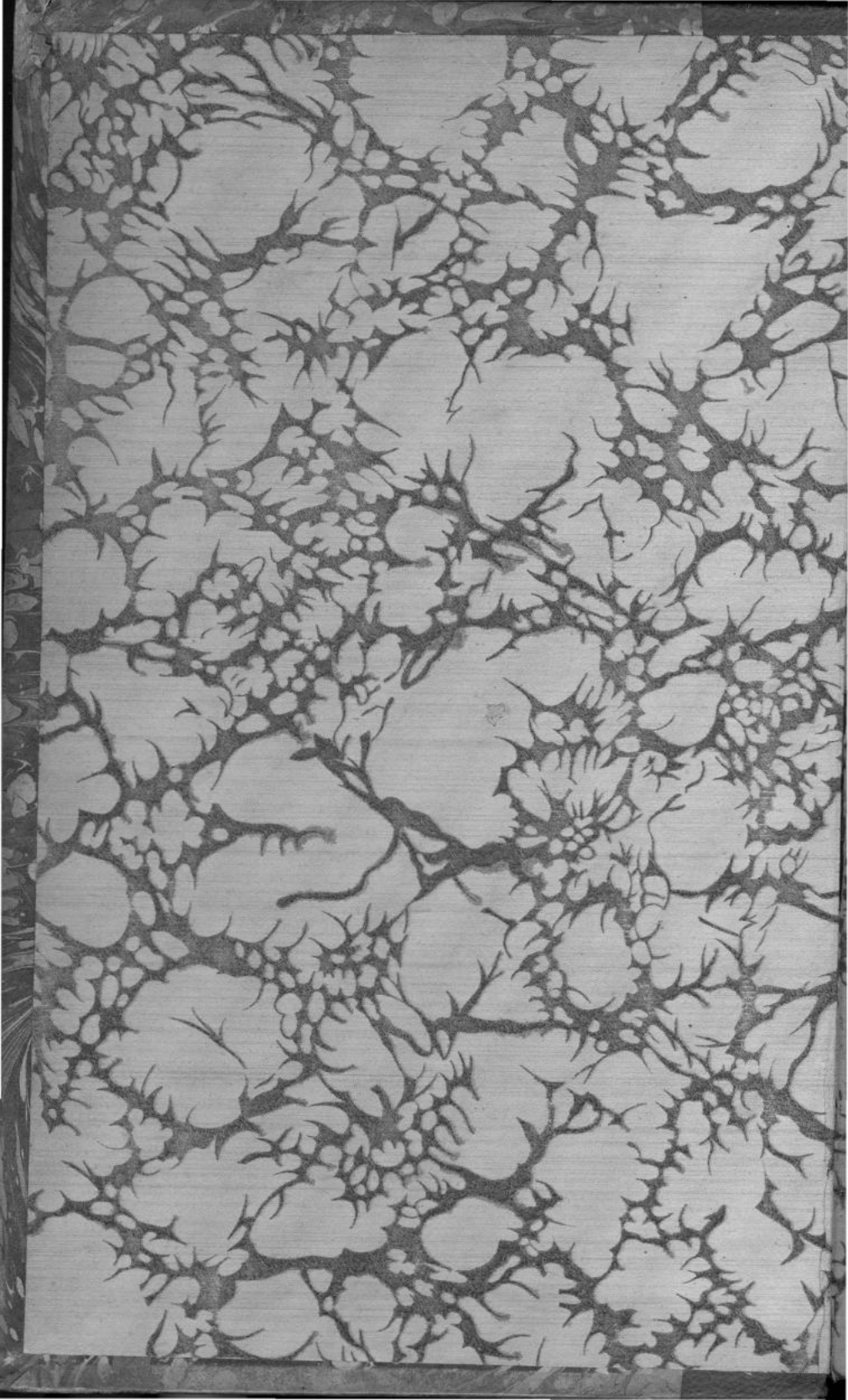
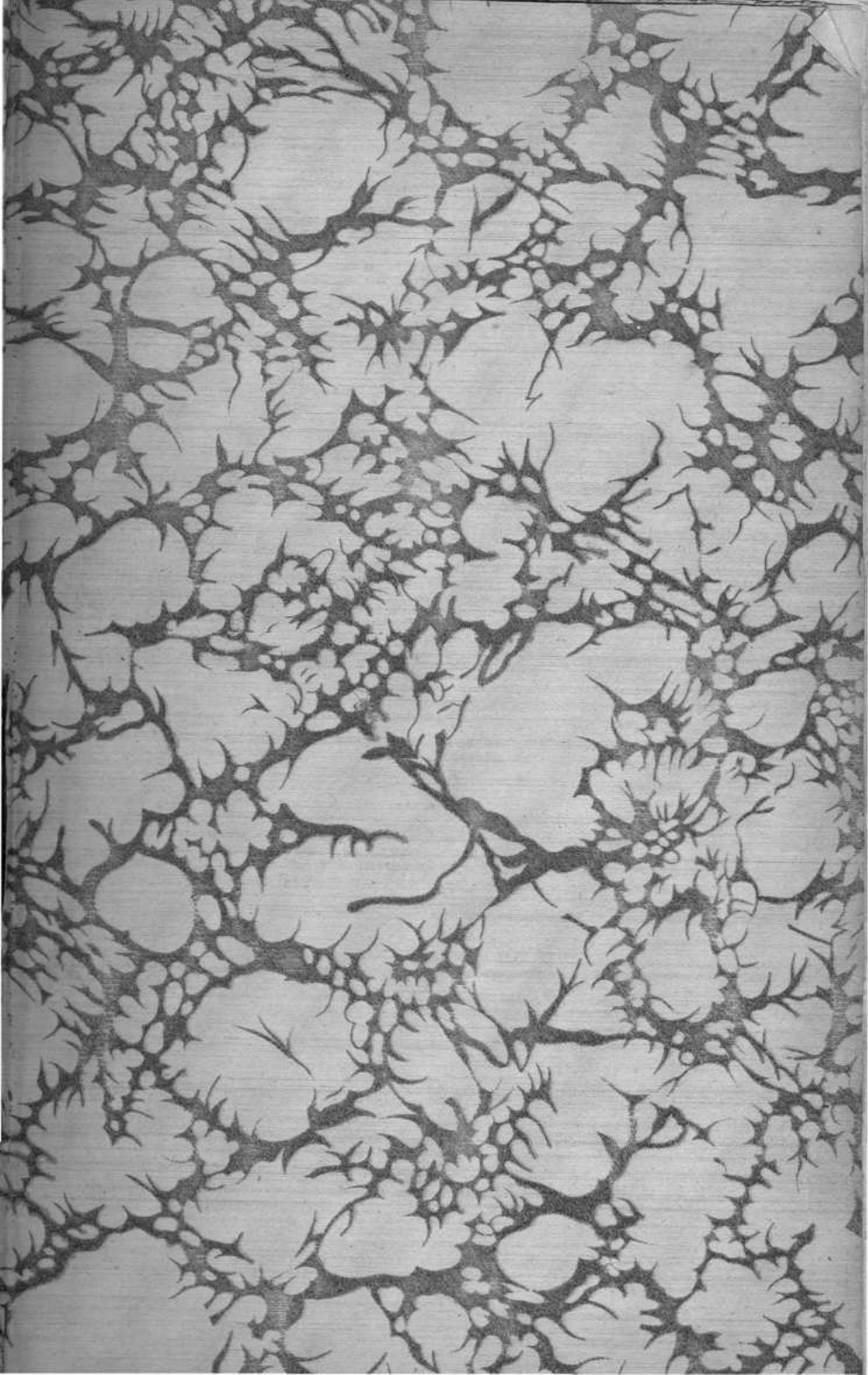




COURS

DE

MATHÉMATIQUES.


ΜΗ Ο ΘΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΗΣ

COURS

DE

MATHÉMATIQUES

A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES;

PAR

CHARLES DE COMBEROUSSE,

Ingénieur civil,
Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers
et à l'École Centrale des Arts et Manufactures,
Ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal.

CINQUIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

TOME DEUXIÈME.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, PLANE ET DANS L'ESPACE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1911

UFRJ
Centro de Ci... de Naturez...
Bibliot...
N.º REG...
014734-0 24/11/81
ORIGEM
Doação de Leitores
T. 1 P1 1

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés.

EXTRAIT DE L'AVERTISSEMENT

DE LA TROISIÈME ÉDITION.

Les deux premiers Volumes de notre *Cours de Mathématiques*, parvenus aujourd'hui à leur troisième édition, forment un tout complet et constituent le domaine principal des Mathématiques élémentaires. Le tome I comprend l'*Arithmétique* et l'*Algèbre élémentaire;* le tome II, la *Géométrie* et la *Trigonométrie*.

Les tomes III et IV sont consacrés tout entiers à l'*Algèbre supérieure*, que nous avons cru devoir exposer avec de grands détails. . . .

Nous demandons maintenant la permission d'ajouter quelques indications relatives à la présente édition du tome II.

Dans l'édition précédente, nous avions refondu la *Géométrie*, en conservant le même point de vue que dans la première édition (1861), où nous avions peut-être appliqué la méthode des limites plus franchement et plus nettement que nos devanciers. Collaborateur, depuis, de notre excellent collègue Eugène Rouché, pour le *Traité de Géométrie* que le public savant a bien voulu accueillir avec faveur dès 1865, nous avions pu, grâce à son autorisation, puiser dans cet Ouvrage et enrichir, sur d'autres points, notre texte des fruits d'un travail qui nous est commun, mais où M. Rouché a pris une si

large part. Nous le remercions ici de sa cordiale amitié, heureux de lui témoigner nos sentiments et notre gratitude.

Néanmoins, dans la seconde édition du tome II, nous avions laissé de côté les *éléments de Géométrie supérieure* que renfermait déjà la première édition. Nous avons cru devoir les rétablir dans cette troisième édition, en les condensant dans le Livre III de la Géométrie, sous le titre de *développements de Géométrie plane*.

Ces notions, que nous avons choisies avec soin parmi les plus nécessaires, doivent aujourd'hui faire partie de tout Traité de Géométrie.

Le lecteur pourra, s'il désire compléter l'étude des méthodes et des théories si fécondes de la Géométrie supérieure, consulter l'Ouvrage dont nous parlions tout à l'heure en associant notre nom à celui de M. Eugène Rouché, et dont la sixième édition a paru en 1891....

Quant à la *Trigonométrie*, nous sommes demeuré fidèle à la marche adoptée dans les deux éditions précédentes, en établissant les formules trigonométriques fondamentales à l'aide de la *théorie des projections*. La première idée de cette amélioration, qui offre l'avantage d'une grande généralité dans les démonstrations, débarrassées ainsi de fastidieuses discussions, est due à Coriolis.

Comme dans les précédentes éditions, après la *Trigonométrie rectiligne*, nous avons donné la *Trigonométrie sphérique*, bien qu'elle ne soit pas exigée dans les examens. Mais c'est une annexe si naturelle de la Géométrie de la sphère, et les Sciences physiques et astronomiques y ont recours si souvent, que nous ne pouvions nous dispenser de cette extension.

Les questions considérées habituellement comme un *complément de la théorie des fonctions circulaires* (formule de Moivre, résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré, équations binômes, séries circulaires) appartiennent en réalité à l'*Algèbre supérieure;* et elles sont exposées avec détail dans nos Tomes III et IV. Néanmoins, pour répondre immédiatement aux exigences des programmes, nous avons ici consacré deux Notes succinctes aux Tables trigonométriques centésimales et à la résolution trigonométrique du cas irréductible de l'équation du troisième degré.

Les énoncés de nombreux *Exercices*, quatre *Notes* (la dernière, relative aux applications géométriques et trigonométriques de la *règle à calcul*), enfin d'utiles *Tables numériques* (dont la principale donne, de minute en minute, les lignes trigonométriques naturelles des angles ou des arcs de 0° à 90°), terminent ce Volume que nous souhaitons de voir accueillir par nos collègues avec leur bienveillance accoutumée.

Octobre 1892.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

EXTRAIT DE L'AVERTISSEMENT DE LA TROISIÈME ÉDITION..... Page v

GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

INTRODUCTION..... Page 1

LIVRE PREMIER.

LES LIGNES.

CHAPITRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

I. — **Mesure et rapport des lignes droites**, p. 7.

II. — **Des angles : angles droits**, angles adjacents, angles opposés par le sommet, p. 9.

III. — **Des triangles : propriétés du triangle isocèle**, conséquences; *cas d'égalité des triangles;* relation des angles et des côtés opposés dans un triangle, conséquences; *loi des réciproques;* p. 14.

IV. — **Des perpendiculaires et des obliques :** relation de grandeur entre la perpendiculaire et les obliques menées d'un même point à une même droite; *lieu géométrique des points à égale distance des extrémités d'une droite donnée;* cas d'égalité des triangles rectangles; lieu géométrique des points à égale distance des côtés d'un angle donné; *remarque sur la détermination des lieux géométriques;* p. 21.

V. — **Des parallèles** : Définition; *postulatum,* conséquences; *propriétés des angles formés par deux parallèles avec une sécante commune,* conséquences;

parallèles comprises entre parallèles; *angles dont les côtés sont respectivement parallèles ou perpendiculaires; somme des angles d'un triangle*, conséquences; p. 24.

VI. — **Des polygones, et, en particulier, des quadrilatères** : somme des angles d'un polygone convexe, conséquences; conditions d'égalité de deux polygones de même espèce; *propriétés fondamentales du parallélogramme;* rectangle, losange, carré, trapèze; p. 30.

VII. — **Exercices et questions complémentaires** : Point de rencontre des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle; points de rencontre des hauteurs, des bissectrices, des médianes d'un triangle; propriétés de la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze; *centre des moyennes distances d'un système de points*, conséquences, p. 35.

CHAPITRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

I. — **Des arcs et des cordes** : Définitions, propriétés du diamètre, relation des arcs et des cordes dans la même circonférence ou dans des circonférences égales, p. 41.

II. — **Perpendiculaires et parallèles dans le cercle** : *diamètre perpendiculaire à une corde*, relation entre les cordes et leurs distances au centre; *trois points non en ligne droite déterminent une circonférence; tangente à la circonférence*, propriété fondamentale; arcs égaux interceptés sur la circonférence par deux droites parallèles; *distance d'un point à une circonférence;* normale, p. 43.

III. — **Positions mutuelles de deux circonférences** : circonférences sécantes ou tangentes, propriétés correspondantes; *deux circonférences peuvent occuper cinq positions différentes l'une par rapport à l'autre*, relations correspondantes entre leurs rayons et la distance de leurs centres; p. 47.

IV. — **Mesure des angles** : Définition de deux rapports incommensurables égaux; angles au centre; *rapport de deux angles quelconques;* si l'on fait correspondre l'unité d'arc à l'unité d'angle, *tout angle a pour mesure son arc;* division de la circonférence; *mesure d'un angle inscrit*, conséquences, angles inscrits dans un même segment; mesure de l'angle formé par deux sécantes qui se coupent à l'intérieur ou à l'extérieur de la circonférence; *lieu des points d'où l'on voit une droite donnée sous un angle donné;* quadrilatère inscrit; p. 49.

V. — **Problèmes graphiques sur la ligne droite et la circonférence de cercle** : construction des angles et des triangles; *construire un triangle, étant donnés deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux;* tracé des perpendiculaires et des parallèles; tangente menée à une circonférence par un point donné; tangente commune à deux circonférences; circonférences tangentes à trois droites qui se coupent; *décrire sur une droite donnée un segment capable d'un angle donné;* p. 57.

VI. — **Exercices et questions complémentaires** : distance d'une droite à une circonférence, distance de deux circonférences; les pieds des perpendicu-

laires abaissées d'un point d'une circonférence sur les trois côtés d'un triangle inscrit sont en ligne droite; quadrilatère circonscrit; p. 70.

CHAPITRE III.

LES LIGNES PROPORTIONNELLES.

I. — **Des lignes proportionnelles dans le triangle** : *deux points fixes étant choisis sur une droite indéfinie, il existe sur cette droite un point et un seul dont le rapport des distances aux deux points fixes ait une valeur donnée,* moyenne harmonique, points conjugués harmoniques; *toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres en parties proportionnelles,* conséquences; propriétés des bissectrices des angles intérieurs et extérieurs d'un triangle; *lieu géométrique des points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné;* p. 73.

II. — **De la similitude et de l'homothétie** : *cas de similitude des triangles;* série de droites issues d'un même point et coupant deux parallèles; similitude des polygones; *homothétie, directe ou inverse, de deux polygones;* systèmes homothétiques; *les extrémités de droites concourantes et les extrémités d'autres droites concourantes, respectivement parallèles et proportionnelles aux premières, forment deux systèmes homothétiques;* application à deux circonférences; *deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux, et les trois centres d'homothétie correspondants sont situés en ligne droite;* application à trois circonférences; p. 80.

III. — **Relations métriques entre les différentes parties d'un triangle** : propriétés du triangle rectangle, *le carré du nombre qui représente l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des nombres qui représentent les côtés de l'angle droit,* conséquences; carré du côté opposé dans un triangle à un angle aigu ou obtus, conséquence; somme des carrés de deux côtés d'un triangle, lieu géométrique correspondant; somme des carrés des côtés d'un quadrilatère quelconque, application au parallélogramme; différence des carrés de deux côtés d'un triangle, lieu géométrique correspondant; produit de deux côtés d'un triangle, soit en fonction de la bissectrice de leur angle, soit en fonction du diamètre du cercle circonscrit au triangle; p. 94.

IV. — **Des lignes proportionnelles dans le cercle** : propriété fondamentale des sécantes qui se coupent dans le cercle ou hors du cercle; *lorsqu'une tangente et une sécante au cercle partent d'un même point, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure;* droites anti-parallèles; p. 102.

V. — **Problèmes sur les lignes proportionnelles** : division d'une droite en parties égales ou en parties proportionnelles à des nombres donnés; quatrième proportionnelle, troisième proportionnelle; *moyenne proportionnelle; construire deux droites connaissant leur produit et leur somme ou leur différence; diviser une droite en moyenne et en extrême raison;* construire sur une droite donnée un triangle ou un polygone semblable à un triangle ou à un polygone donné; *construire une échelle;* p. 105.

VI. — **Exercices et questions complémentaires** : déterminer les hauteurs, les médianes et les bissectrices d'un triangle en fonction de ses trois côtés;

rayon du cercle circonscrit; *construire les racines d'une équation du second degré;* construire une circonférence qui passe par deux points donnés et qui soit tangente à une droite ou à une circonférence donnée; p. 114.

CHAPITRE IV.

MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

I. — **Des polygones réguliers** : polygones réguliers inscrits et circonscrits; *tout polygone régulier est inscriptible et circonscriptible,* conséquences; deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, rapport de similitude de ces polygones; *polygones réguliers étoilés;* p. 119.

II. — **Problèmes sur les polygones réguliers** : Inscription du carré, de l'hexagone régulier et du triangle équilatéral, du décagone régulier et du pentagone régulier, du pentédécagone régulier; propriétés et relations correspondantes; *étant donnés le rayon d'un cercle et le côté d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double ou le côté du polygone régulier circonscrit semblable;* conséquences; *étant donnés le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, calculer le rayon et l'apothème du polygone régulier de même périmètre, mais d'un nombre de côtés double; conséquences;* p. 124.

III. — **Méthode des limites** : définitions et propriétés fondamentales; p. 136.

IV. — **Mesure de la circonférence** : *définition de la longueur d'une courbe,* justification de la définition adoptée; *conséquences :* deux circonférences quelconques sont proportionnelles à leurs rayons ou à leurs diamètres, *le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant;* conséquences relatives à la mesure de la circonférence, aux arcs semblables, à la mesure des angles; p. 139.

V. — **Calcul de π** : *méthode des isopérimètres,* théorème fondamental; méthode des périmètres, expression remarquable de π; valeurs approchées de ce rapport; p. 146.

LIVRE DEUXIÈME.

LES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

DÉTERMINATION DES AIRES.

I. — **Aires polygonales** : Définitions; *mesure de l'aire du rectangle;* aire du parallélogramme; expressions diverses de l'aire du triangle; aire du trapèze; aire d'un polygone quelconque; p. 153.

II. — **Aires circulaires** : aire d'un polygone régulier; *aire du cercle;* aires d'un secteur et d'un segment circulaire; p. 161.

III. — **Aire approchée d'une figure plane terminée par une courbe quelconque** : formule de *Simpson*, limites de l'erreur commise; formule de *Poncelet*, limite supérieure de l'erreur correspondante; p. 165.

CHAPITRE II.

COMPARAISON DES AIRES.

I. — **Rapport des aires semblables** : rapport *des aires de deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire, de deux triangles semblables, de deux polygones semblables*; rapport de deux cercles quelconques; secteurs et segments circulaires semblables; théorème du carré de l'hypoténuse, conséquences, remarque à ce sujet; p. 170.

II. — **Problèmes relatifs aux aires** : *construire un triangle équivalent à un polygone donné;* quadrature d'une figure; trouver deux droites proportionnelles aux aires de deux polygones donnés; *construire un triangle équivalent à un polygone donné et semblable à un autre polygone donné;* deux figures semblables étant données, construire une figure semblable égale à leur somme ou à leur différence; construire un polygone semblable à un polygone donné et dont l'aire soit à celle de ce polygone dans un rapport donné; p. 176.

III. — **Exercices et questions complémentaires** : diviser un triangle en deux parties équivalentes par une parallèle à sa base; diviser un trapèze en parties proportionnelles à deux droites données par une parallèle à ses bases; étant donnés un point et un angle, mener par le point une droite qui limite avec les côtés de l'angle un triangle d'aire donnée; p. 182.

LIVRE TROISIÈME.

DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE PLANE.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DES TRANSVERSALES.

I. — **Transversales dans le triangle** : *théorème de Ptolémée ou de Ménélaüs*, réciproque; *Théorème de Ceva*, réciproque; quelques conséquences; p. 187.

II. — **Application au quadrilatère complet** : définition; *Dans tout quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres, et les milieux des trois diagonales sont en ligne droite;* p. 192.

III. — **Application à l'hexagone inscrit** : *théorème de Pascal* ou de l'hexagramme mystique; p. 194.

IV. — Distance d'un point donné à un point inaccessible; p. 195.

CHAPITRE II.

DIVISIONS ET FAISCEAUX HARMONIQUES.

I. — **Division harmonique des lignes droites** : rappel et complément de la définition fondamentale : *La moitié d'une droite finie est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux points conjugués harmoniques de ses extrémités*, conséquences; cercles orthogonaux; p. 197.

II. — **Faisceaux harmoniques** : définition; *tout faisceau harmonique coupe harmoniquement une transversale quelconque;* dans tout faisceau harmonique, toute parallèle à l'un des rayons est coupée par les trois autres en parties égales; conséquences; p. 200.

III. — **Pôle et polaire par rapport à un angle** : définitions; *construction de la polaire d'un point par rapport à un angle*, réciproque; conséquence; mener par un point donné une droite qui concoure avec deux droites données ne se coupant pas dans les limites du dessin, p. 203.

IV. — **Pôle et polaire dans le cercle** : théorème fondamental, relation correspondante, conséquences; par rapport à un cercle donné, *les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite*, et, réciproquement, *la polaire d'un point est le lieu des pôles de toutes les droites qui passent par ce point;* conséquences, polygones polaires-réciproques; *méthode des polaires-réciproques;* p. 206.

V. — **Application à l'hexagone circonscrit** : *théorème de Brianchon*, p. 211.

CHAPITRE III.

DU RAPPORT ANHARMONIQUE ET DE LA DIVISION HOMOGRAPHIQUE.

I. — **Du rapport anharmonique de quatre points** : définition; *on peut former vingt-quatre rapports anharmoniques avec quatre points, et ces vingt-quatre rapports n'ont que six valeurs différentes, deux à deux inverses l'une de l'autre;* connaissant l'un des trois rapports anharmoniques directs de quatre points, trouver les deux autres; conséquences; connaissant un rapport anharmonique de quatre points et trois de ces points, déterminer le quatrième; conséquences; *tout faisceau de quatre droites concourantes est coupé par une transversale quelconque suivant un rapport anharmonique constant, qui est alors celui du faisceau; quand deux systèmes rectilignes de quatre points ont un point homologue commun et un rapport anharmonique égal, les trois droites qui joignent les autres points correspondants pris deux à deux sont concourantes; quand deux faisceaux de quatre droites ont un rayon homologue commun et un rapport anharmonique égal, les trois points d'intersection des autres rayons correspondants pris deux à deux sont en ligne droite;* p. 213.

II. — **De la division homographique** : *autre expression du rapport anharmonique, en fonction des sinus des angles formés par les rayons correspondants d'un faisceau;* conséquences; définition des faisceaux homographiques; rapport anharmonique de quatre points fixes d'une circonférence;

rapport anharmonique de quatre tangentes fixes; *le rapport anharmonique de quatre tangentes à une circonférence est égal à celui de leurs quatre points de contact;* divisions homographiques; *deux divisions homographiques sont déterminées par trois couples de points correspondants;* points à l'infini de deux divisions homographiques, leur détermination, conséquence; p. 221.

III. — **Divisions homographiques de même base. Points doubles** : définitions; *détermination des points doubles de deux divisions homographiques de même base supposées distinctes*; discussion; points doubles réels, points doubles imaginaires; rayons doubles; divisions semblables; divisions égales; p. 226.

CHAPITRE IV.

PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE.

I. — **Axe radical et centre radical** : *puissance d'un point par rapport à un cercle; l'axe radical de deux cercles est le lieu des points d'égale puissance par rapport à ces deux cercles;* détermination de l'axe radical de deux cercles donnés, suivant leurs positions mutuelles; *l'axe radical de deux cercles est équidistant des polaires par rapport à ces cercles de l'un quelconque de leurs centres de similitude;* cas où l'un des cercles se réduit à son centre; *centre radical de trois cercles considérés deux à deux;* conséquences; p. 231.

II. — **Points anti-homologues de deux cercles** : définition; *deux cercles étant donnés, le produit des distances de l'un quelconque de leurs centres de similitude à deux points anti-homologues est constant; deux couples de points anti-homologues appartiennent à une même circonférence; deux cordes anti-homologues se coupent sur l'axe radical des deux cercles donnés;* p. 236.

CHAPITRE V.

DE L'INVOLUTION.

I. — **Propriétés fondamentales** : définition de l'involution de six points en ligne droite; *détermination des sept équations d'involution;* extension de la propriété involutive à un nombre quelconque de couples de deux points conjugués; p. 238.

II. — **Point central** : propriété du point central; *cette propriété conduit à une seconde définition de l'involution;* conséquences immédiates; p. 242.

III. — **Points doubles** : définition; points doubles réels ou imaginaires, propriétés correspondantes; *les points doubles de l'involution déterminée par les deux couples de points conjugués* (a, a'), (b, b'), *sont aussi en involution avec les deux couples* (a, b'), (a', b); p. 245.

IV. — **Faisceaux en involution** : définition; conséquences; rayons doubles, réels ou imaginaires; *quand les rayons doubles sont réels, ils forment un faisceau harmonique avec deux rayons conjugués quelconques; dans tout faisceau en involution, il existe un couple de rayons conjugués rectangulaires; lorsqu'un faisceau involutif possède plus d'un couple de rayons conjugués rectangulaires, tous les couples de rayons conjugués sont rectangu-*

laires, et ce cas ne peut se présenter que quand les rayons doubles du faisceau sont imaginaires; p. 247.

V. — **Divisions et faisceaux homographiques en involution** : définitions et propriétés fondamentales; p. 250.

VI. — **Applications de l'homographie et de l'involution** : *triangles homologiques; propriétés involutives du quadrilatère;* quadrilatère inscrit (théorème de Desargues); quadrilatère circonscrit; p. 252.

CHAPITRE VI.

DE L'INVERSION.

I. — **Propriétés des figures inverses** : définition; *deux figures inverses d'une même figure par rapport à une même origine, sont homothétiques; rapport des longueurs de deux cordes correspondantes dans deux figures inverses; l'angle de deux lignes quelconques qui se coupent est égal à l'angle des deux lignes inverses;* la figure inverse d'une droite qui ne passe pas par l'origine, est une circonférence passant par l'origine; réciproque; conséquence; la figure inverse d'une circonférence qui ne passe pas par l'origine, est une circonférence; conséquences; p. 257.

II. — **Méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques** : indication de la méthode; exemple; p. 261.

III. — **Applications** : *propriétés du quadrilatère inscriptible; cercle des neuf points,* sa détermination; le cercle des neuf points est tangent aux cercles inscrit et ex-inscrits au triangle correspondant; *inverseurs,* origine du problème; inverseur de Peaucellier; inverseur de Hart : p. 262.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE QUATRIÈME.

LE PLAN.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

I. — **Premières notions sur le plan considéré en lui-même et relativement à la droite** : *deux plans qui contiennent tous deux une même droite et un point extérieur à cette droite coïncident dans toute leur étendue,* conséquences; *un plan et une droite ne peuvent présenter que trois positions relatives;* intersection de deux plans; *deux plans distincts ne peuvent pré-*

senter que deux positions relatives; deux droites distinctes peuvent présenter dans l'espace trois positions relatives, conséquence; modes de génération du plan; p. 271.

II. — **Droite et plan perpendiculaires** : définition; *condition pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan;* lieu des perpendiculaires menées à une droite donnée par un point de cette droite, conséquence; relations entre la perpendiculaire et les obliques menées à un plan par un point extérieur, conséquences; *lieu géométrique des points de l'espace à égale distance des extrémités d'une droite donnée; théorème des trois perpendiculaires;* p. 276.

III. — **Droites et plans parallèles** : droite et plan parallèles, droites parallèles, plans parallèles, propriétés correspondantes; *deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires, et leurs plans sont parallèles; définition de l'angle de deux droites dans l'espace*, conséquences de cette définition; deux droites parallèles ont les mêmes plans perpendiculaires, deux plans perpendiculaires ont les mêmes droites perpendiculaires; réciproque de la définition de la perpendicularité entre une droite et un plan; perpendiculaire menée par un point donné à un plan donné, conséquence; parallèles comprises entre une droite et un plan parallèles, entre deux plans parallèles; *deux droites quelconques sont coupées en parties proportionnelles par trois plans parallèles;* p. 280.

IV. — **Projection d'une droite sur un plan, angle d'une droite et d'un plan, plus courte distance de deux droites** : la projection d'une droite sur un plan est une droite; *la projection d'un angle droit sur un plan parallèle à l'un de ses côtés est un angle droit*, réciproque, conséquence; angle d'une droite et d'un plan; plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan; p. 289.

V. — **Angles dièdres** : définitions, *angle plan d'un angle dièdre*, propriétés et mesure des angles dièdres; *ligne de plus grande pente d'un plan;* p. 293.

VI. — **Plans perpendiculaires** : lorsque deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite menée dans le premier perpendiculairement à l'intersection des deux plans est perpendiculaire à l'autre plan; *si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan conduit suivant cette droite ou parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan donné*, réciproque, conséquence; intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième; p. 299.

CHAPITRE II.

ANGLES POLYÈDRES.

I. — **Propriétés fondamentales des angles polyèdres et, en particulier, des angles trièdres** : définitions, angles polyèdres *symétriques*, application aux angles trièdres; *dans tout angle polyèdre convexe, une face quelconque est moindre que la somme de toutes les autres, et la somme de toutes le faces est moindre que quatre angles droits;* conséquences; p. 302.

II. — **Angles trièdres supplémentaires et cas d'égalité des angles trièdres** : définition et remarque fondamentale; *lorsque deux trièdres sont supplémentaires, chaque angle dièdre de l'un est le supplément de la face qui lui est opposée dans l'autre;* conséquences; *cas d'égalité des angles trièdres;* conditions d'égalité de deux angles polyèdres de même espèce; p. 308.

III. — **Exercices et questions complémentaires :** lieu des points également distants des trois faces d'un angle trièdre; lieu des points également distants des trois arêtes d'un angle trièdre; les plans menés perpendiculairement aux faces d'un angle trièdre par les arêtes opposées à ces faces se croisent suivant une même droite; il en est de même des plans menés par les arêtes d'un angle trièdre et les bissectrices des faces opposées à ces arêtes; p. 316.

LIVRE CINQUIÈME.

LES AIRES ET LES VOLUMES DES CORPS.

CHAPITRE PREMIER.

LES PRISMES ET LES CYLINDRES.

I. — **Définitions préliminaires :** volume d'un corps, polyèdres, polyèdres convexes; prisme, parallélipipède; p. 321.

II. — **Théorèmes généraux relatifs au prisme :** faces opposées d'un parallélipipède, plan diagonal; construire un parallélipipède sur trois droites données; diagonales d'un parallélipipède; égalité des sections faites dans un prisme par des plans parallèles; p. 325.

III. — **Aire et volume du prisme :** aire latérale d'un prisme; *tout prisme oblique est équivalent au prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique et pour hauteur son arête latérale; tout plan diagonal d'un parallélipipède le partage en deux prismes triangulaires équivalents; mesure du volume d'un parallélipipède rectangle;* volume d'un parallélipipède quelconque, volume d'un prisme quelconque; conditions d'égalité de deux prismes quelconques de même espèce; 328.

IV. — **Notions relatives au cylindre :** définitions, *plan tangent,* cylindre de révolution; aire latérale et volume d'un cylindre de révolution, rapport des aires ou des volumes de deux cylindres de révolution semblables; *développement* de l'aire latérale d'un cylindre de révolution; surface cylindrique en général, égalité des sections faites par des plans parallèles; aire latérale et volume d'un cylindre quelconque; p. 337.

CHAPITRE II.

LES PYRAMIDES ET LES CÔNES.

I. — **Théorèmes généraux relatifs à la pyramide :** définitions; *quand on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base, ses arêtes latérales et sa hauteur sont divisées en parties proportionnelles; la section obtenue est un polygone semblable à la base;* conséquences; p. 345.

II. — **Aire et volume de la pyramide :** aire latérale d'une pyramide régulière; *deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de hauteurs*

égales sont équivalentes; volume d'une pyramide; volume d'un polyèdre quelconque; conditions d'égalité de deux pyramides; p. 349.

III. — **Notions relatives au cône** : définitions, *plan tangent*, cône de révolution; aire latérale et volume d'un cône de révolution; cônes de révolution semblables; *développement* de l'aire latérale d'un cône de révolution; surface conique en général, homothétie des sections faites par des plans parallèles; volume d'un cône quelconque; p. 355.

CHAPITRE III.

LES CORPS TRONQUÉS.

I. — **Aires et volumes des corps tronqués** : aire latérale d'un tronc de pyramide régulier; volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles; *troncs de première et de seconde espèce;* volume d'un tronc de prisme triangulaire, volume d'un parallélipipède tronqué quelconque; aire latérale d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles; volume d'un pareil tronc de cône; tronc de cône de première et de seconde espèce; *cubage d'un tronc d'arbre; jaugeage des tonneaux;* p. 363.

II. — **Exercices et questions complémentaires** : volume d'un polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques, situés dans des plans parallèles, et pour faces latérales des trapèzes ou des triangles; *application à la mesure du volume des amas de pierre, de la capacité des fossés ou cuvettes, des tombereaux, etc.;* p. 374.

CHAPITRE IV.

LA SPHÈRE.

I. — **Théorèmes généraux relatifs à la sphère** : définitions, *sections planes de la sphère,* grands cercles et petits cercles; deux grands cercles se divisent mutuellement en deux parties égales; *la sphère est de révolution autour d'un diamètre quelconque, pôles d'un cercle de la sphère,* propriétés correspondantes, emploi du compas sphérique; trouver le rayon d'une sphère solide; plan tangent à la sphère; cône circonscrit; intersection de deux sphères; *quatre points non situés dans un même plan déterminent une surface sphérique;* angle de deux arcs de grand cercle; *lieu géométrique des pôles des grands cercles inclinés d'un angle donné sur un grand cercle donné;* p. 377.

II. — **Des triangles et des polygones sphériques** : définitions, rapprochement avec les angles trièdres et polyèdres, *polygones sphériques symétriques;* propriétés fondamentales des triangles et des polygones sphériques; *triangles polaires ou supplémentaires; extension; cas d'égalité des triangles sphériques; le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère est l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint ces deux points;* condition de perpendicularité d'un grand cercle et d'un petit cercle; relations entre les arcs de grand cercle normaux et obliques, menés d'un point de la sphère sur un cercle donné, conséquences; arc de grand cercle tangent à un petit cercle, conséquences; p. 386.

III. — **Problèmes graphiques relatifs à la sphère** : grand cercle passant par deux points; mener, par un point donné sur la sphère, un arc de grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné; pôle d'un petit cercle; par un point donné sur la sphère, mener un grand cercle faisant un angle donné avec un grand cercle donné; *construction d'un triangle sphérique rectangle; construire un triangle sphérique, connaissant trois quelconques de ses six éléments;* par un point donné sur la sphère, mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné; décrire un grand cercle tangent à deux petits cercles donnés; p. 402.

IV. — **Aire de la sphère** : *aire engendrée par une droite qui tourne autour d'un axe situé dans son plan;* aire engendrée par une ligne brisée régulière; aire d'une zone sphérique, aire de la sphère; *deux triangles sphériques symétriques sont équivalents;* mesure de l'aire d'un fuseau, mesure de l'aire d'un triangle sphérique, mesure de l'aire d'un polygone sphérique; p. 412.

V. — **Volume de la sphère** : *volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par l'un de ses sommets sans traverser sa surface;* volume engendré par un secteur polygonal régulier; volume d'un secteur sphérique, volume de la sphère; comparaison entre la sphère, le cylindre droit et le cône équilatéral circonscrits; *les volumes des polyèdres circonscrits à une même sphère ou à des sphères égales sont proportionnels aux aires de ces mêmes polyèdres;* volume engendré par un segment circulaire; volume d'un segment sphérique; mesure du volume d'un onglet, mesure du volume d'une pyramide sphérique; p. 421.

VI. — **Exercices et questions complémentaires** : théorème de *Lexell;* exemples de problèmes de Géométrie résolus par l'Algèbre; théorème de *Gutdin;* p. 432.

CHAPITRE V.

SIMILITUDE ET SYMÉTRIE DANS L'ESPACE.

I. — **Des polyèdres semblables** : pyramides triangulaires semblables; polyèdres semblables, leur décomposition; points et droites homologues; rapport des volumes de deux tétraèdres qui ont un angle trièdre égal: rapport des volumes de deux tétraèdres ou de deux polyèdres semblables; p. 440.

II. — **Des figures homothétiques** : polyèdres homothétiques, systèmes homothétiques, axes d'homothétie, plan d'homothétie; application à des systèmes de sphères; *figures semblables à une figure donnée;* p. 448.

III. — **Des figures symétriques** : définitions; théorèmes de *Bravais;* deux figures symétriques par rapport à un centre constituent, par rapport à ce centre, deux figures homothétiques inverses dont le rapport d'homothétie est égal à — 1; conséquences; *deux polyèdres symétriques sont équivalents;* p. 453.

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES POLYÈDRES.

I. — **Des polyèdres convexes quelconques** : théorème d'*Euler*, conséquences; il ne peut exister que cinq espèces de polyèdres convexes dont toutes les faces aient le même nombre de côtés, et dont tous les angles po-

lyèdres aient le même nombre d'arêtes; conditions de détermination d'un polyèdre convexe; p. 459.

II. — **Des polyèdres réguliers convexes** : *il ne peut exister que cinq polyèdres réguliers convexes;* construire un polyèdre régulier, connaissant son arête; tout polyèdre régulier convexe est inscriptible et circonscriptible à la sphère, conséquences; un polyèdre régulier convexe étant donné, trouver l'inclinaison de deux faces adjacentes et les rayons des sphères inscrite et circonscrite; p. 465.

LIVRE SIXIÈME.

ETUDE GÉOMÉTRIQUE DE QUELQUES COURBES USUELLES.

I. — **Propriétés fondamentales de l'ellipse** : définitions; point extérieur ou intérieur; *la tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs des points de contact, extérieurement à leur angle;* normale; lieu des points symétriques des foyers par rapport aux tangentes, *cercles directeurs* de l'ellipse; lieu des projections des foyers sur les tangentes, *cercle principal;* mener une tangente à l'ellipse par un point donné ou parallèlement à une droite donnée; propriétés des tangentes menées par un point donné; étant donnés les foyers et le grand axe d'une ellipse, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée; p. 477.

II. — **De l'ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle** : *la projection d'une circonférence de cercle sur un plan est une ellipse;* conséquences, autres solutions des problèmes relatifs aux tangentes; diamètres de l'ellipse; *aire de l'ellipse; ellipse décrite par un point quelconque d'une droite de longueur constante glissant entre deux axes rectangulaires,* conséquences; étant donnés deux diamètres conjugués de l'ellipse en grandeur et en direction, construire les axes de la courbe; *ellipse décrite par un point invariablement lié à une droite de longueur constante qui glisse entre deux axes quelconques,* conséquences; p. 492.

III. — **Propriétés fondamentales de l'hyperbole** : définitions; point extérieur ou intérieur; *la tangente à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact;* normale; cercles directeurs, cercle principal; *asymptotes;* hyperbole équilatère; hyperboles conjuguées; mener une tangente à l'hyperbole par un point donné ou parallèlement à une droite donnée, leurs propriétés; étant donnés les foyers et l'axe tranverse d'une hyperbole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée; p. 502.

IV. — **Propriétés fondamentales de la parabole** : définitions; point extérieur ou intérieur; *la tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point;* la droite qui joint le foyer d'une parabole au point où une tangente quelconque rencontre la directrice est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact; conséquence; normale; *la*

directrice est le lieu des points symétriques du foyer par rapport aux tangentes; la tangente au sommet est le lieu des projections du foyer sur les tangentes; dans la parabole, la sous-tangente sur l'axe est double de l'abscisse du point de contact, et la sous-normale est égale au paramètre; équation de la parabole; mener une tangente à la parabole par un point donné ou parallèlement à une droite donnée; propriétés des tangentes menées par un point donné; connaissant le foyer et la directrice d'une parabole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée; p. 514.

V. — **De la parabole considérée comme limite de l'ellipse :** la limite d'une ellipse dont un sommet et le foyer voisin restent fixes, tandis que l'autre foyer s'en éloigne indéfiniment dans la direction du grand axe, est une parabole qui a pour sommet et pour foyer le sommet et le foyer fixes; conséquences; diamètres de la parabole; parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à son extrémité; *aire d'un segment parabolique;* p. 526.

VI. — **Ellipse, hyperbole et parabole, considérées comme sections planes du cône de révolution :** la section d'un cône circulaire droit par un plan est une ellipse, une hyperbole ou une parabole (théorème de *Dandelin*); détermination des directrices (théorème de *Quetelet*); sections coniques; placer une ellipse, une hyperbole ou une parabole sur un cône de révolution donné; sections planes d'un cylindre de révolution; p. 529.

VII. — **Section anti-parallèle du cône oblique à base circulaire :** *Dans un cône oblique à base circulaire, toute section anti-parallèle à la base est un cercle,* réciproque; deux sections d'un cône circulaire oblique, l'une parallèle, l'autre anti-parallèle à la base, sont toujours situées sur une même sphère; lieu des centres des sections anti-parallèles; p. 536.

VIII. — **Propriétés fondamentales de l'hélice :** définitions; équation de l'hélice; son développement suivant une ligne droite; *la sous-tangente en un point de l'hélice est égale à l'abscisse curviligne de ce point,* conséquences; p. 539.

IX. — **Exercices et questions complémentaires :** construire une ellipse ou une hyperbole dont on connaît l'excentricité, l'un des foyers et deux points ou deux tangentes, ou une tangente et son point de contact; construire une parabole, connaissant son foyer et deux tangentes; construire la projection d'une hélice et de la tangente en un de ses points, sur un plan perpendiculaire à la base du cylindre sur lequel l'hélice est tracée; p. 544

TRIGONOMÉTRIE
RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE.

LIVRE PREMIER.
INTRODUCTION DES ANGLES DANS LE CALCUL.

CHAPITRE PREMIER.
ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES.

Notions préliminaires : but de la Trigonométrie, mesure des angles, arcs positifs et négatifs, propriétés des arcs complémentaires et supplémentaires; p. 551.

Définitions des rapports trigonométriques : *définitions générales*, justification des dénominations employées, *cercle trigonométrique*; p. 555.

Variations du sinus : étude des variations du sinus, *théorèmes correspondants* sinus de certains arcs; courbe représentative, *sinusoïde*; p. 559.

Variations du cosinus : étude des variations du cosinus, *théorèmes correspondants*, courbe représentative, *cosinusoïde*; p. 563.

Variations de la tangente : étude des variations de la tangente, *théorèmes correspondants*, tangentes de certains arcs; courbe représentative, *tangentoïde*; p. 566.

Étude des variations de la cosécante, de la sécante et de la cotangente : Signes des rapports trigonométriques dans les quatre quadrants; *cosécantoïde*, *sécantoïde* et *cotangentoïde*; p. 570.

Rapports trigonométriques d'un arc, lorsqu'il s'accroît de 90°; p. 574.

Réduction d'un arc au premier quadrant; p. 574.

Relations entre les rapports trigonométriques d'un même arc : *il n'y a que cinq relations fondamentales et distinctes*; autres formules; expressions des cinq autres rapports trigonométriques en fonction de la tangente, discussion; p. 575.

Conditions pour que deux arcs admettent un même rapport trigonométrique donné : conditions pour que deux arcs aient même sinus et même cosécante; conditions pour que deux arcs aient même cosinus et même sécante; conditions pour que deux arcs aient même tangente et même cotangente; *définition des fonctions circulaires inverses*; p. 579.

CHAPITRE II.

FORMULES TRIGONOMETRIQUES RELATIVES AUX QUATRE PREMIÈRES OPERATIONS APPLIQUÉES AUX ARCS.

Théorie des projections : projection d'une droite sur un axe, règle pour tenir compte du sens dans lequel elle est parcourue, somme des carrés des cosinus des angles formés par une droite avec trois axes rectangulaires; *théorème fondamental* : étant donné un contour polygonal quelconque, la somme algébrique des projections des côtés qui le composent sur un axe quelconque est égale à la projection sur le même axe de la droite qui ferme ce contour; conséquences; *projection d'une aire plane sur un plan*, remarques à ce sujet; p. 582.

Addition et soustraction des arcs : formules fondamentales $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\operatorname{tang}(a \pm b)$, $\cot(a \pm b)$; formules se rapportant à la somme d'un nombre quelconque d'arcs; p. 588.

Multiplication des arcs formules $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tang} 2a$; $\sin 3a$, $\cos 3a$, $\operatorname{tang} 3a$; extension à un multiple quelconque ma; p. 593.

Division des arcs : étant donné $\cos a$, trouver $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$; discussion. — Étant donné $\sin a$, trouver $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$; discussion. — Étant donnée $\operatorname{tang} a$, trouver $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$; discussion. — Étant donné $\cos a$, trouver $\cos\frac{a}{3}$; discussion. — Étant donné $\sin a$, trouver $\sin\frac{a}{3}$; discussion. — Étant donnée $\operatorname{tang} a$, trouver $\operatorname{tang}\frac{a}{3}$; discussion. — Remarque générale; p. 597.

CHAPITRE III.

FORMULES RENDUES CALCULABLES PAR LOGARITHMES ET APPLICATIONS DIVERSES.

Formules rendues calculables par logarithmes : *transformer en un produit la somme ou la différence de deux rapports trigonométriques;* relations importantes qu'on déduit par voie de division des formules obtenues; transformer en un produit la différence des carrés de deux sinus ou de deux cosinus; *expression binôme rendue calculable par logarithmes*, extension à un polynôme; p. 612.

Résolution trigonométrique de l'équation du second degré, p. 616.

Sommation des sinus ou des cosinus d'une série d'arcs en progression arithmétique : conséquences des formules obtenues; p. 618.

Formules relatives aux rapports trigonométriques de trois arcs dont la somme est égale à 180°; p. 621.

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION ET USAGE DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

Notions et théorèmes préliminaires : but et limites des Tables trigonométriques; relation de grandeur, dans le premier quadrant, entre un arc, son sinus et sa tangente; *limite du rapport d'un arc à son sinus ou à sa tangente, quand cet arc va en diminuant jusqu'à zéro;* dans le premier quadrant, la différence entre un arc et son sinus est moindre que le quart du cube de l'arc, et le cosinus d'un arc est compris entre l'excès de l'unité sur la moitié du carré de l'arc et cet excès augmenté du seizième de la quatrième puissance de l'arc; p. 625.

Calcul du sinus et du cosinus de l'arc de 10″; p. 630.

Formules de Th. Simpson, p. 632.

Points de repère, p. 634.

Disposition des Tables trigonométriques, p. 639.

Usage des Tables trigonométriques, lorsque l'arc donné ou cherché est compris entre 3° et 87° : un angle ou un arc quelconque étant donné dans les limites indiquées, trouver les logarithmes de ses rapports trigonométriques, application de la règle des parties proportionnelles, règle générale à suivre; étant donné le logarithme d'un rapport trigonométrique, trouver l'angle ou l'arc plus petit que 90° auquel il appartient : règle générale à suivre; *recherche de l'approximation obtenue dans l'un et l'autre cas;* un arc est toujours mieux déterminé par sa tangente; p. 643.

Calculs relatifs aux petits arcs : solution des questions précédentes, lorsqu'il s'agit d'un arc compris entre 0° et 3°; p. 651.

Applications diverses : résoudre l'équation $a\sin x + b\cos x = c$; condition pour que le produit des sinus de deux arcs dont la somme est constante, soit maximum ou minimum; *chercher quel doit être le rayon d'un cercle pour que la différence entre un arc de ce cercle de longueur déterminée à sa corde soit inférieure à une limite donnée*; p. 657.

LIVRE DEUXIÈME.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES FONDAMENTALES RELATIVES A LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTILIGNES.

Formules relatives aux triangles rectangles, p. 663.

Formules relatives aux triangles quelconques : *trois groupes de formules*

un des trois groupes étant pris pour point de départ, les deux autres s'ensuivent nécessairement; *parmi les dix relations obtenues, il n'y en a que trois qui soient distinctes;* aire du triangle; p. 665.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES.

Premier cas, p. 674; **deuxième cas**, p. 675; **troisième cas**, p. 676; **quatrième cas**, p. 677.

Formules de vérification, p. 678.

Applications numériques, p. 679.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES.

Premier cas, p. 680.

Deuxième cas : formules à employer; *procédés différents à adopter, suivant que les éléments donnés le sont directement ou par leurs logarithmes;* remarque relative au calcul direct du troisième côté, angle auxiliaire; p. 681.

Troisième cas : formules à employer, aire du triangle, rayon du cercle circonscrit, rayons des cercles inscrit et ex-inscrits; *seconde méthode de résolution fondée sur la considération du rayon du cercle inscrit;* p. 686.

Quatrième cas : formules à employer, *discussion de ce cas douteux*, conditions d'une double solution; remarque relative au calcul direct du troisième côté, angle auxiliaire; p. 693.

Formules de vérification, p. 697.

Applications numériques, p. 698.

CHAPITRE IV.

EXERCICES ET APPLICATIONS.

Aire d'un quadrilatère quelconque en fonction de ses diagonales et de leur angle; expressions des aires des polygones réguliers de n et de $2n$ côtes, inscrits et circonscrits à un cercle donné, rapports de ces aires; expression de l'aire d'un segment circulaire; *propriétés du quadrilatère inscriptible;* p. 700.

CHAPITRE V.

PROBLÈMES DE TRIGONOMÉTRIE PRATIQUE.

Mesure des hauteurs : déterminer la hauteur d'un édifice, dont le pied est accessible *ou* inaccessible; déterminer la hauteur d'une montagne; p. 707.

Mesure des distances inaccessibles : distance d'un point donné à un point inaccessible; *distance de deux points inaccessibles;* axe et rayon d'une tour circulaire dont le pied est inaccessible; prolonger un alignement au delà d'un obstacle qui arrête la vue; p. 711.

Problème de la carte, p. 715.

LIVRE TROISIÈME.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES FONDAMENTALES RELATIVES A LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

Remarques préliminaires, p. 719.

Formules renfermant les trois côtés et un angle, p. 720.

Formules renfermant les trois angles et un côté, p. 723.

Formules renfermant deux côtés et les deux angles opposés, p. 724.

Formules renfermant deux côtés, l'angle qu'ils comprennent et l'angle opposé à l'un d'eux, p. 725.

Formules spéciales pour la résolution des triangles sphériques rectangles : *règle mnémonique pour les retrouver, conséquences qu'elles entraînent;* triangles sphériques rectilatères; p. 726.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES RECTANGLES.

Remarques préliminaires, p. 730.

Premier cas, p. 730; **deuxième cas**, p. 733; **troisième cas**, p. 734; **quatrième cas**, p. 734; **cinquième cas**, p. 738; **sixième cas**, p. 738.

Triangle sphérique rectangle d'épreuve, p. 739.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES QUELCONQUES.

Remarques préliminaires, p. 741.

Premier et deuxième cas : formules à employer, introduction de l'angle $2\Delta = A + B + C - 180^\circ$, discussion; p. 742.

Troisième et quatrième cas : *formules de Delambre et de Neper; introduction d'angles auxiliaires*, interprétation correspondante; p. 745.

Cinquième et sixième cas : formules à employer, *discussion de ces cas douteux*, conditions d'une double solution; *autre méthode de résolution*, introduction d'angles auxiliaires, interprétation correspondante; p. 749.

Triangle sphérique quelconque d'épreuve, p. 755.

Formules relatives à l'aire d'un triangle sphérique : cas où l'on donne deux côtés et l'angle compris; cas où l'on donne les trois côtés, *formule de Lhuilier;* expression de l'aire d'un triangle sphérique en mètres carrés, expression de la longueur d'un côté d'un angle sphérique en mètres; *transformation de ces expressions au point de vue des applications géodésiques; relation entre l'angle* 2Δ *et l'excès sphérique d'un triangle sphérique;* p. 756.

CHAPITRE IV.

EXERCICES ET APPLICATIONS.

Rayons sphériques du cercle circonscrit et des cercles inscrit et ex-inscrits à un triangle sphérique, théorème de Lexell, p. 761.

Volume d'un parallélépipède oblique en fonction de ses arêtes et des angles qu'elles font entre elles, p. 766.

Réduction d'un angle à l'horizon, p. 767.

