *Ogni sezione della sfera, fatta con un piano, è un cerchio.*



Sia AMB la sezione fatta con un piano nella sfera di cui il centro è C. Dal punto C si conducano la perpendicolare CO sul piano AMB, e diverse rette CM, CN, CB a diversi punti della curva AMB da cui è terminata la sezione.

Le oblique CM, CN, CB, essendo uguali perchè raggi della sfera, esse sono ugualmente lontane dalla perpendicolare CO; e perciò tutte le rette OM, ON, OB essendo uguali, ne risulta che la sezione AMB è un cerchio di cui il punto O è il centro.

Corollario I. Se la sezione passa pel centro della sfera, il suo raggio sarà quello della sfera ed essa prende il nome di *cerchio massimo;* dunque tutti i cerchi massimi sono uguali fra loro.

Corollario II. Due cerchi massimi si tagliano sempre in due parti uguali, giacchè la loro intersezione, passando pel centro, è un diametro.

Corollario III. Ogni cerchio massimo divide la sfera e la sua superficie in due parti uguali; poichè se, dopo di aver separato i due emisferi, questi si sovrappongono in modo che avendo la base comune, rivolgono la convessità dalla stessa parte, le due superficie coincideranno l'una coll'altra, senza di che vi sarebbero dei punti disugualmente lontani dal centro.

Corollario IV. Il centro di un cerchio minore e quello della sfera si trovano su di una stessa retta perpendicolare al piano del cerchio minore.

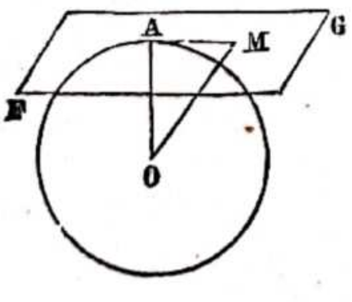
Corollario V. I cerchi minori sono tanto più piccoli, quanto più sono lontani dal centro della sfera; perchè più la distanza CO è grande, più è piccolo il lato OB del triangolo OBC.

Corollario VI. Per due punti dati sulla superficie di una sfera si può far sempre passare un arco di cerchio massimo: poichè i due punti dati ed il centro della sfera sono tre punti che determinano la posizione di un piano. Se poi i due punti dati fossero le estremità di un diametro, allora questi due punti ed il centro sarebbero in linea retta, e si avrebbero infiniti cerchi massimi che potrebbero passare per i due punti dati.

Corollario VII. La posizione di un cerchio minore sulla superficie della sfera è determinata da tre punti della sua circonferenza.

PROPOSIZIONE II.

Teorema. *Ogni piano perpendicolare all'estremità di un raggio è tangente alla sfera.*



Sia FAG un piano perpendicolare all'estremità del raggio OA; se si prende un punto qualunque M su di questo piano, e si tirano le OM e AM, l'angolo OAM sarà retto, e quindi la distanza OM essendo maggiore di OA, il punto M si troverà fuori della sfera; e siccome avviene lo stesso per qualunque altro punto del piano FAG, così ne segue che questo piano non avrà che un sol punto A di comune colla superficie della sfera e perciò sarà tangente a questa superficie (def. 3).

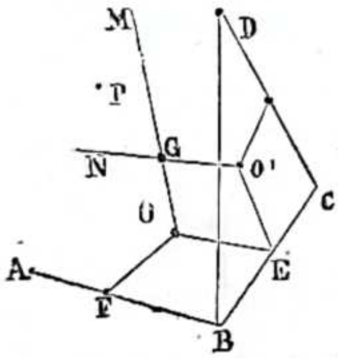
Reciprocamente ogni piano tangente FAG è perpendicolare al raggio OA condotto al punto di contatto.

Poichè, se si congiunge un punto qualunque M di questo piano col centro, sarà OM maggiore del raggio OA, per essere il punto M esterno alla sfera; dunque essendo OA la più breve retta condotta dal centro O al piano FAG, essa sarà perpendicolare a questo piano.

Corollario. Per un punto della sfera non si può condurre che un sol piano tangente.

PROPOSIZIONE III.

Teorema. *Per quattro punti* A, B, C, D *non situati in uno stesso piano, si può far sempre passare una sfera e non se ne può far passare che una sola.*



Costruiscasi il centro O del cerchio che passa per i tre punti A, B, C e da questo punto s'innalzi una perpendicolare OM sul piano ABC; questa retta è il luogo geometrico dei punti egualmente distanti da A, B, C.

Infatti, ogni punto M di questa retta ha evidentemente questa proprietà, mentre ogni punto esterno P non può essere ugualmente distante dai punti A, B, C poichè la perpendicolare abbassata dal punto P sul piano ABC terminerebbe in un punto che certamente non è ugualmente distante dai punti A, B, C.

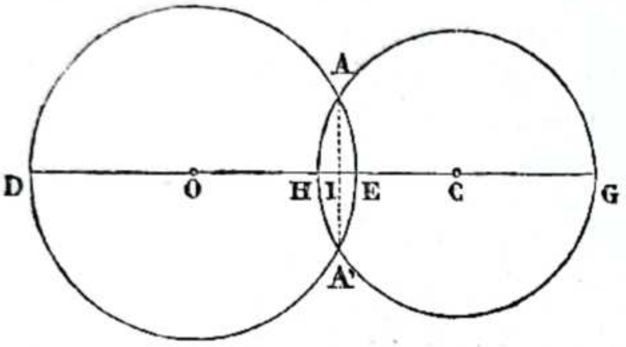
Innalzando similmente una perpendicolare O'N sul piano BCD pel centro O' del cerchio che passa pei tre punti B, C, D; questa retta sarà il luogo geometrico dei punti egualmente distanti dai punti B, C, D.

Ora io dico che le rette OM, O'N s'incontrano. Infatti, la retta OM perpendicolare al piano ABC è situata nel piano OEO' che è perpendicolare a BC, e per essa al piano ABC. Per la stessa ragione O'N è situata nel piano OEO'; dunque le due rette OM, O'N, trovandosi in uno stesso piano ed essendo perpendicolari a due rette che si tagliano, s'incontreranno in un punto G che è ugualmente distante dai quattro punti A, B, C, D ed è per conseguenza il centro di una sfera che passa per questi quattro punti.

Da questa discussione risulta che il punto G è il solo che può avere questa proprietà.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA. *L' intersezione di due sfere è un cerchio il cui piano è perpendicolare alla retta che congiunge i loro centri ed il cui centro è situato su di questa retta.*



Per la retta OC che congiunge i centri delle due sfere, si conduca un piano qualunque. Questo piano taglierà le due sfere secondo due cerchi massimi che s'incontrano nei punti A e A′ simmetrici per rapporto alla retta OC.

Se intanto si fanno girare i due semicerchi DAE, GAH intorno ad OC, questi due semicerchi genereranno le superficie delle due sfere ed il punto A descriverà la loro linea d' intersezione; ma in questo movimento, la retta AI non cambierà di grandezza e resterà costantemente perpendicolare ad OC, dunque l' intersezione delle due sfere è una circonferenza che ha per centro I, per raggio AI, e di cui il piano è perpendicolare ad OC.

Osservazione. Secondo che i due cerchi DAA′, GAA′ saranno esterni o interni, tangenti esternamente o internamente, oppure secanti, le due sfere saranno esterne o interne, tangenti esternamente o internamente o infine secanti.

Da ciò risulta che per ciascuna posizione delle due sfere, avranno luogo fra le distanze dei centri ed i raggi delle sfere le stesse relazioni che si verificano nelle corrispondenti posizioni di due cerchi.

DEFINIZIONI.

I. L' angolo di due archi di cerchi massimi è l'angolo diedro formato dai loro piani. Gli archi dei cerchi massimi ne sono i lati, ed il loro punto d' incontro ne è il vertice.

II. Un triangolo sferico è una porzione della superficie sferica compresa fra tre archi di cerchi massimi.

Questi archi, che si chiamano i lati del triangolo, si suppongono sempre minori di una semicirconferenza; gli angoli formati da questi archi di cerchi sono gli angoli del triangolo.

III. Un triangolo sferico è rettangolo, isoscele, equilatero, nei medesimi casi d' un triangolo rettilineo.

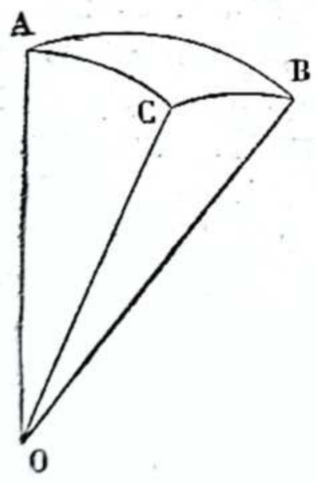
IV. Un poligono sferico è una porzione della superficie sferica compresa fra più archi di cerchi massimi.

Noi non considereremo che i poligoni sferici convessi, cioè quelli nei quali il piano di ogni lato qualunque rimane tutto il resto del poligono in uno stesso emisfero e quindi risulta necessariamente che ogni lato è minore di una semiconferenza.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA. *In ogni triangolo sferico* ABC, *un lato qualunque è minore della somma degli altri due.*

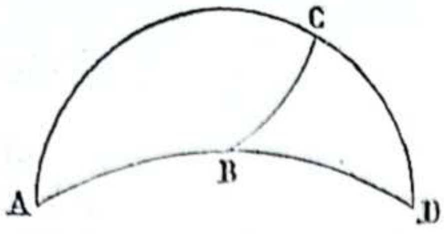
Sia O il centro della sfera, e siano condotti i raggi OA, OB, OC. Se s' immaginano condotti i piani AOB, AOC, COB, questi formeranno al punto O un angolo solido i cui angoli AOB, AOC, COB sono misurati dai lati AB, AC, BC del triangolo sferico ABC; ma ciascuno dei tre angoli piani che compongono l' angolo solido è minore della somma degli altri due; dunque anche un lato qualunque del triangolo ABC risulterà minore della somma degli altri due.



PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA. *La somma dei tre lati di un triangolo sferico è minore della circonferenza di un cerchio massimo.*

Sia ABC un triangolo sferico qualunque; se si prolungano i lati AB, AC fino a che s' incontrano nuovamente in D, gli archi ABD, ACD saranno delle semicirconferenze poichè due cerchi massimi si tagliano sempre in due par-



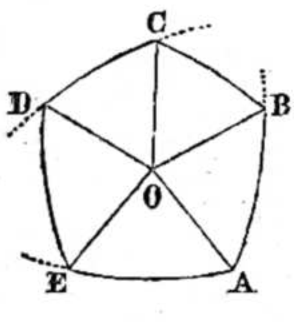
ti uguali, (pr. 1); ma nel triangolo BCD si ha il lato BC<BD+CD (prop. 5); e però aggiungendo ad una parte ed all'altra AB+AC, si avrà AB+AC+BC<ABD+ACD, cioè minore di una circonferenza.

Osservazione. Affinchè si possa costruire un triangolo sferico con tre lati dati, è necessario e sufficiente che la somma dei tre lati sia minore di una circonferenza e che il lato maggiore sia minore della somma degli altri due; poichè, essendo queste le condizioni necessarie e sufficienti per poter costruire un angolo solido con tre facce che avessero per misura i tre lati dati, ne segue che se si dispone il vertice di quest'angolo solido al centro della sfera, le sue facce intercetteranno sulla superficie sferica il triangolo dimandato.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA. *La somma dei lati di un poligono sferico convesso è minore di una circonferenza di cerchio massimo.*

Sia ABCDE un poligono sferico convesso: condotti dal centro O della sfera i raggi OA, OB, OC, OD, OE, si formerà un angolo solido che sarà convesso e di cui gli angoli piani AOB, BOC, hanno per misura gli archi AB, BC,...; ma la somma degli angoli piani che formano l'angolo solido è minore di 4 retti; dunque la somma degli archi AB, BC..., è minore di una circonferenza.



DEFINIZIONI.

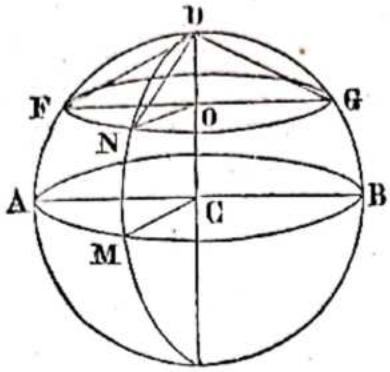
I. Il polo di un cerchio della sfera è l'estremità del diametro perpendicolare al piano di questo cerchio.

II. Ogni cerchio della sfera ha due poli.

III. Tutti quei cerchi i cui piani sono paralleli hanno i medesimi poli.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA. *Tutti i punti della circonferenza* FNG *di un* *cerchio della sfera sono ugualmente distanti dal polo* D *di questo cerchio.*



Infatti, se si tirano dal centro O della circonferenza FNG i raggi OF, ON, OG, come pure le rette DF, DN, DG, i triangoli rettangoli DOF, DON, DOG..., saranno uguali, poichè essi hanno il lato DO di comune e gli altri lati OF, ON, OG uguali come raggi di uno stesso cerchio; dunque sarà pure DF=DN=DG...

Si rileva da ciò che gli archi di cerchi massimi FD, DN, DG sono uguali, perchè sottesi da corde uguali; ed i loro piani sono perpendicolari al cerchio FNG, perchè passano tutti per la retta DO perpendicolare al piano di questo cerchio.

La precedente dimostrazione si applica evidentemente anche al polo di un cerchio massimo AMB; ma, in questo caso gli angoli retti DCA, DCM, DCB essendo situati al centro dei cerchi massimi DAE, DME..., ne segue che gli archi DA, DM, DB sono quarte parti di circonferenza o *quadranti.*

Scolio. Le proprietà dei poli permettono di tracciare sulla superficie della sfera gli archi di cerchio con la stessa facilità che su di una superficie piana.

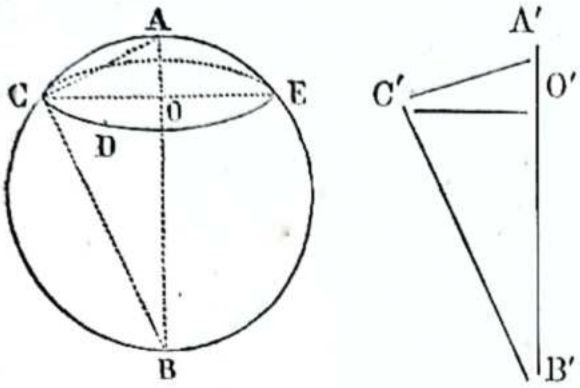
Si usa a tale uopo un compasso chiamato compasso sferico, nel quale si dà alle due braccia una disposizione che permette d'inclinare le punte l'una verso l'altra sotto un angolo qualunque.

È evidente che se si situa una delle punte di questo compasso in D e l' altra in F, e si fa girare questo compasso intorno al punto D, l'estremità F descriverà il cerchio FNG.

Se si volesse dal punto D come polo, descrivere un cerchio massimo AMB, bisognerebbe che la distanza delle due punte del compasso fosse uguale alla corda di un quadrante, e per avere questa distanza, bisognerebbe conoscere il raggio della sfera.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA. *Data una sfera, trovarne il raggio.*

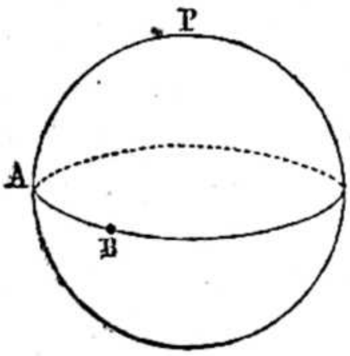


Con un'apertura di compasso arbitraria AC, si descriva sulla sfera un cerchio CDE; si segnino tre punti C, D, E sopra questo cerchio, e si misurino con un compasso le distanze rettilinee CD, DE, CE; infine si costruisca sopra un piano un triangolo con questi tre lati; il raggio del cerchio circoscritto a questo triangolo sarà il raggio del cerchio CDE.

Ciò posto, se s'immagina condotto pel diametro AB della sfera un cerchio massimo ACBE, e si suppongono condotte le rette CA, CB e CO, si conosceranno nel triangolo rettangolo CAO l'ipotenusa AC ed il lato CO; e però si potrà costruire sopra un piano un triangolo C′A′O′ uguale a CAO; e siccome la retta CB è perpendicolare a CA, così conducendo C′B′ perpendicolare ad A′C′, la A′O′ prolungata fino all'incontro di C′B′, determinerà il diametro A′B′=AB della sfera.

PROPOSIZIONE X.

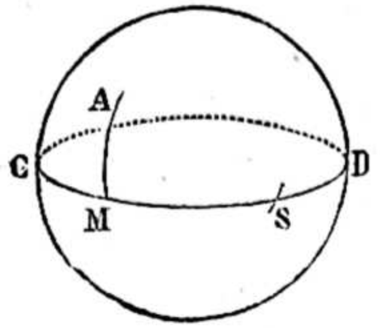
PROBLEMA. *Tracciare sopra una sfera un cerchio massimo che passi per due punti* A *e* B.



Dai punti A e B come poli, e con un raggio uguale alla corda del quadrante si descrivano due cerchi massimi che si tagliano in P; il punto P sarà il polo dell'arco di cerchio massimo AB, e servirà a descrivere quest'arco.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA. *Condurre per un punto* A *della superficie della sfera, un cerchio massimo perpendicolare ad un altro cerchio massimo.*

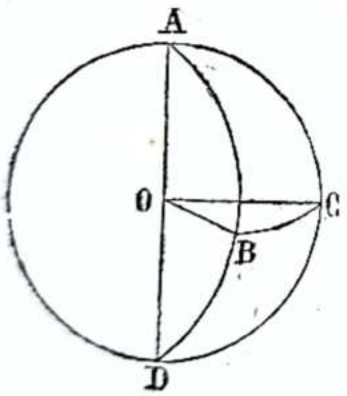


Dal punto A come polo, e con un raggio uguale ad un quadrante, si descriva un cerchio massimo che taglia in S il cerchio CMD: allora se col punto S come polo, e col raggio SA, si descriva il cerchio massimo AM, questo risulterà perpendicolare a CMD (prop. 7).

PROPOSIZIONE XII.

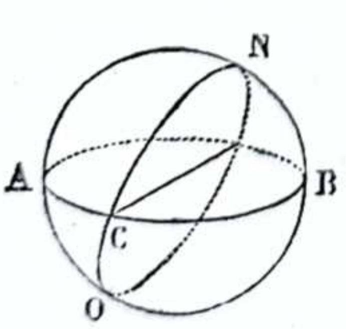
Teorema. *L'angolo* BAC *che fanno fra loro due archi di cerchi massimi, ha per misura l' arco* BC *di cerchio massimo, descritto dal punto* A *come polo, e compreso fra i lati dell'angolo.*

Infatti, tirati i raggi OB, OC; gli archi AC, AB essendo dei quadranti, gli angoli AOB, AOC sono retti, dunque BOC è l'angolo piano corrispondente all' angolo diedro DBAC; ma l'angolo al centro BOC ha per misura l'arco BC, e però quest' arco è la misura dell' angolo diedro DBAC, che è appunto l' angolo dei due archi di cerchi massimi.



Corollario. Gli angoli dei triangoli sferici possono paragonarsi fra loro per mezzo degli archi di cerchi massimi descritti dai loro vertici come poli e compresi fra i loro lati; e quindi è sempre facile il costruire un angolo uguale ad un angolo dato.

Scolio. Gli angoli opposti al vertice ACO e BCN sono uguali; perchè l'uno o l'altro è sempre l'angolo formato dai due piani ABC, OCN.

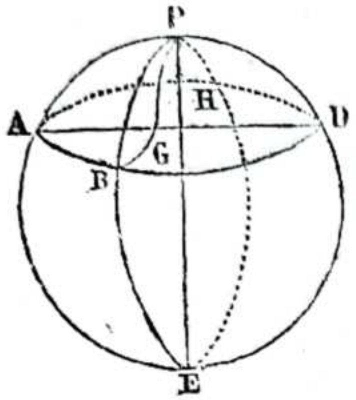


Si vede anche che nell' incontro dei due archi ACB, OCN, i due angoli adiacenti ACO, OCB presi insieme, equivalgono sempre a due angoli retti.

PROPOSIZIONE XIII.

Teorema. *Il più corto cammino dal punto* A *al punto* B *sulla superficie della sfera è l'arco di cerchio massimo* *minore di una semicirconferenza, che congiunge questi due punti.*

La dimostrazione di questo teorema è fondata sopra i due lemmi seguenti.