Plus courte distance de deux points sur la sphère terrestre : trouver la distance sphérique de deux points de la surface terrestre, connaissant leurs longitudes et leurs latitudes; p. 768.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LA GÉOMÉTRIE

EXERCICES concernant :

Le premier Livre (1 à 186), p. 775. — Le deuxième Livre (187 à 230), p. 793. — Le troisième Livre (231 à 260), p. 798. — Le quatrième Livre (261 à 294), p. 802. — Le cinquième Livre (295 à 380), p. 806. — Le sixième Livre (381 à 432), p. 814.

QUESTIONS PROPOSÉES
SUR LA TRIGONOMÉTRIE.

Exercices concernant :

Le premier Livre (1 à 62), p. 819. — Le deuxième Livre (63 à 134), p. 826. — Le troisième Livre (135 à 174), p. 833.

NOTES.

Note I. — Problème de la sphère tangente à quatre plans, p. 841.

Note II. — Des Tables trigonométriques centésimales, p. 846.

Note III. — Résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré, p. 848.

Note IV. — Emploi de la règle à calcul en Géométrie et en Trigonométrie, p. 851.

TABLES NUMÉRIQUES.

Table I. — Réduction des angles ou des arcs en parties du rayon pris pour unité, p. 857.

Table II. — Lignes trigonométriques naturelles des angles ou des arcs variant de *minute en minute* depuis 0° jusqu'à 90°, p. 858.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU DEUXIÈME VOLUME.

GÉOMÉTRIE.

COURS
DE MATHÉMATIQUES.

GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

INTRODUCTION.

1. En commençant la Géométrie, on quitte le domaine de l'abstraction et l'on doit s'appuyer sur des notions dont l'origine est absolument expérimentale. C'est en oubliant cette nécessité qu'on a été quelquefois conduit à compliquer le détail des démonstrations au delà de toute utilité réelle. La rigueur du raisonnement est essentielle, mais seulement dans les limites qui sont imposées à l'esprit humain par la nature même des choses. Nous croyons donc qu'il importe de savoir accepter franchement, au début d'une Science, les vérités primordiales ou les idées intuitives qui lui servent de fondement, et qu'il ne faut pas s'efforcer d'en diminuer le nombre à l'aide de déductions péniblement échafaudées. C'est ce point de vue qui nous guidera dans l'étude des premiers principes géométriques.

2. Le milieu dans lequel nous sommes plongés et où la Terre se meut avec les autres corps célestes a reçu le nom d'*Espace*.

En examinant les corps matériels qui nous environnent,

nous nous familiarisons avec les idées de situation, de forme, d'étendue.

On appelle *volume* d'un corps l'étendue du lieu qu'il occupe dans l'espace *supposé* indéfini.

La Géométrie fait abstraction de toutes les autres *propriétés* des corps : elle ne considère que leur *étendue*. Ils n'ont plus ni *impénétrabilité*, ni *porosité*, ni *élasticité*, ni *pesanteur*, etc. Admettons que l'on puisse plonger les corps dans une atmosphère assez dense pour en conserver l'empreinte : la Géométrie ne raisonne que sur cette empreinte, à laquelle elle suppose une continuité et une régularité que le corps correspondant est, en général, bien loin de présenter. C'est ainsi qu'une perfection idéale est toujours imposée d'abord, comme moyen de simplification, aux sujets de nos investigations.

3. Pour fixer les idées, considérons un *parallélipipède rectangle* (un livre quelconque a une pareille forme). Si sa *hauteur* devient très petite, de manière à pouvoir être négligée à côté des deux autres *dimensions*, on passe, lorsque la hauteur est devenue aussi petite qu'on peut le supposer, de l'idée de volume à l'idée de *surface*.

On voit que les volumes des corps sont séparés de l'espace environnant par des *surfaces*.

De même, si l'on considère un *rectangle*, et si l'on suppose que sa *base* devienne très petite, de manière à pouvoir être négligée à côté de sa *hauteur*, on passe, lorsque la base est devenue aussi petite qu'on peut le supposer, de l'idée de surface à l'idée de *ligne*.

On voit que les surfaces sont limitées par les *lignes*, comme les volumes le sont par les surfaces.

Enfin, étant donnée une ligne quelconque, si sa *longueur* diminue de manière à devenir plus petite que tout ce qu'on voudra, on passe de l'idée de ligne à l'idée de *point*. Un point indique seulement une position dans l'espace.

La *génération* des éléments géométriques a lieu en sens inverse. Le point, dans son mouvement, trace ou engendre une ligne ; la ligne, dans son mouvement, engendre une surface ; la surface, dans son mouvement, engendre un volume.

Deux lignes se *coupent* suivant un point, deux surfaces suivant une ligne ; deux volumes se *coupent* ou se *pénètrent* suivant une surface.

4. La plus simple de toutes les lignes est la *ligne droite*, dont tout le monde a le sentiment. *Elle est décrite par un point qui, dans son mouvement, tend constamment vers un seul et même point* ou *conserve la même direction.*

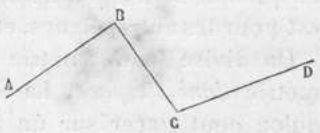
Il en résulte immédiatement que *deux points suffisent pour déterminer une droite;* dès lors, *deux droites* AB et CD (*fig.* 1) *qui ont deux points communs coïncident dans toute leur étendue*, c'est-à-dire quelque loin qu'on les suppose prolongées vers la droite ou vers la gauche.

Fig. 1.



Une ligne brisée est décrite par un point qui, dans son mouvement, change de temps en temps de direction. Ce point décrit alors (*fig.* 2) des portions de lignes droites AB, BC, CD, dont les directions varient et qui ont pour points communs successifs les points B, C, où le changement de direction s'opère.

Fig. 2.



Une ligne courbe est décrite par un point qui, dans son mouvement, change à chaque instant de direction. On peut la regarder alors comme une ligne brisée composée d'une infinité d'éléments rectilignes infiniment petits (*fig.* 3). Et cette définition est importante en ce qu'elle permet d'étendre immédiatement, avec Leibnitz, toutes les propriétés des lignes brisées aux lignes courbes, lorsque ces propriétés ne dépendent ni de la grandeur ni du nombre des côtés de la ligne brisée.

Fig. 3.



5. Euclide, dans ses *Éléments* (285 avant J.-C.), définit la ligne droite de la manière suivante :

La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.

Cette définition a donné lieu à des interprétations diverses. Nous pensons qu'elle s'accorde avec la définition que nous venons d'adopter (4). *Être placée également entre ses points*, n'est-ce pas, pour une ligne, ne dévier d'aucun côté par rap-

port à ses différentes parties? n'est-ce pas, par conséquent, conserver dans son cours une direction invariable?

Quoi qu'il en soit, une pratique constante associe indissolublement dans notre esprit l'idée de *droite* ou d'alignement et l'idée d'une *direction unique*.

6. On entend par *surface plane* ou *plan* une *surface telle, que, dès qu'une ligne droite y a deux points, elle y est contenue tout entière*. Nous prouverons plus loin que deux plans *coïncident* dès qu'ils ont trois points communs non en ligne droite.

La définition précédente signifie que deux points *quelconques* de la surface déterminent une *direction* qu'on peut suivre indéfiniment sans sortir de la surface. Le *plan* est donc, en quelque sorte, pour les autres surfaces, ce que la ligne droite est pour les autres lignes, et tout le monde en a le sentiment.

On divise la Géométrie en Géométrie *plane* et en Géométrie *dans l'espace*. La Géométrie plane traite des figures qu'on peut tracer sur un plan; la Géométrie dans l'espace traite des figures dont les éléments sont disposés d'une manière quelconque.

7. Deux figures qui peuvent se superposer ou pénétrer exactement l'une dans l'autre, c'est-à-dire deux figures qui peuvent *coïncider*, sont dites *égales*.

Deux longueurs qui renferment le même nombre d'unités de longueur, deux surfaces qui renferment le même nombre d'unités superficielles, deux volumes qui renferment le même nombre d'unités de volume, *sans que leur coïncidence soit possible*, sont dits *équivalents*.

8. *Le but de la Géométrie est la mesure de l'étendue*. Mais il est utile de préciser et d'étendre cette définition.

On ne peut mesurer *directement* que les lignes droites, en portant sur celles que l'on considère l'unité de longueur et ses subdivisions. Et encore cette mesure directe n'est pas possible dans un très grand nombre de cas (*distance d'un point à un point inaccessible, distance de deux points inaccessibles*, etc.). On ne peut pas mesurer directement les lignes courbes. Il en est de même pour les surfaces et les volumes : on ramène leur évaluation à celle de certaines lignes droites qui ont une liaison déterminée avec la surface ou le volume considéré.

Si l'on veut donner une idée juste de la Géométrie, il faut donc dire que *la Géométrie a pour but de mesurer l'étendue, en ramenant toutes les mesures quelconques à la mesure directe de certaines lignes droites choisies convenablement dans chaque cas.* Toutes les propriétés démontrées successivement dans un Traité de Géométrie concourent au but que nous indiquons.

Mais cette définition, suffisante lorsqu'on se borne à écrire un Traité élémentaire, est beaucoup trop restreinte si l'on veut envisager la science dans son véritable ensemble.

« *La Géométrie*, comme le dit très bien M. Duhamel, *comprend tous les rapports résultant de la nature de l'étendue.* La mesure des grandeurs comprend quelques-uns de ces rapports, mais il en est une infinité d'autres qui n'y ont pas trait directement (1). »

9. Toute proposition consiste dans une *hypothèse* et une *conclusion* qui en découle. La démonstration de la proposition est la suite des raisonnements qu'il faut faire pour passer de l'hypothèse à la conclusion, en s'appuyant sur des vérités évidentes ou déjà démontrées.

Une proposition étant donnée, si l'on adopte à la fois une hypothèse contraire et une conclusion contraire, on énonce la proposition *contraire*. On énonce la proposition *réciproque* en prenant la conclusion de la proposition *directe* pour hypothèse et son hypothèse pour conclusion.

La proposition contraire et la proposition réciproque sont souvent fausses, parce que la conclusion de la proposition directe peut répondre à un plus grand nombre de cas que l'hypothèse.

---

(1) Ils pourront s'y adapter plus tard, ils pourront aussi servir dans les *Applications* de la Géométrie à d'autres Sciences. « Il ne faut donc, ajoute M. Duhamel, négliger aucune vérité intéressante par elle-même, indépendamment de toute utilité pratique. Outre le plaisir que l'on éprouve toujours à apprendre quelque chose de nouveau, il y a l'avantage incontestable d'accroître ses facultés intellectuelles par l'usage bien dirigé qu'on en fait; et si l'on pouvait suivre l'action de toutes les influences sur le développement de l'esprit, on reconnaîtrait souvent la part que les méditations de la Science abstraite pourraient revendiquer dans le talent du penseur, de l'orateur ou de l'écrivain. » (J.-M.-C. Duhamel, *Des Méthodes dans les Sciences de Raisonnement*, 2e Partie, p. 308.)

10. Le mot *axiome* signifie une *proposition évidente* par elle-même. Un *théorème* est une proposition qui doit être *démontrée*. Le mot *problème* s'explique de lui-même. Un *lemme* est une proposition préliminaire facilitant la démonstration d'un théorème. Un *corollaire* est une conséquence immédiate d'un théorème. Le *scolie* est une remarque sur un ou plusieurs théorèmes.

LIVRE PREMIER.

LES LIGNES.

CHAPITRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

I. — Mesure et rapport des lignes droites.

11. Nous savons par l'Arithmétique ce qu'on doit entendre par le mot *unité* et ce que c'est que *mesurer* une grandeur.

Mesurer la grandeur d'une ligne droite, c'est la comparer à une autre droite prise pour unité.

Si la droite qu'on veut mesurer surpasse le mètre, on porte le mètre sur sa direction autant de fois que possible; supposons qu'il y soit contenu 5 fois, plus un reste inférieur au mètre. On cherche combien ce reste contient de décimètres; supposons qu'il en contienne 5, plus un reste inférieur au décimètre. On mesure ce nouveau reste à l'aide du centimètre, et, s'il en contient exactement 9, on dit que la droite considérée a une longueur de $5^{m},59$.

Si la droite donnée est plus petite que le mètre, on emploie immédiatement comme unité le décimètre ou le centimètre, etc.

Pour comparer deux grandeurs, il faut former le *rapport* des nombres qui les représentent : il faut donc chercher d'abord si ces grandeurs contiennent exactement une même unité, si elles ont une commune mesure.

Deux lignes droites étant données, on trouve *leur plus grande commune mesure* en opérant sur ces droites absolument comme on opère sur deux nombres pour trouver leur plus grand commun diviseur. On porte donc la plus petite droite sur la plus grande autant de fois que possible, le reste

obtenu sur la plus petite droite, le second reste sur le premier, etc. L'opération est terminée lorsqu'on arrive à un reste contenu exactement dans le reste précédent. Ce dernier reste est la plus grande commune mesure cherchée.

Désignons, par exemple, par A et B les deux droites données, par R, R′, R″, les restes successivement trouvés. Supposons que les résultats des opérations soient représentés par les égalités suivantes :

$$A = 3B + R, \quad B = 5R + R', \quad R = 2R' + R'', \quad R' = 7R''.$$

On en déduit facilement

$$R = 15R'', \quad B = 82R'', \quad A = 261R''.$$

On en conclut donc, pour le rapport de A à B,

$$\frac{A}{B} = \frac{261R''}{82R''} = \frac{261}{82}.$$

On peut remarquer que l'expression fractionnaire obtenue doit être irréductible. Si 261 et 82 admettaient, par exemple, le facteur commun 5, A et B seraient divisibles par $5R''$; R″ ne serait donc plus leur plus grande commune mesure.

Il peut se faire que les deux droites considérées n'aient pas de commune mesure, qu'elles soient *incommensurables*. En cherchant leur plus grande commune mesure, on n'arrive alors jamais à un reste nul, du moins théoriquement; car les restes successifs, formant une suite décroissante, finissent bientôt, en vertu de leur petitesse, par échapper à tous nos moyens d'appréciation.

On peut néanmoins trouver le rapport incommensurable de deux droites données, avec telle approximation qu'on veut. Supposons que les droites A et B n'aient pas de commune mesure et qu'on demande l'expression de leur rapport à 0,001 près. On divisera B en 1000 parties égales : nous désignerons l'une de ces parties par a. On portera a sur A autant de fois que possible : supposons que A tombe entre $7815a$ et $7816a$. Le rapport $\frac{A}{B}$ tombera évidemment entre $\frac{7815a}{1000a}$ et $\frac{7816a}{1000a}$, c'est-à-dire entre 7,815 et 7,816 : le premier nombre représentera le rapport cherché à 0,001 près par défaut, le second à 0,001 près par excès.

12. Quand on prend un point sur une droite, on peut con-

sidérer sur la droite deux côtés différents par rapport à ce point : c'est ce qu'on entend par les *sens* ou les *directions opposées* de la droite en ce point. Par exemple, un observateur placé au point A de la droite CB (*fig.* 1) peut distinguer le sens ou la direction de *droite* AB, le sens ou la direction de *gauche* AC.

Il est commode d'appeler *segment* (de droite) une portion de droite limitée par deux points déterminés. Si ces deux points sont A et B (*fig.* 1), on doit regarder les deux segments AB et BA comme étant égaux en valeur absolue, mais de sens ou de signes contraires.

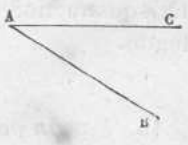
Pour ajouter effectivement plusieurs portions de droites, on les porte à la suite les unes des autres, sur une droite indéfinie, de manière qu'elles se succèdent bout à bout *dans le même sens*. Leur *somme* est représentée par la longueur comprise entre le point de départ du premier segment et le point d'arrivée du dernier.

Pour retrancher effectivement deux portions de droites l'une de l'autre, on les porte bout à bout sur une droite indéfinie, mais en leur donnant des sens contraires. Si ces deux portions de droites sont représentées, par exemple, par AD et BD en valeur absolue (*fig.* 1), on porte AD sur la droite indéfinie, à partir du point A et *à droite* de ce point; puis on compte BD à partir du point D, mais *à gauche* de ce point. Le segment AB représente alors la différence AD — BD.

II. — Des angles.

13. Lorsque deux droites AB et AC partent d'un même point A en suivant des directions différentes, elles forment un *angle* (*fig.* 4). Le point A est le *sommet* de l'angle; les droites AB et AC, prolongées aussi loin qu'on voudra, en sont les *côtés*.

Fig. 4.



Pour avoir une idée exacte de la *grandeur* d'un angle, il faut supposer que le côté AB, par exemple, était d'abord couché sur le côté AC, puis qu'il s'en est éloigné en tournant autour du sommet A, pour venir prendre la position qu'il occupe. L'amplitude de ce mouvement de rotation correspond à la grandeur de l'angle.

On désigne un angle par la lettre placée à son sommet : on

dit l'angle A. Lorsque plusieurs angles ont même sommet, on les distingue en lisant en outre deux lettres placées sur leurs côtés ; on a soin d'énoncer au milieu la lettre du sommet : on dit l'angle BAC.

14. Deux angles sont *adjacents* lorsque, ayant un sommet commun et un côté commun, les côtés non communs sont situés de part et d'autre du côté commun. Les angles BAC, CAD (*fig.* 5), sont adjacents.

Lorsque deux droites se coupent, elles forment deux angles adjacents : lorsque ces angles adjacents sont égaux, la première droite est dite *perpendiculaire* sur la seconde; elle est dite

Fig. 5.

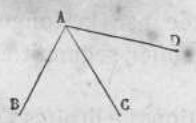


Fig. 6.

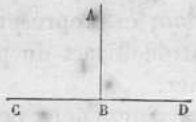
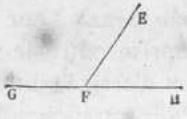


Fig. 7.



oblique dans le cas contraire. La droite AB (*fig.* 6) est perpendiculaire sur la droite CD, parce que les angles adjacents CBA, DBA, sont égaux. La droite EF (*fig.* 7) est oblique sur la droite GH, parce que les angles adjacents GFE, HFE, sont inégaux. Le point B est le *pied* de la perpendiculaire, le point F est le pied de l'oblique.

Les angles adjacents égaux CBA, DBA, sont appelés *droits*. Un angle droit est un angle dont l'un des côtés est perpendiculaire sur l'autre.

Pour ajouter deux angles, on transporte le second à la suite du premier, de manière à former deux angles adjacents : l'angle des côtés non communs est la *somme* des angles proposés. La soustraction de deux angles s'opère d'une manière analogue.

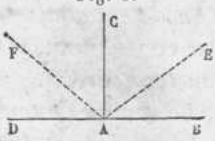
THÉORÈME.

15. *Par un point pris sur une droite, on peut toujours lui élever une perpendiculaire, mais une seule* (*fig.* 8).

Par le point A de la droite DB, menons une droite quelconque AE. Si les angles BAE, DAE, sont égaux, AE sera perpendiculaire sur DB. S'il n'en est pas ainsi, supposons que BAE soit le plus petit des deux angles. Faisons alors tourner la ligne AE autour du point A jusqu'à ce qu'elle vienne coïn-

cider avec AD. Dans ce mouvement, l'angle BAE croît d'une manière continue, tandis que l'angle DAE décroît d'une manière continue jusqu'à devenir nul. L'angle BAE, d'abord plus petit que l'angle DAE, doit donc devenir plus grand, comme l'indique la seconde position AF de AE, marquée sur la figure. Il y a donc nécessairement un instant, et cet instant est unique, où les deux angles sont égaux. Avant cet instant, ils n'étaient pas encore égaux; après, ils ne le sont plus. Si l'on suppose que AE occupe la position AC lorsque les deux angles adjacents sont égaux, on voit que AC est la seule perpendiculaire qu'on puisse élever au point A sur DB.

Fig. 8.



COROLLAIRES.

16. *Tous les angles droits sont égaux*, sans quoi l'on pourrait mener deux perpendiculaires en un même point d'une même droite. L'angle droit est donc un type invariable auquel on peut comparer ou rapporter les autres angles.

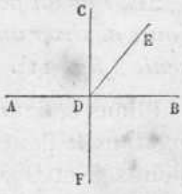
Un angle *aigu* est un angle plus petit qu'un angle droit, un angle *obtus* est un angle plus grand qu'un angle droit : l'angle DAF est aigu, l'angle BAF est obtus.

17. Lorsque la somme de deux angles est égale à un angle droit, ces angles sont appelés *complémentaires ;* lorsque la somme de deux angles est égale à deux angles droits, ces angles sont appelés *supplémentaires.*

Les angles adjacents formés par deux droites qui se coupent sont supplémentaires (*fig.* 9).

Soient les angles BDE, EDA. Élevons au point D la perpendiculaire DC sur AB. L'angle aigu BDE est inférieur à un angle droit de l'angle CDE; l'angle obtus ADE est supérieur à un angle droit du même angle CDE. La somme des angles BDE, ADE, est donc égale à deux angles droits.

Fig. 9.



Il résulte de cette démonstration que *la somme de tous les angles qu'on peut former autour d'un même point* D *et au-dessus d'une même droite* AB *est toujours égale à deux angles droits.*

18. Lorsque deux droites qui se coupent sont prolongées toutes deux au delà du point d'intersection, elles forment quatre angles : c'est ce que montre la figure lorsque l'on considère les droites AB et CF. Ce qui précède prouve alors que, *l'un de ces quatre angles étant droit, les trois autres le sont.* Par conséquent, *si* CD *est perpendiculaire sur* AB, AB *l'est à son tour sur* CD.

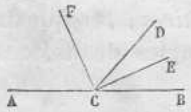
La somme de tous les angles qu'on peut former autour d'un même point est égale à quatre angles droits. On n'a, pour s'en assurer, qu'à mener par le point donné deux droites perpendiculaires entre elles et indéfiniment prolongées.

19. *Lorsque deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs, c'est-à-dire leurs côtés non communs, sont en ligne droite.* Cette réciproque de la proposition du n° 17 est évidente. Si les deux angles ADE, EDB (*fig.* 9), sont supplémentaires, les côtés AD et DB sont en ligne droite ; car le prolongement de AD détermine précisément le supplément de l'angle ADE.

20. *La bissectrice* d'un angle est la ligne qui, menée par le sommet de cet angle, le partage en deux angles égaux.

Les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont à angle droit (*fig.* 10). Soient les deux angles supplémentaires ACD, DCB ; soient CF et CE les bissectrices de ces angles. L'angle FCD est la moitié de l'angle ACD, l'angle DCE est la moitié de l'angle DCB. L'angle FCE sera donc la moitié de la somme des angles ACD et DCB ou la moitié de deux angles droits.

Fig. 10.



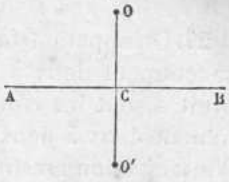
THÉORÈME.

21. *Par un point* O *pris hors d'une droite* AB, *on peut toujours abaisser une perpendiculaire sur cette droite, mais une seule* (*fig.* 11).

Plions la figure autour de AB, le point O viendra en O'. Remettons la figure dans sa première position, et joignons les points O et O' à un point quelconque C de la droite AB. Les angles adjacents OCB, O'CB, seront toujours *égaux*, puisqu'un nouveau rabattement de la figure autour de AB les fera évi-

demment *coïncider* (7). Or, pour que la droite OC soit perpendiculaire sur AB, il suffit que l'angle OCB soit droit, c'est-à-dire que la somme des deux angles adjacents égaux OCB, O'CB, soit égale à deux angles droits, condition qui exige que les côtés extérieurs OC et O'C soient en ligne droite (19). Deux points déterminant une droite (4), la droite OO' est donc perpendiculaire à AB, et c'est la seule qu'on puisse mener du point O sur AB.

Fig. 11.

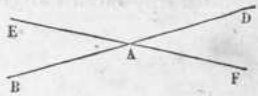


THÉORÈME.

22. *Les angles opposés par le sommet sont égaux.*

Deux angles *opposés par le sommet* sont tels, que les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

Fig. 12.



Soient les deux droites BD, EF (*fig.* 12) : les angles BAE, FAD, sont égaux. En effet, ces deux angles ont pour supplément le même angle DAE. On prouverait de même que les angles DAE, FAB, sont égaux.

23. Réciproquement, *si les angles* BAE, FAD, *sont égaux, ainsi que les angles* DAE, FAB, *les trois points* B, A, D, *sont en ligne droite, ainsi que les trois points* F, A, E. En effet, la somme des angles formés autour du point A étant toujours égale à quatre droits (18), la somme des angles BAE et DAE, qui est la moitié de la somme des angles considérés, sera égale à deux angles droits; ces angles étant adjacents, leurs côtés extérieurs BA et AD seront en ligne droite (19). On démontre de même que FAE est une seule et même ligne droite.

Il est évident que, *si deux angles égaux sont dans la position d'opposés par le sommet, et que deux de leurs côtés soient en ligne droite, les deux autres côtés sont aussi en prolongement.*

Il en résulte que *les bissectrices des angles opposés par le sommet sont en prolongement l'une de l'autre.* Si l'on considère deux droites formant quatre angles deux à deux opposés par le sommet, les quatre bissectrices correspondantes forment donc deux droites, d'ailleurs perpendiculaires l'une sur l'autre (20).

III. — Des triangles.

24. On appelle *triangle* la figure formée par trois droites qui se coupent deux à deux. Les portions ainsi limitées de ces droites sont les *côtés* du triangle, les angles qu'elles déterminent deux à deux sont les *angles* du triangle, leurs points d'intersection en sont les *sommets*.

Un triangle est *isocèle* quand il a deux côtés égaux. La *base* d'un triangle isocèle est le côté qui n'a pas d'égal; le sommet opposé est spécialement le *sommet* du triangle. La perpendiculaire abaissée du *sommet* sur la *base* (21) est la *hauteur* du triangle isocèle.

Un triangle est *équilatéral* quand il a ses trois côtés égaux; il est *équiangle* quand il a ses trois angles égaux.

Un triangle est *rectangle* quand l'un de ses angles est droit; le côté opposé à l'angle droit est l'*hypoténuse* du triangle.

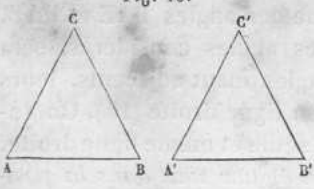
THÉORÈME.

25. *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux* (*fig.* 13).

Soit le triangle isocèle ABC. On a, par hypothèse, AC = BC, et il faut démontrer que l'angle A est égal à l'angle B.

Pour cela, considérons un second triangle A'B'C', *reproduction exacte* du premier, et transportons-le sur le triangle ABC *en le renversant* de manière que C' tombe en C et B' en A : cette coïncidence est possible, puisqu'on a AC = BC = B'C'. Les deux angles C et C' étant identiques, le côté C'A' prendra alors la direction CB, et, comme C'A' = CA = CB, le point A' tombera en B. Par suite, les deux triangles comparés coïncident comme ayant mêmes sommets (4), et, l'angle B', égal à l'angle B, coïncidant avec l'angle A, les angles A et B sont égaux.

Fig. 13.



26. Réciproquement, *si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés sont égaux et le triangle est isocèle* (*fig.* 13).

Dans le triangle ABC, on a, par hypothèse, angle A = angle B, et il faut démontrer que AC = BC.

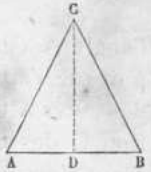
Cette fois, nous transporterons le triangle auxiliaire A′B′C′ sur le triangle ABC, en le renversant de manière que B′ tombe en A et A′ en B. On aura soin d'ailleurs de faire tomber les deux triangles d'un même côté par rapport au côté rendu commun AB. Puisqu'on a angle A = angle B = angle B′, le côté B′C′ prendra alors la direction du côté AC, et le point C′ tombera quelque part sur la droite AC ou sur son prolongement. De même, puisqu'on a angle B = angle A = angle A′, le côté A′C′ prendra la direction du côté BC, et le point C′ tombera quelque part sur la droite BC ou sur son prolongement. Le point C′, devant se trouver à la fois sur les deux droites AC et BC, tombera nécessairement à leur intersection C, et les deux triangles comparés coïncident comme ayant mêmes sommets. Le côté A′C′, égal au côté AC, coïncidant avec le côté BC, les côtés AC et BC sont égaux et le triangle ABC est isocèle.

COROLLAIRES.

27. Les démonstrations précédentes prouvent que *le triangle isocèle est superposable à lui-même par renversement ou retournement.*

D'après cela, si l'on considère, dans le triangle isocèle ABC (*fig.* 14), la droite CD qui joint le sommet C au milieu D de la base, cette droite reste fixe quand on retourne le triangle de manière à amener B en A et A en B. Par suite, après ce mouvement, les angles adjacents DCB, DCA, coïncident et sont égaux. De même, les angles adjacents supplémentaires CDB, CDA, coïncident et sont droits (17).

Fig. 14.



Ainsi, *dans tout triangle isocèle, la droite qui unit le sommet au milieu de la base se confond avec la hauteur du triangle et la bissectrice de l'angle au sommet.*

La droite CD remplit donc *quatre conditions*, et, comme d'après ce qui précède, deux points déterminent une droite, qu'un angle n'a qu'une bissectrice, que par un point on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur une droite, dès qu'une droite CD remplit *deux* des conditions indiquées, elle remplit nécessairement les deux autres.

28. *Tout triangle équilatéral est équiangle, et tout triangle équiangle est équilatéral.*

29. On a à considérer dans un triangle quelconque six *éléments :* trois côtés et trois angles. Il suffit que trois de ces éléments soient respectivement égaux dans deux triangles pour que ces triangles soient égaux : il faut seulement que, parmi ces éléments égaux, il entre au moins un côté. Nous aurons donc à démontrer les trois cas d'égalité suivants.

THÉORÈME.

30. *Deux triangles* ABC, A′B′C′, *sont égaux :*

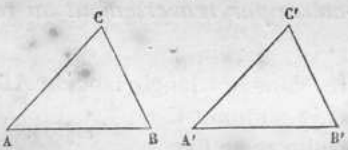
1° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ;*

2° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ;*

3° *Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

1° Supposons (*fig.* 15) qu'on ait AB = A′B′, et que les angles A et A′, B et B′, soient égaux. On pourra porter le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC de manière que A′B′ coïncide avec AB ; si les deux triangles tombent alors dans le même sens par rapport au côté commun, A′C′ prendra la direction de AC, puisque l'angle A égale l'angle A′ ; B′C′ prendra la direction de BC, puisque l'angle B égale l'angle B′. Le point d'intersection C′ des côtés A′C′ et B′C′ coïncidera donc avec le point d'intersection C des côtés AC et BC. Les deux triangles considérés, ayant alors mêmes sommets, sont égaux.

Fig. 15.



2° Supposons (*fig.* 15) que l'angle C′ soit égal à l'angle C et qu'on ait C′A′ = CA, C′B′ = CB. Les deux angles C′ et C étant égaux, on pourra porter le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC de manière que ces angles coïncident. Les droites C′A′ et CA, C′B′ et CB, auront alors la même direction, et, comme on a C′A′ = CA et C′B′ = CB, les sommets A et A′, B et B′, coïncideront. Les deux triangles considérés, ayant alors mêmes sommets, sont égaux.

3° Supposons (*fig.* 16) qu'on ait AB = A′B′, BC = B′C′, CA = C′A′. Nous allons ramener ce troisième cas au deuxième.

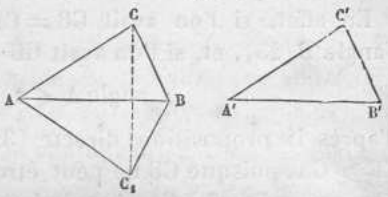
Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC en faisant coïncider A′B′ avec son égal AB; puis, rabattons le triangle A′B′C′ autour de AB de manière que C′ vienne en C_1. Le triangle ABC_1 sera la reproduction du triangle A′B′C′. On aura donc

$$C'B' = C_1B = CB,$$

en même temps que

$$C'A' = C_1A = CA.$$

Fig. 16.



Les deux triangles CBC_1, CAC_1 étant isocèles, les angles à la base sont égaux dans chacun d'eux (25). Les angles ACB et AC_1B sont donc égaux comme formés de parties égales. Par suite, l'angle C du triangle ABC est égal à l'angle C′ du triangle A′B′C′, et ces deux triangles sont égaux (2°).

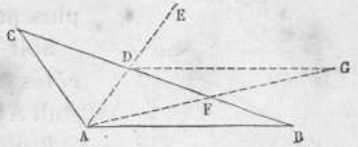
31. On voit, par ce qui précède, que, *dans les triangles égaux, les angles égaux sont toujours opposés aux côtés égaux, et réciproquement.*

THÉORÈME.

32. *Dans un triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle* (*fig.* 17).

Dans le triangle ABC, on a CB > CA, et il faut démontrer que l'angle A est plus grand que l'angle B.

Fig. 17.



Sur CB, prenons CD = CA, et traçons la droite ADE. Le triangle ACD étant isocèle, l'angle CAD, nécessairement moindre que l'angle A, est égal à l'angle CDA ou à son opposé par le sommet EDB. L'angle EDB est donc lui-même moindre que l'angle A.

Mais, si l'on joint le sommet A au milieu F du segment DB et si l'on prend sur la droite ainsi déterminée FG = AF, les triangles *AFB, DFG, sont égaux* (*30, 2°*), *et l'angle ABF égal*, par suite, à l'angle GDF (31). Mais, d'après la construction même, le point G est situé dans l'angle EDB. Donc l'angle EDB, moindre que l'angle A, surpasse l'angle GDF ou son égal B, et l'on a, *a fortiori*, angle A > angle B.

33. Réciproquement, *dans un triangle, à un plus grand angle est oppose un plus grand côté* (*fig.* 17).

Dans le triangle ABC, on a angle A > angle B, et il faut démontrer qu'il en résulte CB > CA.

En effet, si l'on avait CB = CA, l'angle A serait égal à l'angle B (25), et, si l'on avait CB < CA, on aurait

$$\text{angle A} < \text{angle B},$$

d'après la proposition directe (32). Il faut donc qu'on ait CB > CA, puisque CB ne peut être, d'après les conditions de l'énoncé, ni égal à CA ni moindre que CA.

34. La démonstration précédente est un premier exemple de la *méthode de réduction à l'absurde*, si employée par les anciens. Cette méthode consiste à prouver que la non-existence du théorème qu'on veut établir conduirait à une absurdité évidente ou à des conclusions contraires à l'hypothèse admise comme point de départ.

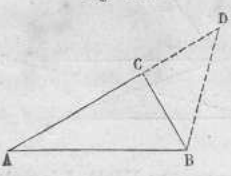
La méthode de réduction à l'absurde est surtout applicable à la démonstration des *réciproques*.

THÉORÈME.

35. *Dans tout triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence* (*fig.* 18).

Il suffit de démontrer la première partie de l'énoncé pour le plus grand côté et la seconde pour le plus petit.

Fig. 18.



Soit le triangle ABC, dont les trois côtés rangés par ordre de grandeur sont AB, AC, BC.

Prolongeons AC d'une longueur CD égale à BC et joignons BD. Le triangle BCD étant isocèle, l'angle D, égal à l'angle CBD, est moindre que l'angle ABD. On a donc, dans le triangle ABD (33),

$$AB < AD,$$

c'est-à-dire

$$AB < AC + BC.$$

Si, des deux membres de cette inégalité, on retranche AC, il vient

$$BC > AB - AC.$$

On voit que *trois longueurs données arbitrairement ne peuvent pas toujours former les trois côtés d'un triangle.* Il faut que la plus grande soit moindre que la somme des deux autres.

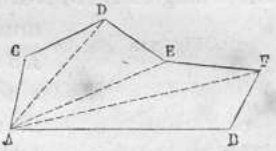
COROLLAIRES.

36. *Une ligne droite limitée est moindre que toute ligne brisée terminée aux mêmes extrémités* (*fig.* 19).

Comparons la droite AB au contour brisé ACDEFB. La figure donne immédiatement (35)

$$AD < AC + CD,$$
$$AE < AD + DE,$$
$$AF < AE + EF,$$
$$AB < AF + FB.$$

Fig. 19.



En ajoutant ces inégalités membre à membre et en simplifiant, on a

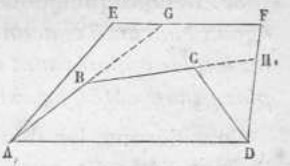
$$AB < AC + CD + DE + EF + FB.$$

37. *Toute ligne polygonale convexe* (voir 62) *est moindre que toute ligne polygonale enveloppante terminée aux mêmes extrémités* (*fig.* 20).

Laissant de côté la partie commune, il faut prouver que le contour ABCD est moindre que le contour AEFD.

Prolongeons AB et BC jusqu'aux points G et H, où ils rencontrent le contour enveloppant. Nous aurons successivement (36)

Fig. 20.



$$AB + BG < AE + EG,$$
$$BC + CH < BG + GF + FH,$$
$$CD < CH + HD.$$

En ajoutant ces inégalités membre à membre et en simplifiant, il vient

$$AB + BC + CD < AE + EF + FD.$$

On prouvera de même que *toute ligne polygonale convexe est moindre que toute ligne polygonale qui l'enveloppe entièrement.*

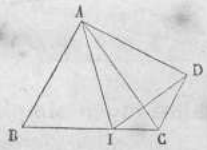
Le théorème n'est vrai, d'une manière générale, que si la ligne enveloppée est convexe.

THÉORÈME.

38. *Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant des angles inégaux, leurs troisièmes côtés sont inégaux et le plus grand est opposé au plus grand angle* (*fig.* 21).

On peut toujours placer les deux triangles proposés, comme les triangles ACB, ACD, de manière qu'ils aient le côté commun AC et que les deux autres côtés AB = AD tombent de part et d'autre de ce côté commun. Supposons l'angle BAC plus grand que l'angle CAD : il faut prouver que le côté BC est plus grand que le côté CD. Pour cela, menons la bissectrice AI de l'angle total BAD : elle tombe dans le plus grand angle BAC et coupe BC au point I. Joignons ID. Les deux triangles BAI, IAD, sont égaux d'après le deuxième cas d'égalité (30), et l'on en conclut BI = ID. Le triangle ICD donne d'ailleurs (35) CD < IC + ID, c'est-à-dire CD < IC + IB ou que BC.

Fig. 21.



39. Réciproquement, *lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, si leurs troisièmes côtés sont inégaux, les angles opposés sont inégaux et le plus grand est opposé au plus grand côté* (*fig.* 21).

Considérons les deux triangles ACB, ACD, placés comme il vient d'être dit, et supposons BC > CD. Il faut démontrer que l'angle BAC est plus grand que l'angle CAD.

En effet, si les deux angles BAC et CAD étaient égaux, les deux triangles seraient égaux (30, 2°) et l'on aurait BC = CD.

Si l'angle BAC était moindre que l'angle CAD, le côté BC, d'après la proposition directe (38), serait moindre que le côté CD.

L'angle BAC, ne pouvant, d'après les conditions de l'énoncé, ni être égal à l'angle CAD ni être moindre que cet angle, est nécessairement plus grand.

40. Nous venons encore de nous servir de la méthode de réduction à l'absurde (34). Ce procédé étant très-fréquent en

Géométrie, nous éviterons des redites en le résumant sous la forme générale suivante :

Lorsqu'en démontrant une ou plusieurs propositions on a fait toutes les hypothèses admissibles, et qu'elles ont conduit respectivement à des conclusions essentiellement distinctes, les réciproques des propositions considérées sont toutes vraies.

C'est ce qu'on peut appeler la *loi des réciproques* (1).

IV. — Des perpendiculaires et des obliques.

THÉORÈME.

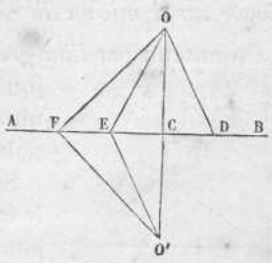
41. *Si, d'un point* O *pris hors d'une droite* AB, *on mène à cette droite la perpendiculaire* OC *et diverses obliques* OD, OE, OF...., *deux obliques dont les pieds sont situés de part et d'autre et à égale distance du pied de la perpendiculaire sont égales, la perpendiculaire est plus courte que toute oblique, et la longueur d'une oblique croît à mesure que son pied sur* AB *s'éloigne de celui de la perpendiculaire* (*fig.* 22).

Sur le prolongement de OC, prenons CO′ = OC et joignons le point O′ aux pieds E et F.

Si l'on suppose CD = CE, les deux triangles OCD, OCE, sont égaux (30, 2°), et il en résulte OD = OE.

On a donc aussi OE = O′E et OF = O′F, comme obliques dont les pieds sont à égale distance du pied de la perpendiculaire EC ou FC à OO′.

Fig. 22.



Si l'on compare maintenant la droite OO′ et les contours OEO′ et OFO′, on a immédiatement (36, 37)

$$OO' < OEO' < OFO',$$

c'est-à-dire, en divisant par 2,

$$OC < OE < OF.$$

---

(1) En récrivant le § III, relatif aux *triangles*, nous avons adopté la marche indiquée dans un autre de nos Ouvrages : Traité de Géométrie, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition (1891). Cette marche a l'avantage de supprimer l'axiome inutile et illogique : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.* (*Voir* Duhamel, *loc. cit.*, p. 7 et suiv.)

Si les deux obliques inégales considérées n'étaient pas du même côté de la perpendiculaire, comme OD et OF, on prendrait CE = CD, et l'on remplacerait OD par son égale OE.

COROLLAIRES.

42. La perpendiculaire OC représente ce qu'on appelle la *distance* du point O à la droite AB.

43. Puisque l'on a OC < OE, dans le triangle OCE, l'angle OEC, moindre que l'angle droit OCE (32), est un angle aigu. Il en résulte que, *lorsqu'une perpendiculaire et une oblique sont menées d'un même point à une même droite, la perpendiculaire tombe toujours dans celui des deux angles formés par l'oblique avec la droite qui est aigu, à moins que la perpendiculaire ne passe par le pied même de l'oblique.*

On voit par là que, dans tout triangle rectangle, les deux angles autres que l'angle droit sont aigus.

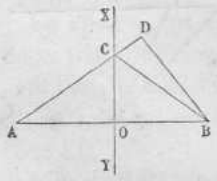
44. D'après la loi générale des réciproques (40), les réciproques des propositions qui constituent l'énoncé du n° 41 sont toutes vraies. En particulier, *lorsqu'une droite* OC *est la plus courte distance rectiligne du point* O *à la droite* AB, *elle est perpendiculaire sur* AB.

THÉORÈME.

45. *Le lieu géométrique de tous les points d'un plan à égale distance des extrémités d'une droite est la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite* (*fig.* 23).

On entend par *lieu géométrique plan* une série de points jouissant d'une certaine propriété commune, à l'exclusion de tous les autres points du plan considéré.

Fig. 23.



Soit la droite XY perpendiculaire sur le milieu de AB. Prenons un point C quelconque sur XY, et joignons-le aux points A et B. Les obliques CA et CB seront égales (41).

Prenons un point D quelconque hors de XY, et joignons-le aux points A et B. DA coupera XY au point C, et l'on aura CA = CB. Le triangle DCB donne d'ailleurs DB < DC + CB, c'est-à-dire DB < DC + CA ou DB < DA.

Les points pris sur la perpendiculaire sont également distants des extrémités A et B ; les points pris hors de la perpendiculaire sont inégalement distants des mêmes extrémités : la perpendiculaire XY constitue donc bien le lieu géométrique indiqué.

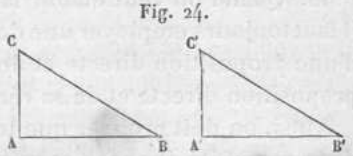
46. Deux points suffisant pour déterminer une droite, *dès qu'une droite* XY *a deux de ses points à égale distance des extrémités d'une droite* AB, *elle est perpendiculaire sur le milieu de* AB.

THÉORÈME.

47. *Deux triangles rectangles sont égaux : 1° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal ; 2° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal* (*fig.* 24).

1° Soient les deux triangles rectangles ABC, A′ B′ C′, dans lesquels on a BC = B′C′ et l'angle B égal à l'angle B′. Portons les deux triangles l'un sur l'autre de manière que B′C′ coïncide avec BC ; en vertu de l'égalité des angles B′ et B, B′A′ prendra la direction BA et le point A′ tombera au point A ; car les perpendiculaires abaissées des points C′ et C, qui n'en font plus qu'un seul, sur les droites B′A′ et BA qui coïncident, doivent se confondre (21).

Fig. 24.



2° Supposons maintenant BC = B′C′ et CA = C′A′. Portons les deux triangles l'un sur l'autre de manière que C′A′ coïncide avec CA. L'angle A′ étant égal à l'angle A, A′B′ prendra alors la direction AB et le point B′ tombera au point B ; car les obliques égales BC et B′C′ doivent s'écarter également de la perpendiculaire CA.

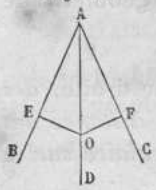
THÉORÈME.

48. *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points du plan qui sont intérieurement à égale distance des côtés de l'angle* (*fig.* 25).

Soit l'angle BAC et soit AD sa bissectrice. Prenons un point O quelconque sur cette bissectrice, et abaissons de ce point les perpendiculaires OE et OF sur les côtés AB et AC. Les

deux triangles rectangles AOE, AOF, seront égaux (47, 1°), et l'on en déduira OE = OF : donc tous les points de la bissectrice sont également distants des côtés de l'angle.

Fig. 25.



Supposons maintenant que le point O soit un point du plan tel que les perpendiculaires OE et OF abaissées de ce point sur les côtés de l'angle soient égales. En joignant AO, on formera deux triangles rectangles AOE, AOF, qui seront égaux (47, 2°). On en déduira l'égalité des angles EAO, FAO, c'est-à-dire que AO se confondra avec la bissectrice de l'angle BAC : donc tous les points également distants des côtés de l'angle sont sur la bissectrice.

La bissectrice de l'angle est donc bien le lieu géométrique indiqué.

49. Quand on veut établir la réalité d'un lieu géométrique, il faut toujours employer une double démonstration, composée d'une proposition directe et de sa contraire ou bien de cette proposition directe et de sa réciproque (9).

Ainsi, on doit prouver que tout point du lieu supposé jouit de la propriété énoncée et que tout point pris hors de ce lieu n'en jouit pas (c'est la marche que nous avons suivie au n° 45), ou bien on doit prouver que tout point du lieu supposé jouit de la propriété énoncée et que tout point jouissant de cette propriété appartient nécessairement à ce lieu (c'est la marche que nous avons suivie au n° 48).

L'équivalence des deux procédés tient à ce que la proposition directe, la proposition contraire et la proposition réciproque sont liées de telle sorte, que la première et l'une des deux autres entraînent la troisième. De même, l'existence de la proposition directe et de sa réciproque entraîne celle des deux propositions contraires.

V. — Des parallèles.

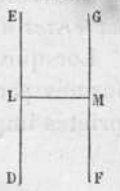
50. Lorsque deux droites *situées dans un même plan* ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge, on dit qu'elles sont *parallèles*.

Deux droites DE, FG, perpendiculaires à une même droite LM (*fig.* 26), sont parallèles, car d'un point pris hors d'une

droite on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur cette droite (21).

Si l'on veut, par le point L, mener une parallèle à la droite FG, on abaissera donc LM perpendiculaire sur FG, et, par le point L, on mènera DE perpendiculaire sur LM.

Fig. 26.



Nous admettrons comme évident que, par un point pris hors d'une droite, on ne peut lui mener qu'une parallèle. C'est en cela que consiste réellement le célèbre *postulatum* d'Euclide.

Il en résulte que, *si une droite en rencontre une autre, elle rencontre aussi toutes les parallèles à cette autre.*

De même, *deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

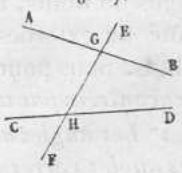
51. *Lorsque deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Soient les parallèles DE, FG (*fig.* 26). Soit LM perpendiculaire sur FG. Si l'on menait au point L une perpendiculaire à LM, cette perpendiculaire serait parallèle à FG : elle se confondra donc nécessairement avec la parallèle DE (50).

52. Lorsqu'une sécante rencontre deux droites quelconques, elle forme avec ces deux droites huit angles auxquels on a donné des noms particuliers.

Soient les deux droites AB, CD, et la sécante EF qui les rencontre en G et en H (*fig.* 27) : quatre angles seront formés autour du point G, quatre autour du point H.

Fig. 27.



Les angles compris entre les droites AB et CD sont des angles *internes ;* les angles extérieurs à ces droites sont des angles *externes.*

Les angles internes non adjacents, situés de part et d'autre de la sécante, sont des angles *alternes-internes,* par exemple les angles AGH, DHG.

Les angles externes non adjacents, situés de part et d'autre de la sécante, sont des angles *alternes-externes,* par exemple les angles AGE, DHF.

Deux angles situés d'un même côté de la sécante, l'un interne, l'autre externe, mais non adjacents, sont des angles

internes externes ou *correspondants*, par exemple les angles BGH, DHF.

Les angles tels que BGH, DHG, sont des angles *internes d'un même côté;* les angles tels que BGE, DHF, sont des angles *externes d'un même côté.*

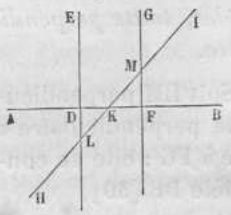
Lorsque les deux droites AB et CD sont parallèles, les angles formés par ces droites avec la sécante EF jouissent de propriétés importantes.

THÉORÈME.

53. *Lorsque deux parallèles sont rencontrées par une sécante, les quatre angles aigus formés sont égaux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus* (*fig.* 28).

Soient L et M les points d'intersection de la sécante IH avec les parallèles ED et GF. Par le point K, *milieu* de LM, menons AB perpendiculaire sur ED et sur GF (51). Les deux triangles rectangles KDL, KFM, sont égaux (47, 1°) : il en résulte l'égalité des angles KLD, KMF. Par conséquent, les angles aigus en L étant égaux comme opposés par le sommet, ainsi que les angles aigus en M, les quatre angles aigus formés autour des points L et M sont égaux entre eux. Les quatre angles obtus formés autour des mêmes points sont aussi égaux entre eux, comme suppléments des angles aigus.

Fig. 28.



Si nous remarquons maintenant que deux angles alternes-internes, alternes-externes ou correspondants, sont à la fois aigus ou obtus, tandis que deux angles internes d'un même côté ou externes d'un même côté sont l'un aigu et l'autre obtus, nous pourrons dire que, *lorsque deux parallèles sont rencontrées par une sécante :*

1° *Les angles alternes-internes, les angles alternes-externes, les angles correspondants, sont égaux;*

2° *Les angles internes d'un même côté, les angles externes d'un même côté, sont supplémentaires.*

54. La *réciproque* de cette proposition est vraie.

Supposons, par exemple (*fig.* 28), que les angles alternes-internes ELM, LMF, soient égaux; les droites ED et GF seront parallèles. En effet, si l'on menait par le point L une parallèle

à GF, elle ferait avec LM un angle égal à l'angle LMF : la droite ED, remplissant déjà cette condition, n'est autre que la parallèle indiquée.

On démontrerait d'une manière identique les autres parties de la réciproque.

55. Les propositions contraires des deux précédentes sont vraies (9, 49). En particulier, *lorsque deux droites font avec une sécante deux angles internes d'un même côté dont la somme est différente de deux angles droits, elles se rencontrent du côté où cette somme est moindre.* Ainsi, *une perpendiculaire et une oblique à une même droite se rencontrent toujours, lorsqu'on les suppose suffisamment prolongées du côté où l'oblique fait avec la sécante le plus petit angle intérieur.*

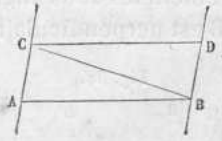
C'est là le *postulatum* sur lequel EUCLIDE fonde directement la théorie des parallèles. Nous avons remplacé la *demande* d'EUCLIDE par celle-ci : *Par un même point, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite* (50).

THÉORÈME.

56. *Les portions de parallèles comprises entre deux droites parallèles sont égales* (*fig.* 29).

Soient les parallèles AC et BD coupées par les parallèles AB et CD. Joignons les points C et B. Les deux triangles ACB et CBD seront égaux d'après le premier cas d'égalité (30) : on en déduit AC = BD; on a de même AB = CD.

Fig. 29.



Si les droites AC et BD étaient perpendiculaires aux droites AB et CD, elles seraient toujours parallèles ; mais elles mesureraient alors les distances de deux points quelconques de la droite AB à sa parallèle CD : il en résulte que *deux droites parallèles sont partout également distantes.*

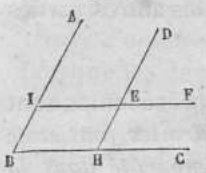
THÉORÈME.

57. *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires* (*fig.* 30).

Soient d'abord les angles ABC, DEF, qui ont leurs côtés pa-

rallèles et dirigés dans le même sens. Prolongeons DE jusqu'en H. Si l'on considère les parallèles AB, DH, et la sécante BC, les angles ABC et DHC sont égaux comme correspondants (53). Si l'on considère les parallèles EF, HC, et la sécante DH, les angles DHC et DEF sont égaux comme correspondants. Il en résulte l'égalité des angles ABC et DEF.

Fig. 30.



Soient maintenant les angles ABC et IEH, qui ont leurs côtés parallèles, mais dirigés en sens contraires. Ces deux angles sont encore égaux, puisqu'en prolongeant les côtés de l'angle IEH (22) on obtient l'angle DEF égal à l'angle ABC.

Soient enfin les angles ABC et DEI : les deux côtés AB et DE sont parallèles et dirigés dans le même sens, les deux côtés BC et EI sont parallèles et dirigés en sens contraires. L'angle DEI, étant le supplément de l'angle DEF, est aussi le supplément de l'angle égal ABC.

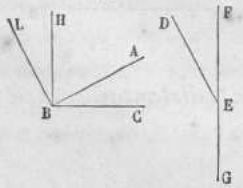
En résumé, *lorsque deux angles ont leurs côtés parallèles, ils sont égaux lorsque ces côtés sont dirigés dans le même sens ou en sens contraires; ils sont supplémentaires, lorsqu'en les comparant on trouve deux côtés dirigés dans le même sens et deux côtés dirigés en sens contraires.*

COROLLAIRE.