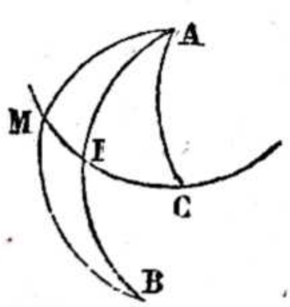
Lemma I. *Il più corto cammino del polo* P *di un cerchio a tutt'i punti della sua circonferenza* ABD *è lo stesso per tutti questi punti.*

Infatti, condotti dal polo gli archi di cerchio massimo PA, PB ai punti A e B della circonferenza ABD, sia PGB il più corto cammino sulla sfera dal punto P al punto B.

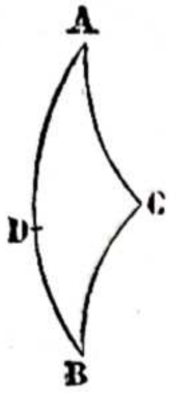
Se si fa girare la semicirconferenza che sta alla destra del cerchio massimo PBE intorno a PE, fino a che questo cerchio massimo coincida col cerchio massimo PAE, l'arco PB si applicherà sul suo uguale AP, e l'emisfero PBEHD coinciderà perfettamente coll' emisfero PAEBD, ma in questa sovrapposizione la linea PGB non avrà cessato di rappresentare il più corto cammino da P a B; dunque esso sarà ugualmente il più corto cammino da P ad A.

Lemma II. *Sieno* AB, AC *due archi di cerchi massimi, minori di una semicirconferenza, e sia* AC<AB; *io dico che il più corto cammino da* A *a* C *è minore di quello da* A *a* B.

In effetti, si descriva dal punto A come polo, e con l'intervallo AC, un cerchio che taglierà necessariamente l'arco AB fra A e B e sia AMB la più corta linea fra A e B; questa linea incontrerà il cerchio CI in un punto M e la linea AM sarà il più corto cammino da A ad M; poichè se vi esistesse una linea più corta fra questi due punti, AMB non sarebbe il più corto cammino da A a B, il che è contro l' ipotesi; ma, secondo il lemma precedente, il più corto cammino da A ad M è lo stesso che quello da A a C; è però il più corto cammina fra questi due ultimi punti sarà minore di quello da A a B.



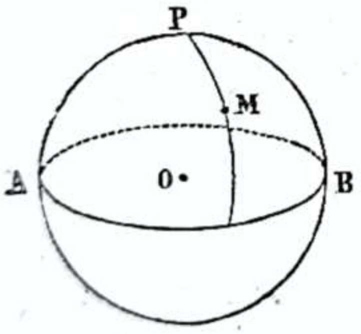
Ciò premesso, sia AB l'arco di cerchio massimo minore di una semicirconferenza che congiunge i punti A e B,



e supponiamo che vi esista fuori di questo arco un punto C appartenente alla più corta distanza da A a B. Conducansi gli archi di cerchio massimo AC, BC e si prenda $AD=AC$.

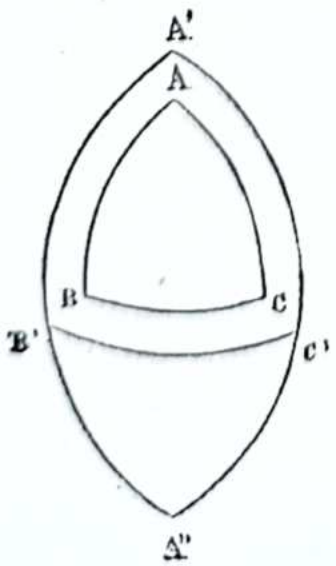
Pel triangolo ABC si ha (prop. 5) $AB<AC+CB$; togliendo da una parte e dall' altra $AD=AC$, resta $DB<BC$; ma in virtù del lemma I, il più corto cammino da A a D è lo stesso di quello da A a C; dunque, siccome il punto C appartiene alla linea più corta fra A e B, così bisognerebbe che la distanza da C a B fosse minore di quella da D a B, conseguenza resa assurda dal lemma II, giacchè l' arco BC è maggiore di BD. Dunque non potendo alcun punto della più corta distanza da A a B trovarsi fuori dell'arco AB, è forza conchiudere che l'arco AB è la linea più corta di tutte quelle che hanno le medesime estremità.

Osservazione. Nella dimostrazione precedente si suppone che ciascuno dei due archi AC, BC sia minore di AB; ed è evidente che non si può ammettere altra ipotesi; poichè se si avesse $AC>AB$, la linea più corta fra A e B sarebbe minore di quella fra A e C, e quindi il punto C non potrebbe appartenere alla prima linea.



DEFINIZIONI.

I. Se il punto P è uno dei poli del cerchio massimo AB della sfera, ed il punto M è situato nello stesso emisfero del punto P, è evidente che il più piccolo arco di cerchio massimo che congiunge M con P è minore di un quadrante, e reciprocamente.

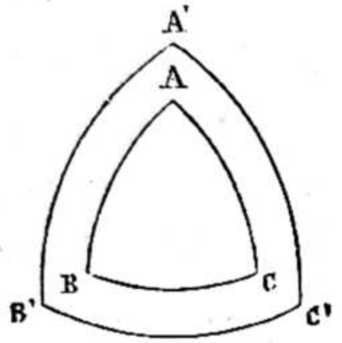


II. Dato un triangolo sferico ABC, se dai punti B e C come poli e con un raggio uguale alla corda di un quadrante, si descrivono due cerchi massimi che si tagliano nei punti A' ed A'' che sono i poli del cerchio massimo BC, e si considera solamente il polo A' che si trova dalla stessa parte di A per rapporto al cerchio massimo BC; e se finalmente si costruiscono nella stessa guisa i poli B', C' degli archi AC, AB situati dalla stessa parte di B e C per rapporto ai cerchi massimi AC, AB; il triangolo A'B'C' così formato chiamasi *triangolo polare* del triangolo ABC.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA. *Se il triangolo* ABC *ha per triangolo polare* A'B'C', *reciprocamente* ABC *sarà il triangolo polare di* A'B'C'.

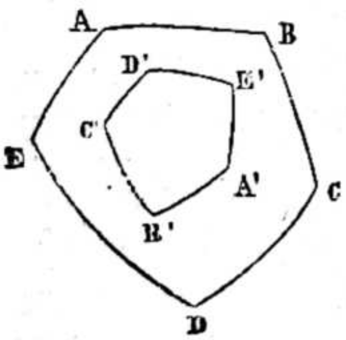
Infatti, il punto A' essendo il polo di BC, l'intervallo A'C è un quadrante; similmente il punto B' essendo il polo di AC, l'intervallo B'C è uguale ad un quadrante; dunque il punto C è il polo dell' arco A'B'; e l'arco di cerchio massimo CC' essendo minore di un quadrante, il punto C' si troverà situato dalla stessa parte del punto C per rapporto al cerchio massimo A'B'.



Per la stessa ragione i punti A e B sono i poli degli archi B'C', A'C', e sono situati dalla stessa parte di A' e B' per rapporto agli archi B'C' e A'C'.

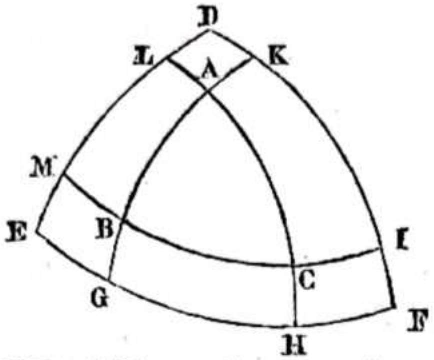
Dunque il triangolo ABC è il triangolo polare di A'B'C'.

Osservazione. La proprietà precedente può applicarsi ad un poligono sferico convesso: ed invero essendo dato un poligono sferico ABCDE, sia A' quello dei due poli dell'arco AE situato nello stesso emisfero del poligono sferico ABCDE: siano similmente B', C', D', E' i poli degli archi AB, BC, CD, DE situati della stessa maniera per rapporto a questi archi; il poligono sferico A'B'C'D'E' dicesi il polare di ABCDE, e si dimostrerà come pel triangolo che reciprocamente ABCDE è il polare di A'B'C'D'E'.



PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA. *Di due triangoli polari* ABC, DEF, *ogni angolo di ciascun triangolo avrà per misura una semicirconferenza meno il lato opposto nell'altro triangolo.*



Si prolunghino, se occorre, i lati AB, AC fino all'incontro di EF in G ed H; siccome il punto A è il polo dell'arco GH, così l'angolo A avrà per misura l'arco GH. Ma l'arco EH è un quadrante come pure GF, perchè E è il polo di AH, ed F il polo di AG; dunque EH+GF equivale ad una semicirconferenza: ed essendo inoltre EH+GF lo stesso che EF+GH (*), ne segue che l'arco GH che misura l'angolo A è uguale ad una semicirconferenza meno il lato EF, similmente si dimostra che l'angolo B ha per misura $\frac{1}{2}$ *circ.*—DF, e che l'angolo C ha per misura $\frac{1}{2}$ *circ.*—DE.

Questa proprietà dovendo essere reciproca fra i due triangoli, poichè essi si descrivono nella stessa maniera l'uno per mezzo dell'altro; si troverà che gli angoli D, E, F del triangolo DEF avranno rispettivamente per misura $\frac{1}{2}$ *circ.*—BC, $\frac{1}{2}$ *circ.*—AC, $\frac{1}{2}$ *circ.*—AB; ed infatti, l'angolo D, per esempio, ha per misura l'arco MI; ma MI+BC=MC+BI=$\frac{1}{2}$ *circ.*; dunque l'arco MI misura dell'angolo D è uguale a $\frac{1}{2}$ *circ.*—BC; e così per gli altri.

Osservazione I. Se dal centro della sfera si tirano i raggi ai vertici dei triangoli ABC, DEF; verranno a formarsi due angoli triedri i cui angoli piani hanno per misura i lati dei triangoli sferici, ed i cui angoli diedri non sono altro che gli angoli degli stessi triangoli.

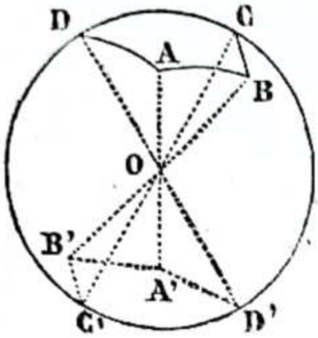
Ora, risultando dal teorema dimostrato poc'anzi, che in questi due angoli triedri gli angoli diedri dell'uno sono i supplementi delle facce dell'altro e reciprocamente; ne segue che i suddetti angoli triedri sono supplementari.

Osservazione II. Si dimostra nella stessa guisa che in due poligoni sferici polari, ogni angolo dell'uno è il supplemento di quel lato dell'altro che ha per polo il vertice dell'angolo.

DEFINIZIONI.

Sia ABCD un poligono sferico; si conducano i raggi ai vertici di questo poligono e si prolunghino fino a che incontrano di nuovo la sfera in A′, B′, C′, D′; si

(*) Giacchè avendosi EH=EF—HF e GF=GH+HF, sarà EH+GF=EF+GH.



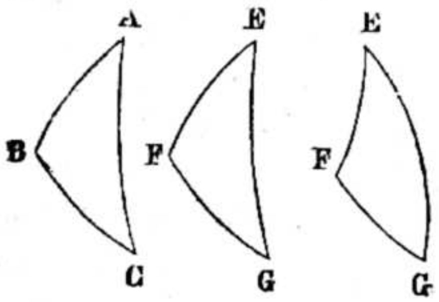
conducano infine gli archi A'B', B'C', A'D', C'D'.

Gli angoli solidi formati in O essendo simmetrici, essi avranno gli angoli piani e gli angoli diedri rispettivamente eguali: e però anche i poligoni sferici ABCD , A'B'C'D' avranno tutte le loro parti uguali. Ciò non pertanto questi poligoni non sono sovrapponibili; poichè se si porta il lato C'D' sul suo uguale CD in modo che gli altri lati dei due poligoni cadano da una stessa parte per rapporto a CD, il punto D' cadrà in C; e percorrendo i due poligoni nello stesso senso a partire dal punto C, i lati e gli angoli si presenteranno in un ordine inverso.

Questi poligoni sferici sono chiamati simmetrici, qualunque possano essere le posizioni rispettive che hanno sulla superficie della sfera.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA. *Due triangoli situati sulla stessa sfera o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti, allorchè hanno un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali.*



Sia il lato AB=EF, il lato AC =EG e l'angolo BAC=FEG; il triangolo EFG potrà essere situato sul triangolo ABC nello stesso modo con cui si sovrappongono due triangoli rettilinei che hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali. Tutte le parti del triangolo EFG risultando così uguali a quelle del triangolo ABC, sarà pure il lato BC =FG, l'angolo ABC=EFG e l'angolo ACB=EGF.

Se i lati uguali dei due triangoli fossero inversamente disposti per rapporto ai due angoli uguali, si sovrapporrebbe EFG sul simmetrico di ABC, e si perverrebbe alla stessa conclusione.

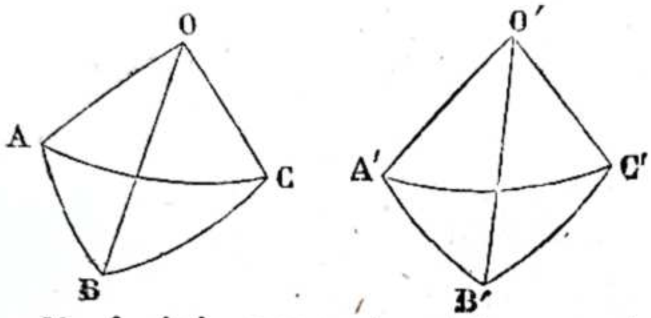
PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA. *Due triangoli situati sulla stessa sfera o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti,* *allorchè hanno un lato uguale adiacente a due angoli rispettivamente uguali.*

Poichè uno di questi triangoli può essere situato sull' altro o sul suo simmetrico, come si fa nel caso simile dei triangoli rettilinei (Vedete prop. VI, lib. I).

PROPOSIZIONE XVIII.

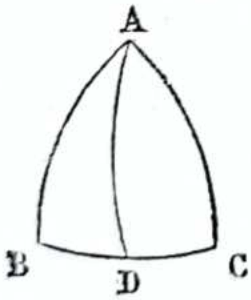
TEOREMA. *Se due triangoli situati sulla stessa sfera, o sopra sfere uguali, sono equilateri fra loro, essi saranno anche equiangoli, e gli angoli uguali saranno opposti ai lati uguali.*



Congiungendo i centri delle sfere O e O′ coi vertici dei due triangoli, si formeranno due angoli triedri, i cui angoli piani, avendo per misura i lati dei triangoli sferici, sono rispettivamente uguali; ma si è dimostrato che in questo caso gli angoli diedri opposti alle facce uguali sono uguali; dunque nei due triangoli sferici gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA. *In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono eguali.*



Sia il lato AB=AC; io dico che si avrà l' angolo C=B: poichè se dal vertice A si conduce al punto di mezzo D della base, l'arco AD, i due triangoli ABD, ADC avranno i tre lati rispettivamente uguali, cioè AD di comune, BD=DC e AB=AC; dunque, pel teorema precedente, questi triangoli avranno gli angoli uguali e si avrà B=C.

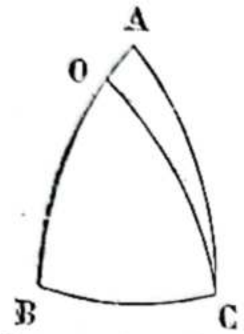
Dalla stessa dimostrazione risulta che l' angolo BAD=DAC e che l' angolo BDA=ADC; dunque questi due ultimi sono retti, e perciò *l'arco condotto dal vertice di un triangolo sferico isoscele al punto di mezzo della sua base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.*

Scolio. Risulta anche da questo teorema che il simmetrico di un triangolo sferico isoscele gli è uguale per sovrapposizione.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA. *Se due angoli di un triangolo sferico sono uguali, anche i lati opposti saranno uguali.*

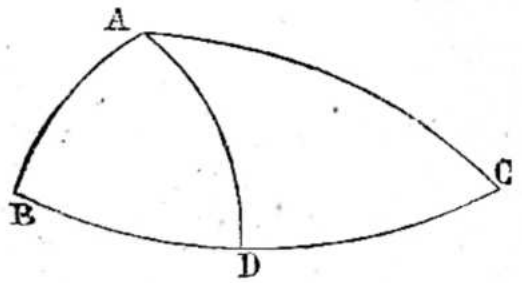
Sia l'angolo B=C, io dico che si avrà AC=AB; poichè, se il lato AB non è uguale ad AC, sia AB il maggiore dei due; si prenda BO = AC e si congiunga OC. I due triangoli BOC, ACB, avendo due lati uguali a due lati e l'angolo compreso dai primi eguale all'angolo compreso dai secondi, sono eguali (prop. 16) e si avrà OCB=ABC; ma l'angolo ABC per ipotesi è pure uguale ad ACB, quindi dovrebb' essere OCB=ACB, il che è impossibile; e perciò non potendo supporre AB diverso da CA, i lati AB, AC opposti agli angoli uguali B e C, saranno uguali.



PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA. *In un triangolo sferico* ABC, *se l'angolo* A *è maggiore dell' angolo* B, *il lato* BC *opposto all'angolo* A *sarà maggiore del lato* AC *opposto all'angolo* B; *reciprocamente, se il lato* BC *è maggiore di* CA, *l'angolo* A *sarà maggiore dell'angolo* B.

1.° Sia l'angolo A>B; facendo l'angolo BAD=B, si avrà AD=DB (prop. 20.): ma AD+DC è maggiore di AC; dunque col porre BD in luogo di AD si avrà DB+DC o BC>AC.



2.° Se si suppone BC>AC, io dico che l'angolo BAC sarà maggiore di ABC; poichè se BAC fosse uguale ad ABC, si avrebbe BC=AC, e se si avesse BAC<ABC ne seguirebbe, per ciò che si è dimostrato, BC<AC, il che è contro la supposizione; dunque l'angolo BAC è maggiore di ABC.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA. *Se due triangoli situati sulla stessa sfera o sopra sfere uguali sono equiangoli fra loro, essi saranno anche equilateri.*

Sieno A e B i due triangoli dati, P e Q i loro triangoli polari: siccome gli angoli sono uguali nei triangoli A e

B, così i lati saranno uguali nei polari P e Q (prop. 15); ma dall'essere equilateri i triangoli P e Q, ne segue che essi sono anche equiangoli (prop. 18); e però dall'essere gli angoli uguali nei triangoli P e Q, ne segue (prop. 15) che i lati sono uguali nei loro polari A e B: onde i triangoli equiangoli A e B sono nello stesso tempo equilateri fra loro.

Scolio. Questa proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei ove dall' eguaglianza degli angoli non si può ricavare che la sola proporzionalità dei lati. Ma si può facilmente rendersi conto della differenza che si trova a questo riguardo fra i triangoli rettilinei ed i triangoli sferici.

Infatti, nella proposizione presente come pure nelle prop. 16, 17, 18, 22 dove si tratta del paragone dei triangoli, è detto espressamente che questi triangoli sono situati sulla stessa sfera o sopra sfere uguali: ma gli archi simili sono proporzionali ai raggi; dunque per sfere uguali due triangoli non possono essere simili senza essere uguali. Non ci ha quindi a sorprendersi se l'eguaglianza degli angoli porta con sè l'eguaglianza dei lati.

Ciò non avrebbe luogo se i triangoli fossero tracciati sopra sfere disuguali; perchè allora gli angoli essendo uguali, i triangoli sarebbero simili, ed i lati omologhi sarebbero proporzionali ai raggi delle sfere.

PROPOSIZIONE XXIII.

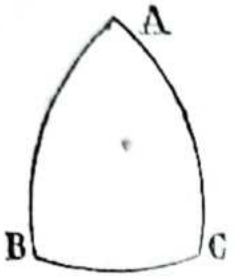
1.° Teorema. *La somma degli angoli di un triangolo sferico è minore di sei e maggiore di due retti.*

2.° *L'angolo più piccolo aumentato di due retti è maggiore della somma degli altri due.*

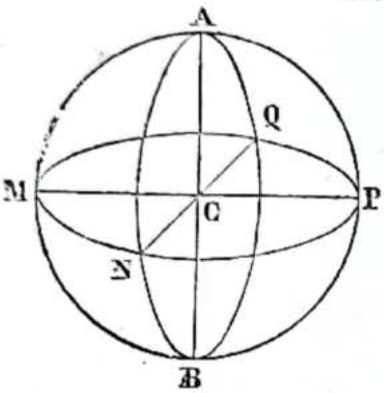
1.° Infatti, la misura di ogni angolo di un triangolo sferico essendo una semicirconferenza meno il lato opposto del triangolo polare (prop. 15); la somma di tutti e tre gli angoli avrà per misura tre semicirconferenze meno la somma dei lati del triangolo polare; ma quest'ultima somma è maggiore di zero e minore di una circonferenza; dunque togliendola da tre semicirconferenze, il resto sarà minore di tre semicirconferenze e maggiore di una semicirconferenza; e però anche la somma degli angoli di un triangolo sferico è minore di sei retti ed è maggiore di due retti.

Corollario. Un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti, due o tre angoli ottusi.

Se il triangolo ABC è *birettangolo*, cioè se ha due angoli retti B e C, il vertice A sarà il polo della base BC, ed i lati AB, AC saranno due quadranti.



Se inoltre anche l' angolo A è retto, il triangolo ABC sarà *trirettangolo*, i suoi angoli saranno tutti retti, ed i suoi lati saranno tre quadranti. Il triangolo trirettangolo è contenuto otto volte nella superficie della sfera; il che si rileva dalla fig. 236, col supporre l' arco MN uguale ad un quadrante.



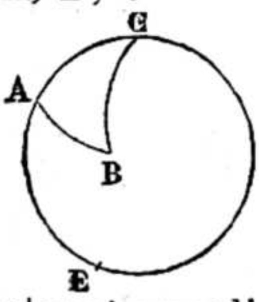
2.° Se A, B, C sono gli angoli del triangolo, ed A il più piccolo; saranno 180^0-A, 180^0-B, 180^0-C i lati del triangolo polare; ma si ha

$$180-A<180-B+180-C;$$

dunque, aggiungendo ad una parte ed all' altra $A+B+C$, e togliendone 180, si deduce

$$B+C<180^o+A.$$

Da ciò risulta che con tre angoli A, B, C che soddisfano alle condizioni enunciate in questo teorema, si può formare un triangolo sferico; giacchè queste sono appunto le condizioni necessarie e sufficienti affinchè si possa costruire un angolo triedro con i tre angoli diedri A, B, C.



Scolio. In tutto ciò che precede si è supposto che i triangoli sferici hanno i loro lati sempre minori di una semicirconferenza; ma è utile osservare che vi esistono dei triangoli sferici di cui alcuni lati sono maggiori della semicirconferenza ed alcuni angoli maggiori di due angoli retti. Infatti, se si prolunga il lato AC finchè diventa una circonferenza intera ACE, ciò che resta togliendo dall' emisfero il triangolo ABC è un nuovo triangolo, che si può indicare anche con ABC, e di cui i lati sono AB, BC, AEC; si vede adunque che il lato AEC è maggiore della semicirconferenza, e nello stesso tempo l'angolo opposto B supera due angoli retti.

Del resto, se si sono esclusi dalla definizione i triangoli di cui i lati e gli angoli sono così grandi, la loro risoluzione o la determinazione delle loro parti si riduce sempre a quella dei triangoli compresi nella definizione; giacchè si vede facilmente che se si conoscono gli angoli ed i lati del triangolo ABC, si conosceranno immediatamente i lati e gli angoli del triangolo dello stesso nome che è il resto dalla mezza sfera.

DEFINIZIONI.

I. Si chiama *fuso* la porzione della superficie della sfera compresa fra due semicerchi massimi aventi un diametro comune.

II. L'*unghia sferica* è la parte del volume della sfera compresa fra gli stessi semicerchi massimi, ed alla quale il fuso serve di base.

III. La *piramide sferica* è la parte della sfera compresa fra i piani di un angolo solido, di cui il vertice è al centro, ed avente per base il poligono sferico intercetto dagli stessi piani.

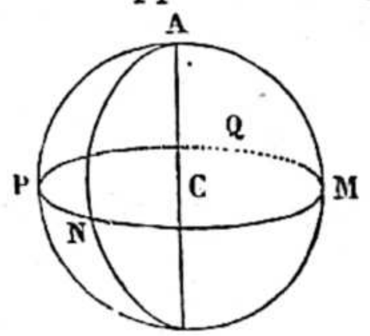
Allorchè due poligoni sferici coincidono, le piramidi di cui essi sono le basi, coincidono ugualmente.

IV. Chiameremo *piramidi sferiche* simmetriche quelle che hanno per basi poligoni simmetrici.

PROPOSIZIONE XXIV.

Teorema. *Il fuso* AMBNA *sta alla superficie della sfera come l'angolo* MAN *del fuso sta a quattro angoli retti, o come l'arco* MN *che misura quest' angolo sta alla circonferenza.*

Supponiamo in primo luogo che l'arco MN sia commensurabile colla circonferenza MNPQ, e che dividendo questa in 48 parti uguali, l'arco MN contenga 5 di queste parti; il rapporto dell'arco alla circonferenza sarà così $\frac{5}{48}$.



Pel diametro AB e per i punti di divisione si facciano passare dei piani; si formeranno così sulla sfera 48 fusi tutti uguali fra loro perchè hanno uno stesso angolo; ma di questi, 5 sono contenuti in AMBN, dunque il rapporto di questo fuso alla superficie della sfera sarà anche $\frac{5}{48}$; e perciò sarà lo stesso di quello dell' arco MN alla circonferenza MNPQ.

Se l'arco MN non è commensurabile colla circonferenza, si dimostrerà col ragionamento solito che il fuso sta sempre alla sfera come l'arco MN sta alla circonferenza.

Misura del fuso. Siano F, F′ due fusi di cui gli angoli sono A e A′; si ha dal teorema precedente

$$\frac{F}{\text{sfera}} = \frac{A}{4^{\text{ret}}}$$

e

$$\frac{F'}{\text{sfera}} = \frac{A'}{4^{\text{ret}}};$$

donde

$$\frac{F}{F'} = \frac{A}{A'}. \qquad (1)$$

Se dunque si vuol misurare un fuso rispetto ad un altro fuso preso per unità, si rileva dalla proporzione (1) che basta cercare il rapporto degli angoli di questi fusi.

Così supposto che si prende per unità del fuso F′ quello di cui l' angolo è retto, la proporzione (1) diviene

$$\frac{F}{F'} = \frac{A}{1^{\text{ret}}}. \qquad (2)$$

e però il rapporto di un fuso al fuso retto è uguale al rapporto del suo angolo ad un angolo retto; il che si esprime brevemente dicendo che il fuso ha per misura il suo angolo.

Se si prendesse per unità di superficie il triangolo trirettangolo T che è la metà del fuso retto, si avrebbe col sostituire 2T ad F′ nell' eguaglianza (2)

$$\frac{F}{2T} = \frac{A}{1^{\text{ret}}},$$

donde, moltiplicando l'una parte e l'altra per 2, si ricava

$$\frac{F}{T} = \frac{2A}{1^{\text{ret}}}.$$

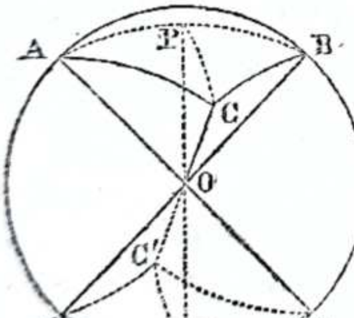
Il rapporto adunque di un fuso al triangolo trirettangolo è uguale al rapporto del doppio del suo angolo ad un angolo retto, o, in altri termini, un fuso ha per misura il doppio del suo angolo.

Scolio. Si vedrebbe parimenti che un' unghia sta al volume della sfera come il suo angolo sta a 4 retti, e che un' unghia ha per misura il suo angolo, se si prende per unità di volume l'unghia retta e per unità di angolo l'angolo retto; ovvero il doppio del suo angolo, prendendo per unità di volume la piramide trirettangola, che è la metà dell' unghia retta, e per unità di angolo l' angolo retto.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA. *Due triangoli sferici simmetrici sono uguali in superficie.*

Sia ABC un triangolo sferico ed A′B′C′ il suo simmetrico. Sia P il polo del cerchio minore che passa per i punti A, B, C, (*), di guisa che gli archi di cerchi massimi PA, PB sono uguali. Conducasi infine il diametro POP′, e gli archi di cerchi massimi P′A′, P′B′, P′C′.



Gli angoli POA, P′OB′ essendo uguali come opposti al vertice, sarà l' arco PA=P′B′; per la stessa ragione PB=P′A′ e PC=P′C′; e siccome PA=PB=PC, così si avrà pure P′A′=P′B′=P′C′.

Ciò posto, i triangoli APC, A′P′C′ avendo i tre lati rispettivamente uguali ed essendo isosceli, essi sovrapposti coincideranno. Si vedrebbe similmente che il triangolo CPB è uguale al triangolo C′P′A′ e che il triangolo APB è uguale al triangolo A′P′B′; e però il triangolo ABC che è la somma dei triangoli APC, CPB, APB, sarà uguale in superficie al triangolo A′B′C′, che è la somma dei triangoli A′P′C′, C′P′B′, A′P′B′.

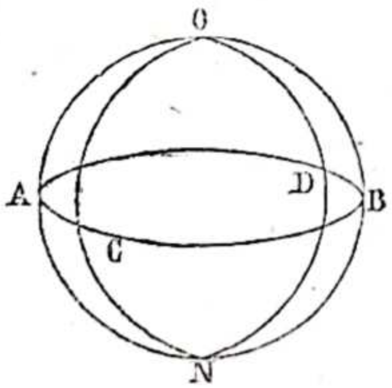
(*) Il cerchio che passa per i tre punti A, B, C, o che è circoscritto al triangolo ABC, non può essere che un cerchio minore della sfera; poichè se fosse un cerchio massimo, i tre lati AB, BC, AC sarebbero situati in uno stesso piano ed il triangolo ABC si ridurrebbe ad uno dei suoi lati.

Osservazione I. Se il polo P fosse fuori del triangolo ABC, allora bisognerebbe fare la somma di due triangoli isosceli e toglierne il terzo per avere il triangolo ABC; e siccome la stessa cosa avrebbe luogo pel triangolo A′B′C′, così la conclusione sarebbe la stessa.

Osservazione II. Similmente si dimostrerebbe che le due piramidi sferiche simmetriche che hanno per base i triangoli ABC, A′B′C′, sono equivalenti.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA. *Se due cerchi massimi* AOB, COD *si taglia-no comunque nell'emisfero* AOCBD, *la somma dei trian-goli opposti* AOC, BOD *sarà uguale al fuso che ha per angolo* BOD.



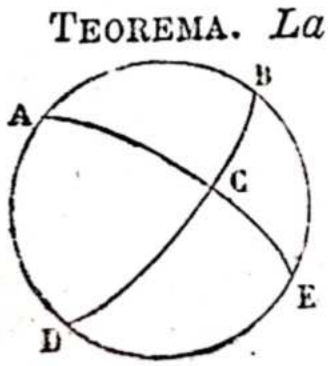
Poichè prolungando gli archi OB, OD nell' altro emisfero fino al loro incontro in N, sarà OBN una semi-circonferenza, come pure AOB; togliendo da una parte e dall'altra OB, si avrà BN=AO.

Per una ragione simile si ha DN =CO e BD=AC; dunque i due triangoli AOC, BDN, avendo i tre lati uguali ed inversamente situati, sono simmetrici e quindi uguali in superficie (prop. 25); laonde la somma dei triangoli AOC, BOD sarà equivalente al fuso OBNDO di cui l' angolo è BOD.

Scolio. È pure evidente che le due piramidi sferiche che hanno per basi i triangoli AOC, BOD prese insieme, equivalgono all' unghia sferica che ha per angolo BOD.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA. *La superficie di un triangolo sferico ha per misura l'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.*



Sia ABC il triangolo proposto; si completi il cerchio massimo AB, e si prolunghino gli archi CB, AC fino al loro incontro con questo cerchio massimo.

Si ha evidentemente.

$$ABC+BCE=\text{fuso } A,$$
$$ABC+ACD=\text{fuso } B$$

e pel teorema precedente

$$ABC+DCE=\text{fuso } C.$$

Addizionando , ed osservando che la somma di questi sei triangoli eccede l' emisfero di due volte il triangolo ABC, si ricava

$$2.\ ABC+\tfrac{1}{2}\text{ sfera}=\text{fuso } A+\text{fuso } B+\text{fuso } C.$$

E però togliendo da una parte e dall' altra la mezza sfera, e dividendo per 2, si avrà

$$ABC=\frac{\text{fuso } A+\text{fuso } B+\text{fuso } C-\frac{1}{2}\text{sfera}}{2}.$$

Se ora si dividono i due membri dell' eguaglianza per la superficie del triangolo trirettangolo, che chiameremo T, si ha

$$\frac{ABC}{T}=\frac{\text{fuso } A+\text{fuso } B+\text{fuso } C-\frac{1}{2}\text{ sfera}}{2T}.$$

ma

$$\frac{\text{fuso } A}{2T}=\frac{A}{1^{ret}},\ \frac{\text{fuso } B}{2T}=\frac{B}{1^{ret}},\ \frac{\text{fuso } C}{2T}=\frac{C}{1^{ret}},$$

e

$$\frac{\frac{1}{2}\text{ sfera}}{2T}=2;$$

dunque

$$\frac{ABC}{T}=\frac{A+B+C+2}{1^{ret}}=\frac{A+B+C-2^{ret}}{1^{ret}},$$

Sicchè il rapporto di un triangolo sferico al triangolo trirettangolo è uguale al rapporto dell'eccesso della somma dei suoi angoli sopra due retti ad un angolo retto , il che si esprime molto più brevemente dicendo che un triangolo sferico ha per misura l' eccesso della somma dei suoi angoli sopra due angoli retti.

Scolio I. Se gli angoli del triangolo sono dati dai numeri dei gradi degli archi che li misurano , si toglierà

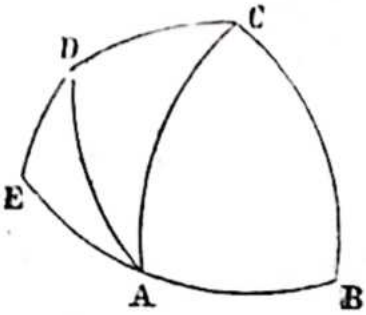
$180.^\circ$ dalla loro somma e si cercherà il rapporto della differenza a 90°.

Applicazione. Siano $A=70.^\circ\,10'$, $B=60.^\circ\,20'$, $C=80.^\circ$; togliendo $180.^\circ$ dalla somma di questi archi, si trova per differenza $30.^\circ$, $30'$ e per ottenere il rapporto di 30°, $30'$ a 90° bisogna ridurre questi due numeri di gradi in minuti e dividere il primo numero pel secondo; sicchè il triangolo proposto è i $\frac{1830}{5400}$, o $\frac{1}{3}$ del triangolo trirettangolo.

Scolio II. Si dimostrerebbe similmente che una piramide sferica triangolare ha per misura l' eccesso della somma degli angoli della sua base su due retti (prendendo per unità di volume la piramide trirettangola e per unità di angolo l'angolo retto). In tal modo lo stesso numero $\dfrac{A+B+C-2^{\text{ret}}}{1^{\text{ret}}}$ rappresenterà contemporaneamente il rapporto di una piramide sferica alla piramide trirettangola, ed il rapporto della base della piramide al triangolo trirettangolo.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA. *La superficie di un poligono sferico ha per misura la somma dei suoi angoli diminuita del prodotto di due angoli retti per il numero dei lati del poligono meno due.*



Conducendo da uno stesso vertice A a tutti gli altri vertici le diagonali AC, AD; il poligono ABCDE rimarrà diviso in tanti triangoli per quanti sono i lati meno due. Ma la superficie di ogni triangolo ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti, ed è la somma di tutti gli angoli dei triangoli uguale alla somma degli angoli del poligono; dunque la superficie del poligono avrà per misura la somma dei suoi angoli diminuita di tante volte due retti quanti sono i lati meno due.

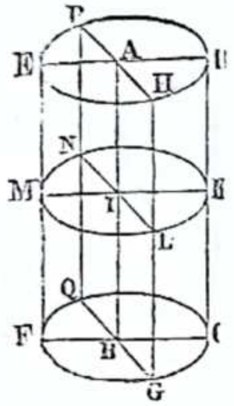
Scolio. Sia s la somma degli angoli di un poligono sferico, ed n il numero dei suoi lati; prendendo per unità l'angolo retto, la superficie del poligono avrà per misura $s-2(n-2)$ o $s-2n+4$.

LIBRO VIII.

I TRE CORPI ROTONDI.

—

DEFINIZIONI



I. Si chiama *cilindro retto* il solido generato dalla rivoluzione di un rettangolo ABCD che s' immagina girare intorno al lato immobile AB.

In questo movimento, i lati AD, BC, restando sempre perpendicolari ad AB, descrivono piani circolari uguali DPH, CGQ, che si chiamano *le basi del cilindro*, e la retta CD che dicesi *generatrice*, ne descrive la *superficie laterale*.

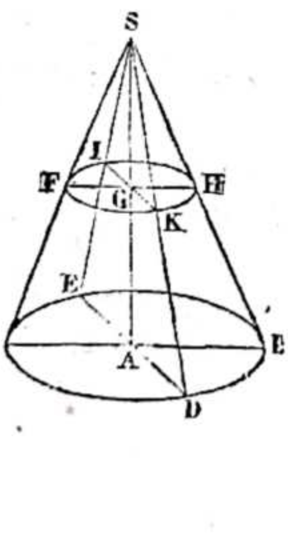
La retta immobile AB si chiama *asse del cilindro.*

Ogni sezione KLM, fatta nel cilindro perpendicolarmente all' asse, è un cerchio uguale a ciascuna base, poichè, mentre il rettangolo ABCD gira intorno ad AB la retta IK, perpendicolare ad AB, descrive un piano circolare uguale alla base, e questo piano non è altro che la sezione fatta perpendicolarmente all'asse nel punto I.

Ogni sezione PQGH, fatta secondo l'asse, è un rettangolo doppio del rettangolo generatore ABCD.

II. Si chiama *cono retto* il solido generato dalla rivoluzione del triangolo rettangolo SAB, che s' immagina girare intorno al lato immobile SA.

In questo movimento il lato AB descrive un piano circolare BDCE, che si chiama *base del cono*, e l' ipotenusa SB ne descrive la *superficie laterale*.



Il punto S si chiama *vertice del cono,* SA *l' asse* o *l' altezza*, ed SB *il lato* o *l' apotema.*

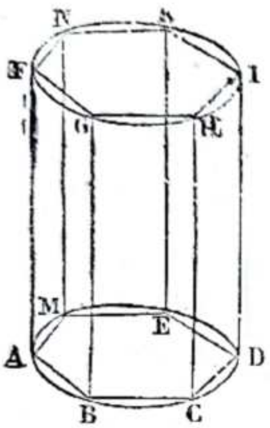
Ogni sezione IHKFI, fatta perpendicolarmente all'asse, è un cerchio, ed ogni sezione SDE. fatta secondo l' asse, è un triangolo isoscele doppio del triangolo generatore SAB.

III. Se dal cono SCDB si toglie con sezione parallela alla base, il cono BFKH, il rimanente solido CIHE si chiama *cono tronco*, o *tronco di cono*.

Si può supporre che esso vien descritto dalla rivoluzione del trapezio ABHG, di cui gli angoli A e G sono retti, intorno al lato AG.

La retta immobile AG si chiama *asse* o *altezza del tronco*, i cerchi BDC, HFK ne sono le *basi* e BH ne è *il lato*.

IV. Due cilindri o due coni sono simili allorchè i loro assi stanno fra loro come i diametri delle loro basi.

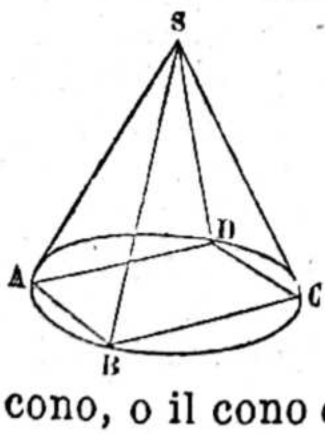


V. Se nel cerchio ACD che serve di base ad un cilindro, s' inscrive un poligono ABCDE e sulla base ABCDE si costruisce un prisma retto uguale in altezza al cilindro, il prisma dicesi *inscritto nel cilindro* o il cilindro *circoscritto al prisma*.

È chiaro che le costole AF, BG, CH etc. del prisma, essendo perpendicolari al piano della base, sono comprese nella superficie convessa del cilindro, e quindi il prisma ed il cilindro si toccano secondo queste costole.