58. *Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires.*

Soient les deux angles de même espèce ABC et DEF (*fig.* 31) : AB est perpendiculaire à DE, BC est perpendiculaire à EF. Par le point B, menons BL perpendiculaire à AB : BL sera parallèle à DE (50) ; par le point B, menons BH perpendiculaire à BC, c'est-à-dire parallèle à EF. Les deux angles LBH et DEF seront égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens. Mais les deux angles LBH et ABC sont égaux comme compléments du même angle HBA : les deux angles ABC et DEF sont donc égaux.

Fig. 31.



Si l'on avait considéré l'angle DEG d'espèce différente, il

aurait été le supplément de l'angle DEF, et par suite de l'angle ABC.

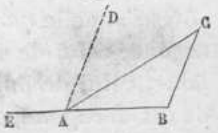
En résumé, *deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires, suivant qu'ils sont ensemble aigus ou obtus, ou bien que l'un est aigu et l'autre obtus.*

THÉORÈME.

59. *La somme des angles d'un triangle est toujours égale à deux angles droits* (*fig.* 32).

Soit le triangle ABC. Prolongeons le côté AB suivant AE, et menons AD parallèle à BC. Considérons les trois angles formés autour du point A et au-dessus de la droite BE : la somme de ces trois angles est égale à deux angles droits (17). Le premier de ces angles est l'angle CAB du triangle; le second DAC est égal à l'angle C du triangle, car ces angles sont alternes-internes par rapport aux parallèles BC et AD et à la sécante AC; le troisième angle DAE est égal à l'angle B du triangle, car ces angles sont correspondants par rapport aux mêmes parallèles coupées par la sécante BE. La somme des angles du triangle est donc bien égale à deux angles droits.

Fig. 32.



COROLLAIRES.

60. L'angle CAE formé par le côté AC et le prolongement AE du côté AB s'appelle angle *extérieur* du triangle ABC.

Un angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.

Il en résulte que *deux parallèles forment un angle nul.*

Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit ou obtus.

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

Dans un triangle équilatéral, chaque angle vaut deux tiers d'angle droit.

Dans un triangle isocèle, la valeur d'un angle étant donnée, on connaît les deux autres angles.

Deux triangles sont équiangles chacun à chacun lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun, que ces angles soient ou non adjacents au côté égal (30, 1°).

VI. — Des polygones et, en particulier, des quadrilatères.

61. Toute ligne brisée qui se ferme d'elle-même est un *polygone*. Les différents côtés de la ligne brisée sont les *côtés* du polygone; les angles consécutifs formés par ces côtés et les sommets de ces angles sont les *angles* et les *sommets* du polygone. En joignant deux sommets non consécutifs, on a une *diagonale* du polygone. L'ensemble des côtés du polygone constitue son *contour* ou son *périmètre*.

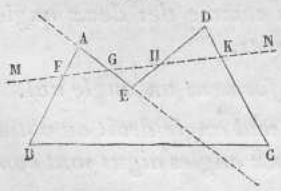
Un polygone de trois côtés est un *triangle*. Celui de quatre côtés s'appelle *quadrilatère;* celui de cinq côtés s'appelle *pentagone;* celui de six s'appelle *hexagone*, celui de sept *heptagone*, celui de huit *octogone*, celui de neuf *ennéagone*, celui de dix *décagone*, celui de douze *dodécagone*, celui de quinze *pentédécagone*.

62. Un polygone est *convexe* lorsqu'il tombe tout entier d'un même côté par rapport à chacun de ses côtés indéfiniment prolongés. Il est *concave* dans le cas contraire.

Une droite quelconque ne peut couper le périmètre d'un polygone convexe en plus de deux points.

En effet, si la droite MN (*fig.* 33) rencontre le polygone ABCDE en trois points F, G, H, les points F et H se trouvant de part et d'autre du côté AE, le polygone considéré n'est pas tout entier d'un même côté par rapport à AE prolongé : il n'est donc pas convexe.

Fig. 33.

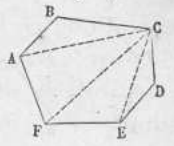


THÉORÈME.

63. *La somme des angles d'un polygone convexe est toujours égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux* (*fig.* 34).

Soit le polygone ABCDEF. En menant toutes les diagonales qui partent du sommet C, on le partage en triangles. Chacun de ces triangles emploie un côté du polygone, sauf les deux triangles extrêmes, qui en emploient deux. Si n est le nombre des côtés du polygone, le nombre des triangles sera donc représenté par $n-2$. La somme des angles de tous les triangles est précisément la somme des angles du polygone, et la somme des angles de chaque triangle est égale à deux angles droits (59). La somme des angles du polygone est donc, en prenant l'angle droit pour unité,

Fig. 34.



$$2(n-2) \quad \text{ou} \quad 2n-4.$$

COROLLAIRES.

64. Si l'on fait dans cette formule $n=4$, on trouve 4 pour la somme cherchée. *La somme des angles d'un quadrilatère est donc égale à quatre angles droits.*

65. *La somme des angles qu'on forme à l'extérieur d'un polygone, en prolongeant successivement ses côtés dans le même sens, est toujours égale à quatre angles droits;* car la somme des angles tant intérieurs qu'extérieurs est égale à $2n$ angles droits, en désignant par n le nombre des sommets ou des côtés du polygone convexe considéré.

Il en résulte qu'un polygone convexe ne peut pas avoir plus de trois angles intérieurs qui soient aigus, sans quoi il aurait plus de trois angles extérieurs obtus.

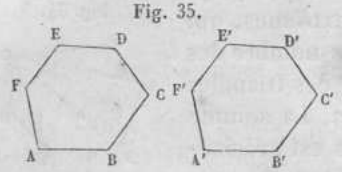
THÉORÈME.

66. *Deux polygones de même espèce sont égaux lorsque toutes leurs parties disposées dans le même ordre sont égales, à l'exception de deux côtés consécutifs et de l'angle qu'ils forment* (*fig.* 35).

Soient les deux hexagones ABCDEF, A'B'C'D'E'F'. On suppose égaux les angles A et A', B et B', C et C', D et D', E et E', ainsi que les côtés AB et A'B', BC et B'C', CD et C'D', DE et D'E'. Portons les deux polygones l'un sur l'autre de manière que les angles A et A' coïncident : A'F' prendra la direction de AF, A'B' et AB se confondront. L'angle B étant égal à

l'angle B', le côté B'C' prendra alors la direction du côté BC, et, comme il lui est égal, les sommets C' et C se confondront.

Fig. 35.



Il en sera de même des sommets D et D', E et E'. L'angle E' étant égal à l'angle E, le côté E'F' prendra la direction du côté EF, et le sommet F', devant se trouver à la fois sur les côtés EF et AF, tombera à leur intersection F. Les deux polygones, ayant mêmes sommets, se recouvriront exactement et seront égaux.

On voit que, si les polygones considérés ont n côtés, il faut, pour être égaux, qu'ils aient $n - 1$ angles égaux et $n - 2$ côtés égaux. Les conditions nécessaires pour l'égalité des deux polygones considérés sont donc au nombre de $2n - 3$.

67. Parmi les quadrilatères, on distingue :

Le *parallélogramme*, dont les côtés opposés sont parallèles, le *rectangle*, dont les angles sont droits; le *losange*, dont les côtés sont égaux; le *carré*, dont les côtés et les angles sont égaux; le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles.

THÉORÈME.

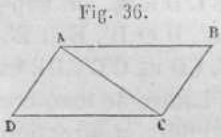
68. *Dans tout parallélogramme, les côtés et les angles opposés sont égaux.*

Les angles opposés sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraires (57). Les côtés opposés sont égaux comme portions de parallèles comprises entre parallèles (56).

69. Réciproquement, *tout quadrilatère dans lequel les angles opposés ou les côtés opposés sont égaux est un parallélogramme* (*fig.* 36).

Supposons d'abord les angles opposés égaux. De $A = C$ et $B = D$, on conclut $A + B = C + D$. Les deux angles A et B valent donc ensemble la moitié de la somme des angles du quadrilatère ou deux droits (64) : ils sont donc supplémentaires. Par suite, comme ils sont internes d'un même côté par rapport aux

Fig. 36.



droites AD, BC, et à la sécante AB, les droites AD et BC sont parallèles (54). On prouverait de même que les droites AB et DC sont parallèles. La figure ABCD est donc bien un parallélogramme.

Supposons maintenant qu'on ait AB = DC et AD = BC. Les deux triangles ADB, DBC, sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles ADB et DBC sont donc égaux, et, comme ils sont alternes-internes par rapport aux droites AD, BC, et à la sécante DB, les droites AD et BC sont parallèles. L'égalité des angles ABD, BDC, entraîne de même le parallélisme des droites AB et DC. Le quadrilatère considéré est encore un parallélogramme.

70. *Tout quadrilatère dans lequel deux côtés opposés sont à la fois égaux et parallèles est un parallélogramme* (*fig.* 36).

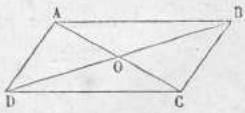
Si l'on a AD égal et parallèle à BC, les deux triangles ADB, DBC, sont égaux d'après le premier cas d'égalité (30), car DB est commun et les angles ADB, DBC, sont égaux comme alternes-internes par rapport aux parallèles AD et BC et à la sécante DB. Il en résulte AB = DC. La figure ABCD est donc un parallélogramme (69).

THÉORÈME.

71. *Les diagonales d'un parallélogramme sont inégales et se divisent mutuellement en parties égales* (*fig.* 37).

Les triangles AOB, DOC, sont égaux d'après le second cas d'égalité (30), car les côtés AB et DC sont égaux (68), et les angles ABO et ODC, BAO et OCD, le sont aussi comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD coupées par les sécantes BD et AC. On en conclut AO = OC et OB = OD.

Fig. 37.



Les diagonales AC et BD sont d'ailleurs inégales, car les deux triangles ADC et BCD ont le côté DC commun ; le côté AD est égal au côté BC; mais l'angle ADC est plus petit que l'angle BCD, puisque, ces angles étant supplémentaires (53), si l'un est aigu, l'autre est obtus. Donc la diagonale AC est plus petite que la diagonale BD (38).

72. Réciproquement, *lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent mutuellement en parties égales, ce quadrilatère est un parallélogramme* (*fig.* 37).

Cette réciproque est immédiatement démontrée par l'égalité des triangles AOB, DOC, et celle des triangles AOD, BOC (69).

73. Le point O (*fig.* 37) où se coupent les diagonales d'un parallélogramme est le *centre* du quadrilatère. Toute droite limitée de part et d'autre au parallélogramme et passant par le centre y est divisée en deux parties égales et partage le parallélogramme en deux trapèzes égaux (66).

COROLLAIRES.

74. *Lorsque dans un parallélogramme l'un des angles est droit, tous les autres le sont, et le quadrilatère est un rectangle* (*fig.* 38).

Fig. 38.



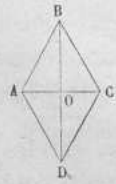
Si l'angle A est droit, l'angle opposé C l'est aussi (68); les angles B et D sont alors droits comme suppléments d'angles droits.

75. *Dans un rectangle, les diagonales sont égales;* car les triangles rectangles ABC, BAD, sont égaux.

Réciproquement, *tout parallélogramme dont les diagonales sont égales est un rectangle* (74).

76. *Un losange est un parallélogramme* (*fig.* 39); car, les quatre côtés étant égaux, les côtés opposés le sont deux à deux (69).

Fig. 39.



Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires entre elles et bissectrices des angles opposés.

En effet, la diagonale AC est perpendiculaire sur le milieu de DB, puisque les points A et C sont également distants des points D et B. La diagonale DB est perpendiculaire sur le milieu de AC, puisque les points D et B sont également distants des points A et C (46).

Les triangles BAD, BCD, étant isocèles, AC est alors la bissectrice commune des angles A et C (27). Pour une raison analogue, BD est la bissectrice des angles B et D.

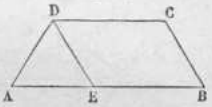
77. *Le carré réunit les propriétés du rectangle et du losange* (*fig.* 40) : ses diagonales sont donc égales, perpendiculaires entre elles et bissectrices des angles opposés.

Fig. 40.



78. Parmi les trapèzes, on considère les trapèzes *rectangles*, dans lesquels un côté est perpendiculaire aux deux côtés parallèles, et les trapèzes *isocèles* ou *symétriques*, dans lesquels les deux côtés non parallèles sont égaux (*fig.* 41).

Fig. 41.



Dans un trapèze isocèle, les angles formés par les côtés parallèles avec les deux autres côtés sont égaux. Menons DE parallèle à CB : la figure DCBE est un parallélogramme, et l'on a DE = CB. Puisque DA = CB par hypothèse, le triangle ADE est isocèle : l'angle A est donc égal à l'angle DEA et, par suite, à l'angle B (53). Les angles D et C sont alors égaux comme suppléments d'angles égaux.

79. *Deux parallélogrammes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; deux rectangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés adjacents égaux chacun à chacun; deux losanges sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et un angle égal; deux carrés sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal* (66).

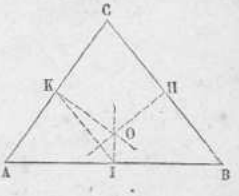
VII. — Exercices et questions complémentaires.

THÉORÈME.

80. *Dans tout triangle, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés concourent en un même point* (*fig.* 42).

Les perpendiculaires IO et KO élevées sur les milieux des côtés AB et AC se coupent en un point O, car, si l'on joint IK, la somme des angles KIO et IKO est moindre que deux droits (55).

Fig. 42.



Cela posé, le point O, étant à égale distance des points A et B et des points A et C (45), est à égale distance des points B et C et appartient, par conséquent, à la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC.

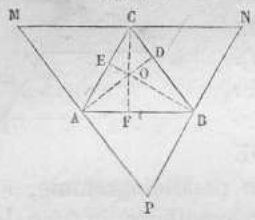
COROLLAIRE.

81. *Dans tout triangle, les trois hauteurs concourent en un même point* (*fig.* 43).

Les *hauteurs* d'un triangle sont les perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés, considérés alors comme *bases*.

Soient le triangle ABC et ses trois hauteurs AD, BE, CF. Par les sommets A, B, C, menons respectivement des parallèles aux côtés opposés du triangle donné ; elles formeront un triangle MNP dont les côtés auront pour milieux les sommets du premier triangle. Ainsi, les parallèles comprises entre parallèles étant égales (56), on a AB = CM = CN, c'est-à-dire que le sommet C est le milieu du côté MN, etc.

Fig. 43.



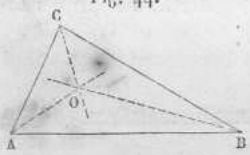
Deux parallèles ayant leurs perpendiculaires communes (51), les hauteurs du triangle ABC sont alors les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du triangle MNP : elles concourent donc en un même point (80).

THÉORÈME.

82. *Dans tout triangle, les bissectrices des trois angles concourent en un même point* (*fig.* 44).

Les bissectrices des angles A et B se coupent en un point O, parce que la somme de deux angles d'un triangle est moindre que deux droits (59, 55). Mais le point O, étant à égale distance des côtés AB et AC (48) aussi bien que des côtés AB et BC, est à égale distance des côtés AC et BC, et appartient, par conséquent, à la bissectrice du troisième angle C du triangle.

Fig. 44.

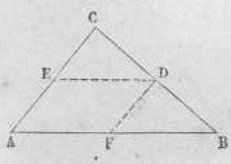


On démontrerait de la même manière que les bissectrices de deux angles *extérieurs* d'un triangle (60) se coupent sur la bissectrice de l'angle intérieur qui n'est adjacent à aucun de ces deux angles.

LEMME.

83. *La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié* (*fig.* 45).

Fig. 45.



Comme deux points déterminent une droite (4), et que par un point donné on ne peut mener qu'une parallèle à une droite (50), nous établirons cette proposition en démontrant que, *si par le milieu* D *du côté* BC *du triangle* ABC *on mène* DE *parallèle à* AB, *le point* E *est le milieu du côté* AC.

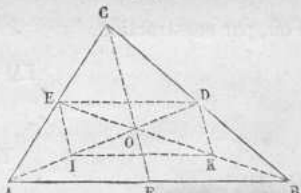
En effet, traçons en outre DF parallèle à AC. La figure AEDF est un parallélogramme (67), et l'on a (68) DF = EA, DE = FA. Les deux triangles égaux CED et DFB (30, 1°) donnent ensuite DF = CE et DE = BF. Il en résulte CE = EA et DE = $\frac{AB}{2}$.

THÉORÈME.

84. *Dans tout triangle, les trois médianes se rencontrent en un même point, situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté opposé* (*fig.* 46).

Menons les médianes AD, BE, CF, du triangle ABC. Les deux premières se coupent au point O, parce que la somme des deux angles d'un triangle est moindre que deux droits. Joignons d'une part les points D et E et, d'autre part, les milieux I et K des segments AO et BO. On a alors, d'après le lemme précédent, ED = IK = $\frac{AB}{2}$. De plus, les deux droites ED et IK, parallèles à AB, sont parallèles entre elles (50).

Fig. 46.



La figure EIKD est alors un parallélogramme (70), dont les diagonales se coupent en parties égales. Le point O, milieu de ID, est donc au tiers de AD; il est de même au tiers de BE.

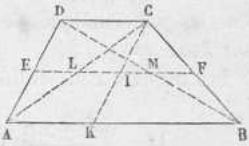
Le point de rencontre de deux médianes quelconques étant au tiers de chacune d'elles à partir du côté opposé, les trois médianes du triangle se rencontrent en un même point situé comme on vient de le dire.

THÉORÈME.

85. *Dans tout trapèze, la droite qui joint les milieux des deux côtés non parallèles est parallèle aux deux autres côtés et égale à leur demi-somme; les diagonales du trapèze interceptent sur cette même droite une longueur égale à la demi-différence des mêmes côtés* (*fig.* 47).

Soit le trapèze ABCD, dont les côtés non parallèles sont AD et BC. Par le point F, milieu de BC, menons FE parallèle à AB et par conséquent à CD (50); par le point C, menons CK parallèle à AD, et appelons I le point de rencontre de CK et de FE.

Fig. 47.



Le point I est alors le milieu de CK (83). Les deux figures CIED, IKAE, étant des parallélogrammes, on a CI = DE, IK = EA, c'est-à-dire que le point E est le milieu de AD; en même temps, IE = KA = CD.

Cela posé, on a (83)

$$FE = FI + IE = \frac{KB}{2} + CD = \frac{AB - CD}{2} + CD$$

ou

$$FE = \frac{AB + CD}{2}.$$

Si l'on considère maintenant les deux diagonales AC et BD, qui rencontrent la droite FE en L et en M, le triangle ACB montre que le point L est le milieu de AC et le triangle CBD montre que le point M est le milieu de BD. On a donc

$$LF = \frac{AB}{2}, \quad MF = \frac{CD}{2},$$

d'où, par soustraction,

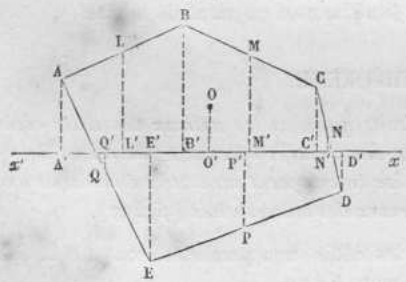
$$LM = \frac{AB - CD}{2}.$$

THÉORÈME.

86. *Étant donnée une série de points dans un plan, il existe toujours dans ce plan un point déterminé dont la distance à une droite quelconque du plan prise comme axe est la moyenne arithmétique des distances des points donnés au même axe.*

Pour que le théorème soit général, il faut affecter de signes contraires les distances des points donnés à l'axe choisi lorsque ces points tombent de côtés différents par rapport à l'axe. Nous regarderons comme *positives* les distances comptées *au-dessus* de l'axe et comme *négatives* les distances comptées *au-dessous*.

Fig. 48.



Soient (*fig.* 48) les points A, B, C, D, E, qui forment un contour polygonal. Prenons les milieux L, M, N, P, Q, des côtés de ce contour, et abaissons de tous les points indiqués des perpendiculaires AA', BB', ..., LL', MM', ..., sur l'axe xx'.

Les trapèzes consécutifs ainsi formés donnent évidemment (83)

$$LL' = \frac{AA' + BB'}{2}, \quad MM' = \frac{BB' + CC'}{2}, \quad NN' = \frac{CC' - DD'}{2},$$

$$-PP' = -\frac{DD' + EE'}{2}, \quad -QQ' = -\frac{EE' - AA'}{2}.$$

En ajoutant toutes ces égalités membre à membre, il vient

$$LL' + MM' + NN' - PP' - QQ' = AA' + BB' + CC' - DD' - EE'.$$

Le périmètre du nouveau contour polygonal formé par les points milieux des côtés du contour précédent est d'ailleurs toujours moindre que le périmètre de celui-ci. On a, en effet (35),

$$LM < LB + BM, \quad MN < MC + CN, \quad NP < ND + DP, \quad \ldots.$$

On voit par là que, si, partant du polygone donné ABCDE, on imagine successivement de nouveaux polygones, ayant pour sommets les milieux des côtés du polygone précédent, leurs périmètres iront toujours en diminuant, tandis que la somme algébrique des distances de leurs sommets à l'axe xx' restera invariable. Remarquons en même temps que, pour la série des polygones construits de cette manière, les pieds des perpendiculaires extrêmes (AA' et DD', QQ' et NN', ...) se rapprocheront indéfiniment.

A la limite, on pourra donc regarder le dernier polygone de la série comme ayant ses sommets réunis en un seul point O, dont la distance OO' à l'axe xx' devra être attribuée à chacun des sommets ainsi confondus. On aura alors

$$5\,OO' = AA' + BB' + CC' - DD' - EE'$$

ou

$$OO' = \frac{AA' + BB' + CC' - DD' - EE'}{5}.$$

Le point O porte le nom de *centre des moyennes distances* (1) des points donnés à l'axe xx'.

COROLLAIRES.

87. Désignons par Y la distance OO', par y l'une quelconque des distances AA', BB', CC', ... Si le nombre des points considérés est égal à m, on peut écrire symboliquement

$$Y = \frac{\Sigma y}{m}.$$

Il est entendu que Σy est une somme algébrique.

Les deux conditions $Y = 0$ et $\Sigma y = 0$ s'entraînent mutuellement. Toute droite passant par le centre des moyennes distances satisfait donc à la condition $\Sigma y = 0$, et réciproquement. Une pareille droite est, pour les points considérés, un *axe des moyennes distances*.

---

(1) *Voir* la *Théorie du centre des moyennes distances*, présentée d'une manière plus générale dans l'Ouvrage déjà cité : TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition (1891).

Dans un triangle, le centre des moyennes distances des trois sommets se confond avec le point de rencontre des médianes; car chacune de ces droites est, par rapport aux trois sommets, un axe des moyennes distances, puisqu'elle satisfait évidemment pour ces points à la condition $\Sigma y = 0$.

De même, *dans un quadrilatère quelconque, le centre des moyennes distances est au point de rencontre des deux médianes* (en appelant ainsi les droites qui joignent les milieux des côtés opposés du quadrilatère); car chacune de ces droites est évidemment, pour les quatre sommets, un axe des moyennes distances.

CHAPITRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

I. — Des arcs et des cordes.

88. La *circonférence de cercle* est le lieu géométrique de tous les points d'un plan à égale distance d'un point intérieur nommé *centre*. C'est la seule ligne courbe que l'on considère dans les éléments.

La portion de surface plane limitée par la circonférence s'appelle *cercle*.

Toute ligne menée du centre à la circonférence est un *rayon* : tous les rayons sont égaux. On désigne une circonférence par son rayon. Un point est *intérieur* ou *extérieur* à la circonférence suivant que sa distance au centre est *plus petite* ou *plus grande* que le rayon.

On appelle *arc* une portion quelconque de la circonférence : la *corde* d'un arc est la droite qui joint les extrémités de cet arc. A chaque corde correspondent deux arcs dont la somme constitue la circonférence : on ne s'occupe ordinairement que du plus petit de ces deux arcs.

Deux arcs de même rayon sont égaux lorsqu'on peut les faire coïncider. Pour ajouter deux arcs de même rayon, on les porte à la suite l'un de l'autre sur la circonférence correspondante : l'arc compris entre leurs extrémités non communes représente leur somme.

Toute corde passant par le centre est un *diamètre* : tous les diamètres sont égaux, puisqu'ils équivalent à deux fois le rayon.

La circonférence est une courbe *convexe*, c'est-à-dire qu'elle ne peut être coupée par une droite en plus de deux points. S'il en était autrement, on pourrait mener du centre à une même droite trois droites égales, ce qui est inadmissible. En

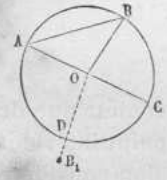
effet, *d'un point à une droite on ne peut mener plus de deux obliques égales* (41, 44).

THÉORÈME.

89. *La plus grande corde qu'on puisse mener dans une circonférence est un diamètre; tout diamètre divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales* (*fig.* 49).

Soit la corde AB; menons par le point A le diamètre AC et joignons le centre O au point B. Le triangle AOB donne

Fig. 49.



$$AB < AO + OB \quad \text{ou} \quad AB < AC.$$

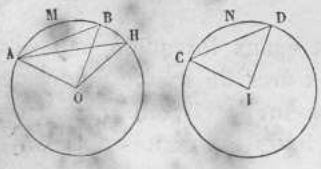
Si l'on plie maintenant la figure le long du diamètre AC pour rabattre la partie supérieure du cercle sur sa partie inférieure, les deux portions de circonférence déterminées par le diamètre AC se recouvriront complètement. S'il n'en était pas ainsi, si le point B, par exemple, tombait en B_1, les rayons OD et OB_1 seraient inégaux, de sorte qu'il y aurait des points de la circonférence inégalement éloignés du centre.

THÉORÈME.

90. *Dans le même cercle ou dans des cercles de rayons égaux, à des arcs égaux correspondent des cordes égales* (*fig.* 50).

Soient les deux cercles de rayons égaux OA et IC; ces deux cercles coïncideront nécessairement si l'on fait coïncider leurs centres. On peut les faire coïncider de manière que le point C tombe au point A. Si l'on suppose alors que l'arc CD soit égal à l'arc AB, le point D tombera au point B. Les deux cordes CD et AB coïncideront donc et seront égales.

Fig. 50.



THÉORÈME.

91. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, à un plus grand arc correspond une plus grande corde.*

Il est bien entendu que l'on considère toujours des arcs plus petits qu'une demi-circonférence.

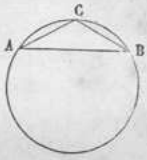
Soient le cercle IC égal au cercle OA et l'arc AH plus grand que l'arc CD (*fig.* 50); la corde AH sera plus grande que la corde CD.

Prenons l'arc AB égal à l'arc CD; la corde AB sera égale à la corde CD (90), et la question sera ramenée à comparer les deux cordes AH et AB. Joignons OB; le rayon OB se trouvera nécessairement dans l'angle AOH, puisque le point B doit se trouver entre les points A et H. L'angle AOB sera donc plus petit que l'angle AOH. Si l'on compare alors les deux triangles AOB et AOH qui ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux, on en conclura immédiatement AH > AB (38).

92. Les *réciproques* des deux propositions précédentes sont évidentes (40).

On voit qu'il existe entre deux cordes la même relation qu'entre les arcs qu'elles sous-tendent, pourvu que ces arcs soient plus petits qu'une demi-circonférence. Si l'on considérait des arcs plus grands qu'une demi-circonférence, la corde serait d'autant plus petite au contraire que l'arc serait plus grand.

Fig. 51.



Il est évident d'ailleurs que *le rapport de deux arcs n'est pas égal à celui de leurs cordes.*

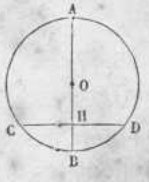
Si l'arc AB est double de l'arc AC, la corde AB est plus petite que AC + CB, c'est-à-dire plus petite que le double de la corde AC (*fig.* 51).

II. — Perpendiculaires et parallèles dans le cercle.

THÉORÈME.

93. *Le diamètre perpendiculaire à une corde divise en deux parties égales cette corde et les arcs qu'elle sous-tend* (*fig.* 52).

Fig 52.



Soient la corde CD et le diamètre AB qui lui est perpendiculaire; plions la figure le long du diamètre AB. Le point D tombera sur HC, puisque, les angles en H étant droits, HD prend la direction de HC; le point D tombera aussi sur la demi-circonférence ACB: il tombera donc au point C. HD étant égal à HC, le point H est le milieu de la corde CD. L'arc BD coïnci-

dant avec l'arc BC et l'arc AD coïncidant avec l'arc AC, les points B et A sont les milieux des arcs sous-tendus par la corde CD.

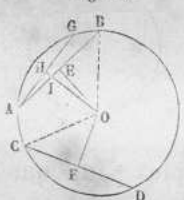
Le diamètre AB remplit *cinq* conditions : il passe par le centre, il est perpendiculaire sur la corde CD, il passe par son milieu et par les milieux des arcs qu'elle détermine. Deux de ces conditions suffisant pour déterminer une droite (4, 15, 21), dès qu'une droite remplira deux des cinq conditions énoncées, elle remplira forcément les trois autres.

Le lieu géométrique des points milieux d'un système de cordes parallèles est évidemment *le diamètre mené perpendiculairement à leur direction.*

THÉORÈME.

94. *Deux cordes égales sont également éloignées du centre, et, de deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre* (*fig.* 53).

Fig. 53.



Soient les deux cordes égales AB et CD. Abaissons du centre sur ces cordes les perpendiculaires OE et OF. Les points E et F seront les milieux des deux cordes (93). Les deux triangles rectangles EOB, FOC, seront donc égaux (47, 2°), et l'on aura OE = OF.

Prenons maintenant un arc AG plus petit que l'arc AB; la corde AG sera plus petite que la corde AB (91). La perpendiculaire OH abaissée du centre sur la corde AG coupera nécessairement la corde AB au point I, car les points O et H sont de côtés différents par rapport à AB. On aura donc OI < OH. OI étant une oblique à AB, on aura à plus forte raison OE < OH.

La *réciproque* de cette proposition est évidente, c'est-à-dire que les distances des cordes au centre ont entre elles la même relation *inverse* que les longueurs des cordes elles-mêmes, sauf dans le cas d'égalité.

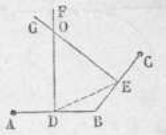
THÉORÈME.

95. *Trois points non en ligne droite déterminent une circonférence* (*fig.* 54).

Soient les trois points A, B, C, non situés en ligne droite. Menons les droites AB et BC. Élevons DF perpendiculaire sur le milieu de AB, EG perpendiculaire sur le milieu de BC. Ces

deux perpendiculaires se rencontreront en un point O; car, si l'on joint DE, la somme des angles internes d'un même côté ODE et OED est inférieure à deux angles droits. Le point O, étant à la fois également distant des points A et B et des points B et C, est à égale distance des trois points A, B, C. Par suite, si du point O comme centre, avec OA pour rayon, on décrit une circonférence, elle passe par les trois points donnés. Et comme il n'y a qu'un point O à égale distance des points A, B, C, il n'y a aussi qu'une circonférence passant par ces points.

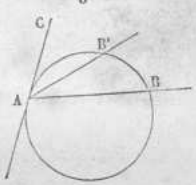
Fig. 54.



D'après ce théorème, *trois points non en ligne droite suffisant pour déterminer une circonférence, dès que deux circonférences ont trois points communs* (88), *elles coïncident.*

96. Lorsqu'une droite AB rencontre une circonférence en deux points A et B (*fig.* 55), on dit qu'elle est *sécante* à cette circonférence. Si la sécante AB tourne autour du point A pour venir prendre une position telle que AB', le second point d'intersection se rapproche du premier. Il arrive un moment où, la sécante venant en AC, *les deux points d'intersection* B *et* A *se réunissent en un seul.* On dit alors que la droite AC est *tangente* à la circonférence au point A, qu'on appelle *point de contact.* La circonférence étant une courbe *convexe* (88), la tangente AC ne peut avoir qu'un point commun avec elle; elle la *touche* en ce point. *On peut donc définir la tangente à la circonférence une droite qui n'a qu'un point commun avec elle;* mais cette définition, applicable seulement aux courbes convexes, est moins générale que la précédente.

Fig. 55.



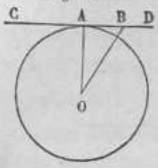
THÉORÈME.

97. *Toute perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence;* réciproquement, *toute tangente à la circonférence est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact* (*fig.* 56).

Soit CD perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA. Toute droite telle que OB sera oblique par rapport à CD. On aura

donc OB > OA, c'est-à-dire que le point B sera extérieur à la circonférence. Le point B étant quelconque, la droite CD n'aura que le point A commun avec la circonférence; elle lui sera tangente en ce point.

Fig. 56.



Supposons, réciproquement, que la droite CD soit tangente à la circonférence au point A. Le point B sera extérieur à la circonférence, et l'on aura OB > OA. Donc OA représentera la plus courte distance du centre à la droite CD et sera perpendiculaire sur cette droite.

Il résulte de ce théorème que, *par un point pris sur une circonférence, on peut toujours mener une tangente, mais une seule.*

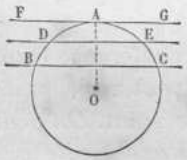
On voit aussi qu'*une tangente est parallèle au système de cordes que le diamètre mené au point de contact divise en deux parties égales* (93).

THÉORÈME.

98. *Deux parallèles interceptent sur une même circonférence des arcs égaux* (*fig.* 57).

Soient les deux parallèles DE, BC, et soit la tangente FG qui leur est parallèle. Le rayon OA mené au point de contact étant perpendiculaire aux cordes DE, BC, le point A est le milieu des arcs DE et BC, et l'on a arc AD = arc AE, arc AB = arc AC. Il en résulte évidemment arc BD = arc CE.

Fig. 57.



Si l'on considérait la tangente parallèle à la tangente FG, cette tangente correspondrait à l'autre extrémité du diamètre qui passe par le point A : les arcs compris entre ces deux tangentes seraient donc des demi-circonférences.

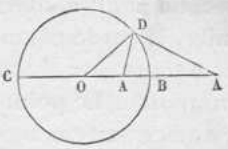
THÉORÈME.

99. *Pour trouver la plus courte ou la plus grande distance d'un point à la circonférence, il faut le joindre au centre* (*fig.* 58).

Soit le point A *extérieur* à la circonférence dont le centre est O. Joignons le point A au centre; en prolongeant AO, on obtient deux points d'intersection B et C. Menons une droite

quelconque AD. Le triangle OAD donne $OA < OD + AD$. Retranchant de part et d'autre le rayon OB et le rayon OD, il reste $AB < AD$. On a de même

Fig. 58.



$$AO + OD > AD,$$

ce qui revient à $AC > AD$.

Si le point A est *intérieur* à la circonférence, le triangle OAD donne

$$OD - OA < AD,$$

et, si l'on remplace OD par son égal OB, il vient encore

$$AB < AD.$$

On a de même

$$AD < OA + OD \quad \text{ou} \quad AD < AC.$$

La plus courte distance cherchée est donc AB; la plus grande est AC.

On appelle *normale* à une courbe la perpendiculaire élevée, au point de contact, à une tangente à cette courbe. *Dans le cercle, toutes les normales concourent au centre* (97). La plus courte et la plus grande distance, que nous venons de déterminer, se confondent avec les deux normales qu'on peut mener à la circonférence par le point donné. La *distance* du point A à la circonférence est alors la *normale* AB.

III. — Positions mutuelles de deux circonférences.

THÉORÈME.

100. *Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne qui joint leurs centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.*

Deux circonférences qui ne coïncident pas ne peuvent avoir plus de deux points communs (95) : on dit alors qu'elles sont *sécantes*.

Cela posé, la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde commune passe par les centres des deux circonférences (93); elle se confond donc avec la ligne des centres.

101. *Deux circonférences sont tangentes, lorsqu'elles ont en un point commun une tangente commune.*

Considérons deux circonférences sécantes. Si l'une reste fixe, et que l'autre tourne autour de l'un de ses points d'intersection avec la première circonférence, de manière que le second point d'intersection se rapproche indéfiniment du premier, la corde commune devient à la limite (96) une tangente commune aux deux circonférences au point d'intersection invariable. Le point de contact de cette tangente commune est nécessairement sur la ligne des centres dans sa position limite, car les rayons correspondants des deux circonférences ne peuvent former qu'une seule et même droite (15).

102. Deux circonférences ne peuvent occuper que cinq positions différentes l'une par rapport à l'autre. Elles peuvent être *extérieures* l'une à l'autre, *tangentes extérieurement*, *sécantes*, *tangentes intérieurement*, *intérieures* l'une à l'autre.

1° *Lorsque deux circonférences sont extérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons* (*fig.* 59). On a, en effet,

$$OO' = OA + AA' + O'A' \quad \text{ou} \quad OO' > OA + O'A'.$$

2° *Lorsque deux circonférences sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons*

Fig. 59.

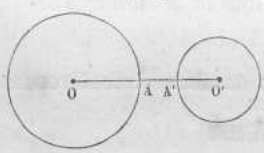
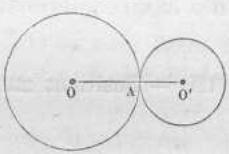


Fig. 60.



(*fig.* 60). En effet, le point de contact des deux circonférences étant sur la ligne des centres, on a

$$OO' = OA + O'A.$$

3° *Lorsque deux circonférences sont sécantes, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence* (*fig.* 61).

En effet, le triangle OBO' donne

$$OO' < OB + O'B \quad \text{et} \quad OO' > OB - O'B.$$

4° *Lorsque deux circonférences sont tangentes intérieure-*

ment, la distance des centres est égale à la différence des rayons (*fig.* 62). En effet, le point de contact des deux circonférences étant sur la ligne des centres, on a

$$OO' = OA - O'A.$$

5° *Lorsque deux circonférences sont intérieures l'une à*

Fig. 61.

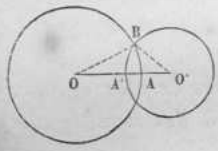


Fig. 62.

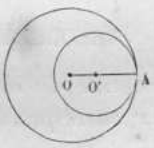
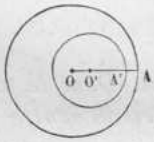


Fig. 63.



l'autre, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons (*fig.* 63). En effet, l'on a

$$OO' = OA - O'A' - AA' \quad \text{ou} \quad OO' < OA - O'A'.$$

Les *réciproques* de ces cinq propositions sont évidentes (40). Par exemple, si la distance des centres est égale à la somme des rayons, les deux circonférences sont tangentes extérieurement. En effet, si elles occupaient une des quatre autres positions possibles, la distance des centres serait plus grande ou plus petite que la somme des rayons.

IV. — Mesure des angles.

103. Comme nous l'avons déjà dit en Arithmétique, le *rapport* de deux grandeurs est le nombre qui mesure la première, lorsqu'on prend la seconde pour unité.

Lorsque deux grandeurs sont *commensurables*, leur rapport est *commensurable avec l'unité*, c'est-à-dire qu'il est exprimé par un nombre entier ou fractionnaire. Soient deux grandeurs A et B; désignons leur commune mesure par m, et supposons qu'on ait $A = 17m$, $B = 9m$. Le rapport de A à B sera

$$\frac{17m}{9m} \quad \text{ou} \quad \frac{17}{9}.$$

Lorsque deux grandeurs sont *incommensurables*, leur rapport est *incommensurable avec l'unité*, c'est-à-dire qu'il ne

peut être exprimé ni par un nombre entier ni par un nombre fractionnaire. Mais on peut l'obtenir avec telle approximation qu'on veut (11).

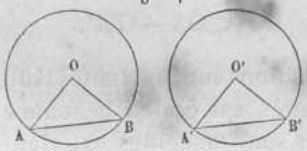
Il est nécessaire de définir ce qu'on doit entendre par *deux rapports incommensurables égaux*. Deux rapports incommensurables sont égaux lorsqu'ils ont la même expression numérique pour le même degré d'approximation, et cela quel que soit le degré d'approximation choisi.

THÉORÈME.

104. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre égaux correspondent à des arcs égaux, et réciproquement* (*fig.* 64).

On appelle *angle au centre* un angle dont le sommet se confond avec le centre de la circonférence considérée. Supposons que l'angle AOB soit égal à l'angle A'O'B', le rayon AO étant égal au rayon A'O'. Les deux triangles AOB, A'O'B', seront égaux d'après le deuxième cas d'égalité. La corde AB étant alors égale à la corde A'B', l'arc AB sera égal à l'arc A'B' (92).

Fig. 64.

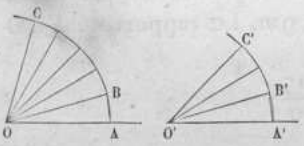


Réciproquement, si l'on suppose l'arc AB égal à l'arc A'B', la corde AB sera égale à la corde A'B', les deux triangles AOB, A'O'B', seront égaux d'après le troisième cas d'égalité, et l'on en conclura l'égalité des angles AOB, A'O'B'.

THÉORÈME.

105. *Le rapport de deux angles quelconques est égal à celui des arcs compris entre leurs côtés et décrits de leurs sommets comme centres avec un même rayon* (*fig.* 65).

Fig. 65.



Soient les angles AOC et A'O'C'. Décrivons de leurs sommets comme centres avec un même rayon les arcs AC, A'C'. Supposons d'abord que ces arcs aient une commune mesure contenue 5 fois, par exemple,

dans l'arc AC, et 3 fois dans l'arc A'C'. Nous aurons alors (103)

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}.$$

Joignons aux centres O et O' tous les points de division des arcs AC, A'C'. Nous décomposerons l'angle AOC en 5 angles partiels tels que AOB, et l'angle A'O'C' en 3 angles partiels tels que A'O'B'. Tous ces angles partiels, correspondant à des arcs égaux, seront égaux entre eux (104), et l'un d'eux pourra servir de commune mesure aux angles AOC, A'O'C'. On aura donc

$$\frac{AOC}{A'O'C'} = \frac{5}{3}.$$

Par conséquent, le rapport des deux angles est bien alors égal à celui des deux arcs interceptés.

Supposons maintenant que les deux arcs AC et A'C' n'aient pas de commune mesure. Divisons l'arc A'C' en un certain nombre m de parties égales; désignons par a l'une de ces parties. Nous aurons $A'C' = ma$. Portons a sur AC autant de fois que possible; supposons que AC contienne p fois a, plus un reste r, inférieur à a et nécessairement incommensurable avec a (s'il n'en était pas ainsi, les deux arcs considérés auraient une commune mesure). Nous aurons $AC = pa + r$. Il en résultera

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{pa + r}{ma} = \frac{p}{m} + \frac{r}{ma}.$$

La fraction $\frac{r}{a}$ étant inférieure à 1, la fraction $\frac{r}{ma}$ est inférieure à $\frac{1}{m}$. Par suite, $\frac{p}{m}$ représente le rapport $\frac{AC}{A'C'}$, avec une approximation marquée par $\frac{1}{m}$.

Si l'on joint aux centres O et O' tous les points de division des arcs AC, A'C', on décomposera l'angle A'O'C' en m angles partiels égaux entre eux (nous désignerons l'un de ces angles par A) et l'angle AOC en p angles partiels égaux à A, plus un angle R inférieur à A. On pourra donc écrire

$$A'O'C' = mA \quad \text{et} \quad AOC = pA + R.$$

Il en résultera

$$\frac{AOC}{A'O'C'} = \frac{pA + R}{mA},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\text{AOC}}{\text{A}'\text{O}'\text{C}'} = \frac{p}{m} + \frac{\text{R}}{m\text{A}}.$$

La fraction $\frac{\text{R}}{\text{A}}$ étant inférieure à 1, la fraction $\frac{\text{R}}{m\text{A}}$ est inférieure à $\frac{1}{m}$. Par suite, $\frac{p}{m}$ représente le rapport $\frac{\text{AOC}}{\text{A}'\text{O}'\text{C}'}$, avec une approximation marquée par $\frac{1}{m}$.

Pris avec le même degré d'approximation, les deux rapports $\frac{\text{AC}}{\text{A}'\text{C}'}$ et $\frac{\text{AOC}}{\text{A}'\text{O}'\text{C}'}$ sont donc égaux, et cela quel que soit le degré d'approximation, puisque la valeur de m est complètement arbitraire. Le théorème subsiste donc encore, lors même que le rapport des arcs est incommensurable.

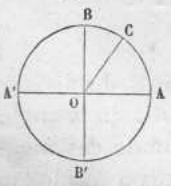
Le mode de raisonnement dont nous venons de faire usage est complètement général; dans tous les cas analogues à celui que nous venons de traiter, nous ne le répéterons donc pas, et nous renverrons à ce qui précède.

THÉORÈME.

106. *Si l'on fait correspondre l'unité d'arc à l'unité d'angle, la mesure de l'angle est exprimée par le même nombre abstrait que la mesure de l'arc qu'il intercepte sur une circonférence décrite de son sommet comme centre avec un rayon quelconque.*

Il est naturel de choisir l'angle droit pour unité d'angle (16).

Fig. 66.



Menons par le centre d'une circonférence deux diamètres AA', BB', perpendiculaires entre eux (*fig.* 66). On forme ainsi quatre angles au centre égaux entre eux : il en est donc de même des arcs correspondants (104). A l'angle droit correspond par suite un quart de circonférence, et nous devrons prendre ce quart de circonférence ou *quadrant* pour unité d'arc.

Si l'on veut comparer l'angle quelconque AOC à l'angle droit AOB, on a (105)

$$\frac{\text{AOC}}{\text{AOB}} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{AOC}}{1^{\text{dr}}} = \frac{\text{AC}}{1^{\text{qu}}}.$$

Le premier membre de l'égalité exprime la mesure de l'angle AOC, le second membre exprime la mesure de l'arc AC. Le même nombre abstrait représente donc bien les deux mesures.

Si l'on dit souvent qu'*un angle a pour mesure son arc*, c'est seulement pour abréger le discours. On doit dire : *La mesure de l'angle est égale à celle de l'arc qu'il intercepte.*

107. Pour faciliter l'expression des arcs, on a divisé la circonférence en 360 parties égales appelées *degrés;* chaque degré, en 60 parties égales appelées *minutes;* chaque minute, en 60 parties égales appelées *secondes.* Le quart de la circonférence renferme 90 degrés ou 5400 minutes ou 324000 secondes. On indique un arc de 32 degrés 25 minutes 27 secondes en écrivant $32°25'17''$.

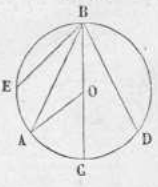
Un angle de $32°\,25'\,17''$ est alors un angle qui intercepterait un arc de $32°25'17''$ sur une circonférence décrite de son sommet comme centre *avec un rayon quelconque.* Pour comparer cet angle à l'angle droit, il faut comparer $32°25'17''$ à $90°$. Pour effectuer cette comparaison, on doit exprimer en secondes le nombre complexe $32°25'17''$ (*voir* t. I, *Arithmétique*) et remplacer $90°$ par $324000''$. On trouve ainsi pour le rapport cherché $\frac{116717}{324000}$.

THÉORÈME.

108. *La mesure d'un angle inscrit est égale à la mesure de la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

On appelle *angle inscrit* un angle formé par deux cordes qui se coupent en un même point de la circonférence.

Fig. 67.



Nous distinguerons trois cas (*fig.* 67).

Le centre de la circonférence peut tomber sur l'un des côtés de l'angle. Soit, par exemple, l'angle ABC. Joignons OA. Le triangle AOB sera isocèle, et l'angle A sera égal à l'angle B. L'angle AOC extérieur au triangle AOB, étant égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents (60), est égal au double de l'angle ABC. Comme angle au centre, l'angle AOC a la même mesure que son arc AC:

l'angle ABC, qui en est la moitié, a donc pour mesure celle de la moitié de l'arc AC (105).

Supposons que le centre de la circonférence tombe entre les deux côtés de l'angle, et considérons l'angle ABD. On mènera par le sommet B le diamètre BC. L'angle ABD étant la somme des angles ABC, CBD, sa mesure est égale à la somme de leurs mesures. Elle est donc encore la même que celle de la moitié de l'arc AD.

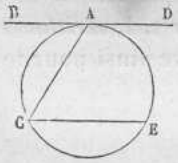
Enfin, si le centre est extérieur à l'angle considéré ABE, on mènera encore le diamètre BC. L'angle ABE étant la différence des angles EBC, ABC, sa mesure est égale à la différence de leurs mesures, c'est-à-dire à celle de la moitié de l'arc AE.

COROLLAIRES.

109. *La mesure de l'angle formé par une tangente et une corde aboutissant au point de contact est égale à la mesure de la moitié de l'arc sous-tendu par la corde* (*fig.* 68).

Soit l'angle BAC. Par le point C, menons CE parallèle à la tangente BD : les arcs AC et AE seront égaux (98). Les angles BAC, ACE, sont d'ailleurs égaux comme alternes-internes. La mesure de l'angle BAC est donc égale à la mesure de l'angle ACE, c'est-à-dire qu'elle est égale à celle de la moitié de l'arc AE ou de son égal AC.

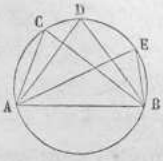
Fig. 68.



La moitié de l'arc AC correspondant à la mesure de l'angle BAC, la moitié de l'arc AEC correspondra à celle de l'angle supplémentaire CAD ; car la somme des mesures de deux angles supplémentaires doit être égale à la mesure de deux angles droits ou à une demi-circonférence.

110. *On appelle* segment *la portion de surface circulaire comprise entre un arc et sa corde :* à chaque corde, correspondent deux segments.

Fig. 69.



Tous les angles inscrits dans un même segment, c'est-à-dire ayant leurs sommets sur l'arc du segment et leurs côtés terminés aux extrémités de sa corde, *sont égaux.*

En effet, tous les angles tels que ACB, ADB, AEB, correspondent au même arc AB et ont la même mesure (*fig.* 69).

Lorsque le segment considéré est un demi-cercle, les angles inscrits sont droits, puisque leur mesure correspond au quart de la circonférence.

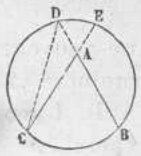
Suivant que le segment considéré est *plus petit* ou *plus grand* qu'un demi-cercle, les angles qui y sont inscrits sont *obtus* ou *aigus*, puisque leur mesure est alors *plus grande* ou *plus petite* que celle d'un angle droit.

On dit qu'un segment de cercle est *capable d'un angle donné*, lorsque les angles inscrits dans ce segment sont égaux à l'angle considéré.

THÉORÈME.

111. *La mesure de l'angle formé par deux sécantes qui se croisent à l'intérieur de la circonférence est égale à la somme des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle et leurs prolongements* (*fig.* 70).

Fig. 70.

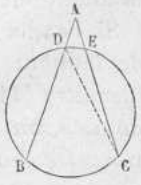


Soit l'angle BAC. Ses côtés interceptent l'arc BC, ses côtés prolongés interceptent l'arc DE. Joignons CD. L'angle BAC extérieur au triangle CAD est égal à la somme des deux angles intérieurs D et C. Sa mesure est, par suite, égale à la somme des mesures de ces deux angles. Elle équivaut donc à la moitié de l'arc BC, augmentée de la moitié de l'arc DE.

THÉORÈME.

112. *La mesure de l'angle formé par deux sécantes qui se croisent à l'extérieur de la circonférence est égale à la différence des mesures des arcs interceptés par les côtés de l'angle* (*fig.* 71).

Fig. 71.



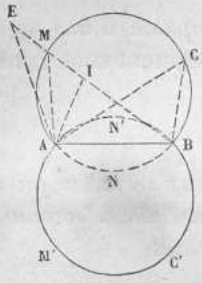
Soit l'angle BAC, dont les côtés interceptent les arcs BC et DE. Joignons CD. L'angle BDC extérieur au triangle ACD est égal à la somme des angles intérieurs A et C. L'angle BAC est donc égal à la différence des angles BDC et DCE. Sa mesure est alors égale à la différence des mesures de ces deux angles, c'est-à-dire qu'elle équivaut à la moitié de l'arc *concave* BC, diminuée de la moitié de l'arc *convexe* DE.

Le théorème subsiste, l'une des sécantes ou toutes les deux devenant tangentes.

COROLLAIRES.

113. *Le lieu des points d'où l'on voit une droite donnée sous un angle donné est formé de deux arcs de cercle passant par les extrémités de cette droite* (*fig.* 72).

Fig. 72.



Soient la droite donnée AB et un point C du lieu, situé au-dessus de AB : l'angle ACB est alors égal à l'angle donné. Considérons la circonférence déterminée par les trois points A, B, C. Tout point M de cette circonférence appartient au lieu; car l'angle AMB est égal à l'angle ACB comme inscrit dans le même segment (110). Aucun point E *extérieur* et aucun point I *intérieur* à cette circonférence ne peuvent appartenir au lieu énoncé; car l'angle AEB est moindre (112) et l'angle AIB est plus grand (111) que l'angle ACB. L'arc AMCB représente donc, *au-dessus* de AB, le lieu cherché.

Si l'on plie la figure autour de AB, on obtient l'arc AM'C'B, identique au premier arc, et qui représente évidemment, *au-dessous* de AB, le lieu cherché.

En résumé, *le lieu des points d'où l'on voit la droite donnée* AB *sous l'angle donné* ACB *se compose de deux arcs de cercle égaux entre eux, symétriques* (1) *par rapport à* AB *et passant par les extrémités* A *et* B.

Les arcs restants ANB, AN'B, représentent à leur tour le lieu des points d'où l'on voit la droite AB sous un angle supplémentaire de l'angle donné ACB (109).

Si l'angle donné est droit, les deux arcs AMCB, AM'C'B, deviennent les demi-circonférences décrites sur AB comme diamètre (110). *Le lieu des points d'où l'on voit une droite donnée sous un angle droit est* donc *la circonférence décrite sur cette droite comme diamètre.*

---

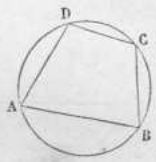
(1) Deux points sont dits *symétriques* par rapport à une droite, lorsque cette droite est perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les points considérés. Deux figures sont *symétriques* par rapport à une droite, lorsque chaque point de l'une a son symétrique sur l'autre.

114. *Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit dans une circonférence sont supplémentaires.*

On dit qu'un quadrilatère est *inscrit* dans une circonférence, lorsque ses quatre sommets sont sur cette circonférence.

Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 73). La mesure de l'angle A correspond à la moitié de l'arc BCD (108), celle de l'angle C correspond à la moitié de l'arc BAD. La somme des mesures des deux angles A et C équivaut donc à une demi-circonférence, c'est-à-dire que ces angles sont supplémentaires.

Fig. 73.



La *réciproque* de cette proposition est vraie.

Tout quadrilatère dans lequel deux angles opposés sont supplémentaires est inscriptible.

Supposons que les angles A et C remplissent cette condition. Si l'on fait passer une circonférence par les trois sommets D, A, B, elle passera par le quatrième sommet C; car, s'il n'en était pas ainsi, la mesure de l'angle C serait plus grande ou plus petite que celle de la moitié de l'arc BAD (111, 112); cet angle ne serait donc pas le supplément de l'angle A.

V. — Problèmes graphiques sur la ligne droite et la circonférence de cercle.

115. Résoudre *graphiquement* un problème, c'est construire certaines figures devant satisfaire à des conditions déterminées. L'exactitude de la solution dépend de l'exactitude des constructions. On ne doit employer, au point de vue élémentaire, que la ligne droite et la circonférence de cercle, c'est-à-dire que les lignes qu'on peut tracer à l'aide de la *règle* et du *compas*.

Nous ne dirons rien de l'usage et de la vérification de ces instruments, bien connus du lecteur. Nous ferons seulement remarquer qu'on doit toujours éviter de déterminer un point par l'intersection de deux lignes se coupant sous un angle trop aigu. Dans ce cas, en effet, par suite de l'épaisseur des lignes tracées, elles semblent coïncider dans une étendue plus ou moins grande, et il y a incertitude sur la position du point cherché.

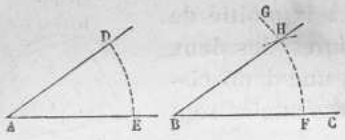
Les questions très simples que nous allons traiter permet-

tent d'arriver à la solution graphique de la plupart des problèmes de Géométrie.

PROBLÈME.

116. *Construire un angle égal à un angle donné* (*fig.* 74).

Fig. 74.



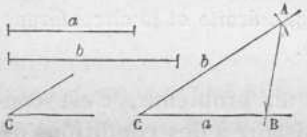
Soit l'angle donné A. Du sommet A comme centre, décrivons entre les côtés de cet angle un arc DE. Traçons une droite BC et, du point B comme centre, avec un rayon égal à AD, décrivons l'arc de cercle indéfini FG. Sur cet arc, à partir du point F, portons une ouverture de compas FH, égale à la corde DE. L'angle HBF est égal à l'angle donné, d'après l'égalité des arcs FH, DE (104).

Cette construction permet de trouver le troisième angle d'un triangle, quand on connaît les deux autres (59).

PROBLÈME.

117. *Construire un triangle, connaissant un angle et les deux côtés qui le comprennent* (*fig.* 75).

Fig. 75.

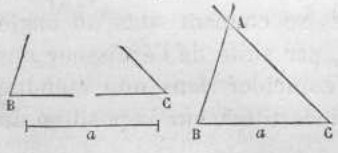


On donne l'angle C et les côtés *a* et *b*. Construisons un angle égal à l'angle C, et prenons sur les côtés de cet angle, à partir du sommet C, des longueurs égales aux côtés *a* et *b*. Le triangle ACB sera évidemment le triangle demandé. On aurait pu renverser l'ordre dans lequel on a porté les côtés *a* et *b* : on aurait obtenu le même triangle *retourné*.

PROBLÈME.

118. *Construire un triangle, connaissant un côté et deux angles* (*fig.* 76).

Fig. 76.



On peut toujours supposer que les deux angles donnés B et C sont adjacents au côté *a* (59). Prenons une longueur BC égale à *a*. Au point B, construisons un angle ABC égal à l'angle donné B; au point C,

un angle ACB égal à l'angle donné C. Les deux droites BA et CA se couperont au point A, et le triangle BAC sera le triangle demandé.

On aurait pu renverser l'ordre dans lequel on a construit les angles B et C, c'est-à-dire faire l'angle C au point B et l'angle B au point C : on aurait obtenu le même triangle *retourné*.

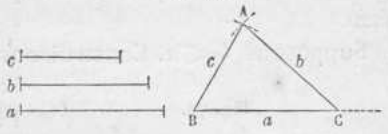
Pour que le problème soit possible, il faut que la somme des angles donnés B et C soit inférieure à deux angles droits (59, 55).

PROBLÈME.

119. *Construire un triangle, connaissant ses trois côtés* (*fig.* 77).

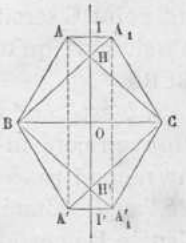
Soient *a*, *b*, *c*, les trois côtés donnés. On prendra une longueur BC égale à *a*. Du point B comme centre, avec un rayon égal à *c*, on décrira un arc de cercle. Du point C comme centre, avec un rayon égal à *b*, on décrira un autre arc de cercle. Si les trois côtés donnés sont bien ceux d'un triangle, le côté *a* sera plus petit que la somme des côtés *b* et *c* et plus grand que leur différence (33), c'est-à-dire que la distance des centres des deux arcs sera plus petite que la somme de leurs rayons et plus grande que la différence de ces mêmes rayons : ces deux arcs se couperont donc (102, 3°) en un point A, qui sera le troisième sommet du triangle demandé.

Fig. 77.



Les arcs de cercle se couperont aussi au-dessous de la ligne des centres (*fig.* 78), en un point A′, et le triangle A′BC répondra encore à la question. La ligne AA′, qui joint les deux sommets A et A′, sera coupée perpendiculairement par BC en deux parties égales (100). On dit alors que les deux triangles ABC, A′BC, sont *symétriques*. Si l'on échangeait les rayons *c* et *b*, on obtiendrait deux nouveaux triangles A_1BC, A'_1BC, symétriques par rapport à BC, qui ne seraient que les triangles ABC, A′BC, *retournés*. On peut remarquer que les quatre triangles BHC, AHA_1, BH′C, $A'H'A'_1$, sont nécessaire-

Fig 78.



ment isocèles. La perpendiculaire II′ élevée au milieu O de BC passe donc par les milieux I et I′ des droites AA_1, $A'A'_1$, parallèles à BC. Les sommets A et A_1, A′ et A'_1, sont donc deux à deux *symétriques* par rapport à la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC.

Lorsque deux figures planes quelconques ont, comme les deux triangles BAC, BA′C, leurs sommets symétriques par rapport à un même axe, elles sont égales, c'est-à-dire qu'elles peuvent coïncider, comme les deux triangles désignés, par *renversement* ou *rotation* autour de l'axe.

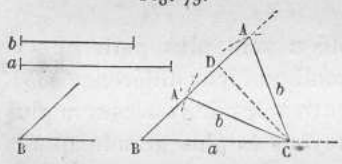
PROBLÈME.

120. *Construire un triangle, étant donnés deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.*

Soient donnés les côtés b et a et l'angle B. Le côté b peut être plus petit ou plus grand que le côté a; il peut lui être égal.

Supposons $b < a$. Construisons (*fig.* 79) un angle égal à l'angle donné B. Prenons sur l'un des côtés de cet angle une longueur BC égale à a. Du point C comme centre, avec b pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera l'autre côté de l'angle en deux points A et A′. Les deux triangles BCA, BCA′, rempliront les conditions de l'énoncé.

Fig. 79.



Pour que le problème soit possible dans le cas considéré, il faut que l'angle donné B soit aigu (59,32).

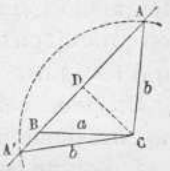
Si l'on avait $b = CD$, CD étant la perpendiculaire abaissée du point C sur le second côté de l'angle B, l'arc de cercle décrit du point C serait tangent au second côté de l'angle, et il n'y aurait plus qu'une solution, qui serait le triangle rectangle BCD.

Si b est $> a$ (*fig.* 80), le second point d'intersection A′ se trouve rejeté au-dessous du point B, et le second triangle BCA′ ne répond pas à la question, puisqu'il renferme le supplément de l'angle donné B au lieu de cet angle lui-même. Dans ce cas, l'angle B peut être obtus. S'il est droit, les deux solutions conviennent; mais elles n'en font en réalité qu'une seule,

parce qu'un triangle rectangle est déterminé lorsqu'on connaît son hypoténuse et l'un des côtés de l'angle droit (47, 2°).

Si b est égal à a, le second point d'intersection A' se confond avec le point B : il n'y a qu'une solution, qui est le triangle isocèle BCA.

Fig. 80.



Le problème n'est d'ailleurs possible dans aucun cas, lorsque le côté b est inférieur à la perpendiculaire CD, plus courte distance du point C au second côté de l'angle B.

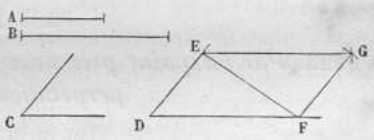
En résumé, un triangle n'est pas *déterminé* par la connaissance de deux de ses côtés et de l'angle opposé à l'un d'eux. Il faut examiner les données pour savoir s'il n'y a qu'une seule réponse à la question.

D'ailleurs, *le seul cas où il puisse y avoir deux solutions est celui où, l'angle donné étant aigu, le côté opposé à cet angle est le plus petit des deux côtés donnés.*

PROBLÈME.

121. *Construire un parallélogramme, étant donnés deux côtés adjacents* A *et* B *et l'angle* C *qu'ils forment* (*fig.* 81).

Fig. 81.

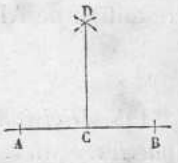


Cette question revient évidemment à construire un triangle EDF, dont on connaît deux côtés et l'angle compris; puis un triangle EFG, dont on connaît les trois côtés.

PROBLÈME.

122. *Par un point donné sur une droite donnée, élever une perpendiculaire à cette droite* (*fig.* 82).

Fig. 82.



Soit la droite AB. De part et d'autre du point donné C, on détermine des longueurs égales CA et CB. Des points A et B comme centres, avec un même rayon plus grand que la moitié de AB ou que AC, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en D, puisque la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence qui est nulle.

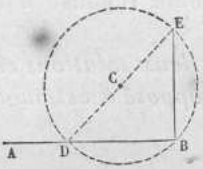
La droite CD sera la perpendiculaire demandée, car, les deux points C et D étant également éloignés des points A et B, CD est perpendiculaire sur le milieu de AB (46).

La construction est d'autant plus exacte que les points C et D sont plus éloignés l'un de l'autre : deux points étant très rapprochés, une erreur très petite sur la position de l'un d'eux en produit en effet une très grande sur la direction de la droite qui les joint.

On peut, comme vérification, déterminer au-dessous de AB un troisième point de la perpendiculaire CD.

Si l'on ne pouvait pas prolonger la droite AB au delà du point B, et si la perpendiculaire devait être élevée au point B, on pourrait opérer comme il suit.

Fig. 83.

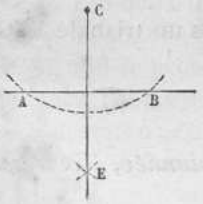


D'un point C pris hors de la droite AB (*fig.* 83), on décrirait une circonférence ayant CB pour rayon. Cette circonférence couperait AB en un second point D. On mènerait le diamètre DCE, et la droite BE serait la perpendiculaire demandée; car l'angle DBE est droit comme inscrit dans une demi-circonférence (110).

PROBLÈME.

123. *Par un point pris hors d'une droite, lui mener une perpendiculaire* (*fig.* 84).

Fig. 84.



Du point donné C, avec un rayon convenable, on décrit un arc de cercle qui coupe la droite donnée AB en deux points A et B. Des points A et B comme centres, avec un même rayon plus grand que la moitié de AB, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en E au-dessous de AB. La ligne CE, perpendiculaire sur le milieu de AB, est la perpendiculaire demandée.

PROBLÈME.

124. *Division d'une droite, d'un arc ou d'un angle, en deux parties égales.*

Pour diviser la droite AB en deux parties égales (*fig.* 85) des points A et B comme centres, avec un même rayon not-

blement plus grand que la moitié de AB, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en deux points C et D, au-dessus et au-dessous de AB. La droite CD, perpendiculaire sur le milieu de AB, détermine le milieu E de cette ligne. On voit que le

Fig. 85.

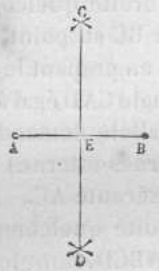
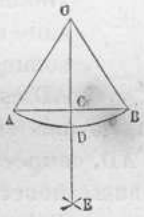


Fig. 86.



problème proposé revient à celui-ci : *Élever une perpendiculaire sur le milieu d'une droite.*

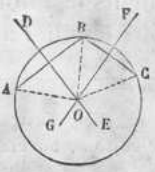
Si l'on veut diviser l'arc AB ou l'angle AOB en deux parties égales (*fig.* 86), on détermine comme précédemment un point E à égale distance des points A et B. En joignant ce point E au centre de l'arc ou au sommet de l'angle, c'est-à-dire au point O, on a la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde AB. Cette perpendiculaire divise l'arc AB au point D en deux parties égales (93); elle divise donc aussi l'angle AOB en deux parties égales (104).

En appliquant cette construction aux moitiés obtenues et en continuant de la même manière, on voit qu'on pourra partager une droite, un arc ou un angle, en un nombre de divisions marqué par une puissance quelconque de 2.

PROBLÈME.

125. *Retrouver le centre d'une circonférence ou d'un arc de cercle* (*fig.* 87).

Fig. 87.



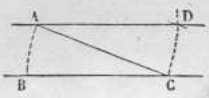
On marquera trois points A, B, C, sur la circonférence ou l'arc donné; on obtiendra ainsi deux cordes AB et BC. On élèvera la perpendiculaire DE sur le milieu de AB, la perpendiculaire FG sur le milieu de BC. Ces deux perpendiculaires se croiseront en un point O qui sera le centre cherché (93).

PROBLÈME.

126. *Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.*

Soient la droite BC et le point A (*fig.* 88). Par le point A, on mène une droite quelconque AC qui vienne couper BC au point C. On fait ensuite avec AC, en prenant le point A pour sommet, un angle CAD égal à l'angle ACB. AD est la parallèle demandée, puisque les angles égaux formés sont alternes-internes par rapport aux droites BC, AD, coupées par la sécante AC.

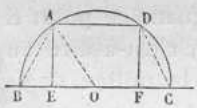
Fig. 88.



On aurait pu aussi mener une droite quelconque telle que AB, et achever le parallélogramme ABCD, dont les deux côtés adjacents AB, BC, comprennent l'angle ABC (121).

On aurait pu abaisser du point A une perpendiculaire AE sur BC (*fig.* 89) ; puis, au point F, élever FD perpendiculaire sur BC. Si l'on prend FD égale à AE, le point D appartient à la parallèle menée par le point A à la droite BC (70).

Fig. 89.



On aurait pu encore prendre un point O quelconque sur BC (*fig.* 89), et du point O comme centre, avec OA pour rayon, décrire une demi-circonférence arrêtée aux points B et C. Portant alors la distance BA de C en D, le point D appartient à la parallèle menée par le point A à BC (98).

SCOLIE.

127. On peut abréger toutes les constructions que nous venons d'indiquer à l'aide de l'*équerre* et du *rapporteur*. On pourra notamment, en se servant de l'équerre et de la propriété des angles correspondants, tracer très exactement des parallèles. Nous n'entrerons dans aucun détail sur ces instruments (1), dont la pratique de l'art du dessin a dû rendre l'emploi familier à tous nos lecteurs.

---

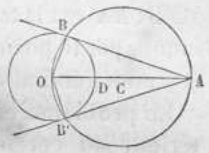
(1) *Voir* TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition, ou ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, par les mêmes, 4e édition.

PROBLEME.

128. *Par un point donné hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle* (*fig.* 90).

Soient le cercle dont le centre est O, et le point A. Joignons OA et, sur OA comme diamètre, décrivons une circonférence qui rencontrera forcément la circonférence donnée en deux points B et B'. Les droites AB et AB' seront les tangentes demandées. En effet, les angles OBA et OB'A sont droits comme angles inscrits dans une demi-circonférence. Les droites AB, AB', sont donc perpendiculaires à l'extrémité des rayons OB, OB' (97).

Fig. 90.



Remarquons l'égalité des deux triangles rectangles OBA, OB'A, qui ont la même hypoténuse OA et OB = OB'. On en conclut l'égalité des deux tangentes AB et AB', et celle des deux angles OAB, OAB'.

Ainsi, *par un point pris hors d'un cercle, on peut lui mener deux tangentes*; *ces tangentes sont égales, et elles sont également inclinées sur la ligne qui joint leur point de concours au centre.*

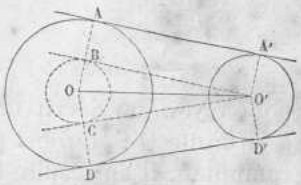
PROBLÈME.

129. *Mener une tangente commune à deux circonférences données.*

La tangente commune peut laisser les deux circonférences d'un même côté ou de côtés différents. Dans le premier cas, c'est une tangente commune *extérieure;* dans le second, c'est une tangente commune *intérieure.*

1° Soient les deux circonférences O et O' et la tangente commune extérieure AA'. Menons les rayons OA et O'A'. Ces rayons seront parallèles et, si l'on mène par le point O' la parallèle O'B à AA', la figure O'A'AB sera un rectangle, de sorte que OB représentera la différence des deux rayons OA et O'A'. Par conséquent, si du point O comme centre, avec OB pour rayon, on décrit une circonférence, elle sera tangente à la droite O'B

Fig. 91.



rence. Du point O', on mène à cette circonférence la tangente O'F. Par le point E, où le rayon OF rencontre la circonférence O, on trace EE' parallèle à O'F : EE' est la tangente commune demandée. Comme on peut mener par le point O' au cercle OF deux tangentes O'F et O'G, il y a en général deux solutions EE' et HH'.

Le problème est possible tant que le point O' demeure extérieur au cercle OF, c'est-à-dire tant que la distance des centres des circonférences données est plus grande que la somme de leurs rayons. Si la distance OO' est égale à la somme des rayons, le point O' se trouve sur la circonférence OF et sur la ligne des centres : les deux solutions se réduisent à une seule qui est la tangente commune aux deux circonférences données, alors tangentes extérieurement.

Ainsi, deux circonférences extérieures l'une à l'autre admettent deux tangentes communes intérieures. Deux circonférences tangentes extérieurement n'en admettent plus qu'une seule. Il n'existe aucune solution, lorsque les circonférences données sont sécantes, tangentes intérieurement ou intérieures l'une à l'autre.

Les deux tangentes communes extérieures se coupent en un même point situé sur la ligne des centres. En effet, les points O et O' appartiennent à la bissectrice de l'angle qu'elles forment.

Les deux tangentes communes intérieures se coupent aussi en un même point S *de la ligne des centres* (*fig.* 92). En effet, elles forment deux angles opposés par le sommet, les points O et O' appartiennent aux bissectrices de ces angles, et les bissectrices des angles opposés par le sommet sont en ligne droite.

Dans le cas des tangentes communes extérieures, si les rayons des deux circonférences données étaient égaux, la circonférence OB se réduirait à un point, et la tangente O'B, parallèle à la direction de la tangente commune, se confondrait avec la ligne des centres. Les deux tangentes extérieures sont donc alors parallèles à la ligne des centres. Quant aux tangentes intérieures, leur point de concours S est au milieu de la distance des centres : c'est ce que prouve la comparaison des triangles OSE, O'SE' qui, dans l'hypothèse indiquée, deviennent égaux.

On doit appliquer la méthode que nous avons employée pour résoudre la question proposée, toutes les fois qu'on n'aperçoit

pas rapidement la solution du problème. *Cette méthode consiste à supposer le problème résolu,* à tracer la figure correspondante, et à étudier sur cette figure la liaison des données et des inconnues.

PROBLÈME.

130. *Mener une circonférence tangente à trois droites qui se coupent* (*fig.* 93 *et* 94).

Les trois droites données forment un triangle ABC. Si l'on mène les bissectrices des angles de ce triangle, elles se croisent en un point O (*fig.* 93) également distant des trois

Fig. 93.

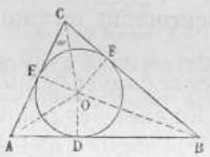
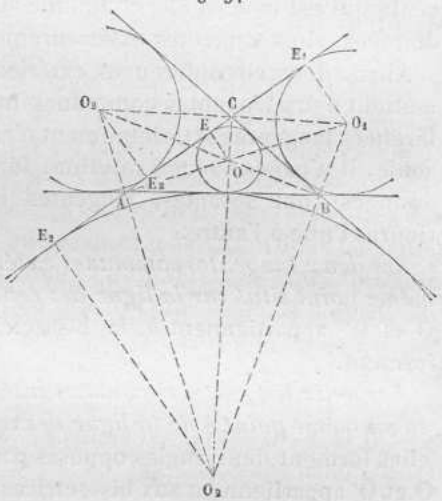


Fig. 94.



côtés (82). Par suite, si, de ce point O comme centre, avec sa distance OD au côté AB comme rayon, on décrit une circonférence, elle touchera (97) les trois côtés du triangle aux points D, E, F. On dit alors que la circonférence OD est *inscrite* dans le triangle ABC qui, à son tour, lui est *circonscrit.*

Si l'on trace maintenant (*fig.* 94) les bissectrices des angles *extérieurs* du même triangle, elles forment un second triangle $O_1O_2O_3$ dont les sommets, situés sur les prolongements des bissectrices des angles intérieurs du premier (82), sont aussi à égale distance des trois droites données. De là, trois autres circonférences O_1E_1, O_2E_2, O_3E_3, répondant à la question. Chacune d'elles est tangente à l'un des côtés du triangle ABC

et aux prolongements des deux autres côtés, et on les qualifie, par rapport à ce triangle, de circonférences *exinscrites*.

En résumé, on peut mener en général quatre circonférences tangentes à trois droites données.

Si l'on désigne par a, b, c, les trois côtés BC, CA, AB, du triangle ABC et par $2p$ son *périmètre* $a+b+c$, on démontre facilement, en s'appuyant sur l'égalité des tangentes menées d'un même point à une même circonférence (128), que les distances de l'un des sommets du triangle aux points de contact de l'un des côtés qui y passent avec les quatre circonférences tangentes, représentent les longueurs p, $p-a$, $p-b$, $p-c$. Ainsi, en se reportant à la *fig.* 94, on aura, sur le côté AC,

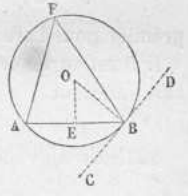
$$AE_1 = p, \quad AE = p-a, \quad AE_2 = p-b, \quad AE_3 = p-c.$$

PROBLÈME.

131. *Décrire sur une droite donnée comme corde, un segment capable d'un angle donné* (*fig.* 95).

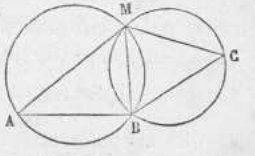
On veut décrire une circonférence passant par les points A et B, et telle, que l'un des deux segments correspondant à la corde que ces points déterminent soit capable de l'angle donné (110).

Fig. 95.



Menons par le point B une droite CD faisant au-dessous de AB un angle ABC égal à l'angle donné. Elevons BO perpendiculaire à CD et EO perpendiculaire à AB, le point E étant le milieu de AB. Les droites BO et EO se coupent nécessairement au point O. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, décrivons une circonférence qui sera la circonférence demandée. En effet, la droite CD est tangente à cette circonférence, et l'angle donné ABC a pour mesure la moitié de l'arc AB. Or tous les angles AFB, inscrits dans le segment supérieur à AB, ont aussi pour mesure la moitié de l'arc AB : ils sont donc égaux à l'angle ABC, et le segment AFB est bien capable de l'angle donné.

Fig. 96.



Lorsqu'on veut rapporter sur une carte (*fig.* 96) un point remarquable M, on choisit trois points

A, B, C, déjà marqués sur cette carte. On mesure, à l'aide d'instruments spéciaux, les angles AMB, BMC. En décrivant sur AB et sur BC des segments capables des angles AMB, BMC, on obtient deux lieux géométriques du point M. Ce point se trouvera donc sur la carte, au second point d'intersection des deux circonférences qui ont déjà le point B commun.

VI. — Exercices et questions complémentaires.

THÉORÈME.

132. *Lorsqu'on considère une circonférence et une droite extérieure, les extrémités du diamètre perpendiculaire à la droite sont les points de cette circonférence dont les distances à la droite sont maximum et minimum* (*fig.* 97).

Soient la circonférence C et la droite extérieure AB à laquelle le diamètre DD' est perpendiculaire en H. Menons les deux tangentes DT, D'T', et abaissons, d'un point quelconque M de la circonférence, MK perpendiculaire sur AB.

Fig. 97.



On a MK > GK, c'est-à-dire MK > DH, et MK < G'K, c'est-à-dire MK < D'H.

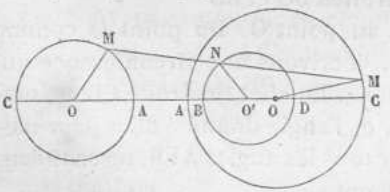
S'il s'agit d'une droite *sécante* A'B' (supposée sur la figure parallèle à AB), les points D et D' sont évidemment les points de distance maximum, le premier pour l'arc A'DB', le second pour l'arc A'D'B'.

H'D est ce qu'on appelle la *flèche* de l'arc supérieur, H'D' est celle de l'arc inférieur.

THÉORÈME.

133. *Lorsque deux circonférences sont extérieures ou intérieures, la plus grande et la plus petite des droites qu'on peut mener entre les deux circonférences sont dirigées suivant la ligne des centres* (*fig.* 98).

Fig. 98.



En effet, menons entre les deux circonférences O et O' une droite quelconque MN et désignons par AC et BD les diamètres de ces circonférences qui sont confondus avec la ligne des centres

Le quadrilatère OO'NM donne, si les circonférences sont *extérieures*,

$$OO' < OM + MN + NO', \quad \text{c'est-à-dire} \quad AB < MN;$$

et, si les circonférences sont *intérieures*,

$$OM \quad \text{ou} \quad OO' + O'B + BA < OO' + O'N + NM,$$

c'est-à-dire

$$AB < MN.$$

Le même quadrilatère permet de poser, si les circonférences sont *extérieures*,

$$MO + OO' + O'N > MN, \quad \text{c'est-à-dire} \quad CD > MN;$$

et, si les circonférences sont *intérieures*,

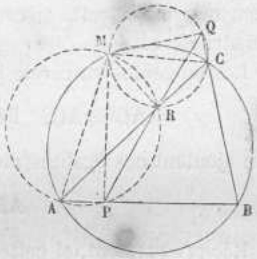
$$MO + OO' + O'N > MN, \quad \text{c'est-à-dire} \quad CB > MN.$$

THÉORÈME.

134. *Lorsqu'un triangle est inscrit dans une circonférence, les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la circonférence sur les trois côtés du triangle sont en ligne droite* (*fig.* 99).

Soient le triangle ABC et la circonférence circonscrite. D'un point quelconque M de cette circonférence, abaissons sur les trois côtés du triangle les perpendiculaires MP, MQ, MR : il faut démontrer que les deux droites RP et RQ n'en font qu'une seule.

Fig. 99.



Le quadrilatère AMCB étant inscrit, l'angle MAB, supplément de l'angle MCB, est égal à l'angle MCQ. Les deux triangles AMP, CMQ, étant rectangles, il en résulte l'égalité des angles AMP et CMQ, compléments des précédents.

Or, la circonférence décrite sur AM comme diamètre contient les points P et R, puisque les angles APM, ARM, sont droits. De même, la circonférence décrite sur MC comme diamètre passe par les points Q et R.

Dans la première circonférence AM, les angles AMP et ARP sont égaux comme inscrits dans un même segment; dans la seconde circonférence MC, les angles CMQ et CRQ sont égaux pour la même raison. On a donc, finalement, angle ARP = angle CRQ. Comme ces angles sont dans la position d'opposés par le sommet et que les deux côtés RA et RC sont en ligne droite, il en est de même des côtés RP et RQ.

Réciproquement, *tout point* M *tel, que les pieds* P, Q, R *des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés du triangle* ABC *soient en ligne droite, appartient à la circonférence circonscrite à ce triangle.*

En effet, s'il en est ainsi pour un point M quelconque du plan du triangle (*fig.* 99), les angles ARP et CRQ sont égaux comme opposés par le sommet. D'ailleurs, les quadrilatères MRPA et MRCQ sont inscriptibles, puisque, des points R et P, on voit MA sous un angle droit (113)

et que, des points R et Q, on voit MC sous un angle droit. Or, les angles ARP et AMP étant alors égaux comme inscrits dans le même segment, et les angles CRQ et CMQ satisfaisant à la même condition, les deux angles AMP et CMQ sont eux-mêmes égaux. Il en résulte, en ajoutant de part et d'autre l'angle PMC, que l'angle total AMC, égal à l'angle total PMQ, est alors comme ce dernier, le supplément de l'angle B, de sorte que le quadrilatère AMCB est inscriptible (114), et que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Le lieu des points du plan tels, que les pieds des perpendiculaires abaissées de ces points sur les côtés d'un triangle soient en ligne droite, est donc *le cercle circonscrit au triangle.*

La droite PRQ est appelée *la droite de Simson* du point M, par rapport au triangle ABC.

THÉORÈME.

135. *Dans tout quadrilatère circonscrit à une circonférence, les sommes formées par les côtés opposés sont égales* (*fig.* 100).

Un quadrilatère est *circonscrit* à une circonférence, lorsque ses côtés sont tangents à cette circonférence qui, à son tour, est *inscrite* dans le quadrilatère.

Les tangentes au cercle issues d'un même point étant égales, on a

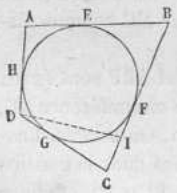
$$AE = AH, \quad BE = BF, \quad CG = CF, \quad DG = DH.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient évidemment

$$AB + CD = AD + BC.$$

Réciproquement, si cette condition est remplie, le quadrilatère est *circonscriptible,* c'est-à-dire que le cercle tangent intérieurement aux trois côtés DA, AB, BC, et dont le centre est à la rencontre des bissectrices des angles A et B, est nécessairement tangent au quatrième côté CD du quadrilatère. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait mener par le sommet D une tangente DI à cette circonférence. Le quadrilatère DABI étant circonscrit, on aurait à la fois

Fig. 100



$$AB + DI = AD + BI \quad \text{et} \quad CD < DI + IC.$$

On en conclurait donc, en ajoutant,

$$AB + CD < AD + BC;$$

ce qui est contre l'hypothèse.

CHAPITRE III.

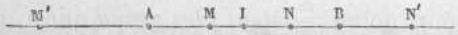
LES LIGNES PROPORTIONNELLES.

I. — Des lignes proportionnelles dans le triangle.

LEMME.

136. *Si l'on considère sur une droite indéfinie deux points fixes* A *et* B, *il existe sur cette droite un point et un seul dont*

Fig. 101.



le rapport des distances aux points A *et* B *ait une valeur donnée* (*fig.* 101).

Le rapport donné peut être *positif* ou *négatif*, il peut être *plus petit* ou *plus grand* que 1.

Soient I le milieu de AB, l la distance des points A et B, et $\frac{\alpha}{\beta}$ le rapport donné supposé d'abord *moindre que* 1 et pris en valeur absolue.

Si l'on suppose que le point *intérieur* M, situé nécessairement *à gauche* de I, réponde à la question, on doit avoir

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad MA + MB = l.$$

Il en résulte

$$\frac{MA}{MA + MB} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad MA = \frac{\alpha l}{\alpha + \beta};$$

ce qui détermine un seul point M *intérieur*.

Si l'on suppose que le point *extérieur* M', situé nécessairement *à gauche* de A, réponde aussi à la question, on doit avoir

$$\frac{M'A}{M'B}=\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{et} \quad M'B-M'A=l.$$

Il en résulte

$$\frac{M'A}{M'B-M'A}=\frac{\alpha}{\beta-\alpha} \quad \text{et} \quad M'A=\frac{\alpha l}{\beta-\alpha};$$

ce qui détermine un seul point M' *extérieur*.

Il semble donc que les deux points M et M' satisfassent tous deux à la condition imposée; mais, si l'on fait intervenir les signes des segments, les deux segments MA et MB sont de signes contraires, tandis que les deux segments M'A et M'B sont de même signe (12). Les deux rapports qui correspondent aux points M et M' sont donc égaux en valeur absolue, mais de signes contraires, et l'on a en réalité

$$\frac{MA}{MB}=-\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{M'A}{M'B}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

En raisonnant absolument de la même manière, on voit que, le rapport donné $\frac{\alpha'}{\beta'}$ étant *plus grand* que 1, deux points N et N' situés *à droite* du milieu I de AB, l'un *intérieur*, l'autre *extérieur* à AB, répondent à la question si le rapport $\frac{\alpha'}{\beta'}$ est pris en valeur absolue; mais que, si l'on tient compte des signes des segments, le point N répond à ce rapport pris négativement et le point N' à ce rapport pris positivement. On a donc en réalité

$$\frac{NA}{NB}=-\frac{\alpha'}{\beta'} \quad \text{et} \quad NA=\frac{l\alpha'}{\alpha'+\beta'}, \quad \frac{N'A}{N'B}=\frac{\alpha'}{\beta'} \quad \text{et} \quad N'A=\frac{l\alpha'}{\alpha'-\beta'}.$$

COROLLAIRE.

137. Si l'on ne tient pas compte des signes, on a, dans le premier cas par exemple $\left(\frac{\alpha}{\beta}<1\right)$, la proportion

$$\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}. \tag{1}$$

Cette proportion est une *proportion harmonique*. On a vu,

en effet (Tome I, *Questions proposées sur l'Arithmétique*, n° 141, p. 710), que trois nombres a, b, c, rangés par ordre de grandeur, forment une proportion harmonique quand on a

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c};$$

b est la *moyenne harmonique* entre a et c qui sont les deux *extrêmes*.

Or, on a ici

$$MA=MM'-M'A,\quad MB=M'B-MM',$$

d'où, en changeant les signes des deux termes du premier rapport de la proportion (1)

$$\frac{M'A-MM'}{MM'-M'B}=\frac{M'A}{M'B};$$

MM' est donc la moyenne harmonique entre les extrêmes M'A et M'B.

On dit alors que les deux points M et M' divisent *harmoniquement* la droite AB ou sont *conjugués harmoniques* par rapport à cette droite. Comme on peut écrire la proportion (1), en échangeant les moyens,

$$\frac{AM}{AM'}=\frac{BM}{BM'},$$

A et B sont à leur tour *conjugués harmoniques* par rapport à la droite MM'.

Si l'on tient compte des signes, la forme exacte de la proportion harmonique (1) est

$$\frac{MA}{MB}=-\frac{M'A}{M'B}\quad\text{ou}\quad\frac{MA}{MB}:\frac{M'A}{M'B}=-1.$$

THÉORÈME.

138. *Toute droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle divise les deux autres en parties proportionnelles* (*fig.* 102).

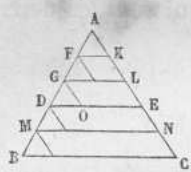
Soient le triangle ABC, et la droite DE parallèle au côté BC. Supposons que les deux segments AD et DB admettent une commune mesure, et qu'elle soit contenue 3 fois dans AD et

2 fois dans DB, par exemple. On aura

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}.$$

Par les points de division F, G, M, menons des parallèles à BC ou à DE. Les divisions que toutes ces parallèles déterminent sur le côté AC sont aussi égales entre elles. En effet, traçons GO parallèle à AC, et comparons les deux triangles AFK et GDO. Ces triangles sont égaux, car leurs côtés égaux AF et GD sont adjacents à des angles égaux chacun à chacun comme correspondants. On en conclut AK = GO. Mais la figure GOEL étant un parallélogramme, on a

Fig. 102.



$$GO = LE, \quad \text{d'où} \quad AK = LE.$$

On prouverait de la même manière l'égalité de AK et des autres divisions de AC. AK peut donc servir de commune mesure aux deux segments AE et EC, et l'on a

$$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2},$$

puisque cette commune mesure est contenue 3 fois dans AE et 2 fois dans EC.

Les segments AD et DB d'une part, AE et EC d'autre part, présentant le même rapport, ces segments sont *proportionnels*, et l'on a

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

On en déduit (*Arithm.*, 393)

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

COROLLAIRE.

139. *Deux droites quelconques sont coupées en parties proportionnelles par une série de parallèles* (*fig.* 103).

Soient les deux droites AC et DF coupées par les parallèles AD, BE, CF. Menons AH parallèle à DF. Le triangle CAH

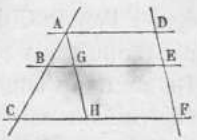
donne alors

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH}.$$

Mais AG = DE, GH = EF (68). On a donc

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

Fig. 103.



On a aussi

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} \quad \text{et} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}.$$

140. Réciproquement, *si une droite divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième côté* (*fig.* 102).

Soit le triangle ABC. Supposons que la droite DE divise les côtés AB et AC en parties proportionnelles : DE sera parallèle au côté BC. En effet, si l'on mène par le point D une parallèle au côté BC, elle coupera le côté AC en parties proportionnelles à AD et à DB. Le côté AC étant déjà divisé au point E de cette manière, cette parallèle passera nécessairement par le point E (136), c'est-à-dire qu'elle se confondra avec la droite DE.

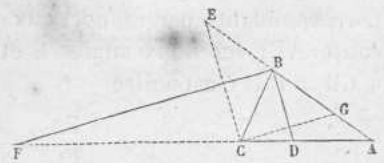
Il est sous-entendu que les points D et E doivent être placés d'une manière analogue sur les côtés AB et AC.

Si, dans le théorème direct (138), les segments AD et DB n'avaient pas de commune mesure, on aurait recours au mode de démonstration déjà indiqué (105).

THÉORÈME.

141. *La bissectrice de l'angle d'un triangle divise le côté opposé en segments proportionnels aux côtés qui comprennent l'angle* (*fig.* 104).

Fig. 104.



Soient le triangle ABC et la bissectrice BD de l'angle B : il faut prouver qu'on a

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CB}.$$

Par le point C, menons à BD la parallèle CE jusqu'à la ren-

contre de AB prolongé. On a alors dans le triangle ACE (138) :

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}.$$

Considérons le triangle CBE. L'angle en C de ce triangle est égal à l'angle CBD, puisque ces angles sont alternes-internes par rapport aux parallèles CE et BD coupées par la sécante CB. De même, l'angle en E est égal à l'angle DBA, puisque ces angles sont correspondants par rapport aux mêmes parallèles coupées par la sécante EA. Les angles CBD, DBA, étant égaux, il en est de même des angles en C et en E du triangle CBE : ce triangle est donc isocèle, et l'on a BE = CB, c'est à-dire

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CB}.$$

142. *La bissectrice de l'angle extérieur d'un triangle coupe le côté opposé en un point dont les distances aux extrémités de ce côté sont proportionnelles aux côtés qui comprennent l'angle intérieur adjacent* (*fig.* 104).

Considérons l'angle extérieur CBE et menons sa bissectrice BF : il faut prouver qu'on a

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CB}.$$

Par le point C, menons CG parallèle à BF jusqu'à la rencontre du côté AB. Le triangle ABF donne alors (138)

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{BG}.$$

Considérons le triangle CBG. Ce triangle est isocèle : son angle C est égal à l'angle FBC, puisque ces angles sont alternes-internes par rapport aux parallèles CG, BF, et à la sécante CB; son angle G est égal à l'angle FBE, puisque ces angles sont correspondants par rapport aux mêmes parallèles et à la sécante AE; les deux angles C et G sont donc égaux, et l'on a CB = BG, c'est-à-dire

$$\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CB}.$$

143. Les *réciproques* des deux propositions précédentes sont évidentes. Le point D, qui partage AC en segments pro-

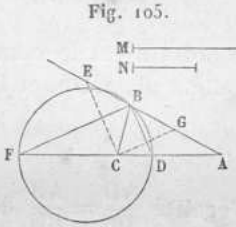
portionnels aux côtés AB et CB, étant un point unique (136), toute droite BD qui détermine un point jouissant de cette propriété se confond avec la bissectrice de l'angle B. De même, le point F, situé sur le prolongement de AC, dont les distances aux points A et C forment un rapport égal à celui des côtés AB et CB, étant aussi un point unique, toute droite BF qui détermine un point jouissant de cette propriété se confond avec la bissectrice de l'angle extérieur CBE.

Les deux points D et F sont conjugués harmoniques par rapport à la droite CA (137). Ainsi, *les deux côtés d'un angle, la bissectrice de cet angle et la bissectrice de son supplément, déterminent sur une sécante quelconque quatre points dont les deux derniers sont conjugués par rapport aux deux autres.*

THÉORÈME.

144. *Le lieu géométrique de tous les points d'un plan dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné, est une circonférence de cercle* (*fig.* 105).

Fig. 105.



Soient les deux points donnés A et C, soient M et N les deux lignes dont le rapport représente le rapport donné. Déterminons sur AC un point D tel, qu'on ait

$$\frac{AD}{DC} = \frac{M}{N};$$

le point D appartiendra au lieu cherché. Déterminons sur le prolongement de AC un point F tel, qu'on ait

$$\frac{FA}{FC} = \frac{M}{N};$$

le point F appartiendra au lieu cherché.

Supposons que le point B du plan soit un des points du lieu. On aura alors

$$\frac{AB}{CB} = \frac{M}{N}.$$

Dès lors, si l'on forme le triangle ABC, BD sera la bissectrice de l'angle intérieur ABC, et BF sera la bissectrice de l'angle extérieur CBE (143). Les droites BD et BF étant bissectrices

d'angles supplémentaires seront à angle droit et, par suite, si l'on décrit une circonférence sur FD comme diamètre, elle passera par le point B. *Tous les points du lieu appartiennent donc à cette circonférence.*

Il reste à prouver que *tous les points de la circonférence appartiennent au lieu.* Prenons un point B quelconque sur la circonférence dont FD est le diamètre. Joignons-le aux points D et F et formons le triangle ABC. Menons par le point C les parallèles CE et CG à BD et à BF. Ces parallèles seront à angle droit, puisque l'angle DBF est droit : il en résulte que la circonférence décrite sur EG comme diamètre passe par le point C. Mais le triangle ACE donne $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$, le triangle ABF donne $\frac{FA}{FC} = \frac{AB}{BG}$: on en conclut, à cause du rapport commun,

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AB}{BG}, \quad \text{d'où} \quad BE = BG;$$

le point B est le centre de la circonférence décrite sur EG comme diamètre, et l'on a

$$BE = CB.$$

L'égalité $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$ devient $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CB} = \frac{M}{N}$, de sorte que le point B est un point du lieu.

Le lieu géométrique demandé est donc bien la circonférence décrite sur DF comme diamètre, les points D et F étant ceux de la ligne AC qui répondent à la question.

II. — De la similitude et de l'homothétie.

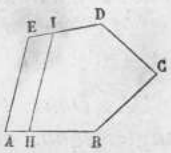
145. Deux polygones d'un même nombre de côtés sont *semblables*, lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun et compris entre côtés proportionnels, les côtés proportionnels étant d'ailleurs disposés dans le même ordre.

On appelle *homologues* les parties qui se correspondent dans deux polygones semblables : ainsi, les sommets des angles égaux sont des points homologues, les diagonales qui joignent des sommets homologues sont des lignes homologues.

On appelle *rapport de similitude* de deux polygones semblables le rapport constant qui lie deux côtés homologues.

On voit facilement qu'on peut, dans un polygone quelconque, changer la proportion des côtés sans faire varier les angles, ou faire varier les angles sans changer les côtés. Ainsi, étant donné le polygone ABCDE (*fig.* 106), si l'on mène IH parallèle à EA, on forme un nouveau pentagone qui a les mêmes angles que le pentagone proposé; mais la proportion des côtés n'est plus la même, puisque les côtés ED et AB sont devenus plus petits, tandis que les côtés BC et CD n'ont pas changé. On pourrait aussi conserver aux côtés les mêmes longueurs et altérer les différents angles, en supposant des articulations aux différents sommets, et en rapprochant par exemple le sommet A du sommet D. Il résulte de cette remarque que, si l'on considère deux polygones quelconques, la proportionnalité des côtés n'est pas une conséquence de l'égalité des angles, et réciproquement.

Fig. 106.

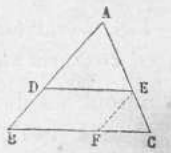


Cette dépendance n'a lieu que pour les triangles, et la théorie de leur similitude s'en trouve beaucoup simplifiée, comme on va le voir.

LEMME.

146. *Si l'on coupe un triangle par une parallèle à l'un de ses côtés, le triangle partiel qu'on détermine est semblable au triangle proposé* (*fig.* 107)

Fig. 107.



Soit le triangle ABC. Menons la parallèle DE au côté BC. Les deux triangles ABC, ADE, ont évidemment leurs angles égaux chacun à chacun. DE étant parallèle à BC, on a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Traçons EF parallèle à AB, on a de même

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BF}.$$

La figure DEFB étant un parallélogramme, on peut rem-

placer BF par son égale DE et écrire

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}.$$

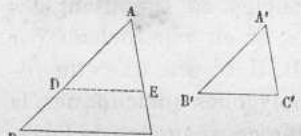
Les deux triangles ABC, ADE, ayant leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels, sont semblables (145).

THÉORÈME.

147. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun* (*fig.* 108).

Soient les deux triangles ABC, A'B'C'. L'angle A est égal à l'angle A', l'angle B égal à l'angle B', l'angle C égal à l'angle C'. Prenons AD = A'B' et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable au triangle ABC (146), et il suffit de démontrer que les deux triangles ADE, A'B'C', sont égaux.

Fig. 108.



Or, l'angle A est égal à l'angle A' par hypothèse; l'angle D, égal à l'angle B comme correspondant, est égal à l'angle B'; enfin, le côté AD est égal au côté A'B' par construction. Les deux triangles ADE, A'B'C', sont donc égaux d'après le premier cas d'égalité (30, 1°).

THÉORÈME.

148. *Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels* (*fig.* 108).

Soient les deux triangles ABC, A'B'C'. L'angle A est égal à l'angle A' et l'on a la proportion

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Tout revient à démontrer que le triangle ADE, formé comme dans le cas précédent et semblable au triangle ABC, est égal au triangle A'B'C'.

Or, on a, à cause de la parallèle DE,

$$(2) \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Si l'on compare les proportions (1) et (2), on voit que, AD étant égal à A'B' par construction, on doit avoir AE = A'C'. Les deux triangles ADE, A'B'C', sont donc égaux d'après le deuxième cas d'égalité (30, 2°).

THÉORÈME.

149. *Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont leurs côtés proportionnels* (*fig.* 108).

Soient les deux triangles ABC, A'B'C'. On a

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Tout revient encore à démontrer que le triangle ADE, formé comme dans les deux cas précédents et semblable au triangle ABC, est égal au triangle A'B'C'.

La similitude des deux triangles ABC, ADE, donne (146)

$$(2) \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EA}.$$

Les suites de rapports égaux (1) et (2) présentent les mêmes numérateurs et les dénominateurs A'B' et AD des deux premiers rapports sont égaux par construction. Il en résulte B'C' = DE, C'A' = EA, et les deux triangles ADE, A'B'C', sont égaux d'après le troisième cas d'égalité (30, 3°).

SCOLIE.

150. Les théorèmes des nos 147 et 149 prouvent que l'égalité des angles entraîne, pour les triangles, la proportionnalité des côtés, et réciproquement. Il est donc permis de définir deux triangles semblables, *deux triangles qui sont équiangles*, par exemple. Au point de vue pratique, il suffit de vérifier que les deux triangles considérés ont deux angles égaux chacun à chacun, puisque la somme des angles d'un triangle est constante.

Il existe pour les triangles d'autres caractères très-simples de similitude, utiles à connaître, et que nous allons indiquer.

THÉORÈME.

151. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun.*

Nous avons vu (57, 58) que deux angles qui avaient leurs

côtés parallèles ou perpendiculaires étaient égaux ou supplémentaires. Désignons les angles des deux triangles considérés par A et A', B et B', C et C'. On ne pourra faire sur les relations qui doivent lier ces angles deux à deux que les quatre hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{lll} A + A' = 2^d, & B + B' = 2^d, & C + C' = 2^d. \\ A + A' = 2^d, & B + B' = 2^d, & C = C'. \\ A + A' = 2^d, & B = B', & C = C'. \\ A = A', & B = B', & C = C'. \end{array}$$

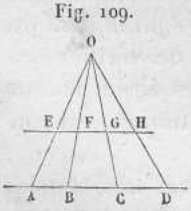
La première hypothèse doit être rejetée, la somme des angles des deux triangles ne pouvant être égale à six droits. Elle ne peut pas non plus être égale à quatre droits augmentés de deux fois l'angle C : la seconde hypothèse est donc aussi inadmissible. La troisième hypothèse entraîne la condition $A = A'$: elle n'est donc qu'un cas particulier (celui où les triangles proposés sont rectangles) de la quatrième hypothèse, qui est la seule vraie. Les triangles considérés étant équiangles sont semblables (147).

Il faut remarquer que les côtés proportionnels sont toujours, dans les triangles semblables, opposés aux angles égaux. Dans le dernier cas examiné, les côtés homologues sont parallèles ou perpendiculaires entre eux.

THÉORÈME.

152. *Deux parallèles sont coupées en parties proportionnelles par une série de sécantes issues d'un même point* (*fig.* 109).

Fig. 109.



Soient les deux parallèles AD, EH, coupées par les sécantes OA, OB, OC, OD.

Les triangles OAB, OEF, sont semblables (146) et donnent

$$\frac{OB}{OF} = \frac{AB}{EF}.$$

De même, la similitude des triangles OBC, OFG, permet d'écrire

$$\frac{OB}{OF} = \frac{BC}{FG}.$$

On a donc

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}.$$

On prouverait de la même manière que

$$\frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}.$$

Réciproquement, *si les deux parallèles* AD, EH, *sont coupées proportionnellement par une série de sécantes* AE, BF, CG, DH, *ces sécantes aboutissent à un même point* O.

Supposons que les deux droites AE et CG se rencontrent en un certain point O. On a par hypothèse

$$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{FG}.$$

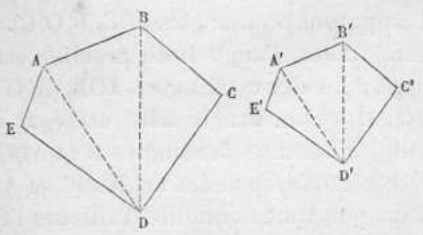
Joignons OF : cette ligne prolongée devra couper AC en parties proportionnelles aux segments EF et FG, d'après le théorème direct. Or AC est déjà divisée de cette manière au point B; OF prolongée passera donc par le point B (136), c'est-à-dire que les trois points B, F, O, sont en ligne droite. On prouverait de même que DH prolongée passe par le point O.

La *fig.* 109 suppose le point de concours des sécantes *extérieur* aux deux parallèles. Si ce point de concours était *intérieur*, la démonstration resterait la même; seulement, la disposition des parties proportionnelles serait inverse sur les deux parallèles.

THÉORÈME.

133. *Deux polygones, composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés, sont semblables* (*fig.* 110).

Fig. 110.



Soient AED et A'E'D', ADB et A'D'B', BDC et B'D'C', deux séries de triangles respectivement semblables et semblablement disposés. Il faut démontrer que le polygone ABCDE, formé par les premiers triangles, est semblable au polygone A'B'C'D'E' formé par les seconds.

On voit d'abord que les angles des deux polygones sont égaux, soit comme angles homologues de deux triangles semblables, soit comme sommes d'angles homologues de plusieurs triangles semblables.

On voit ensuite que les côtés homologues des deux polygones sont proportionnels; car les triangles semblables considérés donnent successivement

$$\frac{AE}{A'E'} = \frac{ED}{E'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'},$$

c'est-à-dire, en supprimant les rapports intermédiaires,

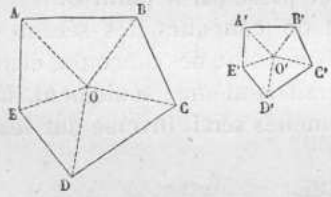
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

THÉORÈME.

154. Réciproquement, *deux polygones semblables peuvent toujours se décomposer en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés* (*fig.* 111).

Soient les deux polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E'.

Fig. 111.



Prenons un point O quelconque dans l'intérieur du premier polygone, et décomposons-le en triangles en joignant ce point O à tous ses sommets. Il faut déterminer dans le second polygone le point O', homologue du point O. Pour cela, formons en A', avec A'B', un angle égal à l'angle BAO et, en B', un angle égal à l'angle ABO. Le triangle ABO et le triangle A'B'O' sont semblables (147), et le point O' est l'homologue du point O. Joignons le point O' à tous les sommets du polygone A'B'C'D'E'. Comparons les triangles BOC, B'O'C'. Les deux polygones étant semblables, l'angle B du premier est égal à l'angle B' du second; les deux triangles AOB, A'O'B', étant semblables par construction, l'angle ABO est égal à l'angle A'B'O'. L'angle OBC, différence des angles B et ABO, est donc égal à l'angle O'B'C', différence des angles B' et A'B'O'. La similitude des deux polygones entraîne d'ailleurs l'égalité

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

et celle des deux triangles AOB, A'O'B', donne

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{O'B'};$$

on a donc

$$\frac{OB}{O'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Par suite, les deux triangles BOC, B'O'C', sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

On prouvera de la même manière la similitude des triangles COD, C'O'D', DOE, D'O'E', EOA, E'O'A'.

SCOLIE.

155. Il faut remarquer que le point O pourrait se confondre avec l'un des sommets A du polygone ABCDE; son homologue O' se confondrait alors avec le sommet A'. Les deux polygones seraient divisés en triangles semblables par les diagonales homologues partant des sommets A et A'. Cette remarque prouve que, dans deux polygones semblables, le rapport de deux diagonales homologues est égal au rapport de similitude des deux polygones (145). *Ce rapport est celui de deux lignes homologues tracées d'une manière quelconque dans les deux polygones.*

Le point O pourrait être *extérieur* au polygone ABCDE. Le même théorème subsisterait, en convenant de regarder le polygone comme composé d'une série de triangles, les uns *additifs*, les autres *soustractifs*. Ainsi (*fig.* 112) on pourra regarder le polygone ABCDE comme composé des triangles additifs SAB, SAE, SED, et des triangles soustractifs SBC, SCD. Le raisonnement sera le même que précédemment.

156. Supposons que les polygones considérés aient n côtés. En prenant pour centres de décomposition deux sommets homologues, on les partagera en $(n-2)$ triangles semblables; et, comme il faut deux conditions pour que deux triangles soient semblables, la similitude des deux polygones exigera $2(n-2)$ ou $2n-4$ conditions.

Nous avons vu précédemment (66) que l'égalité de deux polygones de n côtés exigeait en général $2n-3$ conditions. La *similitude* demande donc une condition de moins que l'*égalité;* par suite, deux polygones dont une seule condition

entraîne l'égalité sont nécessairement semblables quand ils ne sont pas égaux.

THÉORÈME.

157. *Le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal au rapport de similitude des deux polygones* (*fig.* 110).

Les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', étant semblables, on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Un théorème connu (Tome I, *Arithm.*, 386) permet donc de poser immédiatement

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Le numérateur du premier membre de l'égalité obtenue représente la somme des côtés du polygone ABCDE, c'est-à-dire son *périmètre* P; le dénominateur de ce même premier membre représente le périmètre P' du polygone A'B'C'D'E'. On a donc

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

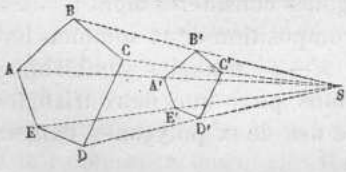
THÉORÈME.

158. *Si l'on joint un point quelconque* S *à tous les sommets d'un polygone* ABCDE, *et si l'on prend sur les droites* SA, SB, SC, ..., *des points* A', B', C', ..., *tels, qu'on ait*

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \frac{SD}{SD'} = \frac{SE}{SE'},$$

les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', *sont semblables* (*fig.* 112).

Fig. 112.



En effet, les deux triangles SAB, SA'B', ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables; le côté AB est parallèle au côté A'B', et l'on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SB}{SB'}.$$

En comparant les deux triangles SBC, SB'C', on prouvera de

même le parallélisme des côtés BC, B'C', et l'égalité des rapports $\frac{BC}{B'C'}$ et $\frac{SB}{SB'}$, c'est-à-dire celle des rapports $\frac{AB}{A'B'}$ et $\frac{BC}{B'C'}$, etc. Les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', ayant leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, ont tous leurs angles égaux; ils ont, de plus, tous leurs côtés proportionnels : ils sont donc semblables.

Remarquons que les points A', B', C', ..., peuvent être pris soit sur les côtés SA, SB, SC,..., soit sur les prolongements de ces côtés : le point S s'appelle *centre de similitude*, les droites SA, SA', SB, SB',..., sont les *rayons vecteurs* des points A, A', B, B',.... Lorsque les deux polygenes sont du même côté du point S, ils sont *semblablement placés;* lorsqu'ils sont de part et d'autre du point S, ils sont *inversement placés* (*fig.* 113). Dans le premier cas, la similitude est *directe;* dans le second cas, elle est *inverse.*

Pour abréger, on donne le nom d'*homothétie* à la similitude de forme et de position qu'on vient d'examiner. Les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 112 et 113) sont dits *homothétiques,* le point S est le *centre d'homothétie directe ou inverse,* le rapport constant $\frac{SA}{SA'}$ est le *rapport de similitude* ou d'*homothétie.*

Quand deux polygones sont homothétiques, les droites qui joignent les points homologues deux à deux sont parallèles et leur rapport est égal au rapport d'homothétie.

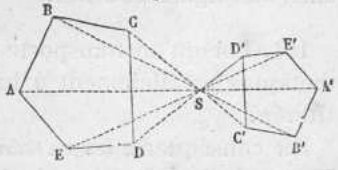
Quand deux polygones sont homothétiques inverses, il suffit évidemment, pour les rendre homothétiques directs, de faire tourner l'un d'eux de 180° autour du centre d'homothétie.

En faisant varier le rapport d'homothétie de 0 à ∞, on obtient tous les polygones semblables à un polygone donné.

THÉORÈME.

159. Réciproquement, *si deux polygones semblables ont leurs côtés parallèles, les droites qui joignent les sommets homologues se croisent en un même point qui est le centre d'homothétie des deux polygones* (*fig.* 113).

Fig. 113.



Soient les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E', qui remplissent les conditions de l'é-

noncé. Joignons AA′ et BB′. Soit S le point de rencontre de ces deux droites. Les deux triangles SAB, SA′B′, sont semblables comme équiangles, puisque AB et A′B′ sont parallèles, et l'on a

$$\frac{AS}{A'S} = \frac{BS}{B'S} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Joignons SC et SC′, et comparons les triangles BSC, B′SC′. L'angle en B est égal à l'angle en B′, à cause des parallèles BC, B′C′. On a d'ailleurs

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

par suite de la similitude des polygones. On a donc aussi, d'après ce qui précède,

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BS}{B'S};$$

et les deux triangles BSC, B′SC′, sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Ils sont donc équiangles, et les rayons SC et SC′ ne forment qu'une seule et même ligne droite. On prouvera de même que DD′ et EE′ passent par le point S.

Plusieurs instruments ingénieux employés pour réduire les dessins sont fondés sur les théorèmes que nous venons d'établir : nous citerons le *pantographe*.

SCOLIE.

160. Ce qu'on vient de dire pour un polygone peut évidemment s'appliquer à un système quelconque de points situés dans un plan.

Suivant que le système proposé est formé de points isolés ou se succédant d'une manière continue, le système homothétique du système donné est lui-même formé de points isolés ou continus. Les propriétés précédentes s'étendent ainsi aux lignes courbes.

161. Lorsqu'on transporte l'un des deux systèmes homothétiques parallèlement à lui-même, l'homothétie n'est pas altérée.

Par conséquent, *les extrémités de droites concourantes et les extrémités d'autres droites concourantes respectivement*

parallèles et proportionnelles aux premières, forment deux systèmes homothétiques.

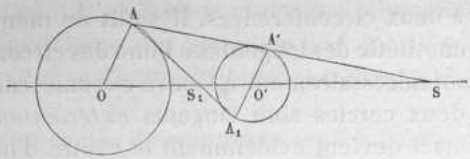
L'homothétie des deux systèmes est *directe* ou *inverse*, suivant que les droites parallèles sont dirigées dans le même sens ou en sens contraires.

THÉORÈME.

162. *Deux circonférences quelconques sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses* (*fig.* 114).

En effet, les rayons de ces circonférences peuvent être re-

Fig. 114.



gardés comme deux à deux parallèles et de même sens ou parallèles et de sens contraires, et leur rapport K est constant (161).

Pour avoir les deux centres d'homothétie de ces circonférences O et O', il suffit de mener parallèlement (*fig.* 114) le rayon OA de l'une et le diamètre A'O'A$_1$ de l'autre. Les droites AA' et AA$_1$ coupent la ligne des centres OO' aux points S et S$_1$, et l'on a

$$\frac{SO}{SO'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{SA}{SA'} = K, \quad \frac{S_1O}{S_1O'} = \frac{OA}{O'A_1} = \frac{S_1A}{S_1A_1} = K.$$

Le point S est donc le centre d'homothétie directe et le point S$_1$ le centre d'homothétie inverse, puisque tous les rayons vecteurs tels que AA' viendront se croiser en S et, tous les rayons vecteurs tels que AA$_1$, en S$_1$ (136).

Les relations précédentes donnant

$$\frac{S_1O}{S_1O'} = \frac{SO}{SO'},$$

les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la distance des centres des deux circonférences (137).

Ce qui précède fournit un procédé très-simple pour diviser

harmoniquement une droite donnée dans un rapport donné. On n'a pas besoin de tracer les deux circonférences : il suffit que les parallèles OA et O'A' ou O'A_1 soient dans le rapport voulu.

SCOLIE.

163. Les rayons des deux circonférences menés aux points de contact d'une tangente commune étant parallèles, *les tangentes communes extérieures passent par le centre d'homothétie directe et les tangentes communes intérieures, par le centre d'homothétie inverse.*

De là, un nouveau procédé pour construire les tangentes communes à deux circonférences. Il suffit de mener par les centres d'homothétie des tangentes à l'une des circonférences : elles le seront nécessairement à l'autre circonférence.

Lorsque deux cercles sont tangents *extérieurement*, leur point de contact devient évidemment le centre d'homothétie *inverse;* s'ils sont tangents *intérieurement*, leur point de contact devient le centre d'homothétie *directe.*

THÉORÈME.

164. *Deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux, et les trois centres d'homothétie correspondants sont situés en ligne droite* (*fig.* 115 *et* 116).

Soient les deux systèmes P' et P'', homothétiques au sys-

Fig. 115.

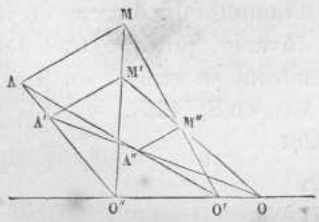
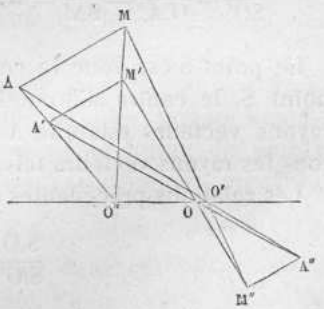


Fig. 116.



tème P. Prenons dans les trois systèmes les points homologues A, A', A''; joignons A à un point quelconque M du

système P, ainsi que les points A′ et A″ aux points M′ et M″, homologues de M dans les systèmes P′ et P″.

Les systèmes P et P′ étant homothétiques, AM et A′M′ sont parallèles et l'on a $\frac{AM}{A'M'} = K''$, rapport d'homothétie des deux systèmes (158). De même, les systèmes P et P″ étant homothétiques, AM et A″M″ sont parallèles et l'on a $\frac{AM}{A''M''} = K'$, rapport d'homothétie des deux systèmes. Il en résulte que A′M′ et A″M″ sont parallèles et dans le rapport constant $\frac{K'}{K''}$. Les deux systèmes P′ et P″ sont donc eux-mêmes homothétiques (159, 160).

Les droites AA′ et MM′ se croisent d'ailleurs au point O″, centre d'homothétie des systèmes P et P′. On détermine de même les centres d'homothétie O′ et O des systèmes P et P″, P′ et P″.

Comme un centre d'homothétie est à lui-même son homologue dans les deux systèmes considérés et que deux droites homologues sont toujours parallèles, toute droite passant par un centre d'homothétie est à elle-même son homologue dans les deux systèmes.

D'après cela, la droite O″O′ étant à elle-même son homologue relativement aux systèmes P et P′ et aux systèmes P et P″, elle est aussi son homologue relativement aux systèmes P′ et P″, de sorte qu'elle passe par leur centre O. La droite des centres OO′O″ est appelée l'*axe d'homothétie* des trois systèmes proposés.

Si l'homothétie des systèmes P et P′, P et P″ est directe, celle des deux systèmes P′ et P″ est aussi directe (*fig.* 115). Si l'homothétie des systèmes P et P′ étant directe, celle des systèmes P et P″ est inverse, il en est de même de celle des systèmes P′ et P″ (*fig.* 116). *Quand on considère trois systèmes homothétiques deux à deux, il y en a donc toujours un nombre impair dont l'homothétie est directe.*

COROLLAIRE.

165. Trois circonférences quelconques, prises deux à deux, sont doublement homothétiques (162), c'est-à-dire admettent deux centres d'homothétie, l'un direct, l'autre inverse. On obtient ainsi six centres d'homothétie, trois directs et trois

inverses. D'après ce qui précède, on aura à associer les trois centres directs, ou bien un centre direct avec les deux centres inverses qui ne lui correspondent pas. D'ailleurs, les trois centres associés seront toujours en ligne droite. Les trois circonférences proposées admettent donc *quatre axes d'homothétie :* celui qui contient les trois centres directs est qualifié d'*axe direct,* et les trois autres sont qualifiés d'*axes inverses.*

III. — Relations métriques entre les différentes parties d'un triangle.

166. Pour simplifier les énoncés, on appelle en Géométrie *produit de deux lignes* le produit des nombres qui expriment les mesures de ces lignes par rapport à la même unité; *carré d'une ligne,* le carré du nombre qui exprime sa mesure.

Si l'on a

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

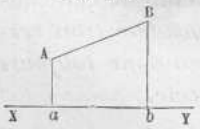
A, B, C, D, représentant des longueurs ou les nombres qui les mesurent lorsqu'on les rapporte à une même unité, on dit que D est une *quatrième proportionnelle* à A, B, C.

Si les moyens B et C sont égaux, on a

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{D};$$

D est alors une *troisième proportionnelle* à A et B. Dans ce cas, B, à son tour, est une *moyenne proportionnelle* entre A et D, et l'on a $B^2 = A \times D$.

Fig. 117.



On appelle *projection* d'un point A sur une ligne droite XY le pied *a* de la perpendiculaire abaissée du point A sur XY. Si l'on donne une droite limitée AB, sa projection sur XY est la longueur *ab* qui sépare les projections de ses points extrêmes (*fig.* 117).

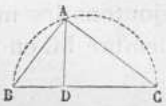
THÉORÈME.

167. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, chaque côté*

de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse elle-même; la perpendiculaire abaissée est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse (*fig.* 118).

Soient le triangle rectangle ABC et la perpendiculaire AD abaissée du sommet A sur l'hypoténuse BC. Cette perpendiculaire partage le triangle proposé en deux triangles partiels, qui lui sont semblables et qui sont, par conséquent, semblables entre eux. En effet, les deux triangles rectangles ABC et ABD ayant l'angle aigu B commun sont équiangles et semblables; il en est de même des triangles rectangles ABC et ADC, qui ont l'angle aigu C commun.

Fig 118.



Si l'on compare successivement les triangles ABD et ABC, ADC et ABC, on peut donc écrire

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}, \quad \text{d'où} \quad AB^2 = BD.BC;$$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC}, \quad \text{d'où} \quad AC^2 = CD.BC.$$

Il faut se rappeler que les côtés proportionnels sont les côtés opposés aux angles égaux.

Si l'on compare ensuite les triangles partiels ABD, ADC, on a

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}, \quad \text{d'où} \quad AD^2 = BD.CD.$$

Si l'on décrit un cercle sur BC comme diamètre, il passera par le sommet A (113); on peut, par conséquent, énoncer encore sous la forme suivante les propriétés démontrées :

Toute corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par l'une de ses extrémités et sa projection sur ce diamètre; la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence sur un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.

THÉORÈME.

168. *Si l'on exprime numériquement, par rapport à une même unité, les trois côtés d'un triangle rectangle, le carré du nombre qui représente l'hypoténuse est égal à la somme*

des carrés des nombres qui représentent les deux côtés de l'angle droit (*fig.* 118).

Le théorème précédent vient de nous donner les deux égalités

$$AB^2 = BD.BC,$$
$$AC^2 = CD.BC.$$

Ajoutons-les membre à membre, et mettons dans le second membre BC en facteur commun; nous aurons

$$AB^2 + AC^2 = (BD + CD).BC,$$

c'est-à-dire

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

COROLLAIRES.

169. On peut facilement, en ayant égard à cette relation, *trouver l'un des côtés d'un triangle rectangle, lorsqu'on connaît les deux autres.*

Si l'on donne les côtés de l'angle droit égaux à 4^M et à 3^M, on a immédiatement, en représentant l'hypoténuse par z,

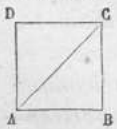
$$z^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \quad \text{d'où} \quad z = 5.$$

Si l'on donne l'hypoténuse égale à 13^M et l'un des côtés de l'angle droit égal à 5^M, on a immédiatement, en représentant par x le côté inconnu,

$$13^2 = 5^2 + x^2, \quad \text{d'où} \quad x^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \quad \text{et} \quad x = 12.$$

Le rapport de la diagonale du carré à son côté est exprimé par le nombre incommensurable $\sqrt{2}$.

Fig. 119.



Le triangle ABC (*fig.* 119) étant rectangle et isocèle, donne

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2,$$

ou

$$\frac{AC^2}{AB^2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

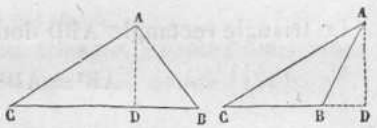
On doit remarquer que les théorèmes relatifs à la similitude des triangles (147, 148, 149), joints à celui du carré de l'hypoténuse, sont les plus importants de la Géométrie. Car toutes les figures peuvent se décomposer en triangles quelconques, et tout triangle quelconque peut se décomposer en

deux triangles rectangles par une perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur le côté opposé. On a donc constamment à appliquer les propositions indiquées.

THÉORÈME.

170. *Dans tout triangle, le carré du côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de l'un d'eux par la projection de l'autre côté sur la direction du premier* (*fig.* 120).

Fig. 120.



Soit le triangle ABC dans lequel l'angle C est aigu. Considérons le côté AB opposé à cet angle. Du sommet A, abaissons sur le côté opposé la perpendiculaire AD : elle tombe en dedans ou en dehors du triangle, suivant que l'angle B est aigu ou obtus. Dans le premier cas, on a

$$DB = BC - CD ;$$

dans le second,

$$DB = CD - BC.$$

Dans les deux cas, on a donc (t. I, *Arithm.*, 275)

$$DB^2 = BC^2 + CD^2 - 2\,BC.CD.$$

Le triangle rectangle ABD donne d'ailleurs

$$AB^2 = AD^2 + DB^2,$$

c'est-à-dire

$$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2\,BC.CD.$$

Le triangle rectangle ADC permettant de remplacer

$$AD^2 + CD^2 \text{ par } AC^2,$$

il vient finalement

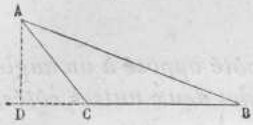
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\,BC.CD.$$

THÉORÈME.

171. *Dans tout triangle, le carré du côté opposé à un angle obtus est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus le double produit de l'un d'eux par la projection de l'autre côté sur la direction du premier* (*fig.* 121).

Soit le triangle ABC dans lequel l'angle C est obtus. Considérons le côté AB opposé à cet angle. Du sommet A, abaissons sur le côté opposé la perpendiculaire AD : elle tombe en dehors du triangle, et l'on a

Fig. 121.



$$DB = BC + CD,$$

d'où (t. I, *Arithm.*, 275)

$$DB^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ABD donne d'ailleurs

$$AB^2 = AD^2 + DB^2.$$

On a donc, en remplaçant DB^2 par sa valeur,

$$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ADC permettant de substituer AC^2 à $AD^2 + CD^2$, il vient finalement

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC.CD.$$

COROLLAIRES.

172. Si l'on rapproche les théorèmes précédents, on voit que *l'angle d'un triangle est nécessairement aigu, obtus ou droit, suivant que le carré du côté opposé est inférieur, supérieur ou égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Étant donnés $AB = 7^M$, $AC = 4^M$, $BC = 5^M$, proposons-nous de déterminer la hauteur du sommet A au-dessus du côté BC ou la perpendiculaire AD (*fig.* 121). Comme 7^2 l'emporte sur $4^2 + 5^2$, l'angle opposé au côté AB est obtus, et l'on peut poser

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC.CD,$$

c'est-à-dire

$$49 = 25 + 16 + 10CD.$$

On en déduit

$$CD = 0,8.$$

Le triangle rectangle ADC donne alors

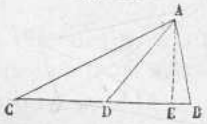
$$AD = \sqrt{16 - 0,64} \quad \text{ou} \quad AD = \sqrt{15,36} = 3,919,$$

à moins de 0,0005 par défaut.

THÉORÈME.

173. *Dans tout triangle, la somme des carrés de deux côtés est égale à deux fois la somme des carrés de la moitié du troisième côté et de la médiane correspondante* (*fig.* 122).

Fig. 122.



Soit le triangle ABC : la *médiane* qui correspond au côté BC est la droite AD qui joint le sommet A au milieu D du côté BC. L'un des angles en D est aigu, l'autre est obtus, sauf le cas du triangle isocèle; mais alors le théorème est évident. Le triangle ADC donne (171)

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2CD.DE.$$

Le triangle ADB donne à son tour (170)

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD.DE.$$

Si l'on ajoute ces deux égalités membre à membre et si l'on remarque que CD = BD, il vient, en réduisant,

$$AC^2 + AB^2 = 2(CD^2 + AD^2).$$

COROLLAIRES.

174. Si la droite BC ne change pas et si la somme des carrés des côtés AC et AB reste constante, ces côtés variant eux-mêmes, l'égalité précédente prouve que la valeur de la médiane AD reste constante. Par conséquent, *le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante est une circonférence de cercle qui a pour centre le milieu de la droite qui joint les deux points fixes.*

Si l'on a

$$AC^2 + AB^2 = m^2,$$

il vient

$$m^2 = 2(CD^2 + AD^2), \quad \text{d'où} \quad AD = \sqrt{\frac{m^2}{2} - CD^2}.$$

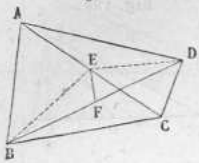
Telle est l'expression du rayon de la circonférence. Le problème est impossible, lorsqu'on a $m^2 < 2CD^2$.

175. *La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère quelconque est égale à la somme des carrés des diagonales, aug-*

mentée de quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales (*fig.* 123).

Soit le quadrilatère ABCD. Soient E et F les milieux des diagonales AC et BD. Les deux triangles ADC, ABC, donnent

Fig. 123.



$$AD^2 + DC^2 = 2(AE^2 + DE^2),$$
$$AB^2 + BC^2 = 2(AE^2 + BE^2).$$

Si l'on ajoute ces deux égalités membre à membre, il vient

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = 4AE^2 + 2(BE^2 + DE^2).$$

Le triangle BED donne d'ailleurs

$$2(BE^2 + DE^2) = 4(BF^2 + EF^2).$$

On a donc

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = 4AE^2 + 4BF^2 + 4EF^2.$$

Mais de $2AE = AC$, on déduit $4AE^2 = AC^2$; de même, de $2BF = BD$, on déduit $4BF^2 = BD^2$. Il reste donc

$$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2.$$

S'il s'agit d'un parallélogramme, la distance EF devient nulle. Par conséquent, *dans tout parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales;* et réciproquement, *tout quadrilatère qui remplit cette condition est un parallélogramme.*

THÉORÈME.

176. *Dans tout triangle, la différence des carrés de deux côtés est égale au double produit du troisième côté par la projection sur sa direction de la médiane correspondante* (*fig.* 122).

Nous avons déjà trouvé (173) les deux égalités

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2CD.DE,$$
$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD.DE.$$

Retranchons-les membre à membre, en remarquant que

CD = BD : il viendra

$$AC^2 - AB^2 = 4CD.DE,$$

c'est-à-dire

$$AC^2 - AB^2 = 2BC.DE.$$

COROLLAIRE.

177. Remarquons que, si les points B et C restent fixes, tandis que, les côtés AC et AB variant, la différence de leurs carrés demeure constante, l'égalité précédente prouve que la projection DE ou la position du point E reste aussi constante. Par conséquent, *le lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante est une perpendiculaire à la droite qui joint les points fixes.*

Si l'on a

$$AC^2 - AB^2 = m^2,$$

il vient

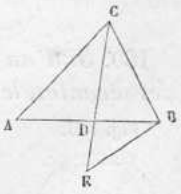
$$m^2 = 2BC.DE, \quad \text{d'où} \quad DE = \frac{m^2}{2BC}.$$

Telle est la valeur de DE. On portera cette valeur de DE, à partir du point D milieu de BC, à droite ou à gauche de ce point, et le lieu se composera en réalité des deux perpendiculaires élevées à BC par les points obtenus.

THÉORÈME.

178. *Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la bissectrice de l'angle qu'ils forment, augmenté du produit des deux segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté* (*fig.* 124).

Fig. 124.



Soient le triangle ABC et la bissectrice CD de l'angle C. Formons l'angle DBE égal à la moitié de l'angle C. Les deux triangles ACD et DBE seront évidemment équiangles et semblables. L'angle CAD sera donc égal à l'angle DEB, ce qui entraîne la similitude des deux triangles ACD, CBE. On a, par suite,

$$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{CB}, \quad \text{d'où} \quad AC.CB = CD.CE.$$

On peut remplacer CE par CD + DE : on a alors

$$AC.CB = CD^2 + CD.DE.$$

La similitude des triangles ACD, DBE, donne d'ailleurs

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AD}{DE}, \quad \text{d'où} \quad CD.DE = AD.DB.$$

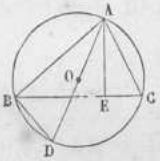
En substituant dans l'égalité précédente, il vient finalement

$$AC.CB = CD^2 + AD.DB.$$

THÉORÈME.

179. *Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit de la hauteur qui correspond au troisième côté par le diamètre du cercle circonscrit au triangle* (*fig.* 125).

Fig. 125.



Lorsqu'un triangle est inscrit dans une circonférence, on dit que la circonférence lui est *circonscrite*.

Soit le triangle ABC inscrit dans la circonférence O, soit AE perpendiculaire sur BC. Les deux triangles rectangles ABD, AEC sont semblables; car l'angle ADB et l'angle ACE sont inscrits dans le même segment. On a donc

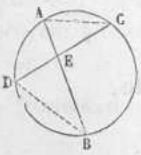
$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}, \quad \text{d'où} \quad AB.AC = AE.AD.$$

IV. — Des lignes proportionnelles dans le cercle.

THÉORÈME.

180. *Si d'un point pris dans le plan d'un cercle on lui mène des sécantes, le produit des distances de ce point aux intersections de chaque sécante avec la circonférence est constant* (*fig.* 126).

Fig. 126.



Supposons d'abord le point donné intérieur au cercle. Par ce point E, menons deux cordes quelconques AB et CD. Joignons AC et BD. Nous formerons deux triangles AEC, DEB; ces triangles sont équiangles, car les angles en E sont opposés par le sommet, et les angles en C et en B sont égaux comme inscrits dans le même segment. La similitude des triangles con-

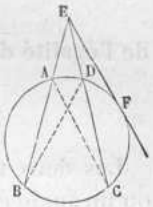
sidérés permet donc de poser

$$\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}, \quad \text{d'où} \quad AE.BE = CE.DE.$$

On énonce quelquefois cette importante propriété en disant que *deux cordes quelconques se coupent dans une circonférence en parties inversement proportionnelles.*

Supposons maintenant le point donné extérieur au cercle. Par ce point E, menons deux sécantes quelconques EAB, EDC (*fig.* 127). Joignons AC et BD. Les deux triangles AEC, DEB, sont semblables. En effet, ils ont l'angle E commun, et les angles C et B sont égaux comme inscrits dans le même segment. On peut donc poser

Fig. 127.



$$\frac{EC}{EB} = \frac{EA}{ED}, \quad \text{d'où} \quad EC.ED = EB.EA.$$

On énonce quelquefois cette propriété en disant que *deux sécantes issues d'un même point sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures.*

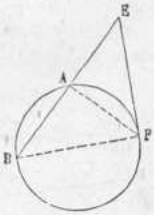
COROLLAIRE.

181. Si l'on conçoit que la sécante EC tourne autour du point E de manière à devenir la tangente EF, le théorème ne cesse pas d'être vrai; mais, à la limite, la sécante entière se confond avec sa partie extérieure. On a donc

$$EF^2 = EB.EA.$$

Ce qui prouve que, *lorsqu'une tangente et une sécante partent d'un même point, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure* (*fig.* 128).

Fig. 128.



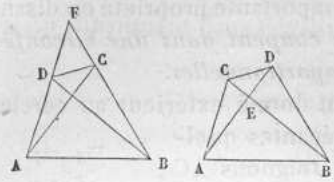
On peut d'ailleurs le démontrer directement comme il suit. Soient la tangente EF et la sécante EAB. Joignons AF et BF. Les deux triangles EBF, EAF, sont semblables. En effet, ils ont l'angle E commun, et l'angle EBF est égal à l'angle EFA, puisque ces deux angles ont pour mesure la moitié du même arc AF. On a donc

$$\frac{EB}{EF} = \frac{EF}{EA}, \quad \text{d'où} \quad EF^2 = EB.EA.$$

THÉORÈME.

182. Réciproquement, *lorsque deux droites* AD, BC, *prolongées s'il y a lieu, se coupent en un point* E, *tel qu'on ait*

Fig. 129.



$$AE.DE = BE.CE,$$

leurs extrémités A, D, B, C, *sont situées sur une même circonférence* (*fig.* 129).

Divisons les deux membres de l'égalité donnée par BE.DE; il viendra

$$\frac{AE}{BE} = \frac{CE}{DE}.$$

Les deux triangles ACE, BDE, ont donc un angle commun ou un angle égal compris entre côtés proportionnels. Ces triangles, étant alors semblables, sont équiangles. Par conséquent, si l'on décrit sur CD comme corde un segment capable de l'angle CAD, la circonférence qui passe par les trois sommets C, A, D, passe aussi par le quatrième sommet B; en effet, les angles en A et en B sont égaux, d'après ce qu'on vient de dire.

On prouverait de même que, si par rapport à l'angle E (*fig.* 128) les trois points A, B, F, satisfont à la relation

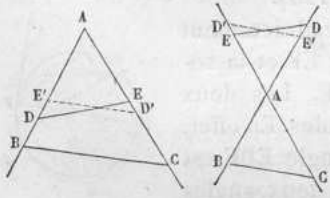
$$EF^2 = EB.EA,$$

la circonférence déterminée par ces trois points est tangente en F au côté EF.

SCOLIE.

183. Lorsque deux droites forment respectivement des angles égaux avec les côtés d'un même angle, on leur donne le nom de droites *antiparallèles*.

Fig. 130.



Soit l'angle A coupé par les droites BC, DE; si les angles ABC, AED, sont égaux, les droites BC et DE sont antiparallèles (*fig.* 130). Prenons AE′ = AE et AD′ = AD, joignons D′E′ : les deux triangles ADE, AD′E′, sont égaux, et l'angle AED est égal à l'angle AE′D′. L'angle ABC est donc lui-même égal à l'angle AE′D′,

et la droite BC est parallèle à la droite E'D'. On a donc

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AD'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}, \quad \text{d'où} \quad AB.AD = AC.AE.$$

Les distances du sommet de l'angle aux points d'intersection de chacun de ses côtés avec les deux droites antiparallèles forment donc *un produit constant.*

Si le point D se confondait avec le point B, on aurait

$$AB^2 = AC.AE.$$

Lorsque les deux droites antiparallèles se croisent en un même point sur l'un des côtés de l'angle, la distance dusommet à ce point est donc *moyenne proportionnelle entre les segments comptés sur l'autre côté de l'angle.*

La propriété qu'on vient de démontrer permet de rendre plus rapide l'exposition de quelques-uns des théorèmes précédents. Considérons, par exemple (*fig.* 126), les cordes AB, CD. Les angles en A et en D étant égaux comme inscrits dans le même segment, les droites AC, DB, sont antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle E; on a donc immédiatement

$$AE.BE = CE.DE.$$

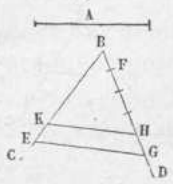
On voit que deux droites antiparallèles déterminent deux triangles semblables, qui deviennent semblablement placés par le *retournement* de l'un d'eux.

V. — Problèmes sur les lignes proportionnelles.

PROBLÈME.

184. *Diviser une ligne droite en un certain nombre de parties égales* (*fig.* 131).

Fig. 131.



Soit A à diviser en cinq parties égales. Formons un angle quelconque CBD et, sur le côté BC, portons une longueur BE égale à la droite A. Sur l'autre côté BD, marquons à la suite l'une de l'autre cinq fois de suite la longueur arbitraire BF. Soient H et G les deux derniers points de division. Joignons GE et,

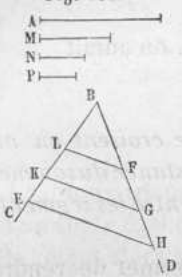
par le point H, menons HK parallèle à GE; EK sera la cinquième partie de BE ou de A. On a, en effet, à cause des parallèles,

$$\frac{EK}{BE} = \frac{GH}{BG} = \frac{1}{5}.$$

PROBLÈME.

185. *Diviser une ligne droite en parties proportionnelles à des lignes données ou à des nombres donnés* (*fig.* 132).

Fig. 132.



Soit à diviser la droite A en parties proportionnelles aux droites M, N, P. Formons un angle quelconque CBD et, sur le côté BC, portons une longueur BE égale à A. Sur l'autre côté DB, marquons successivement des longueurs BF, FG, GH, respectivement égales aux longueurs M, N, P. Joignons le point H au point E, et menons à la droite HE les parallèles GK, FL. La droite BE ou A est divisée aux points L et K, comme l'exige l'énoncé. On a, en effet, à cause des parallèles,

$$\frac{BL}{LK} = \frac{BF}{FG} = \frac{M}{N} \quad \text{et} \quad \frac{LK}{KE} = \frac{FG}{GH} = \frac{N}{P},$$

d'où

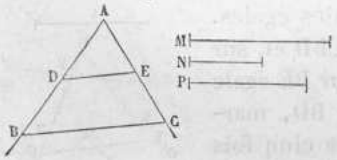
$$\frac{BL}{M} = \frac{LK}{N} = \frac{KE}{P}.$$

Si l'on devait partager A proportionnellement à des nombres donnés, on représenterait ces nombres par des droites en faisant choix d'une certaine unité, et l'on opérerait comme on vient de l'indiquer.

PROBLÈME.

186. *Construire la quatrième proportionnelle à trois droites données* (*fig.* 133).

Fig. 133.



Soient M, N, P, les trois droites données. Formons un angle quelconque BAC. Sur le côté AB, prenons AB = M et AD = N; puis, sur le côté AC, AC = P. Joignons BC et, par le point D, menons DE parallèle à BC. AE est la quatrième

proportionnelle demandée, car on a

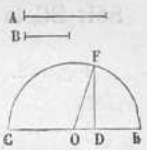
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{N} = \frac{P}{AE} \quad (166).$$

Si les lignes N et P étaient égales, AE serait la troisième proportionnelle aux lignes M et N.

PROBLÈME.

187. *Construire la moyenne proportionnelle à deux lignes données* (*fig.* 134).

Fig. 134.



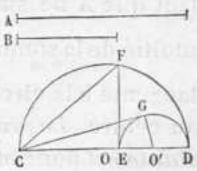
Soient les deux lignes données A et B. Portons ces lignes de C en D et de D en E, sur une droite indéfinie. Sur CE comme diamètre, décrivons une demi-circonférence, et soit DF perpendiculaire à CE; DF est la moyenne proportionnelle demandée. On a, en effet,

$$DF^2 = CD.DE = A.B \quad (167).$$

Si les lignes A et B sont inégales, le rayon OF est toujours plus grand que la perpendiculaire FD. On vérifie ainsi géométriquement que *la moyenne proportionnelle à deux lignes inégales est plus petite que leur moyenne arithmétique.*

Lorsque les lignes A et B sont trop grandes pour qu'il soit commode de les porter à la suite l'une de l'autre, on opère autrement. On prend sur une droite indéfinie (*fig.* 135) CD = A, CE = B. On décrit sur CD comme diamètre une demi-circonférence et, au point E, on élève EF perpendiculaire au diamètre. La moyenne proportionnelle demandée est la corde CF. On a, en effet,

Fig. 135.



$$CF^2 = CD.CE = A.B \quad (167).$$

On aurait pu aussi, dans le cas considéré, décrire une demi-circonférence sur ED comme diamètre : ED représente la différence des deux lignes données. Si l'on mène, par le point C, une tangente CG à cette circonférence, CG représente la moyenne proportionnelle cherchée, car on a encore

$$CG^2 = CD.CE = A.B \quad (181).$$

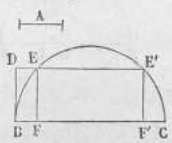
On a évidemment $CO' = B + \frac{A-B}{2} = \frac{A+B}{2}$. De même, $O'G = O'D = \frac{A-B}{2}$. Le triangle CO'G est d'ailleurs rectangle en G. Il en résulte que *la demi-somme de deux lignes, leur moyenne proportionnelle et leur demi-différence peuvent être représentées par les trois côtés d'un triangle rectangle.*

PROBLEME.

188. *Construire deux droites, connaissant leur somme et leur produit* (*fig.* 136).

Soit BC la somme donnée ; soit A la droite dont le carré égale le produit donné. Sur BC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. Au point B, élevons sur le diamètre BC la perpendiculaire BD égale à A. Par le point D ainsi obtenu, menons la parallèle DEE' au diamètre BC. Cette parallèle coupe généralement la circonférence en deux points E et E' ; par ces points, abaissons sur le diamètre BC les perpendiculaires EF, E'F'. Les deux droites demandées sont BF et FC ou BF' et F'C : ces deux solutions n'en font qu'une seule, car on a évidemment BF' = FC et F'C = BF ; on a bien d'ailleurs BF + FC = BC et BF.FC = $EF^2 = A^2$.

Fig. 136.



Pour que la parallèle DEE' rencontre la circonférence, il faut que A ne surpasse pas le rayon de la circonférence ou la moitié de la somme BC : si A est égale à $\frac{BC}{2}$, la parallèle devient tangente à la circonférence, et son point de contact se projette au centre. *Le produit de deux lignes dont la somme est constante est* donc *maximum lorsque ces deux lignes sont égales.* Nous retrouvons ainsi par la Géométrie un théorème déjà démontré au point de vue algébrique (t. I, *Alg. élém.* 285).

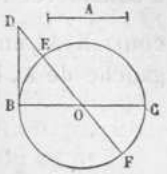
PROBLÈME.

189. *Construire deux droites, connaissant leur différence et leur produit* (*fig.* 137).

Soit BC la différence donnée, soit A la droite dont le carré égale le produit donné. Sur BC comme diamètre, décrivons une circonférence. Au point B, élevons sur le diamètre BC la

perpendiculaire BD égale à A. Par le point D ainsi obtenu et le centre de la circonférence, menons la sécante DEF. Les deux lignes demandées sont la sécante entière DF et sa partie extérieure DE. On a, en effet,

Fig. 137.



$$DF - DE = EF = BC$$

et

$$DF \cdot DE = DB^2 = A^2 \quad (181).$$

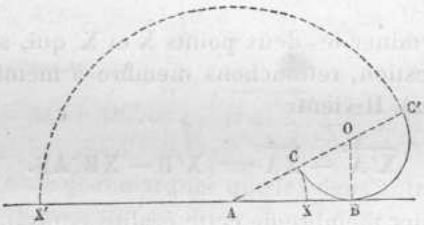
Les deux problèmes que nous venons de résoudre permettent de *construire* les racines des équations du second degré (193).

PROBLÈME.

190. *Diviser une droite en moyenne et extrême raison* (*fig.* 138).

Diviser une droite AB en moyenne et extrême raison, c'est trouver, sur cette droite ou sur son prolongement, un point

Fig. 138.



dont la distance à l'une des extrémités A soit moyenne proportionnelle entre sa distance à l'autre extrémité B et la droite AB elle-même.

Supposons qu'un point X situé entre A et B réponde à la question. On a alors à considérer les rapports $\frac{XB}{XA}$ et $\frac{XA}{AB}$. Quand le point X parcourt AB, le premier rapport *diminue d'une manière continue* depuis l'infini jusqu'à zéro, tandis que le second rapport *augmente d'une manière continue* depuis zéro jusqu'à 1. Il y a donc entre A et B un point X et un seul répondant à la question, et pour lequel on a

$$(1) \qquad \frac{XB}{XA} = \frac{XA}{AB} \quad \text{ou} \quad \overline{XA}^2 = XB \cdot AB.$$

Supposons qu'un point X', situé sur le prolongement de la droite AB, *à gauche* de A, réponde à la question. On a alors à considérer les rapports $\frac{X'B}{X'A}$ et $\frac{X'A}{AB}$. Quand le point X' parcourt X'A, en supposant d'abord X' aussi loin que possible à gauche de A, le premier rapport, qu'on peut écrire

$$\frac{X'A + AB}{X'A} = 1 + \frac{AB}{X'A},$$

augmente d'une manière continue depuis 1 jusqu'à l'infini, tandis que le second rapport *diminue d'une manière continue* depuis l'infini jusqu'à zéro. Il y a donc, à gauche de A, un point X' et un seul répondant à la question, et pour lequel on a

$$(2) \qquad \frac{X'B}{X'A} = \frac{X'A}{AB} \quad \text{ou} \quad \overline{X'A}^2 = X'B.AB.$$

Il est d'ailleurs évident que, sur le prolongement de AB *à droite* de B, aucun point X'' ne peut répondre à la question, la distance X''A surpassant alors à la fois la distance X''B et la droite AB.

Pour déterminer les deux points X et X' qui, seuls, répondent à la question, retranchons membre à membre les relations (1) et (2). Il vient

$$\overline{X'A}^2 - \overline{XA}^2 = (X'B - XB)\,AB.$$

Mais le premier membre de cette égalité équivaut à

$$(X'A + XA)(X'A - XA),$$

c'est-à-dire à $XX'(X'A - XA)$, tandis que le second membre est XX'.AB. En supprimant le facteur commun XX', on a donc

$$(3) \qquad X'A - XA = AB.$$

D'ailleurs, la relation (1) donne (t. I, *Arithm.*, 393)

$$\frac{XB + XA}{XA} = \frac{XA + AB}{AB},$$

ou, d'après (3),

$$\frac{AB}{XA} = \frac{X'A}{AB},$$

c'est-à-dire

$$X'A \cdot XA = \overline{AB}^2. \tag{4}$$

La recherche des points X et X′ ou des droites AX et AX′ revient donc, en vertu des équations (3) et (4), à construire deux longueurs ayant pour différence AB et pour produit $\overline{AB}^2$. Le problème de la moyenne et extrême raison n'est, par conséquent, qu'un cas particulier du problème résolu au n° 189 : ce qui motive la construction suivante.

A l'extrémité B de AB, on élève la perpendiculaire BO égale à la moitié de AB. Du point O comme centre, avec OB pour rayon, on décrit une circonférence que la droite AO rencontre aux points C et C′. La partie extérieure AC de la sécante AO représente l'inconnue AX, et la sécante entière AC′ représente l'inconnue AX′.

On retrouve ainsi les valeurs obtenues précédemment, en traitant le même problème par l'Algèbre (t. I, *Alg. élém.*, 256); car, si l'on désigne par a la longueur AB, on a, sur la figure,

$$AC = AX = AO - OC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

et, *en valeur absolue*,

$$AC' = AX' = AO + OC' = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

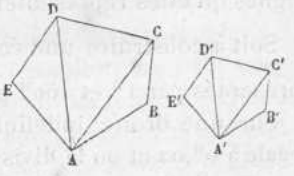
Il peut être utile de remarquer que les deux autres segments BX et BX′ ont pour valeurs

$$BX = a - AX = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad BX' = a + AX' = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

PROBLÈME.

191. *Construire sur une droite donnée un triangle ou un polygone semblable à un triangle ou à un polygone donné* (*fig.* 139).

Fig. 139.



Si l'on veut construire sur la droite A′B′, homologue de AB, un triangle semblable au triangle ABC, on fera l'angle B′A′C′ égal à l'angle BAC et l'angle A′B′C′ égal à l'angle ABC. Le triangle A′B′C′ et le triangle ABC seront semblables, comme équiangles.

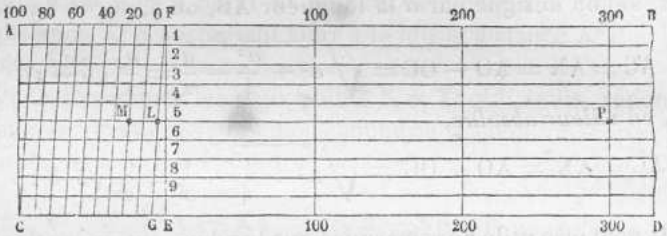
Si l'on veut construire sur la droite A'B', homologue de AB, un polygone semblable au polygone ABCDE, on décomposera le polygone donné en triangles en menant du sommet A les diagonales AC, AD. On construira alors sur A'B' un triangle A'B'C' semblable au triangle ABC; puis, sur A'C', homologue de AC, un triangle A'C'D' semblable au triangle ACD; enfin, sur A'D', homologue de AD, un triangle A'D'E' semblable au triangle ADE. Les deux polygones ABCDE et A'B'C'D'E' seront semblables, comme composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.

PROBLÈME.

192. *Construire une échelle* (*fig.* 140).

Quand on a levé le plan d'un terrain, il faut le rapporter sur le papier. Le rapport d'une droite du plan à celle qui lui cor-

Fig. 140.



respond sur le terrain s'appelle *échelle* du plan. Si ce rapport est 0,01, le plan est construit à l'échelle de 0,01 ou au *centième*.

Par extension, on appelle *échelle graphique* une figure géométrique qui permet de trouver immédiatement les longueurs des lignes du terrain, réduites dans un certain rapport, et, réciproquement, de passer des lignes mesurées sur le plan aux lignes qu'elles représentent effectivement.

Soit à construire une échelle de $\frac{1}{5000}$. 5000^{M} sont alors représentés par 1^{M} et 100^{M} par $0^{M},02$.

Sur une droite indéfinie AB, on prend une longueur AF égale à $0^{M},02$ et on la divise en 10 parties égales. AF représentant 100^{M}, chaque division représentera 10^{M} : on numérotera donc les points de division 0, 10, 20, ..., 100. On porte alors des

longueurs égales à AF à la suite du point F, et l'on indique ces nouvelles divisions par les nombres 100, 200, 300, etc., de manière à atteindre le plus grand nombre de centaines de mètres qu'on puisse avoir à considérer. Par les points A, F, 100, 200, 300, etc., on élève des perpendiculaires à la droite AB. On porte sur l'une d'elles, FE, dix fois une même longueur arbitraire, et par les points de division 1, 2, 3,..., 10, on mène des parallèles à AB. On prend sur CE, à partir du point E, une longueur EG égale au dixième de AF, on joint FG et, par les points de division de AF, on mène des parallèles à FG.

Les *centaines* de mètres sont alors représentées par les divisions de FB, les *dizaines* de mètres par les divisions de AF, et les *neuf premiers multiples du mètre* par les portions de parallèles à AB comprises dans le triangle FGE. En effet, si l'on considère la cinquième parallèle et le segment L5 qui lui correspond, on a

$$\frac{F5}{FE} = \frac{L5}{GE} = \frac{5}{10};$$

comme GE représente 10^M, L5 en représente 5.

Si l'on veut marquer sur le plan une longueur de 325^M, on place l'une des pointes du compas sur l'intersection M de la parallèle à FG qui correspond au point de division 20 sur AF, avec la parallèle à AF qui passe par la division 5 de FE, et l'on amène l'autre pointe du compas sur la parallèle à FE qui est marquée 300 : on a 300^M depuis cette parallèle jusqu'à FE, 25^M depuis FE jusqu'au point M.

Réciproquement, si l'on veut savoir la longueur réelle d'une ligne du plan, on prend une ouverture de compas égale à cette ligne, et l'on voit immédiatement combien elle renferme de centaines de mètres. Supposons qu'elle tombe entre 200^M et 300^M. On place alors l'une des pointes du compas sur la parallèle 200 à FE, et on la fait glisser sur cette parallèle jusqu'à ce que l'autre pointe du compas vienne rencontrer un point d'intersection des parallèles à AF et des parallèles à FG ou couper l'une des parallèles à FG entre deux parallèles à AF. Supposons qu'on rencontre ainsi la parallèle 30 à FG entre la huitième et la neuvième parallèle à AF. La longueur cherchée renferme d'abord 200^M, puis 30^M, puis un nombre de mètres compris entre 8^M et 9^M. Cette longueur sera donc 238^M ou 239^M, à un demi-mètre près, en déterminant à vue quelle est la

parallèle à AF la plus rapprochée de la pointe du compas.

Ce que nous venons de dire relativement au *lever des plans* s'applique évidemment à la représentation graphique d'un bâtiment, d'une machine, d'un objet quelconque.

VI. — Exercices et questions complémentaires.

PROBLÈME.

193. *Déterminer les hauteurs, les médianes et les bissectrices des angles d'un triangle en fonction de ses trois côtés.*

Nous désignerons par ABC le triangle donné et par a, b, c, les longueurs des côtés respectivement opposés aux angles A, B, C.

1° Cherchons la hauteur $AE = h$, qui correspond au sommet A. Des deux angles B et C, l'un est nécessairement aigu. Supposons que ce soit l'angle C (*fig.* 122).

Le triangle rectangle AEC donne d'abord

$$h^2 = b^2 - \overline{CE}^2.$$

Le triangle ABC, où l'angle C est aigu, permet ensuite de poser (170)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.CE,$$

d'où

$$CE = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

La première relation devient alors

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2},$$

ou, d'après un théorème élémentaire d'Agèbre (t. I, *Alg. élém.* 30, II),

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}.$$

Mais, si l'on désigne par $2p$ le périmètre du triangle ABC, on a successivement

$$a+b+c = 2p, \qquad a+b-c = 2p-2c = 2(p-c),$$
$$c+a-b = 2p-2b = 2(p-b), \qquad c-a+b = 2p-2a = 2(p-a).$$

En substituant ces résultats dans la valeur de h^2, en simplifiant et en

extrayant la racine carrée, on trouve

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Pour avoir les hauteurs h' et h'' qui correspondent aux côtés b et c, il suffit de remplacer successivement dans la valeur de h le facteur $\frac{2}{a}$ par $\frac{2}{b}$ et $\frac{2}{c}$.

2° Cherchons la médiane AD $= m$, qui correspond au côté a (*fig.* 122). On a immédiatement, d'après le théorème du n° 173,

$$b^2 + c^2 = 2\left(\frac{a^2}{4} + m^2\right).$$

On en déduit

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}.$$

Les médianes m' et m'' qui correspondent aux côtés b et c auront de même pour expressions

$$m' = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2) - b^2}, \quad m'' = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}.$$

3° Cherchons la bissectrice CD $= \gamma$ de l'angle C du triangle ABC (*fig.* 124). Le théorème du n° 178 donne immédiatement

$$ab = \gamma^2 + \text{AD}.\text{DB}.$$

Mais on a (141)

$$\frac{\text{AD}}{b} = \frac{\text{DB}}{a} = \frac{\text{AD} + \text{DB}}{a+b} = \frac{c}{a+b}.$$

Il en résulte

$$\text{AD} = \frac{bc}{a+b}, \quad \text{DB} = \frac{ac}{a+b}.$$

Il vient donc, en substituant dans la première relation et en isolant γ^2,

$$\gamma^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}$$
$$= \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}.$$

Par suite, en remplaçant $a+b+c$ par $2p$, $a+b-c$ par $2(p-c)$, et en extrayant la racine carrée, on trouve

$$\gamma = \frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)}.$$

Si l'on désigne par β et α les bissectrices des angles B et A, on a de la

même manière

$$\beta = \frac{2}{a+c}\sqrt{pac(p-b)}, \quad \alpha = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}.$$

PROBLÈME.

194. *Calculer le rayon du cercle circonscrit à un triangle, en fonction des côtés de ce triangle.*

Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC (*fig.* 125). Le théorème du n° 179 donne immédiatement

$$ab = 2\mathrm{R}h'',$$

en désignant par h'' la hauteur qui correspond au côté c. Si l'on remplace h'' par sa valeur (193, 1°), il vient

$$\mathrm{R} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

PROBLÈME.

195. *Construire les racines d'une équation du second degré.*

Les équations du second degré, en mettant les signes en évidence, rentrent toutes dans les quatre types suivants (t. I, *Alg.*) :

$$x^2+px+q=0, \quad x^2-px+q=0,$$
$$x^2+px-q=0, \quad x^2-px-q=0.$$

Le premier se ramène au deuxième et le troisième au quatrième, par le seul changement de x en $-x$. On n'a donc à construire effectivement que les racines des équations

$$x^2-px+q=0, \quad x^2-px-q=0,$$

où la somme de ces racines est égale à p, tandis que leur produit est $\pm q$.

En les mettant sous la forme

$$x(p-x)=q, \quad x(x-p)=q,$$

on voit que construire les racines de la première, c'est *trouver deux droites dont la somme soit p et le produit q* (188), et que construire les racines de la seconde, c'est *trouver deux droites dont la différence soit p et le produit q* (189). Remarquons en effet que, dans l'équation

$$x^2-px-q=0,$$

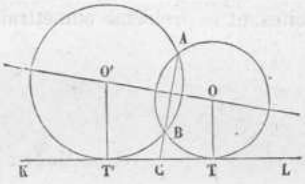
les racines sont de signes contraires, la plus grande étant positive. Si x représente cette plus grande racine positive, la racine négative *prise en valeur absolue* est $x-p$.

PROBLÈME.

196. *Construire une circonférence qui passe par deux points donnés et soit tangente à une droite ou à une circonférence donnée.*

1° Soient (*fig.* 141) A et B les deux points donnés, et KL la droite donnée. Supposons le problème résolu.

Fig. 141.



Si la corde AB prolongée coupe KL, et si CT désigne la distance du point d'intersection C au point de contact de KL avec la circonférence cherchée, on doit avoir (181)

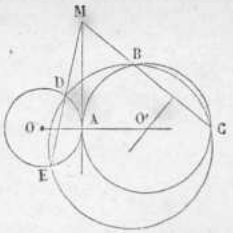
$$CT^2 = AC.BC.$$

On n'a donc qu'à construire la moyenne proportionnelle CT aux longueurs AC, BC (187), et à porter cette moyenne sur la droite KL, de part et d'autre du point C, en CT et en CT'. En élevant alors les perpendiculaires TO et T'O' à KL et en menant sur le milieu de AB la perpendiculaire OO', les points d'intersection O et O' sont les centres des deux circonférences qui répondent à la question.

Si AB était parallèle à KL, il n'y aurait qu'une solution. Le point de contact correspondant T s'obtiendrait en menant une perpendiculaire sur le milieu de AB jusqu'à la rencontre de KL.

2° Soient (*fig.* 142) B et C les deux points donnés, et O la circonférence donnée. Supposons le problème résolu. Il n'est évidemment possible que si les points B et C sont *ensemble* extérieurs ou intérieurs à la circonférence O.

Fig. 142.