Ammetteremo come evidente che se il numero dei lati del poligono inscritto divenisse grandissimo, la differenza fra la superficie laterale del cilindro e la superficie laterale del prisma diverrebbe minore di ogni quantità data, o in altri termini, la *superficie laterale di un cilindro è il limite della superficie laterale di un prisma inscritto di cui il numero delle facce cresce indefinitamente.*

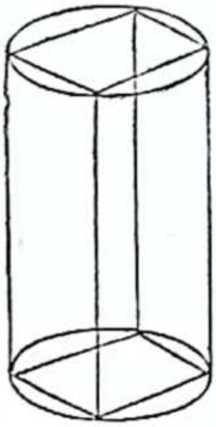
Ammetteremo similmente che *il volume di un cilindro è il limite del volume di un prisma inscritto di cui il numero delle facce cresce indefinitamente.*



Sia ancora ABCD un poligono inscritto nel cerchio ABC che serve di base ad un cono, e costruiscasi una piramide SABCD avente per base questo poligono e per vertice il punto S; le costole SA, SB, SC, SD di questa piramide apparterranno alla superficie del cono, e questa piramide si dirà *inscritta* nel cono, o il cono *circoscritto* alla piramide. Ammetteremo ancora *che la superficie laterale del cono è il limite della superficie laterale di una piramide inscritta di cui il numero delle facce cresce indefinitamente, come pure che il volume di un cono è il limite del volume delle stesse piramidi.*

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA. *Il volume di un cilindro ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*



Inscrivasi nella base del cilindro un poligono regolare, e costruiscasi il prisma retto avente per base questo poligono e la stessa altezza del cilindro.

Indicando con B la base del prisma, con V il suo volume e con H l'altezza del cilindro, si avrà

$$V = B \times H. \text{ (prop. 12 lib. 6.)}$$

Ma il volume del cilindro è il limite del volume di un prisma inscritto di cui il numero delle facce cresce indefinitamente; si avrà adunque la misura del cilindro col prendere il limite del prodotto $B \times H$; e siccome il poligono inscritto B ha per limite la superficie del cerchio, ed il fattore H è costante; così si avrà infine

$$\text{vol. cilindro} = \text{cerchio} \times H.$$

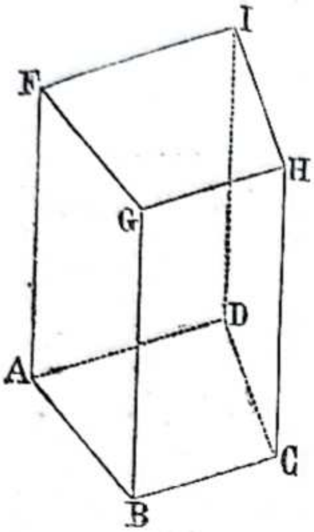
Corollario I. I cilindri della stessa altezza stanno come le loro basi, ed i cilindri della stessa base stanno come le loro altezze.

Corollario II. I cilindri simili stanno come i cubi delle altezze, o come i cubi dei diametri delle basi. Infatti, queste basi stanno come i quadrati dei loro diametri; ma essendo simili i cilindri, i diametri delle basi stanno come le altezze (def. 4.); dunque le basi staranno come i quadrati delle altezze; e perciò le basi moltiplicate per le altezze, o i cilindri, staranno come i cubi delle altezze.

Scolio. Sia R il raggio della base di un cilindro, H la sua altezza; la superficie della base sarà πR^2 e la solidità del cilindro sarà $\pi R^2 \times H$, o $\pi R^2 H$.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA. *La superficie laterale di un prisma retto ha per misura il perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.*



Poichè questa superficie è uguale alla somma dei rettangoli AFGB, BGHC CHID etc. di cui essa è composta; ma le altezze AF, BG, CH etc. di questi rettangoli sono uguali all' altezza del prisma, e le loro basi prese insieme formano il perimetro della base del prisma, dunque la somma di questi rettangoli o la superficie laterale del prisma è uguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.

Corollario. Se due prismi retti hanno la stessa altezza, le superficie laterali di questi prismi staranno fra loro come i perimetri delle loro basi.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA. *La superficie laterale di un cilindro ha per misura la circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.*

Inscrivasi nella base del cilindro un poligono regolare, e costruiscasi il prisma retto che ha per base questo poligono, e la stessa altezza del cilindro.

Se indichiamo con P il perimetro della base, con S la superficie laterale del prisma e con H l' altezza del cilindro; si avrà

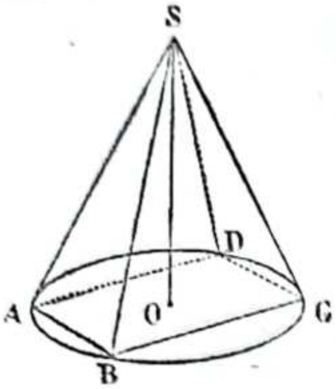
$$S=P\times H. \text{ (prop. preced.)}$$

Ma la superficie laterale del cilindro è il limite della superficie di un prisma inscritto di cui il numero delle facce cresce indefinitamente; dunque si avrà la misura della superficie del cilindro col prendere il limite di $P\times H$. Ora il perimetro P del poligono inscritto ha per limite la lunghezza della circonferenza ed il fattore H è costante; dunque infine,

$$\text{sup. cilindro}=\text{circ.}\times H.$$

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA. *Il volume di un cono ha per misura il prodotto della sua base per il terzo della sua altezza.*



Inscrivasi nella base del cono un poligono regolare, e costruiscasi la piramide avente per base questo poligono e per vertice il vertice del cono.

Indicando con B la superficie del poligono inscritto con V il volume della piramide, e con H l'altezza del cono, si ha

$$V=B\times\frac{H}{3}. \text{ (prop. 16 lib. 6).}$$

Ma il volume del cono è il limite del volume di una piramide inscritta, di cui il numero delle facce cresce indefinitamente, ed inoltre la base B della piramide ha per limite la superficie del cerchio mentre il fattore $\frac{H}{3}$ è costante; dunque

$$\text{vol. cono}=\text{cerchio}\times\frac{H}{3}.$$

Corollario. Un cono è il terzo di un cilindro della stessa base e della stessa altezza; donde segue.

1.° Che i coni di uguale altezza stanno fra loro come le basi.

2.° Che i coni di basi uguali stanno fra loro come le altezze.

3.° Che i coni simili stanno fra loro come i cubi dei diametri delle basi, o come i cubi delle altezze.

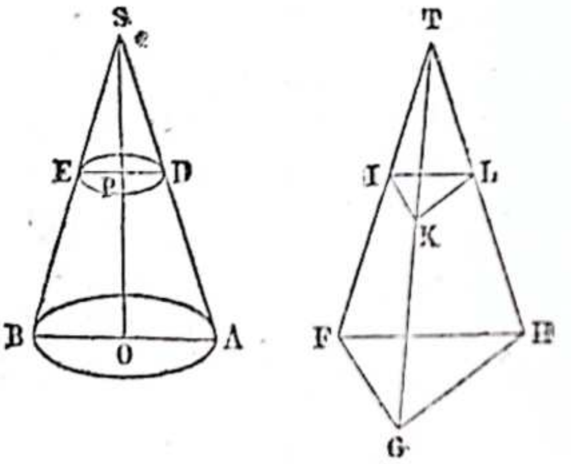
Scolio. Sia R il raggio della base di un cono, H la sua altezza; la solidità del cono sarà

$$\pi R^2\times\tfrac{1}{3}\,H \text{ o } \tfrac{1}{3}\,\pi R^2 H.$$

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA. *Il cono tronco* ADEB, *di cui* AO, DP *sono i raggi delle basi e* PO *l'altezza, ha per misura* $\frac{1}{3}\pi$. OP. $(\overline{AO}^2+\overline{DP}^2+AO\times DP)$. (*)

Sia TFGH una piramide triangolare della stessa altezza del cono SAB, e di base FGH equivalente alla base del cono. Potendosi supporre queste due basi situate sullo stesso piano, i vertici S e T saranno ad uguali distanze dal piano delle basi, ed il piano EPD prolungato produrrà nella piramide la sezione IKL equivalente al cerchio DE; ed infatti, essendo i coni SBA, SED simili, le basi



AB, DE staranno fra loro come i quadrati dei raggi AO, DP, o come i quadrati delle altezze SO, SP; ma i triangoli FGH, IKL stanno fra loro come i quadrati di queste stesse altezze; dunque i cerchi AB, DE saranno proporzionali ai triangoli FGH, IKL: e però, essendo per ipotesi il triangolo FGH equivalente al cerchio AB, sarà pure il triangolo IKL equivalente al cerchio DE.

Intanto la base AB moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è il volume del cono SAB, e la base FGH moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è quello della piramide TFGH; dunque, in virtù delle basi equivalenti, il volume della piramide risulta uguale a quella del cono. Per una ragione simile, la piramide TIKL è equivalente al cono SDE; e però il tronco di cono ADEB risulterà equivalente al tronco di piramide FGHIKL ed avrà la stessa misura di quest'ultimo. Ma la base FGH, equivalente al cerchio di raggio AO, ha per misura $\pi\times\overline{AO}^2$; la base $IKL=\pi\times\overline{DP}^2$, e la media propor-

(*) Il cono tronco è equivalente a tre coni che hanno tutti e tre per altezza quella del tronco, e per basi il 1 quella inferiore del tronco, il 2 la superiore, ed il 3 una media geometrica fra queste due basi. *N. del Trad.*

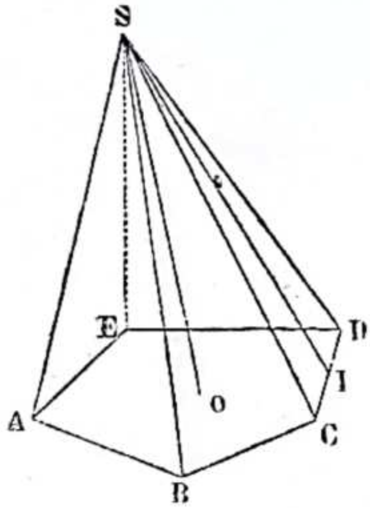
zionale fra $\pi\times\overline{AO}^2$ e $\pi\times\overline{DP}^2$ è $\pi\times AO\times DP$; dunque il volume del tronco di piramide, e per conseguenza quello del tronco di cono, avrà per misura $\frac{1}{3}OP\times(\pi\times\overline{AO}^2+\pi\times\overline{DP}^2+\pi\times AO\times DP)$ ovvero

$$\tfrac{1}{3}\pi\times OP\times(\overline{AO}^2+\overline{DP}^2+AO\times DP).$$

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA. *La superficie laterale di una piramide regolare* SABCDE *ha per misura il perimetro della sua base moltiplicato per la metà dell' apotema* SI (*).

Infatti, la superficie laterale della piramide regolare componendosi dei triangoli isosceli uguali SCD, SBC, SAB...; si ha



$$SCD=CD\times\frac{SI}{2},$$

$$SBC=BC\times\frac{SI}{2},$$

$$SAB=AB\times\frac{SI}{2},$$

. . . .

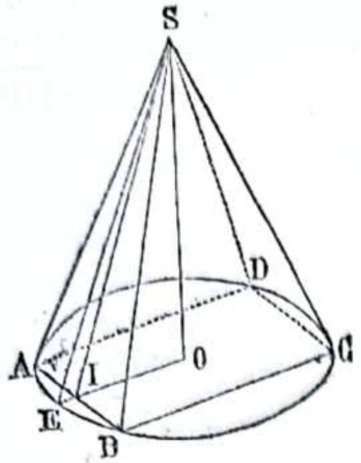
Dunque addizionando, si ottiene per la misura della superficie laterale della piramide

$$(CD+BC+AB+AE+ED)\times\frac{SI}{2}.$$

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA. *La superficie laterale di un cono ha per misura la circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.*

(*) L' *apotema* è la perpendicolare abbassata dal vertice S sopra uno dei lati della base della piramide.



Inscrivasi nella base del cono un poligono regolare ABCD, e costruiscasi la piramide regolare avente per base questo poligono, e per vertice il punto S.

Sia P il perimetro del poligono, S la superficie laterale della piramide ed SI l' apotema; si avrà

$$S=P\times\frac{SI}{2}.$$

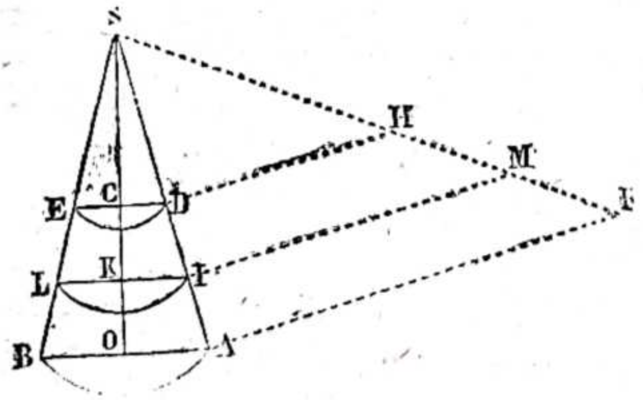
Ma S ha per limite la superficie laterale del cono; P ha per limite la circonferenza OE; e si vede facilmente che SI ha per limite SE, giacchè si ha $SE-SI<EI$ e si sa che EI può divenire minore di ogni quantità data allorchè il numero dei lati del poligono inscritto è sufficientemente grande; dunque

$$\text{sup. cono}=\text{circ. OE}\times\frac{SE}{2}.$$

Scolio. Se L è il lato di un cono, ed R il raggio della sua base, la circonferenza di questa base sarà $2\pi R$, e la superficie del cono avrà per misura $2\pi R\times\frac{1}{2}L$, o πRL.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA. *La superficie laterale del tronco di cono* ADEB *ha per misura il suo lato* AD *moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue basi* AB, DE.



Nel piano SAB che passa per l'asse SO conducasi perpendicolarmente ad SA, la retta AF uguale alla circonferenza che ha per raggio AO; si tiri SF, e si conduca DH parallela ad AF.

Per i triangoli simili SAO, SDC, si avrà

$$\frac{AO}{DC}=\frac{SA}{SD},$$

e per i triangoli simili SAF, SDH si avrà pure

$$\frac{AF}{DH}=\frac{SA}{SD},$$

dunque

$$\frac{AF}{DH}=\frac{AO}{DC}=\frac{\text{circ. }AO}{\text{circ. }DC}.$$

Sicchè essendo per costruzione AF=circ. AO. sarà DH =circ. DC. Ciò posto, il triangolo SAF, che ha per misura $AF\times\frac{1}{2}SA$ è uguale alla superficie del cono SAB, che ha per misura circ. $AO\times\frac{1}{2}$ SA : per una ragione simile il triangolo SDH è uguale alla superficie del cono SDE ; dunque la superficie del tronco ADEB risulterà uguale a quella del trapezio ADHF ; ma questo ha per misura AD $\times\frac{(AF+DH)}{2}$; e però la superficie del tronco di cono ADEB avrà per misura il suo lato moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi.

Corollario. Dal punto di mezzo I di AD, conducendo IKL parallela ad AB, ed IM parallela ad AF; si dimostrerà come sopra che IM=circ. IK. Ma il trapezio ADHF = =AD×IM=AD×circ. IK ; quindi si può anche dire *che la superficie di un tronco di cono ha per misura il suo lato moltiplicato per la circonferenza di una sezione fatta ad uguale distanza dalle due basi.*

Scolio. Se una retta AD, situata interamente da una stessa parte della retta OC e nello stesso piano, fa una rivoluzione intorno ad OC, la superficie descritta da AD

avrà per misura $AD\times\frac{(\text{circ. }AO+\text{circ. }DC)}{2}$ o AD×circ. IK,

essendo le rette AO, DC, IK le perpendicolari abbassate dagli estremi e dal punto di mezzo di AD sull' asse OC.

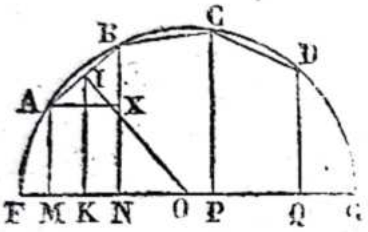
Ed infatti, se si prolungano AD e OC fino al loro incontro in S, è chiaro che la superficie descritta da AD sarà quella di un cono tronco di cui OA e DC sono i raggi delle basi, ed avendo il cono intiero per vertice il punto S: sarà dunque la suddetta espressione la misura di questa superficie.

Questa misura avrebbe sempre luogo, quando anche il punto D cadesse in S, il che darebbe un cono intero ; ed anche quando la retta AD fosse parallela all' asse, il che darebbe un cilindro.

Nel primo caso DC sarebbe nullo e nel secondo DC sarebbe uguale ad AO e ad IK.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA. *La superficie generata da una porzione di poligono regolare* ABCD *che gira intorno ad un diametro* FG, *ha per misura la circonferenza del cerchio inscritto nel poligono* ABCD, *molliplicata per la proiezione* MQ *del perimetro* ABCD *sul diametro* FG.



Il punto I essendo il punto di mezzo di AB, ed IK essendo una perpendicolare all'asse abbassata dal punto I, si ha

$$\text{sup. } AB = AB \times \text{circ. } IK. \text{ (prop. prec)}.$$

Ma condotta AX parallela all' asse, i triangoli ABX, OIK, avendo i lati rispettivamente perpendicolari, sono simili e danno la proporzione

$$\frac{AB}{AX \text{ o } MN} = \frac{OI}{IK} = \frac{\text{circ. } OI}{\text{circ. } IK},$$

donde

$$AB \times \text{circ. } IK = MN \times \text{circ. } OI;$$

e perciò

$$\text{sup. } AB = MN \times \text{circ. } OI$$

Si vedrebbe similmente che

$$(*) \text{ sup. } BC = NP \times \text{circ. } OI,$$

e

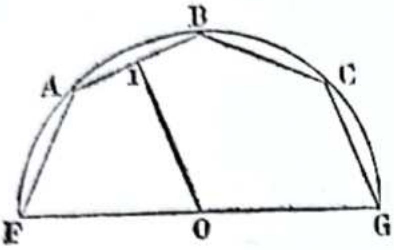
$$\text{sup. } CD = PQ \times \text{circ. } OI,$$

dunque addizionando si avrà

$$\text{sup. } ABCD = (MN + NP + PQ) \times \text{circ. } OI = MQ \times \text{circ. } OI$$

(*) S' intende per sup. AB, sup. BC... le superficie generate dalle rette AB, BC...

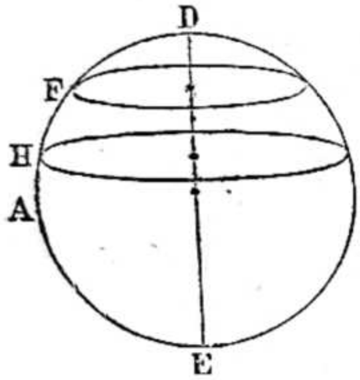
Corollario. Se si considera un poligono regolare di un numero pari di lati, e l'asse FG passa per due vertici opposti F, G, la intiera superficie descritta dalla rivoluzione del mezzo poligono FACG sarà uguale al suo asse FG moltiplicato per la circonferenza del cerchio inscritto.



Quest' asse FG sarà nello stesso tempo il diametro del cerchio circoscritto.

DEFINIZIONI.

I. Una *zona sferica* è una porzione della superficie della sfera compresa fra due piani paralleli che ne sono e basi. Uno dei piani può essere tangente alla sfera, ed allora la zona ha una sola base.



II. L' *altezza* di una zona è la distanza dei piani delle due *basi*.

III. Se si suppone che la semicirconferenza DAE girando intorno al diametro DE, genera la superficie della sfera, nello stesso tempo l'arco FH descriverà la superficie di una zona.

PROPOSIZIONE X.

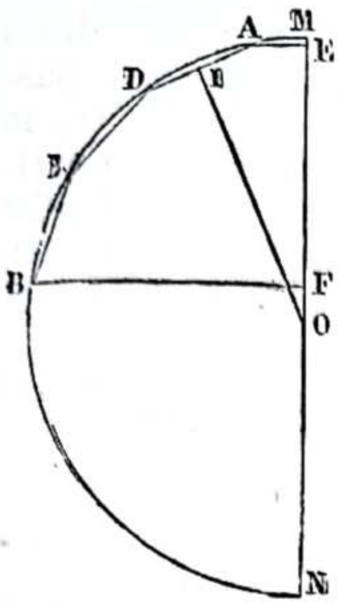
TEOREMA. *L' area di una zona sferica è uguale alla sua altezza moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.*

Sia la zona generata dall' arco AB che gira intorno al diametro MN.