Cela posé, si A est le point de contact de la circonférence donnée O et de la circonférence inconnue O', on voit qu'il suffit de trouver le point M de rencontre de la tangente commune AM avec la corde BC prolongée. Or, si l'on fait passer par B et C une circonférence auxiliaire quelconque qui coupe la circonférence O en deux points D et E, la corde DE prolongée coupe précisément BC au point M. En effet, désignons pour un instant par ε le point où la droite MD couperait la circonférence O. On aura à la fois (181)

$$\overline{MA}^2 = MB.MC = MD.M\varepsilon.$$

Il en résulte (182) que le point ε appartient à la circonférence déterminée par les trois points B, C, D, de sorte qu'il se confond avec le point E.

Le point M étant ainsi à la rencontre de BC et de DE, on mène par ce

point la tangente MA à la circonférence O. Le point A est le point de contact de cette circonférence avec la circonférence cherchée O', dont le centre est à la rencontre de OA prolongée et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC.

La seconde tangente menée du point M à la circonférence O fournit une seconde solution.

Si les points B et C étaient équidistants du centre O, les droites BC, DE, seraient parallèles. La tangente AM serait donc parallèle aux mêmes droites, et le problème admettrait encore deux solutions.

CHAPITRE IV.

MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

I. — Des polygones réguliers.

197. Un polygone est *régulier* lorsqu'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. Parmi les triangles et les quadrilatères, le triangle équilatéral et le carré sont des polygones réguliers.

Un polygone est *inscrit* dans un cercle lorsque tous ses sommets appartiennent à la circonférence : on dit alors que le cercle est *circonscrit* au polygone.

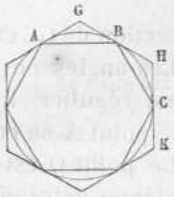
Un polygone est *circonscrit* à un cercle lorsque ses côtés sont tangents à la circonférence : on dit alors que le cercle est *inscrit* dans le polygone.

Tout triangle est *inscriptible* et *circonscriptible* (95, 130).

THÉORÈME.

198. *Si l'on partage une circonférence en un nombre quelconque d'arcs égaux, les cordes de ces arcs forment un polygone régulier inscrit; les tangentes menées par les points de division forment un polygone régulier circonscrit* (*fig.* 143).

Fig. 143.



Supposons qu'on partage la circonférence en n parties égales et qu'on joigne les points de division. Considérons un angle quelconque ABC du polygone formé : les côtés de cet angle interceptant deux divisions, il a pour mesure la moitié de $n - 2$ divisions. Il en est de même de tous les autres angles du polygone; ses angles sont donc égaux. Quant à ses côtés, ils sont égaux comme cordes sous-tendant des arcs égaux. On obtient, par conséquent, un polygone régulier.

Supposons qu'on mène des tangentes à la circonférence par tous les points de division obtenus, ces tangentes forment un polygone circonscrit régulier. En effet, si l'on considère les triangles AGB, BHC, ..., on voit que ces triangles sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : ces triangles sont isocèles, deux tangentes issues d'un même point étant égales, et l'angle GBA est égal à l'angle HBC, ces deux angles ayant même mesure par hypothèse; d'ailleurs AB = BC. Les angles G, H, ..., sont donc tous égaux. GH, qui est le double de BH, est égal à HK, qui est le double de HC, ... Les côtés du polygone circonscrit sont donc tous égaux. Ce polygone est, par suite, régulier.

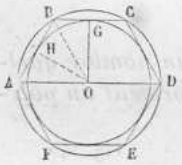
En rapprochant indéfiniment les points de division, on peut considérer la circonférence comme un polygone régulier d'un nombre de côtés aussi grand qu'on voudra, ces côtés étant eux-mêmes aussi petits qu'on voudra.

THÉORÈME.

199. Réciproquement, *tout polygone régulier est inscriptible et circonscriptible* (*fig.* 144).

Soit, par exemple, l'hexagone régulier ABCDEF. Déterminons le centre O du cercle qui passe par les trois sommets A, B, C : il passera aussi par le sommet suivant D. En effet, abaissons du point O sur BC la perpendiculaire OG : le point G sera le milieu de BC. Comparons les deux quadrilatères OABG, ODCG, en pliant la figure suivant l'axe OG. Les angles en G étant droits, GB prend la direction de GC et le point B tombe en C, puisqu'on a GB = GC. Les angles en B et en C étant égaux, puisque le polygone est régulier, le côté BA prend la direction du côté CD, et le point A se confond avec le point D, puisqu'on a BA = CD. Le point O est resté fixe : les deux droites OA et OD ayant mêmes extrémités coïncident et sont égales. La circonférence décrite du point O comme centre avec OA pour rayon passe donc par le sommet D; on prouvera de la même manière qu'elle doit passer par tous les autres sommets du polygone : ce polygone est donc inscriptible.

Fig. 144.



Il est circonscriptible; car les côtés AB, BC, CD, ..., étant

des cordes égales de la circonférence O, sont également éloignés du point O. Par conséquent, si du point O comme centre, avec la perpendiculaire OG pour rayon, on décrit une circonférence, elle sera tangente à tous les côtés du polygone donné en leurs milieux.

SCOLIE.

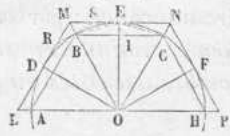
200. Le point O, centre commun du cercle circonscrit et du cercle inscrit, est le *centre* du polygone régulier. Le rayon du cercle circonscrit est le *rayon* du polygone; le rayon du cercle inscrit en est l'*apothème*. L'angle de deux rayons consécutifs OA, OB, est l'*angle au centre* du polygone. Tous les angles au centre sont égaux, puisqu'ils interceptent des arcs égaux. Le nombre des côtés du polygone étant n et la somme des angles formés autour du point O étant égale à quatre angles droits, la valeur de l'angle au centre d'un polygone régulier est exprimée d'une manière générale par $\frac{4}{n}$.

On peut remarquer que les angles d'un polygone régulier étant tous égaux, l'un quelconque d'entre eux a pour expression $\frac{2n-4}{n}$ (63) ou $2-\frac{4}{n}$. *L'angle d'un polygone régulier et son angle au centre sont donc supplémentaires;* leurs moitiés sont dès lors complémentaires : on en conclut, en considérant le triangle rectangle BOH, dans lequel OH est la bissectrice de l'angle au centre AOB, que BO, à son tour, est la bissectrice de l'angle ABC du polygone. Ainsi, *tout rayon divise en deux parties égales l'angle au sommet duquel il aboutit.*

COROLLAIRES.

201. *Étant donné un polygone régulier inscrit, si l'on prolonge ses apothèmes jusqu'à la rencontre de la circonférence et que, par les points ainsi déterminés, on mène des tangentes, elles forment un polygone régulier circonscrit* (*fig.* 145).

Fig. 145.



En effet, le point D étant le milieu de l'arc AB et le point E le milieu de l'arc BC (93), l'arc DE sera égal à l'arc AB. Il s'ensuit que les nouveaux points de division D, E, F, ..,

partagent la circonférence dans le même nombre de parties égales que les points A, B, C, ... Le polygone régulier circonscrit ainsi obtenu a ses côtés parallèles à ceux du polygone régulier inscrit, et les rayons du polygone inscrit prolongés sont les rayons du polygone circonscrit; car, les triangles rectangles MOD, MOE, étant égaux, MO est la bissectrice de l'angle DOE et doit se confondre avec BO, bissectrice du même angle.

Reportons-nous à la *fig.* 145. Si l'on joint le point D aux points A et B, le point E aux points B et C, ..., on forme évidemment un polygone régulier inscrit de $2n$ côtés, si le nombre de côtés du polygone ABC... est n. Le périmètre du nouveau polygone est plus grand que celui du polygone ABC..., puisqu'on a $BE + EC > BC$.

De même, si l'on mène des tangentes à la circonférence par les points B, C, ..., et qu'on les arrête aux tangentes qui forment le polygone circonscrit LMN..., on obtient un polygone régulier circonscrit de $2n$ côtés. Le périmètre de ce nouveau polygone est plus petit que celui du polygone LMN..., puisqu'on a $RS < RM + MS$.

Ainsi, à mesure qu'on double successivement le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit dans une circonférence, le périmètre de ce polygone augmente. A mesure qu'on double successivement le nombre des côtés d'un polygone régulier circonscrit à une circonférence, le périmètre de ce polygone diminue.

Remarquons que le triangle rectangle BOI donne

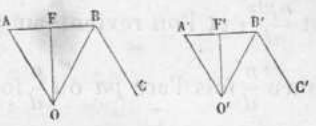
$$BO - OI < BI.$$

La différence entre le rayon et l'apothème d'un polygone régulier est donc toujours plus petite que la moitié du côté de ce polygone. A mesure qu'on double le nombre des côtés du polygone, son côté diminue (94) et tend vers zéro, puisque les sommets du polygone se rapprochent indéfiniment sur la circonférence : par suite, *la différence entre le rayon et l'apothème diminue en tendant aussi vers zéro, à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente.*

THÉORÈME.

202. *Deux polygones réguliers qui ont le même nombre de côtés sont semblables, et le rapport de leurs périmètres est égal à celui de leurs rayons ou de leurs apothèmes* (*fig.* 146).

Fig. 146.



La valeur de l'angle d'un polygone régulier ne dépend, comme nous l'avons déjà vu, que de son nombre de côtés : les deux polygones considérés ont donc leurs angles égaux.

Leurs côtés sont proportionnels, les rapports $\frac{AB}{A'B'}, \frac{BC}{B'C'}, \dots,$ étant nécessairement identiques. Ces deux polygones sont donc semblables.

Les périmètres P et P′ des deux polygones forment alors un rapport égal au rapport de similitude $\frac{AB}{A'B'}$ ou, ce qui revient au même, $\frac{AF}{A'F'}$, OF et O′F′ représentant les apothèmes des deux polygones (200). Mais les deux triangles rectangles AOF, A′O′F′, sont évidemment semblables, puisque les rayons AO et A′O′ sont bissecteurs des angles A et A′ des deux polygones. On a donc

$$\frac{AF}{A'F'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{OF}{O'F'},$$

et l'on en conclut

$$\frac{P}{P'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{OF}{O'F'}.$$

SCOLIE.

203. Supposons une circonférence divisée en n parties égales à a. En joignant les points de division dans leur ordre naturel, on obtient un polygone régulier ordinaire de n côtés (198). Admettons maintenant qu'on joigne ces points de division de p en p à partir de l'un d'eux.

Si p est premier avec n (t. I, *Arithm.*, 113), la circonférence représentée par na et l'arc pa sous-tendu par chacune des cordes successives ont npa pour plus petit multiple commun (t. I, *Arithm.*, 144), et l'on revient au point de départ après avoir parcouru n fois l'arc pa ou p fois la circonférence na. On forme donc ainsi un nouveau polygone

régulier de n côtés. Seulement, ses côtés s'entrecoupent, et on lui donne le nom de *polygone régulier étoilé*.

Si p et n ont un plus grand commun diviseur d, le plus petit multiple commun de la circonférence na et de l'arc pa est $\frac{npa}{d}$, et l'on revient au point de départ après avoir parcouru $\frac{n}{d}$ fois l'arc pa ou $\frac{p}{d}$ fois la circonférence na. On forme donc ainsi un polygone régulier de $\frac{n}{d}$ côtés et non plus de n côtés.

Il résulte de ce qui précède que le nombre des polygones réguliers, convexes ou étoilés, de n côtés, est égal au nombre des nombres premiers et inférieurs à n, c'est-à-dire au nombre des nombres premiers à n renfermés dans la suite $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Mais si l'on remarque (t. I, *Arithm.*, 168) que les nombres premiers et inférieurs à n se répondent deux à deux à égale distance du plus petit et du plus grand de ces nombres, qui sont 1 et $n-1$, c'est-à-dire qu'on obtient le même polygone étoilé en joignant les points de division de p en p (p étant premier à n) qu'en les joignant de $n-p$ en $n-p$, on voit qu'en réalité le nombre des polygones réguliers de n côtés est égal au nombre des nombres premiers à n renfermés dans la suite $1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$.

D'après cela, il n'y a qu'un seul hexagone régulier, puisque, pour $n=6$, la suite à considérer est $1, 2, \frac{5}{2}$, qui ne renferme aucun autre nombre entier que 1 premier à 6. Il y a deux pentagones réguliers, un convexe, un étoilé, puisque, pour $n=5$, la suite à considérer est 1, 2, et que 1 et 2 sont premiers à 5. Il y a de même deux décagones réguliers, un convexe, un étoilé; quatre pentédécagones réguliers, un convexe, trois étoilés, etc.

II. — Problèmes sur les polygones réguliers.

PROBLÈME.

204. *Inscrire un carré dans un cercle donné* (*fig.* 147).

Menons deux diamètres AC, BD, perpendiculaires entre eux, et joignons leurs extrémités A, B, C, D. Le quadrilatère

obtenu est un carré, car la circonférence est divisée en quatre parties égales par les angles au centre AOB, BOC, COD, DOA, qui sont droits.

Fig. 147.



Le triangle isocèle rectangle AOB donne

$$AB^2 = 2AO^2, \quad \text{d'où} \quad AB = AO\sqrt{2}.$$

Par conséquent, *le côté du carré inscrit est égal au rayon du cercle circonscrit multiplié par la racine carrée de* 2.

Le diamètre du cercle inscrit dans le carré est évidemment égal à son côté AB. *L'apothème du carré inscrit est donc égal à la moitié de son côté.*

On voit facilement que *le côté du carré circonscrit est égal au diamètre du cercle considéré.*

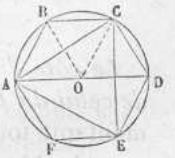
Si l'on divise en deux parties égales les arcs sous-tendus par les côtés du carré, les points de division et les sommets du carré partagent la circonférence en huit parties égales. Partant du carré, on peut donc inscrire l'octogone régulier. En continuant de la même manière, on inscrit toute la série des polygones réguliers ayant pour nombre de côtés une puissance entière quelconque de 2, à partir de 2^2.

PROBLÈME.

205. *Inscrire un hexagone régulier et un triangle équilatéral dans un cercle donné* (*fig.* 148).

Supposons que BC représente le côté de l'hexagone régulier. L'angle au centre BOC est égal à $\frac{4^{dr}}{6}$ ou à $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Le triangle BOC étant isocèle, chacun des angles B et C est aussi égal à $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Par conséquent, le triangle BOC étant équiangle est équilatéral, et le côté BC de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon OB du cercle circonscrit.

Fig. 148.



Pour inscrire un hexagone régulier, il suffit donc *de porter six fois le rayon sur la circonférence.*

On inscrit le triangle équilatéral, en joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone régulier inscrit.

Si l'on considère le triangle rectangle ACD, on a immédia-

tement

$$AC^2 = AD^2 - CD^2.$$

Mais

$$AD = 2AO \quad \text{et} \quad CD = AO.$$

Il vient donc

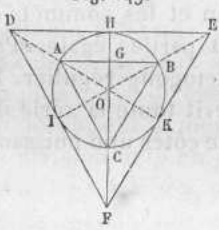
$$AC^2 = 4AO^2 - AO^2 = 3AO^2, \quad \text{d'où} \quad AC = AO\sqrt{3}.$$

Le côté du triangle équilatéral inscrit est donc *égal au rayon du cercle circonscrit multiplié par la racine carrée de* 3.

Le losange ABCO montre que l'apothème du triangle équilatéral est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit. La hauteur de ce triangle est, par suite, égale aux $\frac{3}{2}$ du rayon.

On peut remarquer ici que, lorsqu'un polygone régulier a un nombre de côtés *pair*, comme l'hexagone, chaque rayon AO prolongé donne un diamètre AD; tandis que, lorsque le polygone régulier considéré a un nombre de côtés *impair*, comme le triangle équilatéral, à chaque rayon AO prolongé correspond un apothème.

Fig. 149.



Soit le triangle équilatéral inscrit ABC (*fig.* 149). Menons les apothèmes, prolongés jusqu'à la circonférence, OH, OI, OK. En traçant par les points H, I, K, des tangentes à la circonférence, nous formerons un triangle équilatéral circonscrit dont les côtés seront parallèles à ceux du triangle équilatéral inscrit (201). Les triangles semblables OAB, ODE, donnent alors

$$\frac{AB}{DE} = \frac{OA}{OD} = \frac{OG}{OH} = \frac{1}{2}.$$

Le côté du triangle équilatéral circonscrit est donc *double de celui du triangle équilatéral inscrit.* Il en résulte évidemment que toutes les lignes tracées dans le triangle circonscrit sont doubles des lignes homologues du triangle inscrit. En particulier, la hauteur du triangle équilatéral circonscrit est triple du rayon du cercle inscrit.

Partant du triangle équilatéral et de l'hexagone, on peut inscrire les polygones réguliers de 12, 24, 48, 96, ... côtés, en opérant successivement la bissection des arcs considérés, c'est-à-dire toute la série des polygones réguliers dont le nombre de côtés est exprimé par 3.2^n.

PROBLÈME.

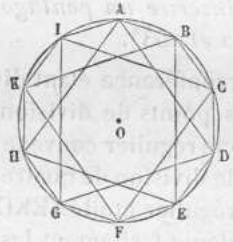
206. *Inscrire un décagone régulier dans un cercle donné* (1) (*fig.* 150 et 151).

Divisons la circonférence en dix parties égales. En joignant les points de division dans leur ordre naturel, nous obtiendrons

Fig. 150.



Fig. 151.



le décagone régulier convexe ABCDEFGHIK; en les joignant de trois en trois, nous obtiendrons le décagone régulier étoilé ADGICFKBEH (*fig.* 151). En effet, pour $n = 10$, la suite à considérer est 1, 2, 3, 4, $\frac{9}{2}$, et cette suite ne renferme que 1 et 3 qui soient premiers à 10 (203). Nous allons chercher à déterminer à la fois les côtés AB et AD des deux décagones.

Remarquons (*fig.* 150) que le rayon BO prolongé passe par le sommet G. L'angle en M a donc pour mesure deux divisions de la circonférence (111). L'angle inscrit ABG a la même mesure (108), ainsi que l'angle au centre BOD. Les deux triangles ABM, MOD sont donc isocèles, et l'on a $AB = AM$, $MD = OD$, d'où

$$AD - AB = OD.$$

De plus, les angles DOA et GMA sont égaux comme ayant tous deux pour mesure trois divisions de la circonférence. Les droites DO et GM ou OM sont donc antiparallèles par rapport aux côtés de l'angle OAD, et l'on a (183) $AM.AD = \overline{AO}^2$ ou

$$AB.AD = \overline{OD}^2.$$

---

(1) Nous empruntons les démonstrations des nos 206 et 208 au Traité de Géométrie, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition (1891).

Les deux inconnues AB *et* AD ne *sont* donc autre chose que *les deux solutions qui répondent à la division du rayon en moyenne et extrême rayon* (190), et l'on a

$$AB = OD\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad AD = OD\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

PROBLÈME.

207. *Inscrire un pentagone régulier dans un cercle donné* (*fig.* 152 *et* 153).

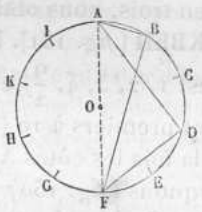
La circonférence étant divisée en 10 parties égales, si l'on joint les points de division de deux en deux, on obtient le pentagone régulier convexe ACEGK; si l'on joint ces mêmes points de division de quatre en quatre (203), on obtient le pentagone régulier étoilé AEKCG (*fig.* 152).

On calcule facilement les côtés de ces deux pentagones, en

Fig. 152.



Fig. 153.



se reportant à la *fig.* 153. Si AB est le côté du décagone régulier convexe, BF est celui du pentagone régulier étoilé (203), et, si AD est le côté du décagone régulier étoilé, DF est celui du pentagone régulier convexe. Les deux triangles rectangles ADF, ABF, donnent donc immédiatement, en remplaçant AD et AB par leurs valeurs (206) et en désignant par R le rayon OA,

$$DF = \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$BF = \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Partant du pentagone régulier et du décagone régulier convexes, on peut inscrire les polygones réguliers de 20, 40, 80,

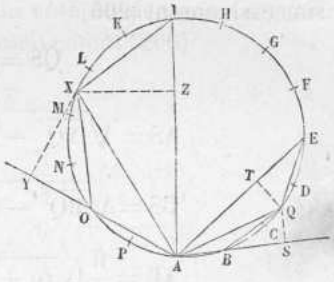
160, ... côtés, en opérant successivement la bissection des arcs considérés, c'est-à-dire toute la série des polygones réguliers dont le nombre de côtés est exprimé par 5.2^n.

PROBLÈME.

208. *Inscrire un pentédécagone régulier dans un cercle donné* (*fig.* 154).

Divisons la circonférence en 15 parties égales. En joignant les points de division dans leur ordre naturel, nous obtiendrons le pentédécagone régulier convexe ; en les joignant de 2 en 2, de 4 en 4, de 7 en 7, nous obtiendrons les trois pentédécagones réguliers étoilés. En effet, pour $n = 15$, la suite à considérer est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et cette suite renferme, comme nombres premiers à 15, les nombres 1, 2, 4 et 7 (203).

Fig. 154.



Considérons les côtés AB et AE du premier et du troisième pentédécagone. Q étant le milieu de l'arc CD, on a, en prenant la circonférence pour unité,

$$\text{arc AQ} = \frac{2,5}{15} = \frac{1}{6},$$

$$\text{arc QB} = \text{arc QE} = \frac{1,5}{15} = \frac{1}{10}.$$

Donc, pour *construire* AB et AE, il suffit de porter, à partir du point A, une corde AQ égale au côté de l'hexagone ou au rayon (205) ; puis, de part et d'autre du point Q, une corde QB = QE représentant le côté du décagone régulier convexe.

Abaissons du point Q les perpendiculaires QS et QT sur les deux côtés AB et AE. Les deux triangles rectangles QAS et QAT étant égaux (47, 1°), on a

$$\text{AS} = \text{AT}, \quad \text{QS} = \text{QT}.$$

Les deux triangles rectangles QBS et QET sont donc eux-mêmes égaux (47, 2°), et il en résulte

$$\text{BS} = \text{ET}.$$

Par suite,

$$AB = AS - BS \quad \text{et} \quad AE = AT + TE = AS + BS.$$

Pour *calculer* AB et AE, il suffit donc de calculer AS et BS.

Or, l'angle au centre du décagone régulier convexe ayant pour mesure $\frac{1}{10}$ de la circonférence, l'angle inscrit BAQ est la moitié de cet angle au centre, et, comme AQ est égal au rayon, QS est la moitié du côté du décagone régulier convexe. En désignant par R le rayon du cercle donné, on peut donc écrire successivement (206)

$$QS = \frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

$$AS = \sqrt{\overline{AQ}^2 - \overline{QS}^2} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$BS = \sqrt{\overline{BQ}^2 - \overline{QS}^2} = \frac{R}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3}),$$

$$AB = \frac{R}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}),$$

$$AE = \frac{R}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}).$$

Considérons maintenant les côtés AO et AI du deuxième et du quatrième pentédécagone. X étant le milieu de l'arc ML, on a

$$\text{arc AX} = \frac{4,5}{15} = \frac{3}{10},$$

$$\text{arc XO} = \text{arc XI} = \frac{2,5}{15} = \frac{1}{6}.$$

Donc, pour *construire* AO et AI, il suffit de porter, à partir du point A, une corde AX égale au côté du décagone régulier étoilé; puis, de part et d'autre du point X, une corde XO = XI représentant le côté de l'hexagone régulier ou le rayon.

Abaissons du point X les perpendiculaires XY et XZ sur les deux côtés AO et AI. Les deux triangles rectangles XAY et XAZ étant égaux, on a

$$AY = AZ, \quad XY = XZ.$$

Les deux triangles rectangles XOY et XIZ sont donc eux-

mêmes égaux, et il en résulte

$$OY = IZ.$$

Par suite,

$$AO = AY - OY \quad \text{et} \quad AI = AZ + ZI = AY + OY.$$

Pour *calculer* AO et AI, il suffit donc de calculer AY et OY.

Or, l'angle au centre du décagone régulier étoilé ayant pour mesure $\frac{3}{10}$ de la circonférence, l'angle inscrit XIZ ou son égal XOY est la moitié de cet angle au centre, et, comme OX est égal au rayon, XY est la moitié du côté du décagone régulier étoilé. On peut donc écrire successivement (206)

$$XY = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1),$$

$$AY = \sqrt{\overline{AX}^2 - \overline{XY}^2} = \frac{R}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3}),$$

$$OY = \sqrt{\overline{OX}^2 - \overline{XY}^2} = \frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$AO = \frac{R}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}),$$

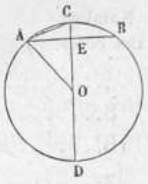
$$AI = \frac{R}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}).$$

Partant du pentédécagone régulier convexe, on peut inscrire les polygones réguliers de 30, 60, 120, 240, ... côtés, par la bissection des arcs considérés, c'est-à-dire toute la série des polygones réguliers dont le nombre de côtés est exprimé par $3.5.2^n$.

PROBLÈME.

209. *Le rayon d'un cercle et le côté d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle étant donnés, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés* (*fig.* 155).

Fig. 155.



Soient $AB = a$ le côté donné et R le rayon du cercle. Si nous abaissons sur AB le diamètre perpendiculaire CD, AC représentera le côté cherché, que nous désignerons par a'.

On a immédiatement (167)

$$\overline{AC}^2 = CD.CE,$$

c'est-à-dire

$$a'^2 = 2R(R - OE)$$

Le triangle rectangle AEO donne d'ailleurs

$$OE = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AE}^2},$$

ou bien

$$OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

On a donc, en substituant dans la valeur de a'^2 et en extrayant la racine carrée,

$$(1) \qquad a' = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})}.$$

Si l'on prend le rayon pour unité, il vient

$$(1\,bis) \qquad a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

Remarquons que OE est l'apothème du polygone régulier inscrit dont le côté est a.

SCOLIE.

210. Si l'on connaît le côté du polygone régulier inscrit de n côtés, on peut, par l'application répétée de la formule (1 *bis*), calculer successivement les côtés et, par suite, les périmètres des polygones réguliers inscrits de $2n$, $4n$, $8n$, ... côtés. On peut, en même temps, calculer les apothèmes des polygones réguliers inscrits de n, $2n$, $4n$, ... côtés.

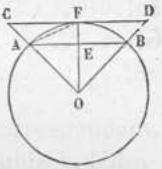
Voici les résultats *par défaut* qu'on obtient, pour les demi-périmètres des polygones considérés, à moins d'une unité du cinquième ordre décimal, soit en partant du carré dont le côté dans le cercle de rayon 1 est $\sqrt{2}$, soit en partant de l'hexagone dont le côté est 1 :

Nombre des côtés.	Demi-périmètres.	Nombre des côtés.	Demi-périmètres.
4.....	2,82842	6.....	3,00000
8.....	3,06146	12.....	3,10582
16.....	3,12144	24.....	3,13262
32.....	3,13654	48.....	3,13935
64.....	3,14033	96.....	3,14103
128.....	3,14127	192.....	3,14145

PROBLÈME.

211. *Étant donné le côté d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier circonscrit semblable* (*fig.* 156).

Fig. 156.



Soient AB $= a$ le côté donné et R le rayon du cercle. Si l'on détermine le point de rencontre F de l'apothème OE avec la circonférence, et si l'on mène en ce point la tangente CD limitée aux rayons OA et OB prolongés, on sait (201, 202) que CD est le côté du polygone régulier circonscrit, semblable au polygone régulier inscrit dont le côté est a.

Si l'on pose CD $= x$, les triangles semblables AOE, COF, donnent immédiatement

$$\frac{CF}{AE} = \frac{OF}{OE} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a} = \frac{R}{OE}.$$

Mais (209)

$$OE = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Par suite,

$$(2) \qquad x = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Si l'on prend le rayon pour unité, il vient

$$(2\,bis) \qquad x = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

SCOLIE.

212. La formule (2 *bis*) permet de calculer les demi-périmètres des polygones réguliers circonscrits, en opérant comme nous l'avons indiqué au n° 210. Les résultats ci-après sont obtenus *par excès* à moins d'une unité du cinquième ordre décimal :

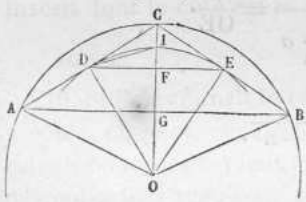
Nombre des côtés.	Demi-périmètres.	Nombre des côtés.	Demi-périmètres.
4	4.00000	6	3,46411
8	3,31371	12	3,21540
16	3,18260	24	3,15967
32	3,15173	48	3,14609
64	3,14412	96	3,14272
128	3,14223	192	3,14188

PROBLÈME.

213. *Étant donnés le rayon r et l'apothème a d'un polygone régulier, calculer le rayon r' et l'apothème a' du polygone régulier de même périmètre, mais d'un nombre de côtés double (fig. 157).*

Considérons le cercle O circonscrit au polygone régulier donné dont le côté est AB. Si l'on mène le rayon OGC perpendiculaire à AB, on a $OC = r$ et $OG = a$.

Fig. 157.



Traçons les cordes CA et CB, et joignons leurs milieux D et E. La droite DE, parallèle à AB et égale à sa moitié, est le côté du polygone régulier de même périmètre que le polygone donné et d'un nombre de côtés double. D'ailleurs, l'angle DOE, étant évidemment la moitié de l'angle au centre AOB du polygone primitif, est l'angle au centre du second polygone, et il en résulte $OD = r'$ et $OF = a'$.

Cela posé, le point F étant le milieu de CG, il vient

$$OF = OG + \frac{1}{2}(OC - OG) = \frac{1}{2}(OG + OC),$$

c'est-à-dire

$$a' = \frac{1}{2}(a + r). \tag{1}$$

Le triangle rectangle ODC donne à son tour

$$\overline{OD}^2 = OC.OF,$$

c'est-à-dire

$$r' = \sqrt{r.a'}. \tag{2}$$

SCOLIE.

214. La figure montre immédiatement que OF est plus grand que OG, tandis que OD est moindre que OC. Ainsi, lorsqu'on passe d'un polygone régulier au polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double, l'apothème augmente et le rayon diminue : la différence entre le rayon et l'apothème va donc en décroissant. D'ailleurs, on a, dans le triangle AOG, $OA - OG < AG$ ou que $\frac{AB}{2}$; cette différence est donc toujours moindre que la moitié du côté du polygone correspondant. Mais, si, conservant le même périmètre, on double indéfiniment le nombre des côtés, la valeur de chacun d'eux tend vers zéro. Par suite, *la différence entre le rayon et l'apothème a aussi pour limite zéro.*

On peut démontrer que *la différence $r' - a'$ est moindre que le quart de la différence précédente $r - a$.*

En effet, les formules (1) et (2) du n° 213 donnent

$$r' - a' = \sqrt{r\frac{a+r}{2}} - \frac{a+r}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{a+r}{2}}\left(\sqrt{r} - \sqrt{\frac{a+r}{2}}\right).$$

En multipliant et en divisant le second membre de cette égalité par la somme $\sqrt{r} + \sqrt{\frac{a+r}{2}}$, il vient

$$r' - a' = \frac{\sqrt{\frac{a+r}{2}}}{\sqrt{r} + \sqrt{\frac{a+r}{2}}} \cdot \frac{r-a}{2}.$$

Il faut donc simplement vérifier l'inégalité

$$\frac{\sqrt{\frac{a+r}{2}}}{\sqrt{r} + \sqrt{\frac{a+r}{2}}} < \frac{1}{2},$$

qui est évidente, puisque a est moindre que r. On a bien, par conséquent,

$$r' - a' < \frac{r-a}{4}.$$

III. — Méthode des limites (1).

215. X étant une quantité variable qui se rapproche indéfiniment de la quantité fixe A, de manière que la valeur absolue de la différence X — A puisse devenir et rester plus petite que toute quantité donnée (aussi petite qu'on voudra), on dit que A est la *limite* de X, et l'on écrit

$$\lim X = A.$$

216. *Une quantité variable ne peut tendre vers deux limites inégales.*

Supposons, en effet, qu'une pareille quantité puisse avoir deux limites différentes a et b, dont la différence soit d, et prenons $\delta < \frac{d}{2}$.

Les intervalles compris d'une part entre $a + \delta$ et $a - \delta$ et, d'autre part, entre $b + \delta$ et $b - \delta$, n'ont évidemment rien de commun et sont même séparés par un intervalle égal à $d - 2\delta$. Cela posé, une variable qui aurait pour limite a finirait par tomber entre $a + \delta$ et $a - \delta$, tandis qu'une variable qui aurait pour limite b finirait par tomber entre $b + \delta$ et $b - \delta$. Elle serait donc comprise à la fois dans deux régions complètement distinctes, ce qui est impossible.

217. Considérons une égalité entre des variables tendant vers leurs limites; dans les deux membres de cette égalité, les variables sont liées entre elles et avec des quantités constantes à l'aide d'opérations quelconques.

Si la fonction ainsi constituée est continue (t. I, *Alg. élém.*, n° 310), on peut donner aux variables qu'elle renferme des valeurs assez rapprochées pour que les valeurs correspondantes de la fonction soient elles-mêmes aussi rapprochées qu'on voudra. Les valeurs de ces variables $x, y, z, \ldots$, peuvent donc différer assez peu de leurs limites, $a, b, c, \ldots$, pour que la fonction supposée des premières diffère aussi peu qu'on

(1) Nous reviendrons sur la *Théorie des limites* dans l'*Algèbre supérieure* (1re Partie, t. III); nous n'en donnons ici que ce qui est absolument indispensable au point de vue de l'étude de la Géométrie.

voudra de la même fonction des secondes, qui sera alors la limite de la fonction variable.

Par conséquent, *si des variables tendent vers des limites finies, toute fonction de ces variables tendra vers la même fonction de ces limites.*

C'est là une proposition fondamentale, qui résume en réalité la *méthode des limites.*

Nous dirons donc, avec Duhamel [1] : « Lorsqu'on veut obtenir une relation entre des quantités qui peuvent être considérées comme limites de quantités variables d'une espèce plus simple, on cherchera d'abord la relation entre ces dernières et les données, et peut-être encore certaines autres variables auxiliaires.

» Si cette relation est obtenue, on en aura une autre en substituant à toutes les variables leurs limites, et l'on aura ainsi une relation entre les quantités proposées. »

En particulier :

La limite d'une somme est égale à la somme des limites de ses parties;

La limite d'un produit est égale au produit des limites des facteurs [2];

La limite d'un quotient est égale au quotient des limites du dividende et du diviseur.

218. Une quantité variable dont la limite est zéro est un *infiniment petit.*

219. *La limite de la somme d'infiniment petits reste la même quand on leur substitue d'autres quantités dont les rapports respectifs avec les quantités considérées ont tous l'unité pour limite.*

Soient les infiniment petits

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n,$$

dont la somme tend vers une limite déterminée quand n croît indéfiniment.

---

(1) *Des Methodes dans les Sciences de raisonnement* (II^e^ Partie, p. 393).

(2) Il est entendu que le nombre des parties de la somme ou des facteurs du produit est un nombre fini.

Soient d'autres infiniment petits

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n,$$

tels que les rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

aient tous l'unité pour limite.

Si l'on ajoute terme à terme tous ces rapports pris dans leur valeur absolue, le rapport résultant est compris entre le plus petit et le plus grand des rapports proposés (t. I, *Alg. élém.*, n° 66); il a donc aussi pour limite l'unité, et les deux sommes d'infiniment petits ont par conséquent la même limite.

Il en résulte que, si l'une des sommes est constante, l'autre somme a cette constante pour limite.

220. *La limite du rapport de deux infiniment petits reste la même quand on leur substitue d'autres quantités dont les rapports respectifs avec les infiniment petits proposés ont l'unité pour limite.*

Soient les deux couples d'infiniment petits α et β, α' et β', tels que les rapports $\frac{\alpha'}{\alpha}$ et $\frac{\beta'}{\beta}$ aient l'unité pour limites. Il en sera alors de même nécessairement des rapports inverses $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\beta}{\beta'}$.

Cela posé, on a identiquement

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}\frac{\beta'}{\beta}\frac{\alpha}{\alpha'},$$

ou, en passant à la limite (217),

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim\frac{\alpha'}{\beta'}\lim\frac{\beta'}{\beta}\lim\frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Par hypothèse, les deux dernières limites sont égales à l'unité; il reste donc simplement

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

IV. — Mesure de la circonférence.

221. Deux lignes ont la même *longueur* ou sont *égales*, lorsqu'elles peuvent coïncider (7).

Cette définition peut recevoir immédiatement son application lorsqu'il s'agit de *lignes droites limitées*, puisqu'on peut toujours vérifier si leur coïncidence est possible ou les *mesurer* en les comparant directement à l'unité de longueur (11).

Mais il n'en est plus de même pour les autres lignes, qui ne peuvent coïncider que dans des cas très particuliers, par exemple si l'on considère des arcs de cercle dont les rayons soient égaux.

Puisque la mesure directe de la *longueur* n'est possible que pour la ligne droite, c'est à elle qu'il faut rapporter à ce point de vue toutes les autres lignes. Seulement, d'une manière générale, une droite et un arc de courbe ne peuvent être *égaux*, puisqu'on ne peut pas les faire coïncider; ils ne peuvent être qu'*équivalents*, s'ils renferment le même nombre d'unités de longueur.

Or, pour constater cette équivalence, il faut nécessairement indiquer ce qu'on entend par la *longueur d'une courbe*.

On adopte la définition suivante : *La longueur d'une courbe entre deux points est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un contour polygonal inscrit dans la courbe entre ces deux points, lorsque les côtés de ce contour tendent indéfiniment vers zéro.*

222. Rigoureusement, il faut prouver que la limite indiquée existe et demeure indépendante de la loi d'inscription choisie, c'est-à-dire de la manière dont on fait tendre vers zéro les côtés du contour polygonal auxiliaire.

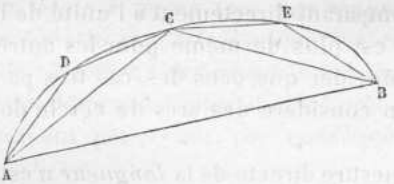
Nous supposons l'arc de courbe proposé *convexe* dans toute son étendue; les contours polygonaux inscrits rempliront alors la même condition. S'il n'en était pas ainsi, on décomposerait l'arc donné en plusieurs arcs convexes, à chacun desquels on appliquerait le raisonnement que nous allons présenter (1).

---

(1) *Voir* TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition, 1891.

223. Soit donc l'arc de courbe quelconque AB (*fig.* 158). Adoptons la loi d'inscription suivante. Prenons sur la courbe le point C, qui est également distant des points A et B; puis, les points D et E, qui sont respectivement à égale distance des points A et C et des points C et B, et ainsi de suite indéfiniment. Il est clair que le nombre des côtés du contour poly-

Fig. 158.

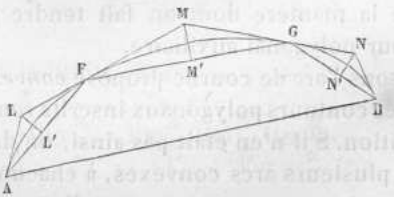


gonal inscrit de la sorte ira constamment en doublant et croîtra sans limite; en même temps, la grandeur de ces côtés tendra vers zéro, puisque les points de division se rapprocheront indéfiniment sur la courbe.

Chaque nouveau périmètre inscrit est plus grand que le précédent (35), mais reste inférieur à une ligne polygonale convexe terminée aux mêmes extrémités et enveloppant la courbe (37). Il en résulte que les périmètres inscrits successifs tendent vers une certaine limite, car une grandeur variable qui croît constamment, en demeurant cependant au-dessous d'une valeur fixe déterminée, tend nécessairement vers une limite connue ou inconnue.

Soit maintenant (*fig.* 159) le contour polygonal AFGB,

Fig. 159.



répondant à une autre loi d'inscription, en vertu de laquelle ses côtés doivent toujours tendre vers zéro.

En menant des tangentes à la courbe par les différents

sommets A, F, G, B, nous formerons un contour polygonal circonscrit correspondant ALMNB. Il est facile de voir que le périmètre de ce contour circonscrit tend vers la même limite que le périmètre du contour inscrit, quelle que soit d'ailleurs cette limite.

En effet, projetons les sommets L, M, N, en L', M', N', sur les cordes AF, FG, GB, et comparons, par exemple, les longueurs AL et AL'. Quand AF tend vers zéro, cette corde se rapproche indéfiniment de la tangente AL, de sorte que, dans le triangle rectangle AL'L, l'angle aigu A tend vers zéro et le rapport $\frac{AL}{AL'}$ vers l'unité. Il en est de même des autres rapports $\frac{LF}{L'F}, \frac{FM}{FM'}, \ldots, \frac{NB}{N'B}$.

Il en résulte immédiatement (219) que la somme des numérateurs de ces rapports a la même limite que la somme de leurs dénominateurs, c'est-à-dire que le périmètre polygonal circonscrit a la même limite que le périmètre polygonal inscrit, lorsque leurs côtés tendent indéfiniment vers zéro, quelle que soit la loi d'inscription adoptée pour le périmètre inscrit.

Cela posé, soit L la limite commune des deux périmètres formés d'après la première loi d'inscription. Désignons par p et par P les périmètres correspondants de deux contours polygonaux inscrit et circonscrit appartenant à une autre loi quelconque d'inscription. Il faut prouver que leur limite commune est aussi égale à L.

En effet, les côtés du contour p tendant vers zéro, la différence $P - p$ pourra, d'après ce qui précède, être rendue moindre qu'une quantité fixe β aussi petite qu'on voudra. D'autre part, P, étant supérieur à l'un quelconque des contours inscrits (37), ne peut être qu'égal ou supérieur à la première limite L. Puisque $P - p$ est $< \beta$, on a donc, *a fortiori*,

$$p + \beta > L \quad \text{ou} \quad p > L - \beta.$$

D'ailleurs, p, étant moindre que l'un quelconque des contours circonscrits, est au plus égal à la limite L de celui considéré en premier lieu, et l'on peut écrire

$$p \leq L;$$

p étant ainsi compris entre L et $L - \beta$, et β tendant indéfini-

ment vers zéro, la limite de p (comme celle de P) est encore égale à L.

224. La démonstration qu'on vient de développer entraîne d'importantes propositions qu'il convient d'énoncer ici.

La corde AB (*fig.* 159), étant moindre que tous les contours polygonaux inscrits (36), est moindre que leur limite, c'est-à-dire que l'arc AB quel qu'il soit. Donc, *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

225. Si l'on considère un arc convexe AB et un autre arc quelconque AIB, terminé aux mêmes extrémités et enveloppant le premier, on peut inscrire dans l'arc AB un contour polygonal p et dans l'arc AIB un contour polygonal p' n'ayant aucun point commun avec l'arc AB. On aura alors (37) $p' > p$ et, par suite, en passant à la limite (223), arc AIB $>$ arc AB.

Donc, *tout arc convexe est moindre que tout arc enveloppant terminé aux mêmes extrémités.*

On prouverait de même que *toute ligne convexe est moindre que toute ligne enveloppante.*

226. Enfin, en se reportant à la *fig.* 159, on a, d'après ce qui précède,

$$\text{corde AF} < \text{arc AF} < \text{AL} + \text{LF}.$$

Il en résulte, en divisant par corde AF $=$ AL' $+$ L'F,

$$1 < \frac{\text{arc AF}}{\text{corde AF}} < \frac{\text{AL} + \text{LF}}{\text{AL}' + \text{L}'\text{F}}.$$

Mais le dernier rapport a pour limite l'unité quand l'arc AF tend vers zéro, puisqu'il est formé par l'addition terme à terme de deux rapports qui remplissent la même condition (219). Donc, *la limite d'un arc de courbe quelconque à sa corde, quand cet arc tend vers zéro, est égale à l'unité.*

THÉORÈME.

227. *Deux circonférences quelconques sont proportionnelles à leurs rayons ou à leurs diamètres.*

Soient C et C' les longueurs des deux circonférences proposées, qui ont pour rayons R et R', pour diamètres D et D'.

Inscrivons respectivement dans ces deux circonférences

deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, dont les périmètres soient P et P'. Ces polygones seront semblables, et l'on aura (202)

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}.$$

Si l'on fait croître indéfiniment le nombre de côtés des deux polygones inscrits, leurs côtés respectifs tendront vers zéro, et, la même relation subsistant toujours, on aura, en passant à la limite (217),

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} = \frac{D}{D'}.$$

COROLLAIRES.

228. La proportion précédente peut s'écrire

$$\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}.$$

Donc, le rapport d'une circonférence à son diamètre est un *nombre constant*.

Ce rapport, qui est la longueur de la circonférence qui a pour diamètre l'unité, est toujours représenté par π.

Le nombre π est incommensurable, mais on peut, comme nous le montrerons, le calculer avec une approximation quelconque. Nous donnons ci-dessous sa valeur, celle de son inverse et celle de son logarithme décimal, à moins d'une unité du quinzième ordre par défaut :

$$\pi = 3,141592653589793\ldots,$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,318309886183790\ldots,$$

$$\log\pi = 0,497149872694133\ldots.$$

229. De la relation

$$\frac{C}{D} = \frac{C}{2R} = \pi,$$

on déduit

$$C = 2\pi R, \quad R = \frac{C}{2\pi}.$$

Ces formules permettent, quand on connaît π, de *calculer la longueur d'une circonférence de rayon donné* et *le rayon d'une circonférence de longueur donnée*.

230. Dans une circonférence de rayon R, la longueur de l'arc de 1° est égale (107) à

$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$

Donc, dans cette circonférence, la longueur l d'un arc de n degrés est donnée par la formule

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Cette relation, qui sert à calculer l'une des trois quantités l, R, n, quand les deux autres sont données, est d'un usage continuel dans les applications.

THÉORÈME.

231. *Deux arcs semblables sont proportionnels à leurs rayons.*

On entend par *arcs semblables* des arcs qui répondent à des angles au centre égaux dans des cercles de rayons différents. Ces arcs comprennent alors le même nombre de degrés sur leurs circonférences respectives (107).

Soient l et l' les longueurs des deux arcs semblables considérés sur les circonférences de rayons R et R', et soit n leur nombre de degrés commun. On a (230)

$$l = \frac{\pi R n}{180}, \quad l' = \frac{\pi R' n}{180},$$

d'où

$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}.$$

SCOLIE.

232. La proportion précédente peut s'écrire

$$\frac{l}{R} = \frac{l'}{R'}.$$

Par suite, lorsqu'un angle est donné, la longueur de l'arc qui lui sert de mesure (106) change avec le rayon choisi, mais le rapport de cet arc au rayon correspondant demeure invariable. On peut donc adopter ce rapport comme mesure α de

l'angle considéré et poser

$$\alpha = \frac{l}{R} \quad \text{ou} \quad l = \alpha R.$$

Dans ce système, *l'angle est numériquement égal au rapport de l'arc qu'il intercepte sur une circonférence déterminée dont son sommet est le centre au rayon de cette circonférence, et l'arc à son tour est égal au produit de l'angle par le rayon.*

On a $\alpha = 1$ pour $l = R$. Par conséquent, l'*unité angulaire* est alors représentée par l'angle qui intercepte sur une circonférence quelconque un arc égal au rayon de cette circonférence. On obtient le nombre de degrés de cet arc en faisant $l = R$ dans la formule

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

du n° 230. Il vient alors

$$n = \frac{180}{\pi} = 57^\circ 17' 44'',80 \ldots .$$

Si l'on prend de plus le rayon choisi pour *unité de longueur*, au lieu de la laisser arbitraire, on a simplement

$$\alpha = l.$$

L'angle est alors mesuré par l'arc qu'il intercepte sur la circonférence de rayon 1, égale à 2π, son sommet étant au centre de cette circonférence. Dans ce cas, l'angle droit est représenté par $\frac{\pi}{2} = 1,5707963 \ldots$, l'angle de 45° par $\frac{\pi}{4} = 0,7853981 \ldots$, etc.

Quand un angle est mesuré ainsi par un nombre abstrait A, son nombre de degrés se déduit de la formule

$$l = \frac{\pi R n}{180},$$

où l'on doit faire $l = A$ et $R = 1$.

On a donc

$$n = \frac{180 A}{\pi}.$$

V. — Calcul de π.

233. Il s'agit surtout ici de démontrer la possibilité de calculer π avec une approximation quelconque. La solution complète et pratique de cette question appartient aux Mathématiques supérieures. Nous y reviendrons plus loin (*voir* t. III, *Alg. sup.*, I^re^ Partie).

Il résulte de la formule (229)

$$\pi = \frac{\text{circ. R}}{2\text{R}}$$

que, pour trouver π, on peut :

1° *Se donner la longueur d'une circonférence et calculer son rayon* (c'est la *méthode des isopérimètres*);

2° *Se donner le rayon d'une circonférence et calculer sa longueur* (c'est la *méthode des périmètres*).

234. Méthode des isopérimètres. — Cette méthode a été publiée à Nancy, en 1813, par le géomètre Schwab. Elle conduit à des calculs qui sont, *directement*, plus simples que ceux que la méthode des périmètres exige.

Si nous prenons 2 comme longueur de la circonférence choisie, on a

$$\pi = \frac{2}{2\text{R}} = \frac{1}{\text{R}} \quad \text{ou} \quad \text{R} = \frac{1}{\pi}.$$

Le rayon de la circonférence égale à 2 représente donc l'inverse du nombre π.

Il en résulte que l'apothème et le rayon de tout polygone régulier de périmètre égal à 2 sont des valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$, l'une par défaut, l'autre par excès; car, la circonférence inscrite dans ce polygone et la circonférence qui lui est circonscrite étant alors, l'une moindre, l'autre plus grande que son périmètre 2 (221, 223), les rayons de ces circonférences comprennent nécessairement le rayon R de la circonférence égale à 2 (227).

Cela posé, prenons pour point de départ le carré de périmètre égal à 2 ou de côté $\frac{1}{2}$. Nous aurons, en désignant son

apothème par a_1 et son rayon par r_1 (204),

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad r_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Nous pourrons donc, à l'aide des formules du n° 213, calculer successivement les apothèmes et les rayons a_2, r_2, a_3, r_3, a_4, r_4, ... des polygones réguliers isopérimètres de 8, 16, 32, ... côtés.

Nous aurons

$$a_2 = \frac{a_1 + r_1}{2}, \quad r_2 = \sqrt{r_1 a_2}, \quad a_3 = \frac{a_2 + r_2}{2}, \quad r_3 = \sqrt{r_2 a_3}, \quad \ldots.$$

On voit que, dans la suite

$$a_1, r_1, a_2, r_2, a_3, r_3, \ldots, a_n, r_n, \ldots,$$

chaque terme, à partir du troisième, est alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne proportionnelle des deux termes qui le précèdent. De plus, les apothèmes ou les termes de rang impair $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ vont en croissant tout en restant inférieurs à $\frac{1}{\pi}$, tandis que les rayons ou les termes de rang pair $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ vont en décroissant (214), tout en restant supérieurs à $\frac{1}{\pi}$. D'ailleurs, comme on a (214)

$$r_2 - a_2 < \frac{r_1 - a_1}{4},$$

on a aussi

$$r_3 - a_3 < \frac{r_2 - a_2}{4} \quad \text{ou} \quad r_3 - a_3 < \frac{r_1 - a_1}{4^2},$$

$$r_4 - a_4 < \frac{r_3 - a_3}{4} \quad \text{ou} \quad r_4 - a_4 < \frac{r_1 - a_1}{4^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$r_n - a_n < \frac{r_{n-1} - a_{n-1}}{4} \quad \text{ou} \quad r_n - a_n < \frac{r_1 - a_1}{4^{n-1}}.$$

Par conséquent, en prenant n assez grand, on peut rendre la différence $r_n - a_n$ de deux termes consécutifs, assez éloignés dans la suite, moindre que toute quantité donnée.

Les termes de cette suite, alternativement inférieurs et supérieurs à $\frac{1}{\pi}$, ont donc ce nombre pour limite (215).

La valeur de $\frac{1}{\pi}$ est donc égale à 0,318 à un millième près; elle est même égale à 0,3183 à un dix-millième près, car la différence $r_6 - a_6 = 0,0000959$. En divisant l'unité par 0,3183, on trouve $\pi = 3,142$ à un millième près (¹).

235. Méthode des périmètres. — Si nous considérons la circonférence de rayon 1, sa longueur est le double du nombre π. Il faut donc trouver l'expression de cette longueur et la diviser ensuite par 2.

Inscrivons dans la circonférence proposée les polygones réguliers de 4, 8, 16, 32, ... côtés, et calculons leurs périmètres en faisant usage des formules du n° 209.

Si nous appelons $c_1, c_2, c_3, \ldots$ les côtés des polygones réguliers successifs et $a_1, a_2, a_3, \ldots$ leurs apothèmes, nous aurons (204, 209)

$$2a_1 = \sqrt{2}, \qquad c_1 = \sqrt{2},$$

$$2a_2 = 2\sqrt{1 - \frac{c_1^2}{4}} = \sqrt{4 - c_1^2}, \qquad c_2 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_1^2}} = \sqrt{2 - 2a_2},$$

$$2a_3 = 2\sqrt{1 - \frac{c_2^2}{4}} = \sqrt{4 - c_2^2}, \qquad c_3 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_2^2}} = \sqrt{2 - 2a_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2a_n = 2\sqrt{1 - \frac{c_{n-1}^2}{4}} = \sqrt{4 - c_{n-1}^2}, \qquad c_n = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_{n-1}^2}} = \sqrt{2 - 2a_n}.$$

Remarquons que l'on peut borner le calcul à la recherche des diamètres inscrits $2a_1, 2a_2, 2a_3, \ldots, 2a_n$ et du dernier côté c_n. En effet, si, dans l'expression de $2a_n$, on remplace c_{n-1} par sa valeur $\sqrt{2 - 2a_{n-1}}$, on trouve

$$2a_n = \sqrt{2 + 2a_{n-1}}.$$

Chaque diamètre inscrit peut donc être calculé à l'aide du précédent.

Admettons qu'on s'arrête au polygone régulier de 256 côtés, dont le côté est représenté par c_7.

On pourra former le Tableau suivant :

$$2a_1 = 1,41421352,$$
$$2a_2 = 1,84775905,$$
$$2a_3 = 1,96157055,$$
$$2a_4 = 1,99036945,$$
$$2a_5 = 1,99759091,$$
$$2a_6 = 1,99939764,$$
$$2a_7 = 1,99984940.$$

(¹) On peut abréger beaucoup les calculs, eu égard au degré d'approximation obtenu, en adoptant la marche indiquée dans le Traité de Géométrie, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition (1891), p. 201 et suiv.

De la dernière valeur, on déduira

$$c_7 = \sqrt{2 - 2a_7} = 0{,}024543o2.$$

En multipliant c_7 par 256, on aura, pour le périmètre du polygone régulier inscrit de 256 côtés,

$$p = 6{,}28301.$$

On en déduira, pour le périmètre du polygone circonscrit semblable (202),

$$\frac{P}{p} = \frac{1}{a_7}, \quad \text{d'où} \quad P = 6{,}28349.$$

Les théories exposées en Arithmétique (*voir* t. I, p. 204, et suiv.) prouvent, en effet, qu'on ne peut pas compter sur plus de cinq décimales exactes dans le calcul des périmètres p et P.

La circonférence de rayon 1 étant comprise entre p et P (221, 223), toutes les décimales communes aux expressions des deux périmètres appartiennent à l'expression de cette circonférence. On a donc, pour sa longueur, 6,283 à un demi-millième près, et, en divisant ce nombre par 2, on trouve $\pi = 3{,}1415$ à un quart de millième près. Ici, le chiffre des dix-millièmes se trouve lui-même exact.

236. Les dernières formules indiquées conduisent à une expression remarquable de π.

De $2a_1 = \sqrt{2}$ et $2a_n = \sqrt{2 + 2a_{n-1}}$ on déduit successivement

$$2a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad 2a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad \ldots,$$

$$2a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}},$$

le nombre des radicaux du second membre dans la dernière égalité étant égal à n.

On a ensuite

$$c_n = \sqrt{2 - 2a_n},$$

c'est-à-dire

$$c_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}},$$

le nombre des radicaux du second membre étant $n + 1$.

Mais, puisqu'on part du carré, c_n répond à un nombre de côtés représenté par 2^{n+1}. On a donc, pour le périmètre du dernier polygone régulier inscrit dans la circonférence de rayon 1,

$$p = 2^{n+1}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}},$$

ou, en divisant par 2 et en faisant tendre n vers l'infini,

$$\pi = \lim 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}}}},$$

le nombre des radicaux du second membre étant $n + 1$.

237. La méthode des périmètres a été suivie par Archimède, l'illustre géomètre de Syracuse, qui, le premier (250 avant J.-C.), a trouvé une expression approchée du nombre π.

En partant de l'hexagone et en s'arrêtant aux deux polygones réguliers inscrit et circonscrit de 96 côtés, Archimède a montré que π était compris entre $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7}$. Cette dernière valeur, qui surpasse π de moins de 2 millièmes, est très souvent employée dans la pratique.

Adrien Métius a découvert la valeur aussi par excès $\frac{355}{113}$, qui est approchée à moins d'un demi-millionième et qui est facile à retenir. Pour la retrouver, on écrit deux fois de suite les trois premiers nombres impairs. On a ainsi 113355 : les trois premiers chiffres composent le dénominateur de l'expression, et les trois derniers son numérateur.

LIVRE DEUXIÈME.

LES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

DÉTERMINATION DES AIRES.

I. — Aires polygonales.

238. Après avoir étudié, au point de vue élémentaire, les propriétés des deux lignes planes les plus simples, nous devons considérer de même les surfaces planes *limitées* dont on fait l'usage le plus fréquent.

239. Un contour fermé de figure quelconque, tracé sur un plan, détermine une surface plane limitée.

Deux surfaces planes limitées sont *égales* (7), lorsqu'on peut les placer exactement l'une sur l'autre, c'est-à-dire les faire *coïncider*.

Ajouter plusieurs surfaces planes limitées, c'est les disposer les unes à la suite des autres sur le même plan, dans un ordre d'ailleurs quelconque, de manière qu'elles n'aient aucune partie intérieure commune et qu'elles ne se relient que par certaines portions de leurs contours.

Si une surface A est ainsi la *somme* de deux surfaces B et C, la surface C, à son tour, est la *différence* des deux surfaces A et B.

240. *Mesurer* une surface plane limitée, c'est trouver son rapport à une autre surface plane limitée prise pour *unité*. Le résultat de cette mesure s'appelle l'*aire* de la surface proposée.

Il y a donc la même différence entre les mots *surface* et *aire* qu'entre les mots *ligne* et *longueur :* on les confond d'ailleurs très souvent dans le langage ordinaire.

Deux surfaces planes limitées peuvent n'être pas *superposables* et avoir cependant des aires égales. On dit alors que ces deux surfaces sont *équivalentes* (7).

Par exemple, si l'on ajoute trois surfaces planes quelconques A, B, C, d'abord dans l'ordre ABC, puis dans l'ordre ACB, puis enfin dans l'ordre CAB, les surfaces *sommes* obtenues ne sont pas en général superposables, mais elles renferment évidemment le même nombre d'unités superficielles, et sont équivalentes.

Si, à des figures planes de surfaces équivalentes, on ajoute ou l'on retranche d'autres figures de surfaces équivalentes, il est clair que les sommes ou les différences ainsi formées sont encore équivalentes. De même, si l'on divise deux figures équivalentes en un même nombre de parties équivalentes, les parties de la première sont équivalentes à celles de la seconde.

241. Le problème de la mesure des surfaces planes limitées ou de la détermination des aires correspondantes présente un caractère particulier, à cause de la difficulté de porter ou d'appliquer successivement sur une surface plane quelconque la surface choisie pour unité. On ne peut donc résoudre ce problème *directement* que dans un très petit nombre de cas. Mais, une fois ces solutions obtenues, on peut en déduire, par des considérations d'équivalence, l'expression des aires de toutes les surfaces planes limitées par des lignes droites.

C'est le *rectangle* qui nous servira de point de départ.

Nous indiquerons d'abord les définitions suivantes.

242. On prend pour *base* d'un triangle le côté que l'on veut : la *hauteur* du triangle est alors la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la base.

Un côté quelconque d'un parallélogramme étant pris pour *base*, la *hauteur* de ce parallélogramme est la distance constante qui existe entre la base et le côté opposé, égal et parallèle.

D'après cela, les deux côtés adjacents d'un rectangle constituent indifféremment sa *base* et sa *hauteur*, ou encore les

dimensions de la figure. Mais cette dernière dénomination s'applique *exclusivement* aux côtés du rectangle.

Les deux côtés parallèles d'un trapèze sont ses *bases;* sa *hauteur* est la distance constante entre ses deux bases.

243. *L'unité de surface est*, en général, *le carré construit sur l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre carré.*

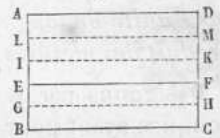
Par conséquent, chercher l'aire d'une figure plane, c'est chercher combien sa superficie renferme de mètres carrés et de subdivisions du mètre carré.

THÉORÈME.

244. *Le rapport des aires de deux rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs* (*fig.* 160).

L'aire d'un rectangle dépend évidemment de sa base et de sa hauteur. Nous allons chercher quelle influence la variation de la hauteur peut avoir sur la variation de l'aire, en supposant en premier lieu la base constante.

Fig. 160.



Deux rectangles de même base et de même hauteur sont égaux, puisqu'ils peuvent coïncider.

Cela posé, soient deux rectangles ayant une même base BC et des hauteurs différentes BA et BE. On peut toujours les supposer placés l'un dans l'autre, comme l'indique la figure. Admettons l'existence d'une commune mesure entre les deux hauteurs BA et BE. Si cette commune mesure est contenue cinq fois dans BA et deux fois dans BE, on aura

$$\frac{BA}{BE} = \frac{5}{2}.$$

Par tous les points de division G, I, L, menons des parallèles à la base BC. Nous partagerons le rectangle ABCD en cinq rectangles partiels et le rectangle BCFE en deux rectangles partiels : tous ces rectangles partiels seront égaux entre eux comme ayant même base et même hauteur. On pourra prendre l'un de ces rectangles partiels comme commune mesure entre les deux rectangles proposés, et l'on aura

$$\frac{ABCD}{BCFE} = \frac{5}{2}.$$

Le rapport des deux rectangles de même base est donc égal à celui de leurs hauteurs. Et comme on peut prendre, au contraire, pour base du premier rectangle le côté BA et pour base du second le côté BE, de sorte qu'ils ont alors BC pour hauteur commune, on peut dire aussi que *le rapport des aires de deux rectangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases.*

Si la commune mesure supposée entre les hauteurs BA et BE n'existait pas, on se reporterait aux indications déjà données à ce sujet (105).

Il résulte *immédiatement* de ce qui précède, d'après la théorie des grandeurs proportionnelles (t. I, *Arithm.*, 411), que *les aires de deux rectangles quelconques sont entre elles comme les produits de leurs deux dimensions.*

THÉORÈME.

245. *Lorsqu'on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur, l'aire du rectangle a pour mesure le produit des mesures de ses deux dimensions.*

Désignons par R et R′ les aires de deux rectangles quelconques ayant pour dimensions, le premier B et H, le second B′ et H′. Nous pourrons écrire (244)

$$\frac{R}{R'} = \frac{BH}{B'H'} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{H}{H'}.$$

Si R′ est alors l'unité d'aire ou le carré construit sur l'unité de longueur (243), on a $R' = 1^{Mq}$, $B' = H' = 1^{M}$, et l'égalité précédente devient

$$\frac{R}{1^{Mq}} = \frac{B}{1^{M}} \cdot \frac{H}{1^{M}}.$$

Mais $\frac{R}{1^{Mq}}$, rapport de R à son unité, est la mesure de l'aire du premier rectangle; de même $\frac{B}{1^{M}}$ et $\frac{H}{1^{M}}$ représentent les mesures des deux dimensions de ce rectangle. Le même nombre abstrait correspond donc à la mesure du rectangle proposé, exprimée en mètres carrés, et au produit des mesures de la hauteur et de la base du rectangle, exprimées en mètres.

C'est ce qu'on énonce d'une manière rapide, mais inexacte, en disant : *Un rectangle a pour mesure le produit de sa base*

par sa hauteur. Cette abréviation n'a d'ailleurs aucun inconvénient, lorsqu'on a bien saisi les explications précédentes.

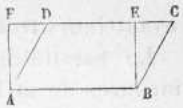
On voit que *l'aire d'un carré est représentée par la seconde puissance du nombre qui mesure son côté.* C'est de là que vient le nom de *carré,* donné en Arithmétique à la seconde puissance d'un nombre.

THÉORÈME.

246. *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit des mesures de sa base et de sa hauteur* (*fig.* 161).

Soit le parallélogramme ABCD. Par les extrémités de la base AB, menons à AB et à sa parallèle CD les perpendiculaires AF et BE. On forme ainsi un rectangle ABEF qui a même base AB et même hauteur AF que le parallélogramme proposé. Ce rectangle est *équivalent* au parallélogramme donné.

Fig. 161.



En effet, ces deux figures ont une partie commune ABED et ne diffèrent que par les triangles ADF, BCE; si l'on démontre que ces triangles sont égaux, on aura prouvé l'équivalence des deux figures. Or les triangles rectangles ADF, BCE, sont égaux, parce que leurs hypoténuses AD et BC sont égales, comme parallèles comprises entre parallèles, et que leurs côtés AF et BE sont égaux pour la même raison.

Mais le rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur (245); telle sera donc aussi la mesure du parallélogramme.

COROLLAIRE.

247. Soient deux parallélogrammes P, P'; désignons leurs bases par B, B', leurs hauteurs par H, H'. On aura

$$P = BH, \quad P' = B'H'.$$

Il en résulte

$$\frac{P}{P'} = \frac{BH}{B'H'}.$$

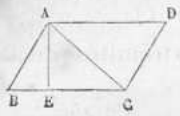
Par conséquent, *deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents; deux parallélogrammes quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leurs bases par leurs hauteurs; deux parallélogrammes de même*

base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

THÉORÈME.

248. *L'aire d'un triangle a pour mesure la moitié du produit des mesures de sa base et de sa hauteur* (*fig.* 162).

Fig. 162.



Soit le triangle ABC. Par le point A, menons AD parallèle à BC et, par le point C, CD parallèle à AB. On forme ainsi le parallélogramme ABCD. Le triangle ABC est évidemment la moitié de ce parallélogramme, qui a même base et même hauteur que lui, puisque les deux triangles ABC et ACD sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Le parallélogramme ayant pour mesure le produit des mesures de sa base BC et de sa hauteur AE (246), le triangle a pour mesure la moitié de ce produit.

COROLLAIRES.

249. Soient T et T′ deux triangles quelconques; désignons leurs bases par B et B′, leurs hauteurs par H et H′. On aura

$$T = \frac{BH}{2}, \quad T' = \frac{B'H'}{2}.$$

Il en résulte

$$\frac{T}{T'} = \frac{BH}{B'H'}.$$

Par conséquent, *deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalents; deux triangles quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leurs bases par leurs hauteurs; le rapport de deux triangles de même base est égal à celui de leurs hauteurs; le rapport de deux triangles de même hauteur est égal à celui de leurs bases.*

250. On peut exprimer l'*aire d'un triangle équilatéral en fonction de son côté.*

Désignons ce côté par a. La hauteur du triangle est évidemment égale à $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$ ou à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; par suite, son aire a

pour expression

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

251. Si l'on désigne respectivement par S, a et h, les nombres qui mesurent l'aire, la base et la hauteur d'un triangle, on a

$$S = \frac{ah}{2}.$$

Mais, la hauteur qui correspond au côté a ayant pour expression (193, 1°)

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

il vient, en substituant,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dans cette formule, qui fait connaître l'*aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés*, p représente le demi-périmètre $\frac{a+b+c}{2}$ du triangle.

252. Désignons par a, b, c, les trois côtés d'un triangle quelconque ABC, le côté a correspondant au sommet A, le côté b au sommet B, le côté c au sommet C. En joignant le centre O du cercle inscrit dans le triangle (*fig.* 93) à ses trois sommets, on décompose ce triangle en trois triangles partiels dont les bases sont les côtés a, b, c, et dont la hauteur commune est le rayon r du cercle inscrit. On peut donc exprimer l'aire du triangle ABC par la somme

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \quad \text{ou} \quad r\left(\frac{a+b+c}{2}\right).$$

En désignant par $2p$ le périmètre $a+b+c$ du triangle et en représentant son aire par S, on a donc la formule générale

$$S = pr, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{S}{p}.$$

253. Nous avons vu (179) que le produit de deux côtés a et b d'un triangle est égal à la hauteur h correspondant au troisième côté c, multipliée par le diamètre $2R$ du cercle cir-

conscrit au triangle. On a donc

$$ab = h.2R.$$

En multipliant par c les deux membres de cette égalité, il vient

$$abc = hc.2R.$$

Mais hc représente le double $2S$ de l'aire du triangle. On a donc $abc = 4SR$. Il en résulte la formule générale

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{abc}{4S} \quad (194).$$

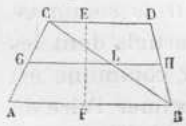
Les résultats trouvés aux nos 251 et 252 permettent de calculer les *rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle en fonction de ses côtés.*

THÉORÈME.

254. *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit des mesures de la demi-somme de ses bases et de sa hauteur* (*fig.* 163).

Partageons le trapèze donné en deux triangles par la diagonale BC. Le triangle ACB a pour mesure (248) $\frac{AB \times EF}{2}$, le triangle BCD a pour mesure $\frac{CD \times EF}{2}$. Le trapèze ABCD, qui est la somme de ces deux triangles, a donc pour mesure la somme de ces deux mesures, c'est-à-dire, en mettant la hauteur commune EF en facteur,

Fig. 163.



$$\frac{AB + CD}{2} \times EF.$$

SCOLIE.

255. Si l'on représente par S, B, b, H, les nombres qui mesurent respectivement l'aire d'un trapèze, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$S = \frac{B + b}{2} H.$$

256. Si par le point G, milieu de AC, on mène GH parallèle aux deux bases, on sait (85) que cette droite passe par le

milieu H de BD et représente la demi-somme des bases du trapèze. On peut donc dire encore que *l'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux de ses côtés non parallèles.*

PROBLÈME.

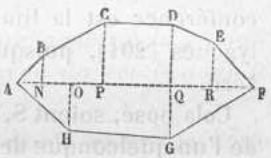
257. *Mesurer l'aire d'un polygone quelconque.*

Pour évaluer l'aire d'un polygone quelconque, on peut le décomposer en triangles, soit en menant toutes les diagonales qui aboutissent à un même sommet, soit en choisissant un point dans son plan et en le joignant à tous ses sommets. On calcule alors l'aire de chaque triangle formé, on fait la somme arithmétique ou algébrique des résultats obtenus, et on a la mesure demandée.

Lorsque le polygone est tracé sur le terrain, on suit ordinairement une autre méthode (*fig.* 164).

On mène la plus grande diagonale AF du polygone proposé, et l'on abaisse, des sommets extérieurs sur cette diagonale, les perpendiculaires BN, CP, DQ, ER, HO, GQ. Ces perpendiculaires partagent la figure en triangles et trapèzes rectangles. En mesurant les différents segments déterminés sur AF et les perpendiculaires abaissées sur cette droite, on a tous les éléments nécessaires pour calculer les aires des différentes parties du polygone, et par suite l'aire de ce polygone lui-même.

Fig. 164.



Lorsque le polygone proposé est tracé sur le papier, on peut le transformer en un triangle équivalent dont on cherche ensuite la mesure. C'est ce que nous montrerons plus loin (276).

II. — Aires circulaires.

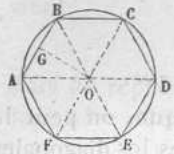
THÉORÈME.

258. *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par son apothème* (*fig.* 165).

Soit O le centre du polygone régulier ABCDEF; joignons-le à tous les sommets du polygone; nous le partagerons ainsi en autant de triangles qu'il a de côtés, et tous ces triangles seront égaux entre eux. Considérons en particulier le triangle AOB;

si AB est sa base, l'apothème OG du polygone sera sa hauteur, et la mesure de l'aire du triangle sera égale à $\frac{AB \times OG}{2}$.

Fig. 165.



Si le polygone proposé a n côtés, il faudra multiplier la mesure précédente par n pour avoir l'aire du polygone : cette aire S aura donc pour expression $\frac{n\,AB \times OG}{2}$ ou $\frac{P \times a}{2}$, en désignant par P le périmètre du polygone et par a son apothème.

THÉORÈME.

259. *L'aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de sa circonférence par son rayon.*

La circonférence étant la limite des périmètres des polygones réguliers qui y sont inscrits et dont on double indéfiniment le nombre des côtés (221, 223), le cercle est en même temps la limite des aires de ces polygones. De plus, le rayon de la circonférence est la limite des apothèmes de ces mêmes polygones (201), puisque la longueur de leur côté tend vers zéro.

Cela posé, soient S, P, a, l'aire, le périmètre et l'apothème de l'un quelconque des polygones considérés : on a constamment entre ces variables la relation

$$S = \frac{P \times a}{2} \quad (258).$$

Donc, elle aura aussi lieu entre les limites des deux membres de l'égalité posée (217). On a, par conséquent, en désignant par R le rayon du cercle,

$$\text{cercle R} = \frac{\text{circ R} \times R}{2}.$$

Nous avons d'ailleurs trouvé (229)

$$\text{circ R} = 2\pi R,$$

et il vient, en substituant,

$$\text{cercle R} = \pi R^2.$$

Ainsi, *pour calculer l'aire d'un cercle, il faut multiplier le carré de son rayon par le nombre constant* π.

De la formule précédente, on déduit

$$R = \sqrt{\frac{\text{cercle R}}{\pi}}.$$

Donc, *pour calculer le rayon d'un cercle d'aire donnée, il faut diviser par π le nombre qui exprime cette aire et extraire la racine carrée du résultat.*

Si l'on élimine R entre les relations

$$\text{cercle R} = \frac{\text{circ R} \times \text{R}}{2} \quad \text{et} \quad \text{circ R} = 2\pi\text{R},$$

on trouve

$$\text{cercle R} = \frac{(\text{circ R})^2}{4\pi},$$

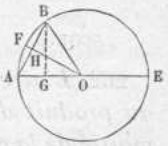
formule qui permet de calculer directement l'aire du cercle en fonction de la longueur de sa circonférence, et réciproquement.

THÉORÈME.

260. *L'aire d'un secteur a pour mesure la moitié du produit de l'arc qui lui sert de base par le rayon du cercle dont le secteur fait partie* (*fig.* 166).

Un *secteur* AOB est la portion de cercle comprise entre deux rayons OA et OB; l'arc AB qui correspond aux extrémités de ces rayons est la *base* du secteur.

Fig. 166.



Si l'on inscrit dans la base du secteur une ligne brisée *régulière* (197), la portion de plan comprise entre cette ligne brisée et les rayons qui limitent le secteur circulaire constitue un secteur polygonal régulier inscrit dans ce secteur circulaire et qui a pour base la ligne brisée régulière.

Si l'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée régulière inscrite, elle a pour limite l'arc AB (221, 223). L'aire du secteur circulaire est donc la limite des aires des secteurs polygonaux réguliers inscrits, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leur base.

Cela posé, désignons par R le rayon du cercle, par S l'aire du secteur AOB, par l la longueur de sa base; soient de même s l'aire d'un secteur polygonal régulier inscrit, p le périmètre de

sa base et a l'apothème de cette base. En raisonnant comme au n° 258, on trouve immédiatement

$$s = \frac{pa}{2}.$$

Cette relation, ayant constamment lieu entre les quantités variables considérées, a aussi lieu entre leurs limites (217), et l'on obtient la formule

$$S = \frac{lR}{2},$$

qui justifie l'énoncé.

COROLLAIRE.

261. Si n est le nombre de degrés de l'arc AB, on a (230)

$$l = \frac{\pi R n}{180},$$

et l'expression de l'aire du secteur AOB devient

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

Cette formule est facile à retenir. $\frac{\pi R^2}{360}$ représente l'aire du secteur de 1°, c'est-à-dire de celui qui a pour base l'arc de 1°; $\frac{\pi R^2 n}{360}$ représente donc l'aire du secteur qui a pour base l'arc de n degrés.

SCOLIE.

262. *L'aire d'un segment circulaire a pour mesure la moitié du produit du rayon par l'excès de l'arc du segment sur la moitié de la corde qui sous-tend l'arc double* (*fig.* 166).

Nous avons déjà défini le segment circulaire (110).

Cherchons l'aire du segment AFB : il est la différence du secteur correspondant AOB et du triangle isocèle AOB.

Si l'arc AB correspond à un polygone régulier dont on sache calculer le côté AB et l'apothème OH, on a immédiatement

$$\text{sect AOB} = \frac{\text{arc AB} \times \text{OA}}{2}, \quad \text{tr AOB} = \frac{\text{AB} \times \text{OH}}{2},$$

d'où

$$\text{segm AFB} = \frac{\text{arc AB}.\text{OA} - \text{AB}.\text{OH}}{2}.$$

Si l'arc AB est quelconque, on écrit

$$\text{tr AOB} = \frac{\text{OA} \times \text{BG}}{2},$$

BG étant la perpendiculaire abaissée du sommet B sur OA, et il vient

$$\text{segm AFB} = \frac{\text{OA}\,(\text{arc AB} - \text{BG})}{2},$$

ce qui justifie l'énoncé.

La *Trigonométrie* (*voir* plus loin) permet, dans tous les cas, de calculer la perpendiculaire BG, quand on connaît le nombre de degrés n de l'arc AB.

Remarquons, en terminant, que, lorsqu'on a à calculer des formules où il entre des nombres complexes de degrés, minutes et secondes, le mieux est, en général, de convertir les minutes et les secondes en parties décimales de degré (t. I, *Arithm.*, 377).

III. — Aire approchée d'une figure plane terminée par une courbe quelconque.

FORMULE DE SIMPSON.

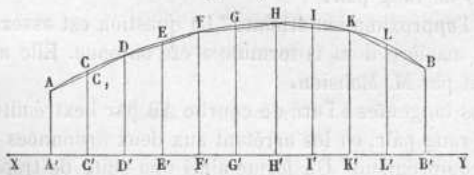
263. B et B′ désignant les bases d'un trapèze, B″ la parallèle équidistante de ces bases et h la demi-hauteur, on peut exprimer l'aire du trapèze par la formule

$$(1) \qquad \frac{h}{3}(\text{B} + \text{B}' + 4\,\text{B}''),$$

qui se réduit en effet à la formule connue $h(\text{B} + \text{B}')$, lorsqu'on y remplace B″ par sa valeur $\frac{1}{2}(\text{B} + \text{B}')$.

Cela posé, soit à évaluer approximativement l'aire comprise entre un arc de courbe quelconque AB, une droite fixe XY et les perpendiculaires

Fig. 167.



AA′, BB′, abaissées sur cette droite des extrémités de l'arc AB (*fig.* 167).

Supposons d'abord que l'arc AB soit, dans toute son étendue, concave

vers la droite XY. Divisons la base A'B' en un nombre *pair* de parties égales, en dix par exemple, et, par les points de division C', D', E', F', G', H', I', K', L', élevons des perpendiculaires à XY. Désignons respectivement par $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{11}$, les perpendiculaires ou ordonnées AA', CC', DD', ..., BB', et par h la distance constante de deux ordonnées consécutives. C_1 étant le point où la corde AD coupe CC', on a, pour l'aire du trapèze rectiligne ADD'A',

$$\frac{h}{3}(AA' + DD' + 4C_1C');$$

mais ce trapèze est moindre que le trapèze curviligne ACDD'A'; on est ainsi conduit à remplacer C_1C' par CC', et à prendre pour valeur approchée de l'aire du trapèze curviligne ACDD'A' l'expression

$$\frac{h}{3}(y_1 + y_3 + 4y_2).$$

En prenant de même

$$\frac{h}{3}(y_3 + y_5 + 4y_4), \quad \frac{h}{3}(y_5 + y_7 + 4y_6),$$

$$\frac{h}{3}(y_7 + y_9 + 4y_8), \quad \frac{h}{3}(y_9 + y_{11} + 4y_{10})$$

pour expressions des aires des trapèzes curvilignes DFF'D', FHH'F', HKK'H', KBB'K', et faisant la somme, on obtient pour valeur approchée de l'aire demandée

$$S = \frac{h}{3}[y_1 + y_{11} + 2(y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})].$$

On retient aisément cette formule, attribuée à Simpson, en la mettant sous la forme

$$S = \frac{h}{3}(E + 2I + 4P), \tag{2}$$

dans laquelle E désigne la somme des deux ordonnées extrêmes, I la somme des autres ordonnées de rang impair, et P la somme de toutes les ordonnées de rang pair.

Quelle est l'approximation atteinte? La question est assez difficile, en raison de la manière dont la formule a été obtenue. Elle a été résolue comme il suit par M. Mansion.

Menons des tangentes à l'arc de courbe AB par l'extrémité de chaque ordonnée de rang pair, en les arrêtant aux deux ordonnées de rang impair qui la comprennent. On forme ainsi une suite de trapèzes circonscrits, dont la somme des aires est évidemment

$$L = 2h.P.$$

D'autre part, si l'on considère la somme des aires des trapèzes inscrits, *compris entre les ordonnées consécutives,* on a évidemment pour cette somme

$$l = h\left(\mathrm{P} + \mathrm{I} + \frac{\mathrm{E}}{2}\right).$$

M. Mansion a remarqué que la formule de Simpson revient, comme il est facile de s'en assurer, à

$$\mathrm{S} = l + \frac{1}{3}(\mathrm{L} - l).$$

Or, S est compris entre l et L, et il en est de même de l'aire exacte. Donc, S diffère de l'aire exacte d'une quantité moindre que L — S ou que S — l, c'est-à-dire d'une quantité inférieure à

$$\frac{2}{3}(\mathrm{L} - l) \quad \text{ou à} \quad \frac{1}{3}(\mathrm{L} - l).$$

L'approximation fournie par la formule de Simpson est donc représentée par

$$2h.\frac{\mathrm{P} - \mathrm{I} - \frac{\mathrm{E}}{2}}{3}$$

ou par la moitié de cette quantité.

FORMULE DE PONCELET.

264. La base A'B' doit ici encore être partagée en un nombre *pair* de parties égales, dix par exemple (*fig.* 168). Nous désignerons les onze ordonnées correspondantes par $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{10}, y_{11}$. Par les extrémités de toutes les ordonnées *de rang pair* $y_2, y_4, \ldots, y_{10}$, menons des tangentes à la courbe AB et terminons ces tangentes aux deux ordonnées voisines. Nous formerons ainsi une série de trapèzes dont la somme, évidemment supérieure à l'aire cherchée dans le cas de la figure, sera une limite supérieure du résultat demandé.

En appelant h l'intervalle constant entre deux ordonnées consécutives, on a

$$\text{trapèze AD'} = 2h.y_2,$$
$$\text{trapèze DF'} = 2h.y_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\text{trapèze KB'} = 2h.y_{10}.$$

En désignant par S la somme de ces trapèzes, il vient

$$\mathrm{S} = 2h\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{10});$$

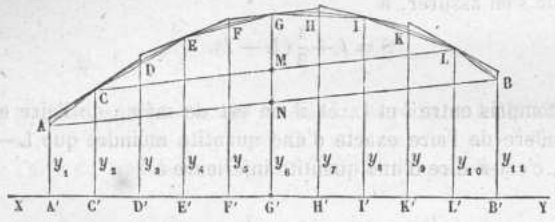
la parenthèse renferme toutes les ordonnées de rang pair. En désignant

leur somme par P, on a donc

$$S = 2h.P.$$

Menons les cordes AC et BL, qui correspondent aux divisions extrêmes; puis, dans l'intervalle, les cordes CE, EG, GI, IL, qui correspondent

Fig. 168.



chacune à deux divisions. Nous formerons une nouvelle série de trapèzes dont la somme sera une limite inférieure du résultat demandé. On a

$$\text{trapèze AC'} = h\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right),$$

$$\text{trapèze CE'} = 2h\left(\frac{y_2 + y_4}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\text{trapèze IL'} = 2h\left(\frac{y_8 + y_{10}}{2}\right),$$

$$\text{trapèze LB'} = h\left(\frac{y_{10} + y_{11}}{2}\right).$$

En désignant par s la somme de ces trapèzes, il vient

$$s = h\left[\frac{y_1 + y_{11}}{2} + \frac{3}{2}(y_2 + y_{10}) + 2(y_4 + y_6 + y_8)\right],$$

ou bien, en ajoutant et en retranchant dans la parenthèse $\frac{y_2 + y_{10}}{2}$,

$$s = h\left(\frac{y_1 + y_{11}}{2} - \frac{y_2 + y_{10}}{2} + 2P\right).$$

A étant l'aire cherchée, on a

$$s < A < S.$$

Mais la moyenne $\frac{S + s}{2}$ tombe aussi entre s et S. On peut donc, sauf une erreur que nous estimerons, prendre

$$A = \frac{S + s}{2} = h\left(2P + \frac{E - E'}{4}\right);$$

dans cette formule, P désigne, comme nous l'avons dit, la somme de toutes les ordonnées de rang pair, E est la somme des deux ordonnées extrêmes, E′ est la somme des deux ordonnées voisines des deux extrêmes.

L'avantage de cette formule, quand le nombre des divisions est grand, c'est qu'il n'y entre que les ordonnées de rang pair et les deux ordonnées extrêmes, ce qui dispense de calculer les ordonnées intermédiaires de rang impair.

Il reste à indiquer une limite supérieure de l'erreur commise en employant la formule. Comme A tombe entre S et $\frac{S+s}{2}$ ou entre $\frac{S+s}{2}$ et s, l'erreur que l'on fait en substituant $\frac{S+s}{2}$ à A est moindre que $S-\frac{S+s}{2}$ ou que $\frac{S+s}{2}-s$, c'est-à-dire que

$$\frac{S-s}{2}=h\left(\frac{E-E'}{4}\right)=\frac{h}{2}\left(\frac{E}{2}-\frac{E'}{2}\right).$$

Menons sur la figure les droites AB et CL; ces deux droites coupent l'ordonnée du milieu GG′ en deux points M et N, et l'on a

$$\frac{y_2+y_{10}}{2}=MG',\quad \frac{y_1+y_{11}}{2}=NG',$$

c'est-à-dire, en valeur absolue,

$$\frac{E}{2}-\frac{E'}{2}=MN.$$

La limite supérieure de l'erreur commise s'exprime donc géométriquement par le produit

$$\frac{h}{2}\cdot MN.$$

On peut donc, après avoir tracé la courbe, mener provisoirement les deux premières et les deux dernières ordonnées, ainsi que celle du milieu, en donnant à h une certaine valeur; puis, avant tout calcul, vérifier, en mesurant MN, si l'approximation demandée est bien obtenue, c'est-à-dire si la valeur choisie pour h est convenable.

Si, dans ce qui précède, l'arc AB était convexe vers la droite XY dans toute son étendue, une marche analogue conduirait aux mêmes formules. Si cet arc était en partie concave et en partie convexe, en menant une perpendiculaire à XY par le point d'inflexion, on mesurerait, d'après les règles trouvées, les aires situées de part et d'autre de cette perpendiculaire et l'on en ferait la somme.

CHAPITRE II.

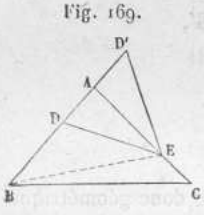
COMPARAISON DES AIRES.

I. — Rapports des aires semblables.

THÉORÈME.

265. *Les aires de deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire sont proportionnelles aux produits des côtés qui comprennent cet angle* (*fig.* 169).

Fig. 169.



Soient deux triangles ayant un angle égal. On pourra les disposer de manière que cet angle leur soit commun, c'est-à-dire les placer l'un dans l'autre comme les triangles ABC, ADE.

Formons alors le triangle ABE en menant la droite BE. Si l'on prend B comme sommet commun des deux triangles ABC, ABE, on voit que ces deux triangles ont leurs bases AC, AE, sur une même ligne droite; ils ont donc même hauteur et sont entre eux comme leurs bases (249). On a donc

$$(1) \qquad \frac{ABC}{ABE} = \frac{AC}{AE}.$$

Si l'on prend E comme sommet commun des deux triangles ABE, ADE, ces deux triangles ont aussi même hauteur par rapport à leurs bases AB, AD, et l'on peut écrire

$$(2) \qquad \frac{ABE}{ADE} = \frac{AB}{AD}.$$

Si l'on multiplie terme à terme les égalités (1) et (2), le fac-

teur commun ABE disparaît, et il reste

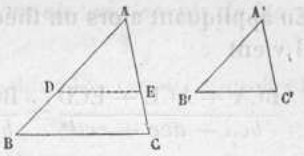
$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB.AC}{AD.AE}.$$

La démonstration précédente s'applique identiquement aux deux triangles ABC, AD'E, qui ont un angle supplémentaire.

THÉORÈME.

266. *Les aires de deux triangles semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues* (*fig.* 170).

Fig. 170



Soient les deux triangles semblables ABC, A'B'C'. Si l'on porte le second sur le premier de manière à faire coïncider les angles égaux A et A', le triangle A'B'C' deviendra le triangle ADE, et l'on aura

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Cela posé, les deux triangles ABC, ADE, ayant un angle égal, on a (265)

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB.AC}{AD.AE} = \frac{AB}{AD}.\frac{AC}{AE} = \frac{AB^2}{AD^2}.$$

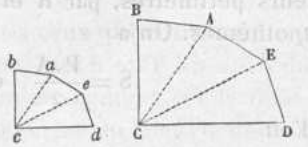
c'est-à-dire

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

COROLLAIRES.

267. *Les aires de deux polygones semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues* (*fig.* 171).

Fig. 171.



Décomposons les deux polygones proposés en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés, en menant les diagonales qui correspondent aux sommets homologues C et *c*. Ces triangles étant

semblables, on a

$$\frac{BCA}{bca}=\frac{BA^2}{ba^2},\quad \frac{ACE}{ace}=\frac{AE^2}{ae^2},\quad \frac{ECD}{ecd}=\frac{ED^2}{ed^2}.$$

La similitude des polygones donne d'ailleurs

$$\frac{BA}{ba}=\frac{AE}{ae}=\frac{ED}{ed}\quad \text{ou}\quad \frac{BA^2}{ba^2}=\frac{AE^2}{ae^2}=\frac{ED^2}{ed^2},$$

et l'on en déduit

$$\frac{BCA}{bca}=\frac{ACE}{ace}=\frac{ECD}{ecd}.$$

En appliquant alors un théorème connu (t. I, *Alg. élém.*, 63), il vient

$$\frac{BCA+ACE+ECD}{bca+ace+ecd}=\frac{BCA}{bca}=\frac{BA^2}{ba^2}\quad \text{ou}\quad \frac{CBAED}{cbaed}=\frac{BA^2}{ba^2}.$$

268. Si l'on désigne par S et s les aires des deux polygones, par A et a deux de leurs côtés homologues, on a

$$\frac{S}{s}=\frac{A^2}{a^2},\quad \text{d'où}\quad \frac{A}{a}=\sqrt{\frac{S}{s}}.$$

Par conséquent, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polygone dans un rapport donné, l'*échelle* à employer pour amplifier ou réduire les côtés de ce polygone est égale à la racine carrée du rapport des aires des deux polygones, c'est-à-dire à la racine carrée du rapport donné.

THÉORÈME.

269. *Le rapport des aires de deux polygones réguliers semblables est égal à celui des carrés de leurs rayons ou de leurs apothèmes.*

Désignons par S et s les aires des deux polygones, par P et p leurs périmètres, par R et r leurs rayons, par A et a leurs apothèmes. On a

$$S=\frac{P.A}{2}\quad \text{et}\quad s=\frac{p.a}{2}\quad (258),$$

d'où

$$\frac{S}{s}=\frac{P.A}{p.a}=\frac{P}{p}\times\frac{A}{a}.$$

Nous savons d'ailleurs (202) que

$$\frac{P}{p}=\frac{A}{a}=\frac{R}{r}.$$

Si l'on remplace $\frac{P}{p}$ par le rapport égal $\frac{A}{a}$, il vient

$$\frac{S}{s}=\frac{A}{a}\times\frac{A}{a}=\frac{A^2}{a^2}=\frac{R^2}{r^2}.$$

THÉORÈME.

270. *Deux cercles sont proportionnels aux carrés de leurs rayons.*

Soient deux cercles quelconques dont les rayons sont R et R'. On a (259)

$$\text{cercle R}=\pi R^2,\quad \text{cercle R}'=\pi R'^2,$$

d'où

$$\frac{\text{cercle R}}{\text{cercle R}'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

SCOLIE.

271. *Les aires de deux secteurs semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.*

On entend par secteurs *semblables* ceux qui ont pour bases des arcs semblables, c'est-à-dire d'un même nombre de degrés.

Désignons les aires de ces secteurs par S et S', par R et R' leurs rayons, par n le nombre de degrés de leurs bases. Nous aurons (261)

$$S=\frac{\pi R^2 n}{360},\quad S'=\frac{\pi R'^2 n}{360},\quad \text{d'où}\quad \frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

Les aires de deux segments semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.

On entend par segments *semblables* ceux qui correspondent à des secteurs semblables. Désignons par S et T les aires du secteur et du triangle dont le premier segment est la différence, par S' et T' les aires du secteur et du triangle dont le second segment est la différence. Les deux secteurs et les deux triangles étant semblables, on a, en appelant R et R' les rayons

des cercles dont font partie les deux segments,

$$\frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2},\quad \frac{T}{T'}=\frac{R^2}{R'^2},$$

d'où

$$\frac{S}{S'}=\frac{T}{T'}\quad\text{et}\quad\frac{S-T}{S'-T'}=\frac{S}{S'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

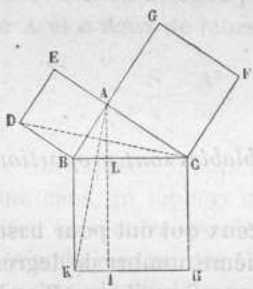
En général, *les aires de deux surfaces semblables quelconques sont proportionnelles aux carrés de deux lignes homologues tracées d'une manière quelconque dans les deux surfaces.*

THÉORÈME.

272. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit* (*fig.* 172).

Soit le triangle ABC rectangle en A; soient les carrés ABDE, ACFG, BCHK, construits sur ses trois côtés. L'angle en A étant droit, le côté AE du carré ABDE sera le prolongement du côté CA du triangle, et le côté AG du carré ACFG sera le prolongement du côté BA.

Fig. 172.



Cela posé, abaissons sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AL, et prolongeons-la jusqu'en I, où elle coupe le côté KH; menons les droites AK et DC. Le triangle ABK a même base BK que le rectangle BKIL, et il a aussi même hauteur, puisque son sommet A se trouve sur la droite IL : le triangle ABK équivaut donc (245, 248) à la moitié du rectangle BKIL. De même, le triangle BCD équivaut à la moitié du carré ABDE, car il a même base BD et même hauteur, puisque son sommet C se trouve sur la droite EA. D'ailleurs, les deux triangles ABK et BCD sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : l'angle ABK égal à l'angle CBD, comme formés tous deux d'un angle droit et de l'angle ABC du triangle donné; le côté BK égal au côté BC comme côtés d'un même carré; le côté AB égal au côté BD pour la même raison. De l'égalité des deux triangles ABK et BCD, on conclut l'équivalence du rectangle BKIL et du carré ABDE.

On démontrerait d'une manière analogue, en menant les droites AH et BF, l'équivalence du rectangle CLIH et du carré ACFG.

Le carré BCHK, somme des deux rectangles BKIL et CLIH, est donc équivalent à la somme des deux carrés ABDE et ACFG.

COROLLAIRES.

273. Deux rectangles de même hauteur étant entre eux comme leurs bases, on a

$$\frac{BKIL}{BCHK} = \frac{BL}{BC} \quad \text{et} \quad \frac{CLIH}{BCHK} = \frac{CL}{BC};$$

d'où, en remplaçant les rectangles par les carrés équivalents,

$$\frac{ABDE}{BL} = \frac{ACFG}{CL} = \frac{BCHK}{BC}.$$

Les carrés construits sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle sont donc *respectivement proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypoténuse et à l'hypoténuse elle-même.*

274. Si l'on construit sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC trois polygones semblables P, Q, R, on a (267)

$$\frac{P}{AB^2} = \frac{Q}{AC^2} = \frac{R}{BC^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{P+Q}{AB^2+AC^2} = \frac{R}{BC^2},$$

c'est-à-dire (168)

$$R = P + Q.$$

SCOLIE.

275. On pourrait déduire le théorème précédent du théorème du n° 168; car, puisque l'aire du carré construit sur une droite a pour mesure le carré du nombre abstrait qui mesure la longueur de cette droite, on voit que le théorème rappelé exprime que la mesure du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des mesures des carrés construits sur les côtés de l'angle droit, et par suite que le premier carré équivaut à la somme des deux autres. Inversement, on passerait du point de vue *concret* au point de vue *abstrait*, c'est-à-dire du

n° 272 au n° 168, en remplaçant les aires des carrés par leurs mesures respectives.

La même remarque s'applique aux diverses relations numériques que nous avons démontrées dans le § III du Chapitre III du premier Livre, entre les divers éléments d'un triangle, rapportés à une unité commune. De ces relations, résultent immédiatement autant de théorèmes sur les aires; et l'on pourrait inversement donner des démonstrations directes de ces derniers théorèmes, comme l'a fait Euclide, et en déduire ensuite les relations numériques correspondantes.

II. — Problèmes relatifs aux aires.

PROBLÈME.

276. *Construire un triangle équivalent à un polygone donné* (*fig.* 173, 174).

Soit, par exemple, le pentagone convexe ABCDE (*fig.* 173). En menant la diagonale EC, on détache de ce pentagone le triangle ECD. Si, par le sommet D, on mène alors une parallèle DF à la diagonale EC, tous les triangles qui ont EC pour base

Fig. 173.

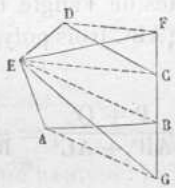
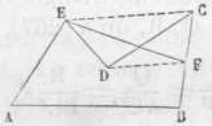


Fig. 174.



et leurs sommets sur DF sont équivalents au triangle ECD (249) et forment avec le quadrilatère ECBA un polygone équivalent au pentagone proposé. Or, pour que le nouveau polygone ABCFE ait un sommet de moins, il suffit de choisir parmi tous ces triangles celui dont le sommet est en F, à la rencontre de la parallèle DF et du côté BC prolongé.

La construction indiquée permettant de *transformer un polygone quelconque en un polygone équivalent, mais ayant un côté de moins*, on arrive toujours, en la répétant, à un triangle équivalent au polygone proposé.

Dans la *fig.* 173, en menant par le sommet A, jusqu'à la ren-

contre de FB prolongé, la parallèle AG à la diagonale EB, on passe du quadrilatère EABF au triangle équivalent FEG. Ce triangle est donc équivalent au pentagone primitif.

Lorsque le polygone considéré n'est pas convexe (*fig.* 174), la construction reste la même. Le pentagone concave ABCDE, augmenté du triangle EDC, équivaut au quadrilatère ABCE; et ce quadrilatère, diminué du triangle EFC, qui est équivalent au triangle EDC, donne le quadrilatère ABFE équivalent au pentagone proposé.

Comme nous l'avons dit (257), le problème précédent fournit un nouveau moyen pour évaluer l'aire d'un polygone; on peut, en effet, transformer le polygone considéré en un triangle équivalent, puis calculer l'aire de ce triangle.

PROBLÈME.

277. *Construire un carré équivalent à un polygone donné.*

Construire un carré équivalent à une figure donnée, c'est opérer la *quadrature* de cette figure.

Supposons d'abord qu'on veuille construire un carré équivalent à un triangle donné. Soient X le côté de ce carré, B et H la base et la hauteur du triangle proposé. On devra avoir (245, 248)

$$X^2 = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2} H.$$

Le côté du carré cherché sera donc une moyenne proportionnelle à la moitié de la base du triangle et à sa hauteur.

S'il s'agit d'un parallélogramme, d'un trapèze, d'un polygone régulier et, en général, d'un polygone dont l'aire soit exprimée par le produit de deux lignes, il suffit de chercher la moyenne proportionnelle à ces deux lignes. On obtient ainsi le côté du carré équivalent.

Dans tout autre cas, on transforme le polygone donné en un triangle équivalent (276), et l'on cherche le carré équivalent à ce triangle, comme on vient de le dire.

PROBLÈME.

278. *Trouver deux droites proportionnelles aux aires de deux polygones donnés.*

On pourra toujours remplacer les polygones considérés par

les carrés équivalents (277). Soient a et a' les côtés de ces carrés, x et y les droites cherchées. On devra avoir

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

On peut choisir arbitrairement l'une des deux droites cherchées, y par exemple, et poser $y = a'$. Il vient alors

$$\frac{x}{a'} = \frac{a^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a^2}{a'}.$$

x sera donc, dans cette hypothèse, une troisième proportionnelle (186) aux côtés a' et a, et le rapport de cette troisième proportionnelle à a' sera le même que celui des polygones donnés.

PROBLÈME.

279. *Construire un polygone équivalent à un polygone* P *et semblable à un polygone* Q.

Il s'agit ici de transformer un polygone donné P en un autre polygone X équivalent au polygone P, mais semblable à un second polygone donné Q.

Soient q un côté quelconque du polygone Q, et x le côté homologue du polygone X. On devra avoir (267)

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{X}} = \frac{q^2}{x^2},$$

ou, puisque le polygone X doit être équivalent au polygone P,

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}} = \frac{q^2}{x^2}.$$

Remplaçons les polygones Q et P par les carrés equivalents a^2 et b^2 (277). Il viendra

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{q^2}{x^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b} = \frac{q}{x}.$$

Le côté x est donc une quatrième proportionnelle aux trois droites a, b, q (186), et il restera à construire sur ce côté, homologue du côté q, un polygone semblable au polygone Q (191).

PROBLÈME.

280. *Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable égale à leur somme ou à leur différence.*

S'il s'agit de deux carrés dont les côtés soient a et b $(a > b)$, le côté x du carré égal à leur somme sera l'hypoténuse du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit a et b; le côté y du carré égal à leur différence sera le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit (272).

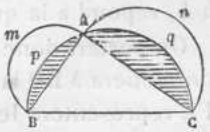
S'il s'agit de deux polygones semblables A et B $(A > B)$, dont deux côtés homologues quelconques soient a et b, le côté homologue x du polygone semblable $X = A + B$ sera l'hypoténuse du triangle rectangle construit sur a et b comme côtés de l'angle droit; le côté homologue y du polygone semblable $Y = A - B$ sera le second côté de l'angle droit du triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit (274).

Dans le cas de deux cercles ayant R et R′ pour rayons, il suffit de remplacer dans l'alinéa précédent a et b par R et R′ pour trouver les rayons x et y des cercles égaux respectivement à la somme ou à la différence des deux cercles donnés.

SCOLIE.

281. Il résulte de ce qu'on vient de dire que, si, sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC (*fig.* 175) comme diamètres, on décrit des demi-cercles, le demi-cercle décrit sur l'hypoténuse sera équivalent à la somme des demi-cercles décrits sur les côtés de l'angle droit. En enlevant de part et d'autre les parties communes ApB, AqC, qui sont ombrées sur la figure, on voit que la somme des deux *lunules* AmBpA, AnCqA, est équivalente à l'aire du triangle rectangle ABC. Cette proposition est attribuée à Hippocrate.

Fig. 175.



PROBLÈME.

282. *Construire un polygone semblable à un polygone donné et dont l'aire soit à celle de ce polygone dans le rapport de deux droites données* M *et* N (*fig.* 176).

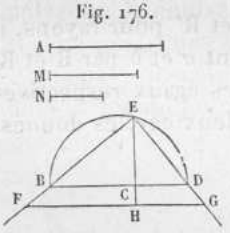
Supposons d'abord que le polygone donné soit un carré, et soit A son côté. Si X est le côté du carré cherché, on devra avoir (267)

$$\frac{X^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

La question est donc de construire un triangle rectangle tel que le rapport des segments déterminés sur l'hypoténuse par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit soit égal à $\frac{M}{N}$ (273) et que le côté adjacent au segment qui correspond à N soit égal à A.

Or, en portant sur une droite indéfinie BC = M, CD = N, en décrivant une demi-circonférence sur BD comme diamètre et en menant à BD la perpendiculaire CE jusqu'à la rencontre de cette demi-circonférence, on obtiendra un triangle rectangle BED dans lequel les segments de l'hypoténuse présenteront le rapport demandé. Il en sera de même (152) pour tous les triangles rectangles semblables qu'on formera en menant entre les côtés de l'angle droit BED, prolongés ou non, une parallèle à l'hypoténuse BD. Parmi tous ces triangles, celui dont le côté, dirigé suivant ED, est égal à A, répond à la question.

Fig. 176.



On portera donc sur ED la longueur EG = A ; par le point G, on mènera à BD la parallèle GF jusqu'à la rencontre de EB, et FE représentera le côté du carré cherché. On a, en effet,

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{EG}^2} = \frac{FH}{HG} = \frac{BC}{CD} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{EF}^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

Soit maintenant un polygone quelconque P ; désignons par p l'un de ses côtés et par x le côté homologue du polygone

cherché X. On devra avoir, d'après l'énoncé,

$$\frac{X}{P}=\frac{M}{N} \quad \text{et} \quad \frac{X}{P}=\frac{x^2}{p^2},$$

d'où

$$\frac{x^2}{p^2}=\frac{M}{N}.$$

Le problème se trouve donc ramené à trouver le côté d'un carré qui soit à un carré donné dans le rapport de deux droites données, question que nous venons de résoudre. Quand on aura obtenu le côté x homologue de p, il restera à construire sur ce côté un polygone semblable au polygone P.

Dans le cas de deux cercles, en désignant par x et r leurs rayons, on devra avoir

$$\frac{\pi x^2}{\pi r^2}=\frac{M}{N} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{r^2}=\frac{M}{N}.$$

C'est encore le même problème.

SCOLIE.

283. Si le rapport $\frac{M}{N}$ était donné numériquement et égal par exemple à $\frac{5}{7}$, on choisirait une certaine longueur pour unité, et l'on rentrerait dans le cas précédent en prenant les droites BC et CD égales à cinq fois et à sept fois cette longueur.

284. La recherche d'une échelle de réduction (192) revient au fond à ce qui précède. Supposons que l'aire du plan doive être la millionième partie de l'aire du terrain. On aura, pour le rapport des carrés des lignes homologues du plan et du terrain,

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{1000000},$$

d'où

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{1000}.$$

Chaque ligne du plan devra donc être la millième partie de la ligne qui lui correspond sur le terrain : en d'autres termes, 1^M doit y être représenté par $0^M,001$. Telle est l'échelle à adopter.

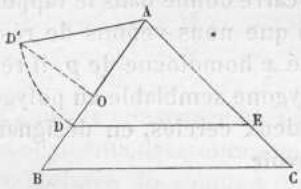
III. — Exercices et questions complémentaires.

PROBLÈME.

283. *Diviser un triangle en deux parties équivalentes par une droite parallèle à sa base* (*fig.* 177).

ABC étant le triangle donné, admettons que la droite DE réponde à la

Fig. 177.



question. Le point D suffit pour déterminer cette droite, puisqu'elle doit être parallèle à BC.

Cela posé, le triangle ADE, semblable à ABC, devant être équivalent à sa moitié, on a (206)

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad 2AD^2 = AB^2.$$

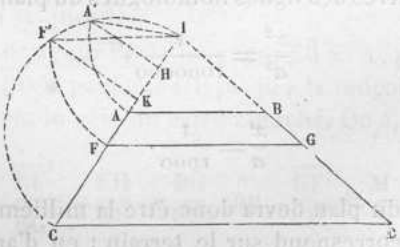
AB est donc (169) la diagonale du carré dont le côté inconnu est AD. On en déduit immédiatement la construction suivante.

Par le point O, milieu de AB, on élève sur cette droite la perpendiculaire OD' = OA ; on rabat AD' en AD sur AB, et le point D est le point cherché.

PROBLÈME.

286. *Diviser un trapèze en parties proportionnelles à deux droites ou à deux nombres donnés par une parallèle aux bases* (*fig.* 178).

Fig. 178.