Inscrivasi nell' arco AB una porzione di poligono regolare ADCB, e s' indichi con S la superficie generata da ADCB girante intorno ad MN; si avrà

$$S=\text{circ. } OI\times EF.$$

Ora ammettendo come evidente che la superficie gene-



rata dall' arco AB è il limite della superficie generata da una porzione di poligono regolare inscritto, di cui il numero dei lati cresce indefinitamente, si avrà la misura della zona col prendere il limite di circ. OI×EF: ma circ. OI ha per limite circ. OM ed il fattore EF è costante; dunque

$$\text{zona AB} = \text{circ. OM} \times \text{EF}.$$

Corollario I. Nelle sfere uguali, due zone stanno fra di loro come le rispettive altezze.

Corollario II. La superficie della sfera, potendo essere considerata come una zona di cui l' altezza è uguale al diametro, ha per misura la circonferenza di un cerchio massimo moltiplicata pel diametro: sicchè indicando con R il raggio della sfera, si avrà

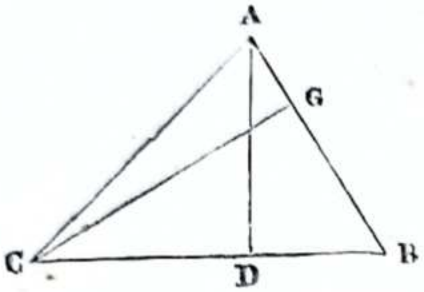
$$\text{sup.sfer.} = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2.$$

donde si rileva che la superficie della sfera è uguale a 4 cerchi massimi.

Corollario III. La superficie della sfera essendo così misurata col rapportarla al quadrato costruito sull'unità di lunghezza, si potranno facilmente valutare colla stessa unità i fusi, i triangoli ed i poligoni sferici, poichè nel libro VII si è trovato il loro rapporto al triangolo trirettangolo, che è l'ottava parte della superficie sferica (prop. 28 lib. 7).

PROPOSIZIONE XI.

Teorema. *Il volume generato da un triangolo che gira intorno ad un asse situato nel suo piano e che passa per uno dei vertici, ha per misura la superficie descritta dal lato opposto a questo vertice, moltiplicata per un terzo dell' altezza corrispondente a questo lato.*



1.° Supponghasi in primo luogo che il triangolo CAB giri intorno ad uno dei suoi lati CB. Il volume generato da CAB essendo la somma dei coni descritti dai triangoli rettangoli CAD, ADB si avrà

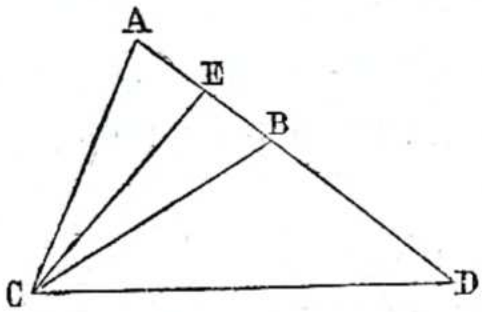
$$(^*)\text{vol.CAB}=\tfrac{1}{3}\pi.\overline{AD}^2.CD+\tfrac{1}{3}\pi.\overline{AD}^2.DB=\tfrac{1}{3}\pi.\ \overline{AD}^2.CB.\ (1)$$

Ma se si abbassa CG perpendicolare su di AB, si ha $CG\times AB=CB\times AD$, giacchè entrambi questi prodotti misurano il doppio dell' area del triangolo CAB; e però sostituendo nell' eguaglianza (1) $CG\times AB$ ad $AD\times CB$, si ricava

$$\text{vol.CAB}=\tfrac{1}{3}\pi.AD.CG.AB=\tfrac{1}{3}CG.\pi.AD.AB;$$

e siccome $\pi.AD.AB$ misura la superficie laterale del cono generato da AB; così si avrà infine

$$\text{vol. CAB}=\text{sup. AB}\times\tfrac{1}{3}CG.$$



2.° Supponghasi ora che il triangolo CAB giri intorno ad una retta CD che passa per uno dei suoi vertici; si prolunghi AB fino al suo incontro con l'asse in D, e si abbassi CE perpendicolare su di AB.

Si avrà

$$\text{vol. CAB}=\text{vol. CAD}-\text{vol. CBD};$$

ma

$$\text{vol. CAD}=\text{sup. AD}\times\tfrac{1}{3}CE;$$

e

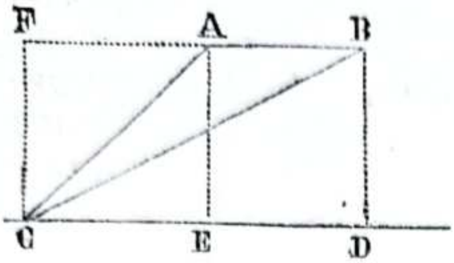
$$\text{vol. CBD}=\text{sup. BD}\times\tfrac{1}{3}CE.$$

Dunque

$$\text{vol. CAB}=(\text{sup. AD}-\text{sup.BD})\times\tfrac{1}{3}CE$$
$$=\text{sup. AB}\times\tfrac{1}{3}CE.$$

3. Essendosi supposto nella dimostrazione precedente che il lato AB incontra l'asse CD, passiamo ad esaminare

(*) S' indica con vol. CAB il volume generato dal triangolo CAB che gira intorno a CB.



il caso in cui queste due rette sono parallele.

Abbassando AE e BD perpendicolari sull'asse CD, e CF perpendicolare ad AB, si avrà evidentemente

$$\text{vol. CAB}=\text{vol. CAE}+\text{vol. ABDE}-\text{vol. CBD}.$$

Ma

$$\text{vol. CAE}=\tfrac{1}{3}\pi.\overline{AE}^2.CE$$

$$\text{vol. ABDE}=\pi.\overline{AE}^2.ED$$

$$\text{vol. CBD}=\tfrac{1}{3}\pi.\overline{AE}^2.CD.$$

E però addizionando le due prime eguaglianze, e togliendo la terza, si ricava

$$\text{vol. CAB}=\pi\overline{AE}^2(\tfrac{1}{3}CE+ED-\tfrac{1}{3}CD).$$

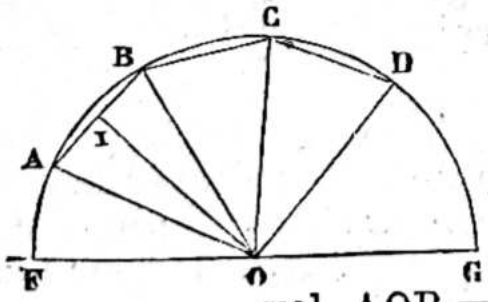
E siccome CD=CE+ED, così l'eguaglianza precedente diverrà

$$\text{vol. CAB}=\pi.\overline{AE}^2\cdot\tfrac{2}{3}\cdot ED=\tfrac{1}{3}AE.2\pi.AE.ED$$
$$=\tfrac{1}{3}CF.\ \text{sup. AB};$$

il che corrisponde all'enunciato del teorema.

PROPOSIZIONE XII.

Teorema. *Sia* ABCD *una porzione di poligono regolare; se s'immagina che il settore poligonale* AOD *situato da una stessa parte del diametro* FG, *giri intorno a questo diametro, il solido descritto avrà per misura la superficie generata dal contorno* ABCD, *moltiplicata per un terzo dell'apotema* OI.



Infatti, il volume generato dal settore AOD è la somma dei volumi generati dai triangoli isosceli uguali AOB, BOC, COD.

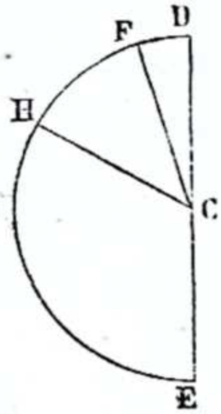
Ma

$$\text{vol. AOB} = \text{sup. AB} \times \tfrac{1}{3}\ \text{OI}.$$
$$\text{vol. BOC} = \text{sup, BC} \times \tfrac{1}{3}\ \text{OI}.$$
$$\text{vol. COD} = \text{sup. CD} \times \tfrac{1}{3}\ \text{OI}.$$

Dunque, addizionando, si avrà

$$\text{vol.AOD}=\tfrac{1}{3}\text{OI(sup.AB+sup.BC+sup. CD)}$$
$$=\tfrac{1}{3}\ \text{OI}\times\text{sup. ABCD.}$$

DEFINIZIONI



I. Allorquando il semi-cerchio DHE che gira intorno al diametro DE, descrive la sfera, ogni settore circolare FCH descrive un solido chiamato *settore sferico*.

Il settore sferico è terminato dalla zona descritta dall' arco FH.

II. Un *segmento* di sfera è la parte del volume della sfera compresa fra due piani paralleli.

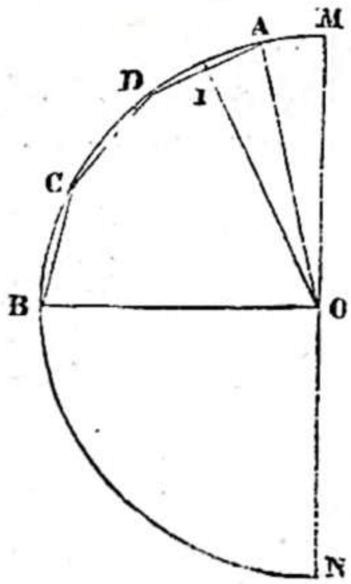
L' altezza del segmento è la distanza dei suddetti piani paralleli.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA. *Un settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base moltiplicata pel terzo del raggio.*

Sia AOB il settore circolare che girando intorno ad MN, genera il settore sferico.

Inscrivasi nell' arco AB una porzione di poligono regolare ADCB, e s' indichi con V il volume generato dal settore poligonale ADCBO; si avrà



$$\text{V=sup. ADCB}\times\tfrac{1}{3}\text{OI.}$$

Ora ammettendo come evidente che il volume del settore sferico è il limite del volume generato dal settore poligonale allorchè il numero dei lati della porzione inscritta nell'arco AB cresce indefinitamente, si avrà la misura del settore sferico col prendere il limite di superficie ADCB $\times\frac{1}{3}$OI; ma sup. ADCB ha per limite zona AB, ed OI ha per limite OM; dunque

$$\text{settore sferico = zona AB}\times\tfrac{1}{3}\ \text{OM.}$$

Scolio I. Se il settore circolare che descrive il settore sferico diviene uguale al semicerchio, il volume generato sarà quello della sfera; ma allora la zona che serve di base al settore sferico è la intiera superficie della sfera; e però si può ritenere che il volume di una sfera ha per misura la sua superficie moltiplicata per il terzo del raggio.

Scolio II. Indicando con R il raggio della sfera e con H l'altezza della zona che serve di base al settore sferico; la zona avrà per misura $2\pi R.H$, ed il settore sferico $2\pi R.H.\frac{1}{3}R$ o $\frac{2}{3}\pi R^2.H$.

Nel caso poi in cui il settore sferico diviene uguale alla sfera, si ha $H=2R$; e quindi la misura del volume della sfera è $\frac{2}{3}\pi R^2 2R$ o $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Indicando in ultimo con D il diametro della sfera, si avrà $R=\frac{D}{2}$ donde $R^3=\frac{D^3}{8}$, e quindi il volume della sfera si potrà anche rappresentare con $\frac{4}{3}\pi.\frac{D^3}{8}$ o $\frac{1}{6}\pi D^3$.

Scolio III. Siano P il volume di una piramide sferica triangolare, Q il volume della piramide trirettangola, S la superficie della base della piramide e T la superficie del triangolo trirettangolo.

Si è veduto, lib. 7, prop. 26, che

$$\frac{P}{Q}=\frac{S}{T}; \qquad (1)$$

indicando inoltre con C il cubo che ha per lato l'unità lineare, e con c il quadrato costruito sopra questa stessa unità, si hanno le eguaglianze

$$\frac{Q}{C}=\frac{\pi R^3}{6}, \qquad (2)$$

e

$$\frac{\pi R^2}{2}=\frac{T}{c}; \qquad (3)$$

Moltiplicando adunque membro a membro le eguaglianze (1), (2), (3) e sopprimendo i fattori comuni si ricava

$$\frac{P}{C}=\frac{S}{c}\times\frac{R}{3};$$

vale a dire che se si prende per unità di volume C e per unità di superficie c:

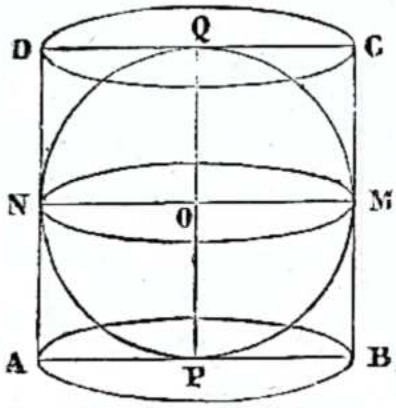
Una piramide sferica triangolare ha per misura il prodotto della sua base pel terzo del raggio della sfera.

Questa proposizione si estende evidentemente alla piramide sferica poligonale.

PROPOSIZIONE XIV.

Teorema. *La superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto (comprese le due basi) come 2 sta 3: ed i volumi di questi due corpi stanno fra loro nello stesso rapporto.*

Sia MPNQ il cerchio massimo della sfera, ABCD il quadrato circoscritto; se si fanno girare contemporaneamente il semicerchio PMQ ed il semiquadrato PBCQ intorno al diametro PQ, il semicerchio descriverà la sfera, ed il semiquadrato descriverà il cilindro circoscritto alla sfera. Essendo l'altezza AD di questo cilindro uguale al diametro PQ, e la base del cilindro uguale al cerchio massimo, poichè essa ha per diametro AB uguale ad MN, sarà la superficie convessa del cilindro uguale alla circonferenza del cerchio massimo moltiplicata pel suo diametro: ed essendo questa anche la misura della superficie della sfera (prop. 10), ne segue che *la superficie della sfera è uguale alla superficie laterale del cilindro circoscritto:* ma la superficie della sfera è uguale a quattro cerchi massimi; dunque la superficie laterale del cilindro circoscritto è pure uguale a quattro cerchi massimi; e se vi si aggiungono le due basi che equivalgono a due cerchi massimi, sarà la superficie totale del cilindro circoscritto uguale a 6 cerchi massimi; e però la superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto come 4 sta a 6 o come 2 sta a 3.



In secondo luogo, siccome la base del cilindro circoscritto è uguale ad un cerchio massimo, e la sua altezza è uguale al diametro, così il volume del cilindro sarà uguale al cerchio massimo moltiplicato pel diametro (prop. 1.). Ma il volume della sfera è uguale a quattro cerchi massimi moltiplicati pel terzo del raggio (prop. 13), o, che è lo stesso, al cerchio massimo moltiplicato per $\frac{4}{3}$ del raggio o $\frac{2}{3}$ del diametro; dunque la sfera sta al cilindro circoscritto come 2 sta a 3 e per conseguenza i volumi di questi due corpi stanno fra loro come le loro superficie.

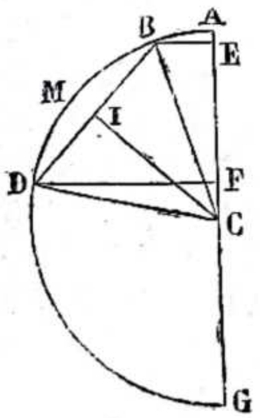
Scolio. Se s'immagina un poliedro di cui tutte le facce toccano la sfera, questo poliedro potrà essere considerato come composto di piramidi che hanno tutte per vertice il centro della sfera, e per basi le diverse facce del poliedro. Ora è chiaro che tutte queste piramidi avranno per altezza comune il raggio della sfera; dimodochè ogni piramide essendo uguale alla faccia del poliedro che gli serve di base, moltiplicata pel terzo del raggio; ne segue che il poliedro intero sarà uguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio della sfera inscritta.

Si vede da ciò che i volumi dei poliedri circoscritti alla sfera stanno fra loro come le superficie di questi stessi poliedri; di guisa che la proprietà dimostrata pel cilindro circoscritto è comune ad un'infinità di altri corpi.

Si potrebbe ugualmente osservare che le superficie dei poligoni circoscritti al cerchio stanno fra loro come i rispettivi perimetri.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA. *Il solido generato dal segmento circolare* BMD *che gira intorno ad un diametro* ACG *esterno a questo segmento, ha per misura la sesta parte del cerchio che ha per raggio la corda* BD *del segmento, moltiplicata per la proiezione* EF *di questa corda sull'asse* AC.



Infatti, si ha dalla stessa figura

$$\text{vol. BMD}=\text{vol. CDMB}-\text{vol. CDB}.$$

Ma

$$\text{vol. CDMB}=\tfrac{2}{3}\pi\overline{CB}^2\,EF, \tag{1}$$

e

$$\text{vol. CDB}=\tfrac{1}{3}CI\times\text{sup. BD}=\tfrac{2}{3}\pi\overline{CI}^2.EF \tag{2}$$

per essere

$$\text{sup. DB}=2\pi CI.EF;$$

E però sottraendo l' eguaglianza (2) dall' eguaglianza (1), si ricava

$$\text{vol. BMD}=\tfrac{2}{3}\pi.\text{EF}(\overline{\text{CB}}^2-\overline{\text{CI}}^2),$$

la quale diviene

$$\text{vol.BMD}=\tfrac{2}{3}\pi.\text{EF}\frac{\overline{\text{BD}}^2}{4}=\tfrac{1}{6}\pi\,\overline{\text{BD}}^2\times\text{EF};$$

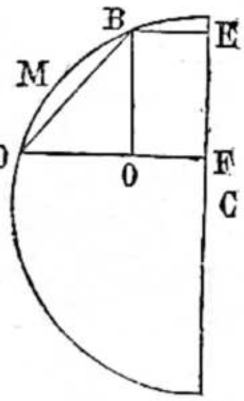
giacchè pel triangolo CBI si ha

$$\overline{\text{CB}}^2-\overline{\text{CI}}^2=\overline{\text{BI}}^2=\tfrac{1}{4}\,\overline{\text{BD}}^2.$$

Scolio. Il solido descritto dal segmento BMD sta alla sfera che ha per diametro BD, come $\frac{1}{6}\pi\overline{\text{BD}}^2$. EF sta ad $\frac{1}{6}\pi\,\overline{\text{BD}}^3$, o :: EF : BD.

PROPOSIZIONE XVI.

Teorema. *Ogni segmento di sfera compreso fra due piani paralleli ha per misura la semisomma delle sue basi molliplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera che ha quest' altezza per diametro.*



Sieno BE, DF i raggi delle basi del segmento, ed EF la sua altezza; di modo che il segmento sia prodotto dalla rivoluzione dello spazio circolare BMDFE intorno al- l' asse FE.

Si ha

$$\text{vol. BMD}=\tfrac{1}{6}\pi\overline{\text{BD}}^2.\text{EF}: \quad \text{(prop. 15)}$$

$$\text{vol. BDFE}=\tfrac{1}{3}\pi\ \text{EF}.(\overline{\text{BF}}^2+\overline{\text{DF}}^2+\text{BE.DF})\ \text{(prop. 5.)};$$

quindi il segmento di sfera che è la somma di questi due volumi avrà per misura,

$$\tfrac{1}{6}\pi.\text{EF}.(2\overline{\text{BE}}^2+2\overline{\text{DF}}^2+2\text{BE.DF}+\overline{\text{BD}}^2).$$

Ma conducendo BO parallela ad EF, si ha

$$\text{DO}=\text{DF}-\text{BE},\ \text{o}\ \overline{\text{DO}}^2=\overline{\text{DF}}^2-2\text{DF.BE}+\overline{\text{BE}}^2,$$

e per conseguenza

$$\overline{\text{BD}}^2=\overline{\text{BO}}^2+\overline{\text{DO}}^2=\overline{\text{EF}}^2+\overline{\text{DF}}^2-2\text{DF}\times\text{BE}+\overline{\text{BE}}^2;$$

sostituendo adunque questo valore nell' espressione del segmento, e togliendo le quantità che si distruggono, si avrà per la solidità del segmento,

$$\tfrac{1}{6}\pi EF.(\overline{3BE}^2 + \overline{3DF}^2 + \overline{EF}^2);$$

espressione che si compone di due parti, di cui l' una

$$\tfrac{1}{6}\pi EF.\ (\overline{3BE}^2 + \overline{3DF}^2),\ \text{o}\ EF.\ \left(\frac{\pi\ \overline{BE}^2 + \pi.\ \overline{DF}^2}{2}\right)$$

è la semisomma delle basi moltiplicata per l' altezza, e l' altra $\frac{1}{6}\ \pi.\overline{EF}^3$ rappresenta la sfera di cui EF è il diametro; e però ogni segmento di sfera etc.

Corollario. Se una delle basi è nulla, il segmento di cui si tratta diviene un segmento sferico ad una sola base; d' onde ricavasi che *ogni segmento sferico ad una base equivale alla metà del cilindro della stessa base e della stessa altezza, più la sfera di cui quest' altezza è il diametro*.

FINE DELL' OTTAVO LIBRO.

GEOMETRIA NELLO SPAZIO

—

TEOREMI DA DIMOSTRARSI

1. Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano parallelo a questa retta sarà perpendicolare al primo piano.

2. Due rette parallele fanno angoli uguali collo stesso piano.

3. Se in un angolo triedro due angoli piani sono uguali, i diedri opposti saranno uguali e reciprocamente.

4. In un angolo triedro, ad un driedro maggiore è opposta una faccia maggiore e reciprocamente.

5. I tre piani perpendicolari alle facce di un angolo triedro, condotti per le bisettrici degli angoli piani di questo triedro si tagliano secondo la stessa retta.

6. I tre piani condotti per le costole di un angolo triedro perpendicolarmente alle facce opposte si tagliano secondo la stessa retta.

7. I piani condotti per le costole di un angolo triedro e le bisettrici delle facce opposte si tagliano secondo una stessa retta.

8. Se dal vertice di un angolo triedro si conduce in ogni faccia una perpendicolare sulla costola opposta, queste tre perpendicolari staranno in uno stesso piano.

9. In ogni tetraedro, le rette che congiungono i punti di mezzo delle costole opposte si tagliano scambievolmente in due parti uguali.

10. Due tetraedri che hanno un angolo solido uguale stanno fra loro come i prodotti delle costole che comprendono quest' angolo.

11. Il piano bisettore di un angolo diedro d' una piramide triangolare divide la costola opposta in due segmenti proporzionali alle facce adiacenti.

12. Se un tetraedro contiene un angolo solido trirettangolo, il quadrato della faccia opposta sarà uguale alla somma dei quadrati delle altre tre.

13. Il volume di un parallelepipedo troncato ha per misura il prodotto della sua base per la perpendicolare abbassata dal centro della base superiore sulla base inferiore.

14. In un tetraedro, le rette che congiungono i vertici con i punti d'incontro delle mediane delle facce opposte,

si tagliano in uno stesso punto. (Questo punto è il centro di gravità del tetraedro).

15. La perpendicolare abbassata dal centro di gravità di un tetraedro sopra un piano è la media delle perpendicolari abbassate dai quattro vertici del tetraedro sullo stesso piano. (Come si deve interpretare il teorema, allorchè i vertici non si trovano dalla stessa parte del piano?).

16. Ogni piano che passa per i punti di mezzo di due costole opposte di un tetraedro, divide questo tetraedro in due parti equivalenti.

17. Per quattro punti non situati in uno stesso piano, si può far passare una sfera e non se ne può far passare che una.

18. In ogni tetraedro si può iscrivere una sfera.

19. Allorchè tre sfere s'incontrano a due a due, i piani dei tre cerchi d'intersezione si tagliano secondo una stessa retta perpendicolare al piano dei tre centri.

20. Quando tre rette ortogonali tagliano una sfera, e passano per uno stesso punto, la somma dei quadrati delle corde intercette è costante.

—

LUOGHI GEOMETRICI E PROBLEMI.

Nella geometria piana si è chiamato luogo geometrico una linea contenente tutti i punti del piano che godono di una proprietà comune. Similmente, nella geometria dello spazio si chiama *luogo geometrico* la serie dei punti dello spazio che soddisfano a una o due condizioni date.

Questo luogo geometrico può essere una superficie o una linea.

Sicchè la sfera è il luogo dei punti ugualmente distanti da un punto dato, e la perpendicolare innalzata sul piano di un cerchio dal suo centro è il luogo geometrico dei punti che sono ugualmente distanti da tutti i punti della circonferenza.

1. Trovare il luogo dei punti ugualmente distanti da due punti dati.

2. Trovare il luogo dei punti ugualmente distanti da tre punti dati.

3. Trovare il luogo dei punti ugualmente distanti da due piani dati.

4. Trovare il luogo dei punti ugualmente distanti da tre piani dati.

5. Trovare il luogo dei punti dello spazio ugualmente distanti da due rette situate in uno stesso piano.

6. Luogo dei punti dello spazio ad uguale distanza da tre rette situate in uno stesso piano.

7. Trovare il luogo dei punti tali che la somma delle distanze di ciascuno di essi da due piani dati, sia uguale a una retta data.

8. Trovare il luogo dei punti tali che la somma dei quadrati delle distanze di ciascuno di essi da due punti dati sia uguale ad un quadrato dato.

9. Trovare il luogo dei punti tali che la differenza dei quadrati delle distanze di ciascuno di questi punti da due punti dati sia uguale ad un quadrato dato.

10. Tagliando due rette non situate in uno stesso piano con una serie di piani paralleli. e tirando le rette che congiungono i punti d' intersezioni di ciascuno di questi piani colle due rette date, si domanda il luogo geometrico dei punti che dividono tutte le congiungenti nel rapporto di m a n.

11. Date due rette ortogonali non situate in uno stesso piano, ed inserendo fra esse altre rette di lunghezza data: si domanda il luogo geometrico dei punti di mezzo di queste rette.

12. Calcolare il volume generato da un esagono regolare che gira intorno ad uno dei suoi lati.

13. Trovare il volume generato da un semi-decagono regolare di lato a che gira intorno al diametro del cerchio circoscritto.

14. Trovare la superficie della terra in miriametri quadrati.

15. Trovare quale sarebbe la misura di una piramide se si prendesse per unità di volume la sfera che ha per raggio l'unità lineare e per unità di superficie il cerchio che ha per raggio l'unità di lunghezza.

16. Gli angoli di un triangolo sferico sono respettivamente $58^{\circ},18',64^{\circ},8',82^{\circ},4'$, il raggio della sfera è 6^{m}; calcolare in metri quadrati la superficie del triangolo sferico.

17. Trovare il volume di un segmento sferico ad una base, di cui l'altezza è 4^{m}, e che appartiene ad una sfera di raggio uguale a 9^{m}.

18. I raggi delle basi di un cono tronco sono 3^{m}, e 5^{m}, ed il suo lato è 7^{m} di lunghezza; trovarne la superficie ed il volume.

FINE DEGLI ELEMENTI DI GEOMETRIA.

APPENDICE AI LIBRI VI E VII.

DEI POLIEDRI REGOLARI.

PROPOSIZIONE I.

Teorema. *Non si possono avere che cinque poliedri regolari.*

Poichè, essendosi chiamati *poliedri regolari* quelli le cui facce sono poligoni regolari uguali, e di cui tutti gli angoli solidi sono uguali fra loro, queste condizioni non possono aver luogo che in un piccolo numero di casi.

1. Se le facce sono triangoli equilateri, si potrà formare ogni angolo solido del poliedro con tre, con quattro, con cinque angoli di questi triangoli: da ciò nascono tre corpi regolari che sono il *tetraedro*, l'*ottaedro* e l'*icosaedro*. Nè se ne può formare un numero maggiore, perchè sei angoli di questi triangoli essendo eguali a quattro angoli retti, essi non possono formare un angolo solido.

2. Se le facce sono quadrati, riunendo i loro angoli a tre a tre, ne risulta l'*esaedro* o *cubo*; nè si possono combinare altrimenti giacchè quattro angoli di un quadrato essendo eguali a quattro retti, non possono formare un angolo solido.

3. Infine, se le facce sono pentagoni regolari, si potranno riunire i loro angoli tre a tre, e ne risulterà il *dodecaedro regolare*; nè si può andare più oltre; giacchè tre angoli d'un esagono regolare equivalgono a quattro angoli retti e tre angoli di un ettagono formano anche più di 4 retti.

Dunque non vi possono essere che cinque poliedri regolari; tre formati con triangoli equilateri, uno con quadrati, ed uno con pentagoni.

Scolio. Dimostreremo nella proposizione seguente, che questi cinque poliedri esistono realmente, e che se ne possono determinare tutte le dimensioni allorchè si conosce una delle facce.

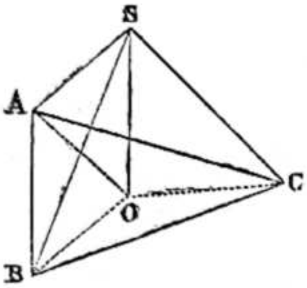
PROPOSIZIONE II.

Problema. *Data una delle facce di un poliedro regolare o solamente il suo lato, costruire il poliedro.*

Questo problema ne presenta cinque, che risolveremo successivamente.

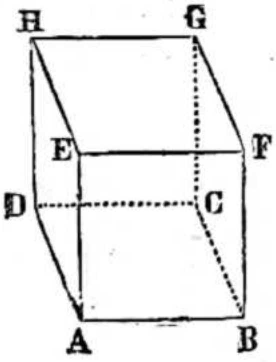
Costruzione del tetraedro.

Sia ABC il triangolo equilatero che deve essere una delle facce del tetraedro; dal punto O, centro di questo triangolo, s' innalzi OS perpendicolare sul piano ABC e limitata nel punto S in modo che si abbia AS=AB; congiungansi SB, SC: la piramide SABC sarà il tetraedro richiesto.



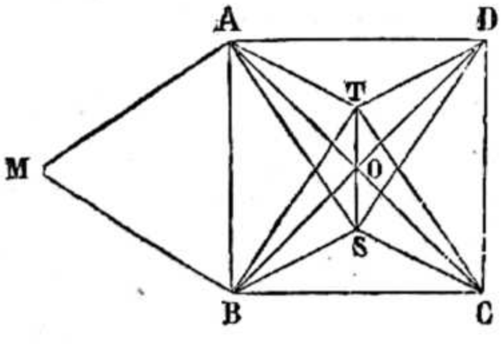
Poichè, per le distanze uguali OA, OB, OC, le obblique SA, SB, SC si allontanano ugualmente dalla perpendicolare SO e sono uguali. Ma una di esse SA=AB; dunque le quattro facce della piramide SABC sono triangoli uguali al triangolo dato ABC. Inoltre gli angoli solidi di queste piramidi sono uguali fra loro, perchè ciascuno di essi è formato da triangoli piani eguali; e però questa piramide è un tetraedro regolare.

Costruzione dell' esaedro.



Sia ABCD un quadrato dato: se sulla base ABCD si costruisce un prisma retto di cui l'altezza AE uguagli il lato AB, è chiaro che le facce di esso saranno quadrati uguali, e che i suoi angoli solidi risulteranno uguali fra loro essendo formati ciascuno da tre angoli retti; dunque questo prisma è un esaedro regolare o cubo.

Costruzione dell' ottaedro.



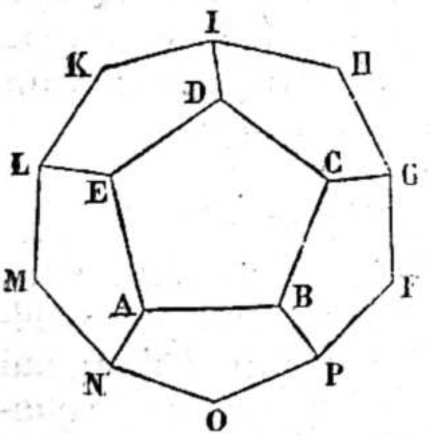
Sia AMB un triangolo equilatero dato; sul lato AB si descriva il quadrato ABCD; dal punto O, centro di questo quadrato, s'innalzi sul suo piano la perpendicolare TS terminata da una parte e dall'altra in T ed S in modo che OT=OS =OA; e si congiungano SA, SB, TA, etc., avremo così un solido SABCDT composto di due piramidi quadrangolari

SABCD, TABCD riunite per la loro base comune ABCD, che sarà l'ottaedro regolare richiesto.

Infatti il triangolo AOS è rettangolo in O, come pure il triangolo AOD; i lati AO, OS, OD sono uguali; dunque questi triangoli sono uguali e perciò AS=AD. Si dimostrerà similmente che tutti gli altri triangoli rettangoli AOT, BOS, COT etc. sono uguali al triangolo AOD; e però tutti i lati AB, AS, AT etc., essendo uguali fra loro, ne segue che il solido SABCDT si troverà compreso fra otto triangoli uguali al triangolo equilatero ABM. Dico inoltre che gli angoli solidi del poliedro come S e B sono uguali fra loro; poichè essendo evidentemente il triangolo SAC uguale al triangolo DAC e l' angolo ASC retto, la figura SATC sarà un quadrato eguale al quadrato eguale ABCD. Ma se si paragona la piramide BASCT alla piramide SABCD, con situare la base ASCT della prima sulla base ABCD della seconda; il punto O essendo un centro comune, l'altezza OB della prima coinciderà con l'altezza OS della seconda, e le due piramidi si confonderanno in una sola; dunque l'angolo solido S è uguale all'angolo solido B, e perciò il solido SABCDT è un ottaedro regolare.

Scolio. Se tre rette uguali AC, BD, ST sono perpendicolari fra loro e si tagliano nei loro punti di mezzo, le estremità di queste rette saranno i vertici di un ottaedro regolare.

Costruzione del dodecaedro.

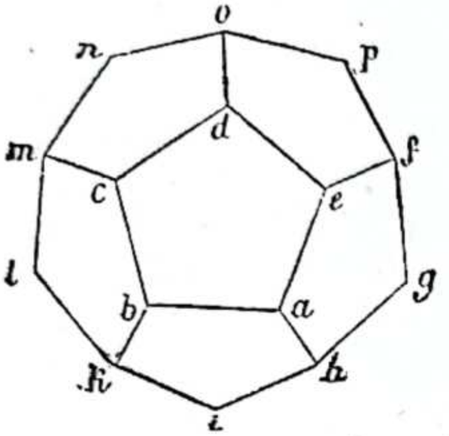


Sia ABCDE un pentagono regolare dato; siano ABP, CBP due angoli piani uguali all'angolo ABC; con questi angoli piani si formi l'angolo solido B, e sia K l'inclinazione scambievole di due di questi piani. Si costruiscano del pari ai punti C, D, E, A, degli angoli solidi uguali all'angolo solido B e disposti nello stesso modo; il piano CBP avrà la medesima posizione del piano BCG, poichè essi sono inclinati l'uno e l'altro della stessa quantità K sul piano ABCD. Si può adunque nel piano PBCG descrivere il pentagono BCGEP uguale al pentagono ABCDE.

Se si fa lo stesso in ciascun degli altri piani CDI, DEL etc. si avrà una superficie convessa PFGH etc. composta di sei pentagoni regolari uguali ed inclinati ciascuno sul suo adiacente per la stessa quantità K.

Sia *pfgh* etc. una seconda superficie uguale a PFGH etc. io dico che queste due superficie possono essere riunite in modo da formare una sola superficie convessa continua.

Infatti, l'angolo *opf* per esempio, può combinarsi con i due angoli OPB , BPF per formare un angolo solido P uguale all'angolo B, ed in questa unione non si cambierà

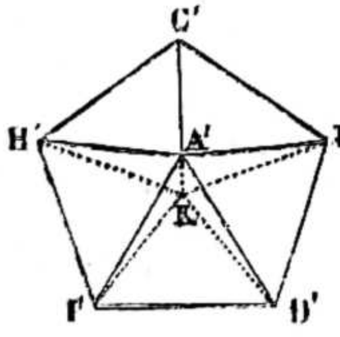


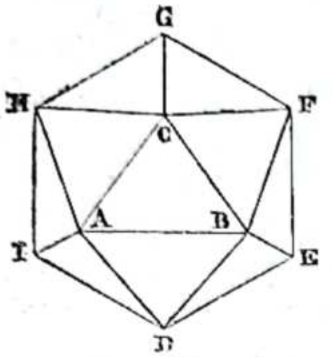
per nulla l'inclinazione dei piani BPF, BPO, poichè questa inclinazione è appunto quella che si richiede per la formazione dell' angolo solido.

Inoltre , nello stesso tempo che si forma l'angolo P, il lato *pf* s'applicherà sul suo uguale PF ed al punto F si troveranno riuniti tre angoli piani PFG, *pfe*, *efg* che formeranno un angolo solido uguale a ciascuno degli angoli già formati ; questa combinazione si farà senza cambiar niente nè allo stato dell' angolo P , nè a quello della superficie *efgh* etc.; perchè i piani PFG, *efp*, di già riuniti in P, hanno fra loro l' inclinazione convenuta K, al pari dei piani *efg* , *efp*. Continuando successivamente nello stesso modo, si vedrà che le due superficie si combineranno l' una coll' altra , per non formare che una superficie continua e rientrante in sè stessa: questa superficie sarà quella del dodecaedro regolare , perchè essa si compone di dodici pentagoni regolari uguali , e tutti i suoi angoli solidi sono uguali fra loro.

Costruzione dell'icosaedro.

Sia ABC una delle sue facce; è necessario primieramente formare un angolo solido con cinque piani uguali al piano ABC ed ugualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente. Per far ciò, sul lato B'C' uguale a BC, si costruisca il pentagono regolare B'C'H'I'D' ; dal centro di questo pentagono s'innalzi sul suo piano una perpendicolare terminata in A' in modo che B'A'=B'C'; e si tirino A'C', A'H', A'I', A'D'; l'angolo solido A' formato dai cinque piani B'A'C', C'A'H'





etc. sarà l'angolo solido richiesto.

Infatti, le obblique A'B', A'C' etc., essendo uguali, e una di esse A'B' essendo eguale al lato B'C', tutti i triangoli B'A'C', C'A'H' etc. saranno uguali fra loro ed al triangolo dato ABC. Inoltre, è evidente che i piani A'B'C', C'A'H' etc., sono ugualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente; poichè gli angoli solidi B', C' etc., sono uguali fra di loro, essendo ognuno formato con due angoli di triangoli equilateri ed uno di pentagono regolare; se dunque indichiamo con K l'inclinazione dei due piani che contengono gli angoli uguali, l' angolo K sarà nello stesso tempo l' inclinazione di ciascuno dei piani che compongono l' angolo solido A' sul suo adiacente.

Ciò posto, se si formano nei punti A, B, C degli angoli solidi uguali ciascuno all'angolo A', si avrà una superficie convessa DEFG etc. composta di dieci triangoli equilateri, di cui ognuno sarà inclinato sul suo adiacente per la quantità K, e gli angoli D, E, F etc. del suo contorno riuniranno alternativamente tre e due angoli di triangoli equilateri; sicchè, se immaginiamo una seconda superficie uguale alla superficie DEFH etc.; queste due superficie potranno adattarsi scambievolmente col combinare ogni angolo triplo dell'uno con un angolo doppio dell'altro; e siccome i piani di questi angoli hanno già fra loro l'inclinazione K necessaria per formare un angolo solido quintuplo uguale all'angolo A, così con una tal combinazione non verrà nulla a cambiarsi alla posizione di ogni superficie in particolare: e tutte e due formeranno una sola superficie continua composta di venti triangoli equilateri.

Questa superficie sarà quella dell' icosaedro regolare, perchè inoltre tutti i suoi angoli solidi sono uguali fra di loro.

PROPOSIZIONE III.

Problema. *Trovare l'inclinazione di due facce adiacenti di un poliedro regolare.*

Quest'inclinazione si deduce immediatamente dalla costruzione che si è data dei cinque poliedri regolari, alla quale bisogna aggiungere il problema di geometria descrittiva: essendo dati i tre angoli piani che formano un angolo solido determinare l'angolo che due di questi piani fanno fra loro.

Nel tetraedro. Ogni angolo solido essendo formato da tre angoli di triangoli equilateri, bisognerà cercare col problema citato, l' angolo che due di questi piani fanno fra loro; quest'angolo sarà l'inclinazione di due facce adiacenti del tetraedro.

Nell'esaedro. L'angolo di due facce adiacenti è un angolo retto.

Nell'ottaedro. Formando un angolo solido con due angoli di triangoli equilateri ed un angolo retto, l'inclinazione dei due piani che contengono gli angoli dei triangoli sarà quella di due facce adiacenti dell' ottaedro.

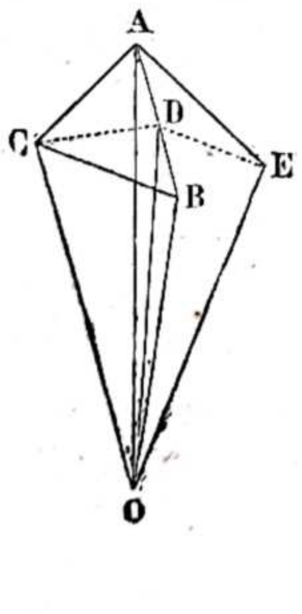
Nel dodecaedro. Ogni angolo solido essendo formato con tre angoli di pentagoni regolari, l'inclinazione dei piani di due di questi angoli sarà quella delle facce adiacenti del dodecaedro.

Nell' icosaedro. Formando un angolo solido con due angoli di triangoli equilateri ed uno di pentagono regolare, l' inclinazione dei due piani degli angoli dei triangoli sarà quella di due facce adiacenti dell'icosaedro.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA. *Dato il lato di un poliedro regolare, trovare il raggio della sfera inscritta e quello della sfera circoscritta al poliedro.*

Andremo in primo luogo a dimostrare che ogni poliedro regolare può essere inscritto e circoscritto nella sfera.

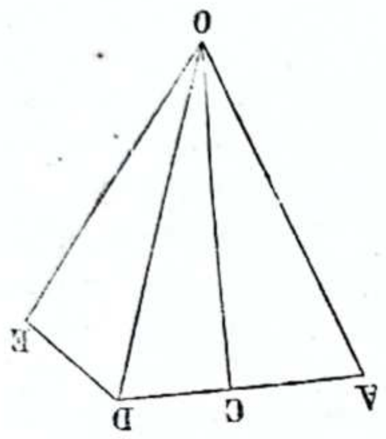


Sia AB il lato comune a due facce adiacenti, siano C ed E i centri di queste due facce; CD, ED le perpendicolari abbassate da questi centri sul lato comune AB, le quali passeranno pel punto di mezzo D di questo lato, e faranno fra loro un angolo conosciuto, che è quello dell'inclinazione delle due facce adiacenti, determinata col problema precedente. Ora, se nel piano CDE perpendicolare ad AB, si conducono su di CD ed ED le perpendicolari indefinite CO ed EO che s'incontrano in O, io dico che il punto O sarà il centro della sfera inscritta e quello della sfera circoscritta, il raggio della prima essendo OC, e quello della seconda OA.

Infatti, siccome le apoteme CD, DE sono uguali, e l'ipotenusa DO è di comune, così il triangolo rettangolo CDO è uguale al triangolo rettangolo ODE, e la perpendicolare OC è uguale alla perpendicolare OE: ma AB essendo perpendicolare al piano CDE, il piano ABC è perpendicolare a CDE o CDE ad ABC, ed è pure CO nel piano CDE perpendicolare a CD intersezione comune dei piani CDE, ABC; dunque CO sarà perpendicolare al piano ABC. Per la stessa ragione EO è perpendicolare al piano ABE; e però le due perpendicolari CO, EO condotte ai piani di due facce adiacenti dai centri di queste facce, s'incontreranno in uno stesso punto O e saranno uguali. Supposto intanto che ABC e ABE rappresentino due altre facce adiacenti qualunque, l'apotema CD resterà sempre della stessa grandezza come pure l'angolo CDO metà di CDE; sicchè il triangolo rettangolo CDO ed il suo lato CO saranno uguali per tutte le facce del poliedro; se dunque col punto O come centro e con un raggio OC si descrive una sfera, questa sfera toccherà tutte le facce del poliedro nei loro centri (poichè i piani ABC, ABE risulteranno perpendicolari all'estremità di un raggio) e la sfera sarà inscritta nel poliedro, o il poliedro circoscritto alla sfera. Inoltre, tirando OA, OB; per essere CA=CB, le due obblique OA, OB allontanandosi ugualmente dalla perpendicolare saranno uguali; lo stesso avverrà per due altre rette qualunque menate dal centro O alle estremità di uno stesso lato, dunque tutte queste rette sono uguali fra loro; e perciò se dal punto O come centro e col raggio AO si descrive una superficie sferica, questa passerà per i vertici di tutti gli angoli solidi del poliedro e la sfera sarà circoscritta al poliedro o il poliedro inscritto nella sfera.

Dopo di ciò la soluzione del problema proposto non presenta alcuna difficoltà, e si può effettuare così:

Essendo dato il lato di una faccia del poliedro, si descriva questa faccia e sia CD la sua apotema. Si cerchi per mezzo del problema precedente l'inclinazione di due facce adiacenti del poliedro, e si costruisca l'angolo CDE uguale a questa inclinazione: si tagli DE=CD, e con-



ducansi CO ed EO perpendicolari a CD ed ED: queste due perpendicolari incontrandosi in un punto O, sarà CO il raggio della sfera inscritta nel poliedro.

Se poi sul prolungamento di DC si prende CA uguale al raggio del cerchio circoscritto ad una faccia del poliedro, sarà OA il raggio della sfera circoscritta a questo stesso poliedro.

Scolio. Dalle proposizioni precedenti si possono dedurre diverse conseguenze.

1. Ogni poliedro regolare può essere decomposto in tante piramidi regolari quante sono le facce del poliedro; il vertice comune di queste piramidi sarà il centro del poliedro, che è nello stesso tempo quello delle sfere inscritta e circoscritta.

2. La solidità di un poliedro regolare è uguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio della sfera inscritta.

3. Due poliedri regolari dello stesso nome sono due solidi simili, e le loro dimensioni omologhe sono proporzionali; sicchè i raggi delle sfere inscritte e circoscritte stanno fra loro come i lati di questi poliedri.

4 Se s' inscrive un poliedro regolare in una sfera, i piani condotti pel centro e per i diversi lati divideranno la superficie della sfera in tanti poligoni sferici eguali e simili, per quante sono le facce del poliedro.

AGGIUNTE DEL TRADUTTORE

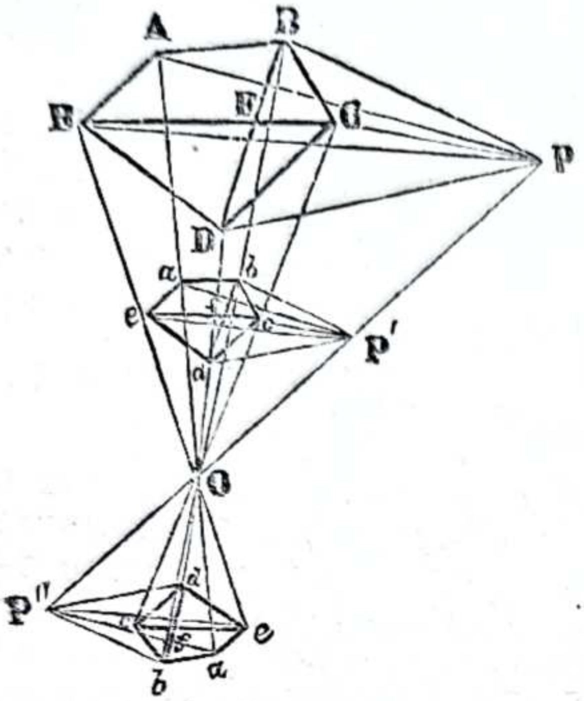
DEFINIZIONI.

Se un punto O (fig. 1) preso nel piano di un poligono ABCDE si unisce con i vertici, e sulle congiungenti o sui loro prolungamenti si prendono le parti Oa, Ob, Oc, Od, Oe, tali che si abbia

$$\frac{OA}{Oa}=\frac{OB}{Ob}=\frac{OC}{Oc}=\frac{OD}{Od}=\frac{OE}{Oe}=\frac{m}{n}$$

gli estremi di queste distanze saranno i vertici di un altro poligono simile e similmente disposto al poligono dato. Ed infatti, i lati del 2° poligono dividendo i lati dei triangoli OAB, BOC,... in parti proporzionali, sono rispettivamente paralleli e quindi proporzionali ai lati del 1° poligono; e però questi due poligoni avendo gli angoli eguali, perchè formati da rette parallele, ed i lati proporzionali sono simili.

Fig. 1.



A questi due poligoni *Chasles* ha dato il nome di *omotetici*; e più particolarmente si dicono *diretti* o *inversi* secondo che si trovano o pur no dalla stessa parte del punto O, il quale si è chiamato *centro di omotetia* o *di similitudine*. La distanza dal centro di omotetia ad uno dei vertici dei poligoni si definisce *raggio vettore*; ed il rapporto costante di due raggi vettori omologhi vien detto *rapporto di similitudine* dei due poligoni.

Corollario I. Essendo dati due poligoni omotetici, torna facilissimo il costruirne il centro di omotetia; giacchè basterà congiungere due vertici qualunque dell'uno cogli omologhi dell'altro; ed allora il punto d'intersezione sarà il centro domandato.

Corollario II. Se in uno dei poligoni si tirano due diagonali qualunque BD, EC, e nell' omotetico si tirano le due diagonali omologhe *bd*, *ec*, la retta F*f* che unisce i punti d'intersezione passerà pel centro O.

Ed invero, dall'essere simili i triangoli EFD e *efd*, si ha

$$\frac{EF}{ef} = \frac{ED}{ed},$$

e, per essere

$$\frac{ED}{ed} = \frac{OE}{Oe} \text{ si ha } \frac{EF}{ef} = \frac{OE}{Oe};$$

proporzione che ha luogo nel solo triangolo.

TEOREMA.

Se due poligoni ABCDE, abcde *dello stesso numero di lati* (fig. 1ª) *sono tali che le rette che uniscono i vertici del primo con un dato punto* P *sono rispettivamente parallele e proporzionali alle rette che uniscono i vertici del secondo poligono con un altro punto dato* P′, *i due poligoni sono omotetici.*

Si uniscano i due punti P, P′ e sulla retta PP′, o sul suo prolungamento, si segni un punto O in modo che si abbia

$$\frac{OP}{OP'}=\frac{AP}{aP'};$$

si congiunga il punto O coi vertici A, *a*. I due triangoli OAP, O*a*P′ avendo un angolo eguale compreso fra lati proporzionali, sono simili, e si avrà PAO=P′*a*O.

Adunque, i due raggi vettori OA, O*a* coincidono e si ha la proporzione

$$\frac{OA}{Oa}=\frac{OP}{OP'}.$$

Similmente si dimostra che

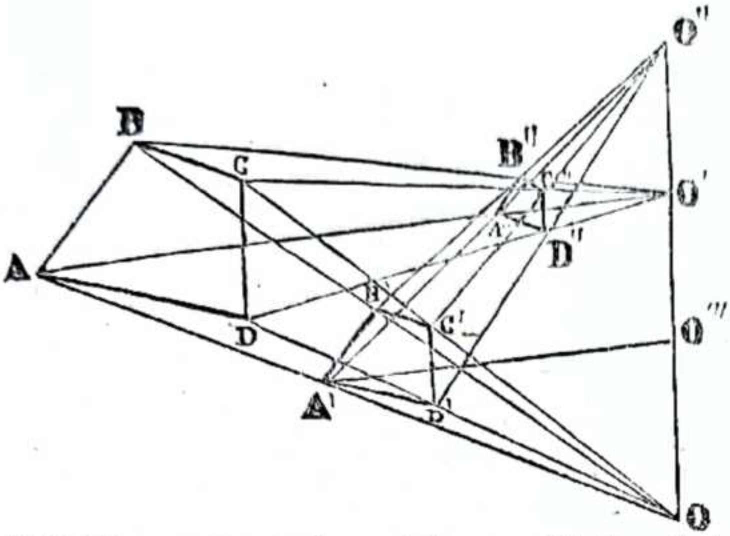
$$\frac{OB}{Ob}=\frac{OP}{OP'}\text{ ecc.}$$

e però secondo la data definizione i due poligoni ABCDE, *abcde* sono omotetici.

Scolio. I punti P, P′ che rispetto a due poligoni omotetici godono della dimostrata proprietà, si chiamano *poli coniugati*; e la retta che li unisce, passa pel centro di similitudine. Di maniera che dato il polo P di uno dei poligoni, si troverà il polo coniugato del poligono omotetico coll' unire il polo P col centro di similitudine, e col condurre da uno dei vertici del 2º poligono la parallela alla sua omologa, cioè a quella che unisce il vertice omologo al polo P: il punto P′ che si ottiene sulla PO sarà il polo richiesto.

TEOREMA.

Fig. 2.ª



Due poligoni A′B′C′D′, A″B″C″D″ *omotetici ad un terzo* ABCD, *sono omotetici fra di loro.*

Siano O ed O′ i centri di omotetia dei poligoni (ABCD, A′B′C′D′), (ABCD, A″B″C″D″): essendo A′B′, A″B″ i lati omologhi di due poligoni omotetici ad ABCD, sono entrambi paralleli ad AB e quindi paralleli fra di loro; e per una simile ragione tutti gli altri lati del poligono A′B′C′D′ sono rispettivamente paralleli ai lati del poligono A″B″C″D″. Inoltre essendo

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}\ldots$$

come pure

$$\frac{A''B''}{AB}=\frac{B''C''}{BC}=\frac{C''D''}{CD}\ldots$$

si avrà

$$\frac{A'B'}{A''B''}=\frac{B'C'}{B''C''}=\frac{C'D'}{C''D''}\ldots$$

e però i due poligoni in quistione essendo simili di forma e di posizione, sono omotetici fra di loro.

TEOREMA.

Tre poligoni omotetici a due a due hanno i tre centri di omotetia in linea retta.

Siano ABCD, A′B′C′D′, A″B″C″D″ (vedi fig. 2) tre poligoni a due a due omotetici e siano O, O′, O″ i centri di omotetia di queste tre coppie di poligoni: dico che O, O′, O″ sono situati su di una stessa retta.

Infatti, se si consideri O′ come uno dei due poli coniugati dei due poligoni ABCD, A′B′C′D′, per quello che abbiamo detto precedentemente, si otterrà l'altro polo coniugato col congiungere O′ col centro di omotetia O di questi due poligoni, e col condurre da uno dei vertici A′ del 2º poligono la parallela A′O‴ alla sua omologa AO′, la quale per l'omotetia degli altri due poligoni, deve passare per A″; sicchè si ha la proporzione

$$\frac{A'O'''}{AO'}=\frac{A'B'}{AB};$$

ma per ipotesi si ha pure

$$\frac{A''O'}{AO'}=\frac{A''B''}{AB},$$

e però queste due proporzioni avendo i medesimi conseguenti, daranno l'altra proporzione

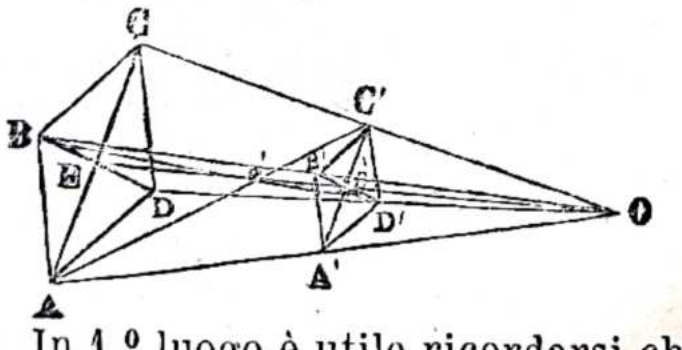
$$\frac{A'O'''}{A''O'}=\frac{A'B'}{A''B''};$$

e per conseguenza O′ ed O‴ essendo poli coniugati anche rispetto ai due poligoni A′B′C′D′, A″B″C″D″, ne segue che il loro centro di omotetia O″ deve trovarsi sulla retta O‴O′, la quale non è altro che la retta OO′ prolungata.

TEOREMA.

Se due poligoni dotati di centro sono omotetici diretti, sono pure omotetici inversi, e reciprocamente.

Fig. 3.ª



Per fissare le idee, consideriamo due parallelogrammi omotetici diretti ABCD, A′B′C′D′ (fig. 3ª): essendo essi dotati di centri, dimostreremo che sono nello stesso tempo omotetici inversi.

In 1.º luogo è utile ricordarsi che se si tirano le due diagonali AC, BD, non che le altre due A′C′. B′D′, i due centri E, E′ come punti d'intersezione di due diagonali omologhe, si debbono trovare in linea retta col centro di omotetia O dei due poligoni.

Ciò premesso, se si unisce un vertice qualunque A del 1.º poligono col vertice C′ del 2.º per mezzo della retta AC′

che incontra l'altra EE′ in O′, i due triangoli AEO′, C′E′O′ essendo simili, daranno la proporzione

$$\frac{AO'}{C'O'}=\frac{AE}{C'E'},$$

ma si ha pure

$$\frac{AE}{A'E'}=\frac{AB}{A'B'},$$

o per essere A′E′=C′E′,

$$\frac{AE}{C'E'}=\frac{AB}{A'B'};$$

queste due proporzioni avendo adunque una ragione di comune, daranno l' altra proporzione

$$\frac{AO'}{C'O'}=\frac{AB}{A'B'};$$

vale a dire che la retta AC′ rimane divisa in O′ nel rapporto di similitudine dei due poligoni.

Similmente si dimostra per qualunque altra retta che unisce i vertici omologhi B, D′; C, A′; D, B′; e per conseguenza O′ è centro di omotetia dei due poligoni, i quali sono omotetici inversi, giacchè i raggi rettori O′A, O′C′... sono i prolungamenti gli uni degli altri.

Corollario. Due poligoni omotetici dotati di centro hanno sempre due centri di omotetia.

DEFINIZIONI.

Se un punto comunque situato nello spazio si unisce con i vertici di un poliedro, e sulle congiungenti o sui loro prolungamenti si tagliano delle parti che sono in un rapporto costante con le intere congiungenti, si ottiene un novello poliedro non solamente simile di forma, per avere le facce rispettivamente simili a quelle del dato poliedro, ma ancora simile di posizione.

Questi due poliedri si dicono *omotetici*; e saranno *diretti* o *inversi* secondochè si trovano o pur no dalla medesima parte del punto dato, il quale si chiama *centro di omotetia* o *di similitudine*.

Le rette che uniscono il centro con i vertici di due poliedri omotetici, si chiamano *raggi vettori*: due vertici situati sullo stesso raggio vettore si dicono *omologhi* o *corrispondenti*; i lati dei poliedri che congiungono vertici omologhi si chiamano *omologhi*, e le facce che hanno i vertici a due a due omologhi si dicono anche *omologhe*.

È facile il concepire che i due poliedri omotetici diretti avendo le facce simili e similmente disposte, hanno gli angoli solidi omologhi eguali; mentre i due poliedri omotetici inversi avendo le facce simili ed inversamente disposte, avranno gli angoli solidi simmetrici.

Del resto, tutte le proprietà dimostrate per i poligoni omotetici, sono applicabili ai poliedri; e siccome le dimostrazioni sono identiche, così torna inutile il ripeterle.

PROBLEMA.

Dati i tre lati di un triangolo; calcolare: 1. *l'area del triangolo;* 2. *la bisettrice di uno dei suoi angoli;* 3. *il raggio del cerchio circoscritto*; 4. *il raggio del cerchio inscritto*; 5. *i raggi dei cerchi ex-inscritti* (a).

1. Partiamo dalla proposizione 12.ª del libro 3; la quale, coll'indicare con a, b, c i tre lati BC, AC, AB del triangolo, si traduce nel seguente modo

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times \mathrm{CD},$$

da cui ricavasi

$$\mathrm{CD} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

Inoltre, il triangolo ACD rettangolo in D ci dà (lib. 3 prop. 11)

$$\overline{\mathrm{AD}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{CD}}^2 = (\mathrm{AC}+\mathrm{CD})\,(\mathrm{AC}-\mathrm{CD}) =$$

$$\left(b + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right) = \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2a} \times$$

$$\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2a} = \frac{(a+b)^2-c^2}{2a} \times \frac{c^2-(a-b)^2}{2a} =$$

$$= \frac{(a+b+c)\,(a+b-c)}{2a} \times \frac{(c+a-b)\,(c-a+b)}{2a}$$

(a) Le figure del problema meno l'ultima sono quelle dei teoremi che si citano.

ovvero, estraendo la radice quadrata da ambo i membri,

$$AD=\frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)};$$

se dunque chiamiamo S l'area del triangolo, si avrà (lib. 3 pr. 6)

$$S=\tfrac{1}{2}BC\times BD=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)}$$

Questa espressione può divenire più semplice coll' introdurvi il conosciuto perimetro del triangolo: infatti ponendo

$$a+b+c=2p,$$

si avrà col sottrarre successivamente da tutte e due i membri $2a$, $2b$, $2c$.

$$a+b-c=2(p-c),\ a+c-b=2(p-b),\ b+c-a=2(p-a);$$

sicchè sostituendo questi valori nella trovata espressione di S, questa diviene

$$S=\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Se poi il triangolo è equilatero, si avrà

$$b=c=a,\ p=\tfrac{3}{2}a,$$

e quindi

$$S=\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}.$$

2. Si conosce (lib.3 prop. 36) che il rettangolo costruito su due lati di un triangolo è uguale al quadrato della bisettrice dell' angolo compreso, coll' aggiunta del rettangolo dei segmenti determinati da questa bisettrice sul terzo lato.

Se dunque si pone

$$BC=a,\ AC=b,\ AB=c,\ BC=m,\ DC=n,$$

si avrà

$$bc=\overline{AD}^2+mn\ldots(1);$$

ma i due segmenti m, n essendo proporzionali ai lati b, c (lib. 3 prop. 18) si ha pure

$$m:n::c:b,$$

ovvero

$$m:a-m::c:b$$

da cui ricavansi successivamente le seguenti eguaglianze

$$mb=ac-mc;\ m(b+c)=ac;\ m=\frac{ac}{b+c},$$

$$n=a-m=a-\frac{ac}{b+c}=\frac{ab}{b+c};$$

e però se nella relazione (1) si sostituiscono ad m ed n i trovati valori, questa diverrà

$$bc=\overline{AD}^2+\frac{a^2bc}{(b+c)^2};$$

dalla quale ricavasi subito

$$\overline{AD}^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=\frac{(b+c)^2bc-a^2bc}{(b+c)^2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}bc=$$

$$=\frac{(b+c+a)\ (b+c-a)}{(b+c)^2}bc\ ;$$

e quindi

$$AD=\frac{\sqrt{(a+b+c)\ (b+c-a)\ bc}}{b+c},$$

Se indichiamo al solito il perimetro con $2p$, avremo infine per la bisettrice dell' angolo in A

$$AD=\frac{2\sqrt{p(p-a)bc}}{b+c}.$$

3.° Dalla proposizione 35.ª del libro 3.° si rileva che il prodotto dei tre lati di un triangolo è uguale alla superficie di questo triangolo moltiplicata pel doppio diametro del cerchio circoscritto.

In conseguenza di ciò, se indichiamo con a, b, c i tre lati di un triangolo, con s la sua superficie, e con R il raggio del cerchio circoscritto, si avrà

$$abc=4SR$$

da cui

$$R=\frac{abc}{4S}$$

e ponendo per S il valore già determinato, avremo

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$$

vale a dire che *il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo è uguale al prodotto dei tre lati, diviso pel quadruplo della superficie del triangolo.*

4. Essendo l' area di un triangolo eguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio inscritto (lib. 3 prop. 35.ª Scolio), ne segue che indicando con r questo raggio, e conservando al triangolo le adottate indicazioni si avrà

$$S=\tfrac{1}{2}r(a+b+c)$$

da cui ricavasi

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\sqrt{p''(p-a)(p-b)(p-c)}}{2p}=\frac{\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c}}{p};$$

o in altri termini: *il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è eguale alla sua superficie divisa per la metà del perimetro.*

Corollario. Se il triangolo è equilatero, i precedenti valori di R, r diventano molto più semplici; giacchè essendo

$$b=c=a,$$

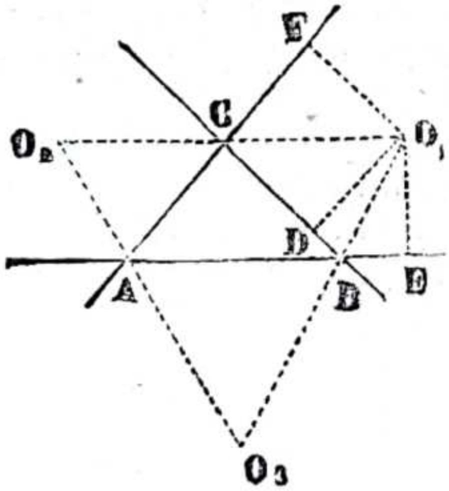
e quindi

$$p=\tfrac{3}{2}\,a,$$

si avrà

$$R=\frac{a}{\sqrt{3}},\qquad r=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

fig. 4.ª



5. Sia O_1 il centro di uno dei cerchi ex-iscritti al triangolo ABC, ed r_1 il raggio che, come si conosce, è una delle perpendicolari O_1D, O_1E, O_1F abbassate da O_1 su i tre lati del triangolo ABC prolungati se occorre.

È evidente che se si congiunge il centro O_1 coi tre vertici del dato triangolo, verranno a formarsi tre altri triangoli AO_1B,

AO_1C, BO_1C con le altezze O_1E, O_1F, C_1D eguali al raggio del cerchio ex-iscritto, e dei quali le aree dei primi due prese insieme differiscono da quella del terzo per la superficie del proposto: sicchè se s'indichi con S l'area del dato triangolo, e con a, b, c i suoi tre lati, si avrà

$$S=AO_1B+AO_1C-BO_1C=\frac{cr_1}{2}+\frac{br_1}{2}-\frac{ar_1}{2}=\frac{r_1}{2}(c+b-a);$$

d' onde ricavasi

$$r_1=\frac{2S}{c+b-a};$$

e ricordandoci che

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

in cui

$$p=\frac{a+b+c}{2},$$

e quindi $c+b-a=2p-2a$; il precedente valore di r_1 prenderà la forma

$$r_1=\frac{\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{p-a}=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

Con un ragionamento affatto simile si troverà per i raggi degli altri due cerchi

$$r_2=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},\qquad r_2=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

e quindi potremo stabilir la regola che *il raggio del cerchio ex-iscritto ad un triangolo si ottiene col dividere la sua superficie per la metà del perimetro diminuita del lato corrispondente.*

Corollario. Dal paragone degli ultimi valori trovati con quello del raggio del cerchio inscritto, si rileva che il raggio del cerchio ex-iscritto è sempre maggiore di quello dello iscritto.

Scolio I. Nel caso del triangolo equilatero, avendosi $a=$ $=b=c$, e $p=\frac{3a}{2}$, i precedenti valori di $r_1\, r_2\, r_3$ diverranno tutti e tre eguali ad $\frac{1}{2} a\sqrt{3}$; e siccome il raggio del cerchio iscritto diviene in tal caso $\frac{1}{6} a\sqrt{3}$, così si deduce che *nel triangolo equilatero il raggio del cerchio ex-iscritto è il triplo di quello del cerchio iscritto.*

Scolio 2. Nel caso del triangolo rettangolo, indicando con a l' ipotenusa e con b e c i due cateti, si avrà $a^2=b^2+$ $+c^2$, $2S=bc$:

Sostituendo questo valore di 2S nella espressione del raggio del cerchio iscritto $r=\dfrac{2S}{a+b+c}$, questa diverrà $r(a+b+c)=bc$, che può anche scriversi $r(b+c)=bc-ra$. Innalzando i due membri a quadrato, si avrà $r^2(b^2+2bc+c^2)$ $=b^2c^2-2abcr+r^2a^2$; e ponendo a^2 per b^2+c^2 ed $r(a+b+c)$ per bc, quest' ultima prenderà la forma

$$r^2[a^2+2r\ (a+b+c)]=r^2(a+b+c)^2-2ar^2(a+b+c)+a^2r^2,$$

che col trascurare i termini che si distruggono e col dividere per $r^2(a+b+c)$, diverrà infine $2r=b+c-a$, d' onde

$$r=\frac{b+c-a}{2}.$$

Con un procedimento identico si otterrebbe

$$r_1=\frac{a+b+c}{2},\quad r_2=\frac{a+b-c}{2},\quad r_3=\frac{a+c-b}{2}$$

e quindi potremo stabilire pel triangolo rettangolo le seguenti regole:

1.ª Il raggio del cerchio iscritto è uguale alla semi-differenza dell' ipotenusa dalla somma dei cateti.

2.ª Il raggio del cerchio ex-iscritto corrispondente alla ipotenusa è uguale al semi-perimetro.

3.ª Il raggio del cerchio ex-iscritto a ciascun cateto è eguale alla semi-differenza del cateto corrispondente dalla somma dell' ipotenusa e dell' altro cateto.

Scolio 3. Se si moltiplicano fra loro il raggio del cerchio iscritto in un triangolo qualunque ed i raggi dei tre cerchi ex-iscritti, si avrà

$$rr_1r_2r_3=\frac{\left[\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right]^4}{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}=p(p-a)\,(p-b)\,(p-c);$$

da cui ricavasi

$$\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}=\sqrt{rr_1r_2r_3}\,;$$

ma il 1. membro rappresenta l' area del triangolo; si può dunque ritenere che essendo dati il raggio del cerchio inscritto ed i raggi dei tre cerchi ex-iscritti, si ottiene l' area del triangolo coll' estrarre la radice quadrata dal prodotto di questi quattro raggi.

Problema.

Dati i quattro lati di un quadrilatero inscritto in un cerchio trovare le diagonali.

Dalle proposizioni 37, 39 del libro 3. emerge che il rettangolo delle due diagonali AC, BD è eguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti; e che queste diagonali stanno nella ragione delle somme dei rettangoli costruiti sui lati che terminano agli estremi di esse.

Se dunque si pone

$$AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ AD=d,\ AC=m,\ BD=n,$$

si avranno le due relazioni

$$mn=ac+bd$$

$$\frac{m}{n}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

che moltiplicate membro a membro ci daranno per la 1. diagonale

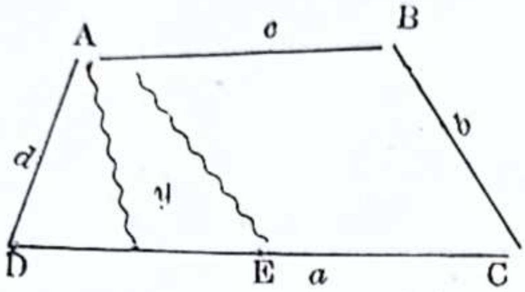
$$m=\sqrt{\frac{(ad+bc)\,(ac+bd)}{ab+cd}}$$

e divise membro a membro daranno per l'altra diagonale

$$n=\sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac-bd)}{ad+bc}}.$$

Problema.

Trovare l'area di un trapezio allorchè sono dati i suoi quattro lati.



Sia ABCD il trapezio, i cui lati indicheremo con a, b, c, d: se dal vertice A si tira la retta AE parallela a BC, l'altezza y del trapezio sarà quella del triangolo ADE che ha per lati b, d, $a-c$; sicchè coll'aver presente da una parte l'espressione del triangolo per mezzo dei suoi tre lati, e dall'altra la misura generale di un triangolo, si avrà pel suddetto triangolo,

$$\sqrt{p(p-b)\,(p-d)\,(p-a+c)} = \frac{a-c}{2}y,$$

donde ricavasi

$$y = \frac{2}{a-c}\sqrt{p(p-b)\,(p-d)\,(p-a+c)}:$$

ma il trapezio si misura moltiplicando la metà dell'altezza per la somma delle due basi; avremo dunque per l'area T del trapezio dato

$$T = \frac{a+c}{a-c}\sqrt{p(p-b)\,(p-d)\,(p-a+c)}.$$

TEMI DI GEOMETRIA

PER GLI ESAMI

DI LICENZA LICEALE

Secondo l' ultimo programma del 1873.

1.—Relazioni fra i quadrati ed i rettangoli costruiti sui segmenti di una retta. Teoremi sul triangolo ottusangolo e sul triangolo in generale. (*Vedi le proposizioni* 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, del libro 3.°) Relazioni fra le basi e le altezze di due parallelepipedi o di due prismi triangolari eguali.

Siano P, P' *due parallelepipedi o due prismi;* B, B' *le rispettive basi* ; A , A' *le altezze : essendo la misura del parallelepipedo ed in generale quella del prisma rappresentata dal prodotto della base per l' altezza* (prop. 12 lib. 6.), *si avrà*

$$P=A\times B \qquad P'=A'\times B'$$

che divise membro a membro daranno l' eguaglianza

$$\frac{P}{P'}=\frac{A\times B}{A'\times B'}.$$

Supponendo adunque $P=P'$, *sarà pure* $A\times B=A'\times B'$; *che potendo scriversi*

$$\frac{B}{B'}=\frac{A'}{A}$$

ne risulta che le basi dei parallelepipedi e dei prismi equivalenti sono inversamente proporzionali alle altezze.

La reciproca è anche vera e si dimostra coll'invertire il ragionamento che precede.

2.—Relazioni fra i segmenti di due seganti o di due corde nel cerchio (prop. 32, 33, 34 del libro 3.°)

Misura della superficie e del volume dei tre corpi rotondi (*prop.* 1, 3, 4, 7, 10, 13 *del libro* 8.)

3.—Angoli nel cerchio. Quadrilatero inscritto (*prop.* 19, 20, 21, 22, 23 *del libro* 2.)

Volume del parallelepipedo, del prisma, della piramide.

Misura della superficie laterale del prisma, della piramide (*prop.* 12 e 16 *del libro* 6.; 2 e 6 *del libro* 8.)

4.—Ragione di due cerchi. Misura del cerchio e della circonferenza (*prop.* 11 e 13 *del libro* 4.) (*)

5. — Iscrizione e circoscrizione dei poligoni regolari nel cerchio (*prop.*2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *del libro* 4.)

Divisione di un prisma triangolare in tre piramidi uguali (*prop.* 15 *del libro* 6.)

6.—Ragione di due parallelogrammi o di due triangoli di eguale base o d' eguale altezza. Segmenti di due lati di un triangolo formati da una retta che sia parallela ad un lato o bisettrice di un angolo (*prop.* 5, 6 , 16 , 17 , 18 *del libro* 3.)

Relazione fra il cilindro ed il cono di uguali basi ed altezze. Ragione di due cilindri o di due coni d'uguale base o d' uguale altezza (*Corollario della prop.* 4 *del libro* 4.)

7.—Triangoli simili; proprietà del triangolo rettangolo (*prop.* 19, 20, 21, 22, 28 *del libro* 3.)

Ragione di due piramidi di eguale altezza (*Cor. della prop.* 16. *del libro* 6.)

8.—Teorema sui rettangoli costruiti con quattro rette proporzionali.

Questo teorema è una conseguenza della prop.3.ª del libro 3.°

Infatti, *siano* A, B, C, D *quattro rette tali che si abbia*

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}:$$

dico che il rettangolo P *che ha per dimensioni le rette estreme* A,D *è eguale al rettangolo* P *che ha per dimensioni le rette medie* B, C.

Costruendo un terzo rettangolo P" *che ha per dimen-*

(*) In questo numero del programma vi è anche la teoria Euclidiana delle quantità proporzionali, la quale riducesi oggi a quella delle ragioni e proporzioni geometriche sui numeri, riflettendo che le grandezze geometriche cioè le linee, le superficie ed i volumi essendo rappresentati da numeri astratti che ne indicano le misure, vanno sottoposte alle medesime leggi dei suddetti numeri.

sioni B, D; *si avrà pel citato teorema*

$$\frac{P}{P''}=\frac{A}{B},\quad \frac{P'}{P''}=\frac{C}{D};$$

e però essendo i secondi membri eguali, si avrà pure

$$\frac{P}{P''}=\frac{P'}{P''}$$

o $P=P'$

Reciprocamente, se un rettangolo è equivalente ad un altro, le loro dimensioni saranno proporzionali; poichè dall' eguaglianza

$$A\times D=B\times C$$

ricavasi la proporzione

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

Ragione di due triangoli e di due poligoni simili (*prop.* 30, 31 *del libro* 3.)

Ragione di due parallelepipedi aventi uguali basi o uguali altezze, ragione di due parallelepipedi simili (*prop.* 8, 9, 10, 38 *del libro* 6.)

9.—Ragione di due parallelogrammi equiangoli.

Due parallelogrammi equiangoli stanno fra di loro come i rettangoli dei lati che comprendono due angoli eguali; o pure in ragion composta delle ragioni dei loro lati.

Questo teorema è una conseguenza della prop. 19 *del libro* 3., *giacchè ogni parallelogrammo è il doppio di ciascun triangolo prodotto da una delle sue diagonali.*

Costruzione di un poligono simile ad un dato ed eguale ad un altro: (*problema* 13 *del libro* 3.)

Divisione di una retta in media ed estrema ragione (*problema* 16. *del libro* 3.)

Poligoni simili e similmente posti costruiti sui lati di un triangolo rettangolo.

Questo teorema è una conseguenza delle prop. 11 e 31 *del libro* 3. *ed in fatti indicando con* A, B, C *l'ipotenusa ed i due cateti di un triangolo rettangolo; e costruendo su di queste rette tre poligoni* P, P', P'' *simili e similmente disposti, si avrà per la* prop. 31

$$\frac{P}{A^2}=\frac{P'}{B^2}=\frac{P''}{C^2};$$

ma per la prop. 11 *si ha*

$$A^2=B^2+C^2$$

dunque sarà pure:

$$P=P'+P''.$$

Di qui l'interessante proprietà che dei tre poligoni simili e similmente disposti costruiti sui tre lati di un triangolo rettangolo, l'area di quello costruito sull'ipotenusa è eguale alla somma delle aree degli altri costruiti sui cateti.

Ragione di due piramidi triangolari simili (*prop.* 37 *del libro* 6.)

10. — Proporzionalità degli angoli agli archi nel cerchio (*prop.* 18 *del libro* 2.)

Ragione di due sfere.

Questo teorema è una conseguenza dello scolio 2. *della* prop. 18 *del libro* 8.; *giacchè se* S *ed* S' *sono due sfere i raggi delle quali sono* R *ed* R', *si avrà*

$$S=\tfrac{4}{3}\pi R^3, \qquad S'=\tfrac{4}{3}\pi R'^3;$$

onde

$$\frac{S}{S'}=\frac{R^3}{R'^2},$$

vale a dire che i volumi di due sfere sono nel rapporto dei cubi dei raggi o dei diametri.

11. — Rapporto di due rette, di due archi di cerchi eguali, dei perimetri e delle aree di due poligoni simili (*problemi* 16, 17 *del libro* 2. *e prop.* 31 *del libro* 3.)

Teoremi sulla perpendicolarità, obbliquità, parallelismo di rette e piani (*i primi* 24 *teoremi del libro* 5.)

12.—Aree delle figure rettilinee (*prop.* 4, 5, 6, 7 *del libro* 3.)

Relazioni fra le basi e le altezze di due prismi o piramidi triangolari o coni o cilindri eguali. (*Questi teoremi sono pure conseguenze immediate delle prop.* 12, 16 *del libro* 6.; *e* 1, 4 *del libro* 8.)

Siano infatti P, P' *due prismi o due piramidi triangolari*; B, B' *le basi, ed* A, A' *le altezze: si avrà per i prismi*

$$P=B\times A, \qquad P'=B'\times A';$$

e per le piramidi

$$P=B\times\tfrac{1}{3}A, \qquad P'=B'\times\tfrac{1}{3}A';$$

sicchè se

$$P=P',$$

sarà pure pei prismi

$$B\times A=B'\times A'$$

e per le piramidi

$$B\times\tfrac{1}{3}A=B'\times\tfrac{1}{3}A';$$

d' onde ricavasi per entrambi i solidi

$$\frac{B}{B'}=\frac{A'}{A}$$

e quindi in due prismi o piramidi equivalenti le basi sono in ragion reciproca delle altezze.

Se in ultimo indichiamo con C, C' *due cilindri retti o due coni retti; con* R, R' *i raggi delle basi e con* A, A' *le rispettive altezze; si avrà per i cilindri*

$$C=\pi R^2\times A \qquad C'=\pi R'^2\times A',$$

e per i coni

$$C=\pi R^2\times\tfrac{1}{3}A \qquad C'=\pi R'^2\times\tfrac{1}{3}A';$$

e però se

$$C=C',$$

ne seguirà per i cilindri

$$\pi R^2\times A=\pi R'^2\times A',$$

per i coni

$$\pi R^2\times\tfrac{1}{3}A=\pi R'^2\times\tfrac{1}{3}A';$$

e per entrambi

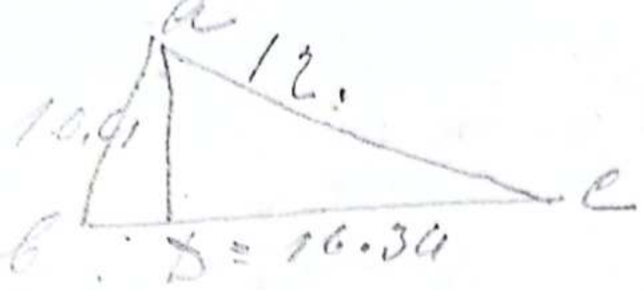
$$\frac{\pi R^2}{\pi R'^2}=\frac{A'}{A},$$

ovvero

$$\frac{R^2}{R'^2}=\frac{A'}{A}.$$

Dunque in due cilindri o coni equivalenti le altezze sono in ragion reciproca delle basi; oppure dei quadrati dei raggi o dei diametri di queste medesime basi.

FINE.



Calcolare l'altezza

$$\sqrt{12.6^2 + 10{\times}4^2} =$$

$10.4 \times 12,6 = \cancel{131.04}$ 6p, p2

1.

π (seu valor) 134