ABCD étant le trapèze donné, admettons que la droite FG réponde à la question. Le point F suffit pour déterminer cette droite, puisqu'elle

doit être parallèle à AB et à CD. Les deux droites ou les deux nombres donnés étant représentés par M et N, on doit avoir

$$\frac{AFGB}{FCDG} = \frac{M}{N}.$$

Cela posé, prolongeons les deux côtés non parallèles du trapèze jusqu'à leur rencontre au point I.

Les trois triangles semblables (146) de la figure donnent (266)

$$\frac{IAB}{IA^2} = \frac{IFG}{IF^2} = \frac{ICD}{IC^2}.$$

On en déduit (t. I, *Alg. élém.*, 63)

$$\frac{IFG - IAB}{IF^2 - IA^2} = \frac{ICD - IFG}{IC^2 - IF^2},$$

c'est-à-dire, en échangeant les moyens,

$$\frac{AFGB}{FCDG} = \frac{IF^2 - IA^2}{IC^2 - IF^2} = \frac{M}{N}. \qquad (1)$$

Décrivons alors, sur IC comme diamètre, une demi-circonférence. Si l'on suppose dans cette demi-circonférence les cordes IA' et IF' respectivement égales à IA et à IF, et qu'on projette les points A' et F' en H et en K sur le diamètre IC, on a (273)

$$\frac{IA'^2 \text{ ou } IA^2}{IH} = \frac{IC^2}{IC}, \quad \frac{IF'^2 \text{ ou } IF^2}{IK} = \frac{IC^2}{IC}.$$

Il en résulte évidemment

$$IF^2 - IA^2 = IC(IK - IH) = IC.KH,$$
$$IC^2 - IF^2 = IC(IC - IK) = IC.KC,$$

et, par suite, d'après l'égalité (1),

$$\frac{KH}{KC} = \frac{M}{N}.$$

On n'a donc qu'à trouver le point K qui divise la distance connue HC proportionnellement aux nombres donnés M et N (183). Le point K fait connaître le point F', qui, à son tour, détermine le point F.

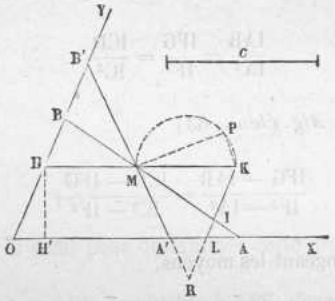
Si l'on veut diviser le trapèze donné en deux parties équivalentes, il faut faire M = N, et le point K est le milieu de HC.

PROBLÈME.

287. *Étant donnés un point et un angle, mener par le point une droite qui limite avec les côtés de l'angle un triangle d'aire donnée* (*fig.* 179).

Soient le point M et l'angle XOY. Admettons que la droite AMB réponde à la question. Le point A suffit pour la déterminer, puisqu'elle

Fig. 179.



doit passer par le point M. Représentons l'aire imposée au triangle cherché AOB par un carré de côté c.

Cela posé, menons par le point M la parallèle MH à OX, et, sur cette parallèle, déterminons le point K de manière que le parallélogramme OHKL soit équivalent au carré c^2 ou au triangle cherché. Il suffit, HH' étant la hauteur de ce parallélogramme, de satisfaire à l'égalité

$$HK.HH' = c^2, \quad \text{d'où} \quad HK = \frac{c^2}{HH'}.$$

On aura donc HK en construisant la troisième proportionnelle aux deux droites HH' et c (186).

Pour que la droite AMB réponde maintenant à la question, il faut qu'elle coupe le côté KL du parallélogramme en un point I tel, que le triangle MKI soit équivalent à la somme des deux triangles MHB et LAI; le triangle AOB et le parallélogramme OHKL, ayant comme partie commune le pentagone OHMIL, seront alors eux-mêmes équivalents.

Comme les trois triangles considérés sont semblables, leurs aires sont proportionnelles aux carrés de leurs côtés homologues, et l'on est immédiatement conduit à la construction suivante.

On décrit sur MK comme diamètre une demi-circonférence, dans laquelle on prend la corde MP égale à MH, puis l'on joint PK. Si l'on porte cette longueur PK sur l'axe OX, de part et d'autre du point L, on obtient les deux points A et A', qui, joints au point M, déterminent les deux solutions AMB, A'MB'.

En effet, pour la première, l'aire du triangle MKI est bien la somme

des aires des triangles MHB et LAI, puisqu'on a

$$MK^2 = MP^2 + PK^2 = MH^2 + LA^2.$$

Pour la seconde solution, c'est le triangle MKR qui est la somme des triangles MHB′ et LA′R, de sorte que le triangle MHB′ équivaut au trapèze MKLA′. Or le triangle A′OB′ et le parallélogramme OHKL ne diffèrent précisément que par ces deux dernières aires.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait MH $<$ MK. Si l'on a MH $=$ MK, la corde PK est nulle. Il en est donc de même de LA $=$ LA′, et les deux solutions précédentes se réduisent à la droite obtenue en joignant le point L au point M, qui devient le milieu de la portion de cette droite interceptée dans l'angle XOY.

Comme le minimum de HK, qui a lieu pour MK $=$ MH, répond à celui de c^2, on voit que, *de toutes les droites menées par le point* M *dans l'angle* XOY, *celle qui détermine le triangle d'aire minimum est divisée par ce point en deux parties égales.*

LIVRE TROISIÈME.

DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE PLANE [1].

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DES TRANSVERSALES.

I. — Transversales dans le triangle.

THÉORÈME.

288. *Lorsqu'une droite rencontre les trois côtés d'un triangle, prolongés s'il est nécessaire, elle détermine, par les distances de ses points d'intersection aux extrémités de chaque côté, six segments tels, que le produit de trois segments sans extrémité commune est égal au produit des trois autres segments* (*fig.* 180).

Il n'y a que deux positions possibles. La transversale considérée peut couper deux côtés du triangle et le prolongement du troisième côté, ou bien les prolongements des trois côtés.

La démonstration reste la même.

Le triangle ABC étant coupé par la transversale DEF, les

---

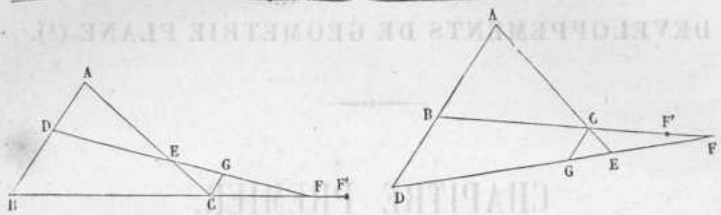
[1] Les deux premiers livres renferment les *éléments* ordinaires de la Géométrie plane. Nous nous proposons, dans ce troisième Livre, d'indiquer succinctement, comme nous l'avions fait dans notre première Édition, quelques unes des théories nouvelles qui sont venues peu à peu compléter ces éléments. Elles sont naturellement renfermées dans ce qui précède; mais elles permettent, dans un grand nombre de questions, de franchir beaucoup plus rapidement les anneaux intermédiaires et, par cela même, elles peuvent à leur tour suggérer d'autres points de vue et accroître considérablement le domaine normal de la Géométrie.

Les Anciens connaissaient une partie de ces théories.

segments correspondants sont DA et DB, EA et EC, FB et FC. Menons alors par le sommet C, par exemple, la parallèle CG au côté opposé AB jusqu'à la rencontre de la transversale.

Les triangles semblables FCG, FBD, d'une part, ECG, EAD,

Fig. 180.



d'autre part, donneront successivement

$$\frac{GC}{DB} = \frac{FC}{FB}, \quad \frac{GC}{DA} = \frac{EC}{EA}.$$

En divisant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA.FC}{EC.FB},$$

c'est-à-dire

(1) $$DA.EC.FB = DB.EA.FC.$$

On met souvent cette relation sous la forme

(1 *bis*) $$\frac{DA}{DB}\,\frac{EC}{EA}\,\frac{FB}{FC} = +1.$$

On remarque, en effet, en se reportant aux signes des segments (12, 136), que, sur les trois rapports écrits dans le premier membre, il y en a toujours un nombre *pair* qui sont négatifs (o est un nombre pair).

289. Réciproquement, *si trois points* D, E, F, *situés en nombre pair sur les côtés d'un triangle* ABC, *en nombre impair sur les prolongements de ses côtés, satisfont à la relation* (1), *les trois points proposés sont en ligne droite* (*fig.* 180).

Car, si la droite DE ne contenait pas le point F, elle couperait le côté BC en un certain point F′, et l'on aurait à la fois, d'après l'hypothèse et d'après la proposition directe,

$$DA.EC.FB = DB.EA.FC,$$
$$DA.EC.F'B = DB.EA.F'C,$$

On en déduirait par division

$$\frac{FB}{F'B} = \frac{FC}{F'C} \quad \text{ou} \quad \frac{FB}{FC} = \frac{F'B}{F'C},$$

relation qui exige (136) que le point F′ se confonde avec le point F.

290. Le théorème que nous venons d'établir est souvent appelé théorème de *Ptolémée* (125 ap. J.-C.), bien qu'on le trouve dans les *Sphériques* du géomètre grec Ménélaüs (80 ap. J.-C.). *Il sert,* en particulier, *à prouver que trois points d'une figure sont en ligne droite,* en imaginant un triangle dont les côtés ou leurs prolongements passent par ces trois points.

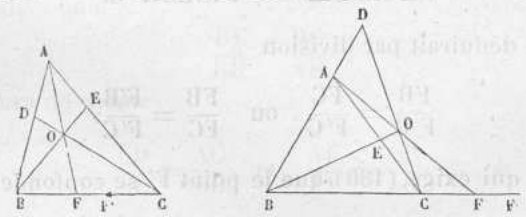
Carnot a donné ce théorème comme fondement à sa théorie des transversales (1806).

THÉORÈME.

291. *Si l'on joint un point quelconque pris dans le plan d'un triangle à ses trois sommets, les droites obtenues déterminent sur les côtés du triangle ou sur leurs prolongements six segments tels, que le produit de trois segments sans extrémité commune est égal et de signe contraire au produit des trois autres segments* (*fig.* 181).

Il n'y a pour le point choisi que deux positions possibles : il est intérieur ou extérieur au triangle. La démonstration reste la même.

Fig. 181.



Soient le triangle ABC et le point O. Les transversales OA, OB, OC, couperont les trois côtés du triangle, ou bien elles couperont un seul côté et les prolongements des deux autres.

Cela posé, considérons le triangle ABF coupé par la transversale COD. Nous aurons (288)

$$DA.OF.CB = DB.OA.CF.$$

Considérons de même le triangle ACF coupé par la transversale BOE. Nous aurons

$$EA.OF.BC = EC.OA.BF.$$

En divisant membre à membre les deux égalités précédentes, il vient, en remarquant (136) que l'on a $\frac{CB}{BC} = -1$,

$$-\frac{DA}{EA} = \frac{DB.CF}{EC.BF},$$

c'est-à-dire

$$DA.EC.FB = -DB.EA.FC. \tag{2}$$

On met souvent cette relation sous la forme

$$\frac{DA}{DB}\frac{EC}{EA}\frac{FB}{FC} = -1. \tag{2 bis}$$

292. Réciproquement, *si trois points* D, E, F, *situés en nombre impair sur les côtés d'un triangle* ABC, *en nombre pair sur les prolongements de ses côtés, satisfont à la relation* (2), *les droites qui joignent respectivement les trois points proposés aux sommets opposés du triangle sont concourantes* (*fig.* 181).

Car, si la droite AF, par exemple, ne passait pas par le point O où se croisent les droites BE et CD, la droite AO coupait le côté BC en un certain point F′, et l'on aurait à la fois, d'après l'hypothèse et d'après la proposition directe,

$$DA.EC.FB = -DB.EA.FC,$$
$$DA.EC.F'B = -DB.EA.F'C.$$

On en déduirait par division

$$\frac{FB}{F'B} = \frac{FC}{F'C} \quad \text{ou} \quad \frac{FB}{FC} = \frac{F'B}{F'C},$$

relation qui exige (136) que le point F′ se confonde avec le point F.

293. Le théorème que nous venons d'établir est dû au marquis *Jean Ceva*, géomètre italien du XVII^e^ siècle. *Il sert*, en particulier, *à prouver que trois droites d'une figure sont concourantes.*

On peut en déduire immédiatement certaines propriétés déjà démontrées par une autre voie.

1° *Dans tout triangle* ABC, *les médianes* AD, BE, CF, *sont concourantes* (84).

En effet, les trois rapports

$$\frac{DC}{DB}, \quad \frac{EA}{EC}, \quad \frac{FB}{FA},$$

qui entrent alors dans le premier membre de la relation (2 *bis*) (291) sont tous égaux à -1.

On verra de même que *les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle sont concourantes.*

2° *Dans tout triangle* ABC, *les bissectrices* AD, BE, CF, *des trois angles, sont concourantes* (82).

En effet, les trois rapports

$$\frac{DC}{DB}, \quad \frac{EA}{EC}, \quad \frac{FB}{FA},$$

sont négatifs et la valeur absolue de leur produit est égale (141) à

$$\frac{AC}{AB}\,\frac{AB}{BC}\,\frac{BC}{AC},$$

c'est-à-dire à l'unité.

On verra d'une manière analogue que *les bissectrices de deux angles extérieurs d'un triangle et la bissectrice de l'angle intérieur qui n'est adjacent à aucun d'eux, sont concourantes.*

3° *Dans tout triangle* ABC, les hauteurs AD, BE, CF, sont concourantes (81).

En effet, les triangles ABD et BCF étant semblables comme équiangles, on a

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{AB}.$$

On aura de même

$$\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{BC} \quad \text{et} \quad \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}.$$

La valeur absolue du produit des trois rapports négatifs

$$\frac{DC}{DB}, \quad \frac{EA}{EC}, \quad \frac{FB}{FA},$$

est donc encore égale à l'unité.

II. — Application au quadrilatère complet.

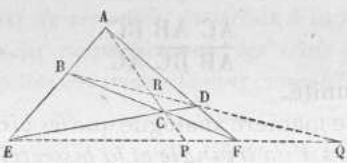
294. On appelle *quadrilatère complet* le système formé par quatre droites indéfinies qui se coupent deux à deux en six points.

Soit un quadrilatère ordinaire ABCD. Prolongeons (*fig.* 182) les côtés opposés AB et CD, AD et BC, jusqu'à leurs rencontres respectives aux points E et F. La figure ABCDEF ainsi obtenue est un *quadrilatère complet*, et elle a six sommets, A, B, C, D, E, F et trois diagonales AC, BD, EF joignant les sommets opposés deux à deux.

THÉORÈME.

295. *Dans tout quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres* (*fig.* 182).

Fig. 182.



Considérons, par exemple, la diagonale EF qui est coupée en P et en Q par les diagonales AC et BD.

En appliquant d'abord le théorème fondamental des transversales (288) au triangle AEF coupé par la transversale BD, on a

$$QE.DF.BA = QF.DA.BE.$$

En appliquant ensuite le théorème de Ceva (291) au même triangle AEF et aux droites qui joignent le point C à ses trois sommets, il vient

$$PE.DF.BA = -PF.DA.BE.$$

En divisant membre à membre ces deux égalités, on trouve

$$\frac{QE}{PE} = -\frac{QF}{PF} \quad \text{ou} \quad \frac{PE}{PF} = -\frac{QE}{QF}.$$

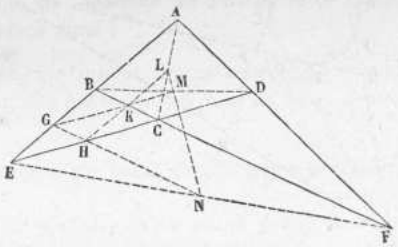
Les deux points P et Q sont donc bien les conjugués harmoniques des points E et F (137).

296. Ce théorème fournit un procédé très simple pour déterminer le conjugué harmonique Q d'un point P par rapport à une droite donnée EF; car, en menant la droite quelconque PCA et en joignant respectivement les points C et A aux extrémités de la droite EF, on forme le quadrilatère complet ABCDEF dont la diagonale BD coupe EF au point cherché Q.

THÉORÈME.

297. *Dans tout quadrilatère complet, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite* (*fig.* 183).

Fig. 183.



Soient le quadrilatère complet ABCDEF, et L, M, N, les milieux de ses trois diagonales AC, BD, EF.

Prenons les milieux G, H, K, des côtés du triangle BEC. Il est clair que les points G, K, M seront en ligne droite, de même que les points H, K, L et que les points G, H, N. En d'autres termes, GHK est un triangle dont les côtés passent respectivement par les points L, M, N. La condition pour que ces trois points soient en ligne droite est donc (289)

$$MG.LK.NH = MK.LH.NG. \qquad (1)$$

Mais cette condition est satisfaite, puisque le triangle BEC, coupé par la transversale ADF, donne (288)

$$DE.AB.FC = DC.AE.FB, \qquad (2)$$

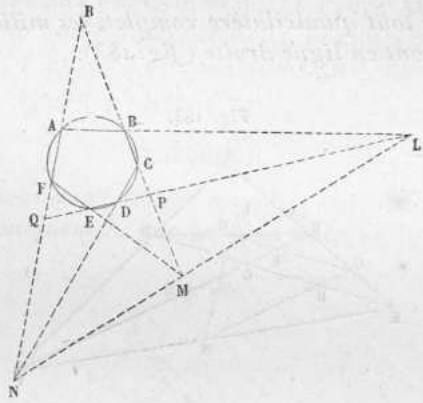
et que les six facteurs de la relation (1) sont respectivement les moitiés des facteurs correspondants de l'égalité (2).

III. — Application à l'hexagone inscrit.

THÉORÈME.

298. *Dans tout hexagone inscrit à une circonférence, les points de concours des côtés opposés prolongés deux à deux sont en ligne droite* (*fig.* 184).

Fig. 184.



Nous entendons ici par *côtés opposés* ceux qui sont séparés par deux côtés *consécutifs*. Ainsi, les côtés opposés AB et DE se coupent en L; les côtés opposés BC et EF se coupent en M; les côtés opposés CD et FA se coupent en N : il faut démontrer que les trois points L, M, N sont en ligne droite.

Or, les côtés *non consécutifs* BC, DE, FA de l'hexagone déterminent un triangle PQR qui est coupé par les autres côtés *non consécutifs* AB, CD, EF de l'hexagone; et, si l'on applique pour chacune de ces transversales le théorème fondamental (288), on a les égalités successives

$$(1)\qquad \begin{cases} LP.AQ.BR = LQ.AR.BP, \\ NQ.CR.DP = NR.CP.DQ, \\ MR.EP.FQ = MP.EQ.FR. \end{cases}$$

On a d'ailleurs (180)

$$(2)\qquad \begin{cases} BR.CR = AR.FR \\ FQ.AQ = EQ.DQ \\ DP.EP = CP.BP \end{cases}$$

Si l'on multiplie alors membre à membre les égalités (1), en tenant compte des égalités (2), il reste

$$(3)\qquad LP.NQ.MR = LQ.NR.MP,$$

qui, appliquée au même triangle PQR, prouve (289) que les trois points L, M, N, sont en ligne droite.

299. Le théorème qu'on vient d'établir reste vrai, lors même que l'hexagone proposé n'est pas convexe.

Il ne dépend pas de la grandeur des côtés de l'hexagone considéré, c'est-à-dire qu'il subsiste encore lorsque quelques-uns de ses côtés se réduisent à zéro ou sont remplacés respectivement par des tangentes à la circonférence circonscrite.

Par exemple, *un triangle étant inscrit dans une circonférence, les points de concours de ses côtés avec les tangentes menées à la circonférence par les sommets opposés sont en ligne droite.*

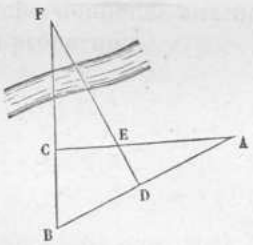
Enfin, cette propriété remarquable de l'hexagone inscrit dans une circonférence n'est qu'un cas particulier du célèbre théorème général connu sous le nom de *théorème de Pascal* ou de l'*hexagramme mystique*, et qui s'énonce ainsi :

Dans tout hexagone inscrit à une courbe du second ordre (1), *les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.*

IV. — Distance d'un point donné à un point inaccessible.

300. *Calculer la distance d'un point donné* B *à un point inaccessible* F (*fig.* 185).

Fig. 185.



On peut toujours, sur le terrain, indiquer la direction d'une droite à l'aide de jalons (2). On marquera alors un point C sur la partie accessible de la direction BF, et l'on mesurera BC à la chaîne; puis, on choisira sur le terrain un point A tel, qu'on puisse tracer facilement les alignements AB et AC. On marquera un nouveau point D sur AB, et, en jalonnant la direction DF, on déterminera son point de rencontre E

(1) On entend par courbe du second ordre toute courbe représentée en coordonnées rectilignes par une équation du second degré à deux variables. (*Voir* la *Géométrie analytique*, t. V.)

(2) *Voir* la Note III des *Eléments de Géométrie*, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 4e édition, 1888.

avec AC. Le triangle ABC, coupé par la transversale DEF, donne (288)

$$DA.\,EC.\,FB = DB.\,EA.\,FC.$$

On déduit de cette égalité

$$FB = FC\,\frac{DB.\,EA}{DA.\,EC}.$$

On peut mesurer les quatre segments DB, DA, EC, EA, et en déduire la valeur numérique k e l'expression fractionnaire correspondante. On a d'ailleurs

$$FC = FB - BC,$$

d'où

$$FB = (FB - BC)k,$$

c'est-à-dire

$$FB = \frac{k}{k-1}\,BC.$$

CHAPITRE II.

DIVISIONS ET FAISCEAUX HARMONIQUES.

I. — Division harmonique des lignes droites.

301. Nous allons compléter ce que nous avons déjà dit à cet égard (136, 137).

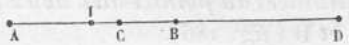
Trois nombres forment une *proportion harmonique,* lorsque le rapport de l'excès du premier sur le deuxième à l'excès du deuxième sur le troisième est égal au rapport du premier nombre au troisième.

La dénomination employée vient de ce que, lorsqu'une corde sonore rend l'accord parfait *ut, mi, sol,* elle est frappée successivement en trois points qui correspondent à des longueurs de corde proportionnelles aux nombres $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$, donnant précisément la proportion

$$\frac{1-\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}.$$

302. Nous avons vu (136) que, A et B étant deux points fixes pris sur une droite indéfinie (*fig.* 186), il existe tou-

Fig. 186.



jours sur cette droite deux points C et D situés nécessairement d'un même côté du milieu I de cette droite, l'un *intérieur* à AB, l'autre *extérieur,* tels que les rapports $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{DA}{DB}$ soient égaux en valeur absolue.

De cette égalité

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}, \tag{1}$$

on déduit, en échangeant les moyens,

$$\frac{DB}{CB} = \frac{DA}{CA}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{DA - AB}{AB - CA} = \frac{DA}{CA}.$$

Les trois longueurs DA, AB, CA constituent, par suite, une proportion harmonique, et l'on dit que la droite AB est *divisée harmoniquement* aux points C et D, qu'on appelle *points conjugués harmoniques* par rapport à la droite AB. On donne alors, par extension, le nom de *proportion harmonique* à la relation (1).

Si l'on tient compte des signes, le rapport $\frac{CA}{CB}$ est *négatif*, tandis que le rapport $\frac{DA}{DB}$ est *positif*. La véritable forme de la proportion harmonique est ainsi

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} \quad \text{ou} \quad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1.$$

Comme cette même relation peut s'écrire, par échange de moyens et simples permutations de lettres,

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = -1,$$

la droite CD, à son tour, est divisée *harmoniquement* aux points A et B, qui sont *conjugués harmoniques* par rapport à CD.

Les quatre points A, B, C, D forment un *système* ou une *division harmonique*.

THÉORÈME.

303. *La moitié* AI *de la droite* AB *est moyenne proportionnelle entre les distances du point* I *aux deux points conjugués harmoniques* C *et* D (*fig.* 186).

Nous n'avons besoin, pour démontrer ce théorème, que de considérer les valeurs absolues des segments, puisque les points C et D sont tous deux d'un même côté du point I. Nous déduirons donc de la relation (1) (Tome I, *Arithm.*, 393).

$$\frac{CA - CB}{CA + CB} = \frac{DA - DB}{DA + DB},$$

c'est-à-dire

$$\frac{(AI + IC) - (BI - IC)}{(AI + IC) + (BI - IC)} = \frac{AB}{AB + 2BD}.$$

Puisque AI égale BI en valeur absolue, cette dernière expression revient à

$$\frac{2IC}{2AI} = \frac{2AI}{2ID},$$

et il en résulte immédiatement

$$\overline{AI}^2 = IC.ID. \qquad (2)$$

Réciproquement, *si un point* M *pris sur* AB *satisfait à cette condition, ce point se confond nécessairement avec le milieu* I *de* AB.

Car, s'il était à gauche ou à droite de I, on ne pourrait pas avoir en même temps

$$\overline{AM}^2 = MC.MD \quad \text{et} \quad \overline{AI}^2 = IC.ID,$$

puisque, AM étant $<$ ou $>$ AI, on aurait, au contraire, à la fois MC $>$ ou $<$ IC et MD $>$ ou $<$ ID.

304. La relation (2), qui est une autre forme de la proportion harmonique, met bien en évidence la position relative des points d'un système harmonique, et conduit à la détermination facile par le calcul du quatrième point du système quand on connaît les trois autres (296).

Supposons, en particulier (*fig.* 186), que le point C vienne en I; on aura IC $= 0$ et, par suite, ID $= \infty$.

Le conjugué harmonique du milieu d'une droite est donc *à l'infini sur cette droite,* dans un sens ou dans l'autre; et, réciproquement, *le conjugué harmonique de l'infini est, sur une droite, le milieu de cette droite.*

On voit par là que *deux points quelconques, le milieu de la droite qui les joint et le point à l'infini sur cette droite, forment une division harmonique.*

305. Traçons deux cercles *orthogonaux* I et O (*fig.* 187), c'est-à-dire se coupant à angle droit au point E. L'angle IEO est alors droit, et les tangentes en E sont respectivement dirigées suivant les rayons des deux cercles.

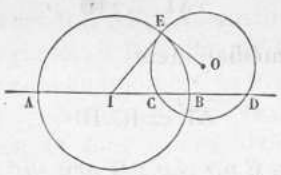
Si l'on mène un diamètre quelconque AB du premier cercle,

coupant le second en C et en D, on a donc

$$\overline{IE}^2 \quad \text{ou} \quad \overline{IA}^2 = IC.ID.$$

Par suite (303), *deux cercles orthogonaux divisent harmoniquement toute droite passant par le centre de l'un d'eux,*

Fig. 187.



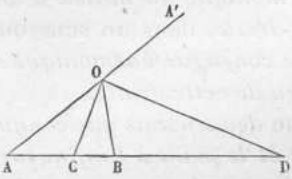
c'est-à-dire que leurs quatre points d'intersection avec cette droite forment une *division harmonique* (302).

II. — Faisceaux harmoniques.

306. Si l'on joint (*fig.* 188) un même point O aux quatre points conjugués harmoniques A, B, C, D, on forme *un faisceau harmonique,* dont le point O est le *centre* et dont les droites OA, OB, OC, OD, sont les *rayons.* Les rayons qui correspondent aux points conjugués harmoniques sont dits *conjugués harmoniques.* Les rayons OC et OD sont conjugués harmoniques des rayons OA et OB *ou divisent harmoniquement l'angle* AOB ; réciproquement, les rayons OA et OB divisent harmoniquement l'angle COD.

Nous avons déjà rencontré un exemple de faisceau harmonique (143).

Fig. 188.



Si l'on mène les bissectrices OC et OD des deux angles intérieur et extérieur supplémentaires AOB, BOA', d'un triangle AOB (*fig.* 188), on a (141, 142)

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{OB} \quad \text{et} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB},$$

d'où

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

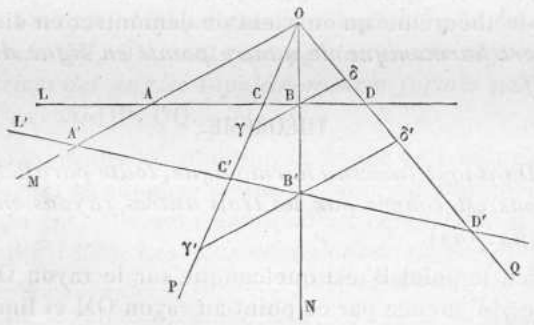
Les points C et D, pieds des deux bissectrices, sont donc conjugués harmoniques par rapport au côté AB. Par conséquent, les deux côtés OA et OB du triangle et les deux bissectrices OC et OD forment un faisceau harmonique.

L'angle COD étant droit, la circonférence décrite sur CD comme diamètre passe par le point O. Il en résulte que, *si l'on détermine sur le diamètre* CD *d'une circonférence* COD *les points* A *et* B *conjugués harmoniques des extrémités* C *et* D *du diamètre, le rapport des distances d'un point quelconque* O *de la circonférence aux points* A *et* B *demeure constant ;* car les bissectrices des angles variables AOB, BOA′ passent toujours par les points C et D, conjugués harmoniques des points A et B (144).

THÉORÈME.

307. *Tout faisceau harmonique coupe harmoniquement une transversale quelconque* (*fig.* 189).

Fig. 189.



Soit la droite L, divisée harmoniquement aux points A, B, C, D. En joignant un point O quelconque à ces quatre points, on forme (306) un faisceau harmonique ayant pour rayons les droites OM, ON, OP, OQ.

Prenons maintenant une transversale quelconque L′, rencontrée par les rayons du faisceau aux points A′, B′, C′, D′. Il faut démontrer qu'elle est divisée harmoniquement en ces points, en partant de l'hypothèse (302)

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

Or, si l'on mène par le point B la parallèle $\gamma\delta$ au rayon OM, on a évidemment

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{\gamma B}, \quad \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{\delta B},$$

d'où, en divisant ces égalités membre à membre,

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\delta B}{\gamma B} = -1.$$

Si l'on mène par le point B′ la parallèle $\gamma'\delta'$ au rayon OM, on a de même

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{OA'}{\gamma'B'}, \quad \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{OA'}{\delta'B'},$$

d'où, en divisant ces égalités membre à membre, et à cause des parallèles $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$,

$$\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{\delta'B'}{\gamma'B'} = \frac{\delta B}{\gamma B} = -1.$$

La figure rectiligne A′B′C′D′ pouvant être considérée comme la *perspective* ou la *projection concourante* au point O de la figure rectiligne ABCD, on peut encore énoncer commodément le théorème qu'on vient de démontrer en disant que *le rapport harmonique de quatre points en ligne droite est projectif.*

THÉORÈME.

308. *Dans tout faisceau harmonique, toute parallèle à l'un des rayons est coupée par les trois autres rayons en parties égales* (*fig.* 189).

En effet, le point B′ est quelconque sur le rayon ON, et la parallèle $\gamma'\delta'$ menée par ce point au rayon OM et limitée aux deux autres rayons conjugués OP, OQ, du faisceau harmonique considéré, satisfait toujours, d'après la démonstration précédente, à la relation

$$\frac{\delta'B'}{\gamma'B'} = -1.$$

On a donc, en valeur absolue, $\delta'B' = \gamma'B'$, et le point B′ est le *milieu* de la parallèle $\gamma'\delta'$ à OM.

309. Réciproquement, *tout faisceau de quatre droites* OM, ON, OP, OQ, *est harmonique, si une parallèle* $\gamma'B'\delta'$ *à l'un*

des rayons OM *est divisée par les trois autres rayons en parties égales* (*fig.* 189).

En effet, le point B′ étant, par hypothèse, le milieu de la transversale $\gamma'B'\delta'$, cette transversale est divisée harmoniquement par le point B′ et par le point situé à l'infini sur $\gamma'B'\delta'$ (304), point qui est à l'intersection de la transversale donnée et du rayon OM. Le faisceau des quatre rayons OM, ON, OP, OQ, divisant harmoniquement une certaine transversale, est, par cela même, un faisceau harmonique (306, 307).

COROLLAIRES.

310. On déduit de ce qui précède la *construction du quatrième rayon d'un faisceau harmonique dont on connaît les trois autres rayons.*

Supposons donnés (*fig.* 189) les rayons OM, OP, ON, et menons, par un point quelconque B′ du rayon ON, une parallèle au rayon OM. Cette parallèle venant couper en γ' le rayon OP, il suffit de prendre sur le prolongement de $\gamma'B'$ une longueur $B'\delta' = \gamma'B'$, pour avoir en δ' un point du quatrième rayon OQ.

311. *Lorsque, dans un faisceau harmonique, deux rayons conjugués* OM, ON, *sont rectangulaires, ces rayons sont les bissectrices des angles supplémentaires formés par les deux autres rayons* OP, OQ.

Admettons que la condition indiquée soit remplie dans la *fig.* 189. Si l'on suppose la transversale $\gamma'B'\delta'$ perpendiculaire au rayon ON, elle sera parallèle au rayon OM, et l'on aura $\gamma'B' = B'\delta'$ (308). Les deux triangles rectangles $\gamma'OB'$, $B'O\delta'$, sont alors égaux, et le rayon ON est la bissectrice de l'angle POQ. Le rayon OM, à son tour, est donc la bissectrice du supplément de POQ.

C'est la *réciproque* de la proposition rappelée au n° 306.

III. — Pôle et polaire par rapport à un angle.

312. Par un point B pris d'une manière quelconque dans le plan d'un angle POQ (*fig.* 189), menons diverses sécantes telles que CBD, et prenons sur chacune d'elles le point A conjugué harmonique du point B par rapport au segment CD intercepté sur la sécante par les côtés de l'angle POQ. Il est évident, d'après ce qui précède (306, 307), que le lieu du point A est le rayon OM conjugué harmonique du rayon OBN par rapport aux rayons OP et OQ ou par rapport à l'angle POQ. Ainsi, la

sécante CBD tournant autour du point fixe B, le conjugué A de ce point fixe décrit la droite fixe OM.

On donne à la droite OM le nom de *polaire* du point B par rapport à l'angle POQ, et, au point B, le nom de *pôle* de la droite OM par rapport au même angle.

On voit que tous les points de ON considérés comme pôles ont la même polaire OM par rapport à l'angle POQ et que, réciproquement, tous les points de OM considérés comme pôles ont la même polaire ON par rapport au même angle.

On voit, en même temps, que le problème de trouver le pôle quand on connaît la polaire ou la polaire quand on connaît le pôle, revient à déterminer le quatrième rayon d'un faisceau harmonique dont on connaît les trois autres rayons (310).

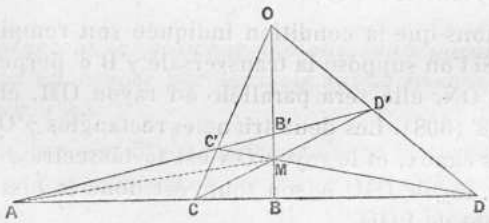
Nous allons indiquer quelques applications intéressantes des notions que nous venons d'établir.

PROBLÈME.

313. *On donne un angle* COD *et un point* A *hors de cet angle. On mène par ce point deux sécantes quelconques* ACD, AC'D' *et l'on joint diagonalement les points d'intersection* C *et* D', C' *et* D. *Trouver le lieu du point* M *d'intersection des droites* CD' *et* C'D *ainsi obtenues* (*fig.* 190).

Déterminons le point B, conjugué harmonique du point A par rapport à la droite CD. Les quatre droites MA, MC, MB, MD, forment un faisceau harmonique (306).

Fig. 190.



Par suite, le point B', où MB prolongée coupe la sécante AC'D', est le conjugué harmonique du point A par rapport à la droite C'D' (307). Les deux points B et B' déterminent la polaire du point A par rapport à l'angle COD (312), et, comme la droite BMB' passe par le point O, on obtient cette polaire en traçant OM.

Le lieu cherché se confond donc avec la polaire du point A *par rapport à l'angle* COD.

314. Réciproquement, *si l'on prend un point* M *quelconque sur la polaire* OB *du point* A *par rapport à l'angle* COD, *et si l'on mène par*

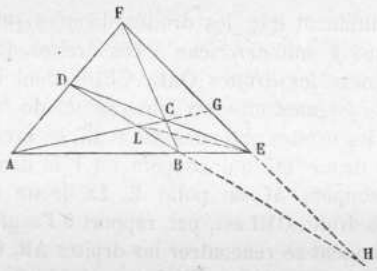
le point M *les droites* CD', C'D, *arrêtées aux côtés de l'angle, les droites* CD, C'D' *prolongées viennent se couper au pôle* A (*fig.* 190).

En effet, supposons un instant que le point A, conjugué harmonique du point B par rapport à CD, ne se trouve pas sur C'D', et menons la droite AC'. Cette droite AC' prolongée viendra couper OD en un point D_1 différent de D'. Si l'on joint alors CD_1, cette droite coupera C'D en un point de la polaire OB qui ne pourra être que le point M (313). Par conséquent, les deux droites CD_1 et CD' ayant deux points communs C et M ne peuvent différer, et la droite C'D' prolongée passe nécessairement par le pôle A.

315. On peut déduire de ce qui précède une nouvelle démonstration de la propriété fondamentale du quadrilatère complet (295).

En effet, soient (*fig.* 191) G, H, L, les points d'intersection des trois diagonales du quadrilatère complet ABCDEF.

Fig. 19



D'après le résultat obtenu au n° 313, le point H est le pôle de la droite ACG par rapport à l'angle EAF, de sorte que les points de rencontre H et G de la diagonale EF avec les diagonales BD et AC la divisent harmoniquement. De même, le point F est le pôle de la droite EL par rapport à l'angle AED, de sorte que L est sur AC le conjugué harmonique du point G et, sur BD, le conjugué harmonique du point H.

Ainsi, *dans tout quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.*

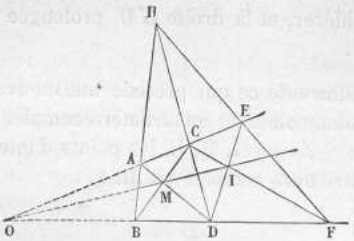
PROBLÈME.

316. *Mener par un point donné une droite qui concoure avec deux droites données, ces deux droites ne se coupant pas dans les limites du dessin* (*fig.* 192).

Soient d'abord AC et BD les deux droites données et M le point donné *intérieur* à ces droites. Traçons par le point M les droites sécantes AD et BC. En joignant leurs points de rencontre respectifs avec les droites données, on obtient les droites AB et CD qui, prolongées, se couperont en général en un point H. On pourra toujours opérer de manière que

ce point soit compris dans les limites de l'épure. On mènera alors la sécante HEF aux deux lignes données, et l'on joindra en croix les points d'intersection correspondants avec les points C et D. Les droites CF et DE se croiseront en I. La droite MI sera la polaire du point H par rapport à l'angle que forment les droites données AC et BD (313), et MI ira passer par le point de concours O de ces droites.

Fig. 192.



Supposons maintenant que les droites données soient AB et CD, et que le point donné F soit *extérieur* à ces droites. Par un point quelconque O, on mènera les droites OAC, OBDF, dont l'une passe par le point donné F. En joignant en croix leurs points de rencontre avec les droites données, les droites obtenues AD et BC se croiseront en M. On mènera alors la droite FC qui coupera en I la droite OM; puis, on joindra DI qui coupera AC au point E. La droite FE sera la droite demandée; car la droite OMI est, par rapport à l'angle COD, la polaire du point H où viennent se rencontrer les droites AB, CD, EF (314).

On pourra mettre à profit les solutions précédentes, pour tracer sur le terrain une droite passant par un point donné et allant concourir avec deux autres droites, visibles seulement dans une partie de leur parcours; pour prolonger une droite donnée au delà d'un obstacle arrêtant la vue; etc.

IV. — Pôle et polaire dans le cercle.

THÉORÈME.

317. *Si, par un point* O *pris dans le plan d'un cercle de diamètre* AB, *on trace une sécante quelconque* EF *à ce cercle, le lieu du point* I, *conjugué harmonique du point* O *par rapport à la corde* EF, *est une droite perpendiculaire au diamètre* AB *qui passe par le point* O (*fig.* 193).

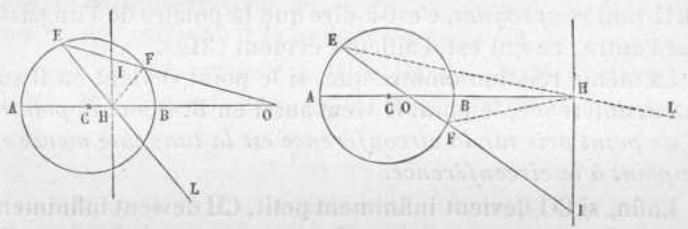
Déterminons le point H, conjugué harmonique du point O par rapport au diamètre AB qui passe par ce point, et soit I le conjugué harmonique du même point par rapport à la corde quelconque EF. Il suffit, pour démontrer le théorème énoncé, de prouver que la droite IH est perpendiculaire sur AB.

Or, puisque les points O et H sont conjugués harmoniques par rapport à AB et que les points E et F appartiennent à la circonférence, on a nécessairement (306)

$$\frac{EH}{EO} = \frac{FH}{FO}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{EH}{FH} = \frac{EO}{FO}.$$

Suivant que le point O est *extérieur* ou *intérieur* à la circonférence, la droite HO est donc la bissectrice de l'angle FHL ou de l'angle EHF, *extérieur* ou *intérieur* par rapport au triangle EHF. D'ailleurs, les droites HO, HF, HI, HE, formant par hypothèse un faisceau harmonique, il faut que la droite IH soit à son tour la bissectrice de l'angle *intérieur* EHF ou de l'angle *extérieur* FHL (306), c'est-à-dire qu'elle soit perpendiculaire à HO ou au diamètre AOB.

Fig. 193.



On dit que le point O est le *pôle* de la droite IH, et que la droite IH est la *polaire* du point O, par rapport au cercle AB.

Corollaires.

318. Le point C étant le centre du cercle ou le milieu de AB, on a la relation (303)

$$\overline{AC}^2 = CH.CO.$$

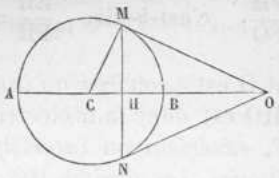
On peut déduire de cette relation plusieurs conséquences importantes.

Par un point O extérieur à une circonférence (*fig.* 194), menons à cette circonférence les tangentes OM et ON. Traçons la corde MN qui joint les points de contact M et N, et qui est perpendiculaire au diamètre OAB. Le triangle rectangle OMC donne

$$\overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 = CH.CO.$$

Le point H où la corde MN coupe le diamètre OAB est donc le conjugué harmonique du point O par rapport à AB.

Fig. 194.



En d'autres termes, *la polaire du point* O *est la corde* MN *qui joint les points de contact des tangentes menées de ce point à la circonférence.*

On peut conclure de là une nouvelle construction de la tangente menée à la circonférence par un point extérieur.

La relation $AC^2 = CH.CO$ prouve encore que les points O et H sont *réciproques,* c'est-à-dire que la polaire de l'un passe par l'autre; ce qui est d'ailleurs évident (312).

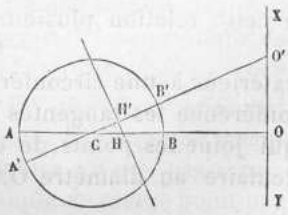
La même relation montre que, si le point O vient en B sur la circonférence, le point H vient aussi en B. Donc, *la polaire d'un point pris sur la circonférence est la tangente menée en ce point à la circonférence.*

Enfin, si CO devient infiniment petit, CH devient infiniment grand, de sorte que, *si le pôle est au centre de la circonférence, la polaire passe à l'infini.*

THÉORÈME.

319. *Lorsqu'on fait décrire au pôle* O *une droite* XY, *toutes les polaires correspondantes aux diverses positions du point* O *se croisent en un même point* H *qui est le pôle de* XY (*fig.* 195).

Fig. 195.



Menons le diamètre ABO perpendiculaire à la droite XY,

et déterminons sur ce diamètre le point H, conjugué harmonique du point O ou pôle de la droite XY (318). Prenons un point *quelconque* O′ sur XY, et joignons-le au centre du cercle.

Nous obtiendrons ainsi un diamètre A′B′; la perpendiculaire HH′, abaissée du point H sur ce diamètre, est la polaire du point O′.

En effet, les triangles semblables COO′, CH′H, donnent

$$\frac{CO'}{CH} = \frac{CO}{CH'},$$

d'où

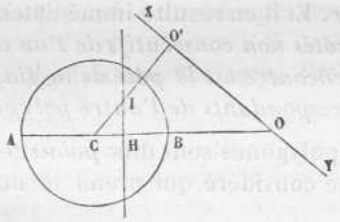
$$CH'.CO' = CH.CO = \overline{AC}^2 \quad (318).$$

Le point H′ est donc bien le pied de la polaire du point O′, et cette polaire est alors HH′.

320. Réciproquement, *si la droite* XY *tourne autour du point* O, *son pôle décrit la polaire du point* O (*fig.* 196).

Car, si l'on détermine la polaire IH du point O et si l'on abaisse, du centre C de la circonférence, une perpendiculaire CO′ sur la position *quelconque* de la droite XY, les deux triangles semblables CHI, CO′O, donnent toujours

Fig. 196.



$$\frac{CI}{CO} = \frac{CH}{CO'},$$

d'où

$$CI.CO' = CH.CO = \overline{AC}^2.$$

Le point I est donc le pôle de la droite XY dans la position qu'elle occupe.

321. On peut énoncer plus rapidement les propositions qu'on vient d'établir, en disant : *par rapport à un cercle*

donné, les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite et, réciproquement, *la polaire d'un point est le lieu des pôles de toutes les droites qui passent par ce point.*

COROLLAIRES.

322. 1° *On obtient le pôle d'une droite, en déterminant le point d'intersection des polaires de deux de ses points.*

2° *On obtient la polaire d'un point, en joignant les pôles de deux droites passant par ce point.*

3° Si, des différents points d'une droite, on mène des couples de tangentes à une circonférence, les cordes de contact correspondantes se croisent au pôle de cette droite (318).

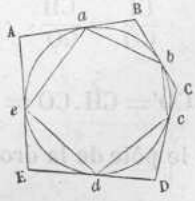
4° Si, d'un point, on mène à un cercle une série de sécantes, les points de rencontre des couples de tangentes qui répondent à chaque sécante, se trouvent sur la polaire du point donné (318).

5° *Si deux polygones d'un même nombre de côtés sont tels, que les sommets de l'un soient les pôles des côtés de l'autre par rapport à une circonférence tracée dans leur plan, les sommets du second polygone sont, à leur tour, les pôles des côtés du premier.* Et il en résulte immédiatement que, *si l'on prolonge deux côtés non consécutifs de l'un de ces polygones, leur point de rencontre est le pôle de la diagonale qui joint les sommets correspondants de l'autre polygone.*

Deux pareils polygones sont dits *polaires-réciproques* par rapport au cercle considéré qui prend le nom de *cercle directeur.*

Par exemple, considérons (*fig.* 197) les deux pentagones

Fig. 197.



ABCDE, *abcde*, l'un circonscrit, l'autre inscrit à la même circonférence. Les sommets *a, b, c d, e* du pentagone inscrit

étant les points de contact ou les pôles (318) des côtés AB, BC, CD, DE, EA du pentagone circonscrit, les sommets B, C, D, E, A de ce pentagone sont, à leur tour, les pôles des côtés opposés *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea* du pentagone inscrit; et le point de rencontre de deux côtés non consécutifs, tels que AB et CD, de l'un de ces pentagones, est le pôle de la diagonale *ac* de l'autre pentagone.

323. Les théorèmes précédents constituent le point de départ de l'importante *méthode des polaires réciproques* due à PONCELET (1). On peut donner l'idée de cette Méthode, *au point de vue descriptif*, en disant que, si l'on forme la figure polaire réciproque d'une certaine figure donnée par rapport à un cercle directeur, les *points* et les *droites* de la figure donnée sont remplacés, dans sa figure polaire réciproque ou *corrélative*, par des *droites* et des *points;* de telle sorte qu'aux points *en ligne droite* sur l'une des figures, se trouvent substituées des droites *concourantes* sur l'autre figure.

Toute propriété descriptive appartenant à l'une des deux figures conduira ainsi immédiatement à une propriété corrélative de l'autre figure polaire réciproque, et les énoncés des deux propositions ne différeront que par l'interversion ou l'échange des mots *points* et *droites* (2).

Nous allons en présenter un exemple remarquable.

V. — Application à l'hexagone circonscrit.

324. *Dans tout hexagone circonscrit à une circonférence, les diagonales qui joignent les sommets opposés* (c'est-à-dire le premier et le quatrième, le second et le cinquième, le troisième et le sixième) *se coupent en un même point* (*fig.* 198).

Soit l'hexagone circonscrit ABCDEF. En joignant les points de contact successifs, on forme l'hexagone inscrit *abcdef*, polaire réciproque du circonscrit (322).

Cela posé, désignons par L, M, N les points de rencontre des côtés opposés de l'hexagone inscrit (298). Les sommets A et D étant les pôles des côtés *ab* et *de*, le point de rencontre L de ces côtés sera le pôle de la diagonale AD (322). De même, les points de rencontre M et N des côtés *bc* et *ef*, *cd* et *fa*, seront les pôles des diagonales BE et CF. Or,

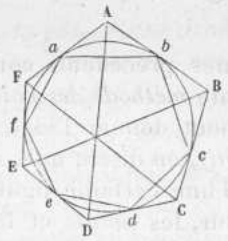
(1) *Traité des Propriétés projectives des figures*, t. I et II. — Gauthier-Villars, 1866.

(2) *Voir* l'exposé complet de la *Méthode des polaires réciproques* dans le *Traité de Géométrie*, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition, 1891.

les trois points L, M, N étant en ligne droite (298), il en résulte immédiatement que les trois diagonales de l'hexagone circonscrit se coupent en un même point, pôle de la droite LMN (320).

Ce théorème, comme celui sur lequel il s'appuie (298), n'est qu'un

Fig. 198.



cas particulier d'un théorème beaucoup plus général, applicable à toute courbe du second degré, et qui est dû à *Brianchon* (1).

Il ne dépend pas de la grandeur des côtés de l'hexagone circonscrit, c'est-à-dire qu'il subsiste lorsque, quelques-uns des angles de l'hexagone devenant égaux à deux droits, les côtés correspondants de cet hexagone se réunissent suivant une seule tangente à la circonférence, dont le point de contact représente encore le sommet qui se trouvait au point de rencontre des deux côtés considérés.

Ainsi, l'on peut dire, d'après cette remarque, que, *dans tout triangle circonscrit à la circonférence, les droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé se croisent en un même point.*

Le théorème de Brianchon est le premier exemple qu'on ait donné de l'emploi qu'on peut faire de la théorie des pôles et polaires au point de vue de la comparaison des figures corrélatives (323), c'est-à-dire au point de vue de la *réciprocité* ou de la *dualité* des figures planes.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XIII^{e} cahier, 1806.

CHAPITRE III.

DU RAPPORT ANHARMONIQUE ET DE LA DIVISION HOMOGRAPHIQUE.

I. — Du rapport anharmonique de quatre points.

325. La proportion harmonique (302) n'est qu'une valeur particulière ou un cas particulier de ce que *Chasles* [1] a appelé la *fonction* ou le *rapport anharmonique de quatre points.*

Quatre points A, B, C, D étant situés en ligne droite d'une manière quelconque, on appelle rapport anharmonique de ces quatre points *le quotient des rapports des distances respectives de deux* QUELCONQUES *d'entre eux aux deux autres :* par exemple, le quotient

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}.$$

On dit alors que les points A et B sont *conjugués,* de même que les points C et D.

On peut mettre aussi le rapport anharmonique considéré sous la forme abrégée

$$(CDAB),$$

qui signifiera qu'on doit prendre le rapport des distances du *troisième* point A au *premier* et au *deuxième* C et D, et le diviser par le rapport des distances du *quatrième* point B au *premier* et au *deuxième.*

On peut d'ailleurs tout aussi bien, d'après la définition générale, prendre par exemple le rapport des distances du point B aux points A et C, et le diviser par le rapport des distances du point D aux mêmes points A et C. On aura un autre rapport anharmonique des quatre points (326).

[1] *Aperçu historique*, p. 34; 1837.

Les rapports qui entrent dans la fonction anharmonique ont un signe qui dépend de ceux des segments *ayant la même origine* qui y figurent. Le rapport anharmonique, à son tour, a donc un signe qui dépend, suivant la règle de la division, de ceux des rapports qui le composent.

Lorsque la valeur du rapport anharmonique est égale à -1, on retombe sur la proportion harmonique (302).

326. *On peut former vingt-quatre rapports anharmoniques avec les quatre points* A, B, C, D, *et ces vingt-quatre rapports n'ont que six valeurs différentes.*

On voit d'abord que la valeur du rapport anharmonique ne change pas quand on remplace chaque point par son conjugué, ou quand on intervertit les deux groupes de points conjugués.

En effet, on a

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC.BD}{AD.BC} = \frac{BD}{BC} : \frac{AD}{AC},$$

c'est-à-dire (325)

$$(CDAB) = (DCBA).$$

On a ensuite

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC.BD}{AD.BC} = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

c'est-à-dire

$$(CDAB) = (ABCD).$$

Il en résulte qu'on peut écrire d'abord le rapport anharmonique de quatre manières différentes, sans que les points primitivement conjugués cessent de l'être. Ces quatre valeurs, *égales entre elles,* sont évidemment

$$(CDAB) = (DCBA) = (ABCD) = (BADC).$$

En prenant les inverses des quatre rapports anharmoniques précédents, on en a quatre autres, aussi *égaux entre eux,* mais différents des premiers.

Maintenant, au lieu de prendre le point B comme conjugué du point A, on peut prendre le point C ou le point D.

Si A et C sont conjugués, on obtiendra huit autres rapports anharmoniques, deux à deux inverses l'un de l'autre, et dont les quatre premiers seront égaux à

$$\frac{AD}{AB} : \frac{CD}{CB} = (DBAC).$$

Si A et D sont conjugués, on obtiendra de même huit autres rapports anharmoniques, deux à deux inverses l'un de l'autre, et dont les quatre premiers seront égaux à

$$\frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = (BCAD).$$

Les quatre points A, B, C, D peuvent donc finalement former vingt-quatre rapports anharmoniques, dont six seulement ont des valeurs différentes. Ce sont les trois rapports *directs*

$$(CDAB), \quad (DBAC), \quad (BCAD),$$

et leurs *inverses*

$$(CDBA), \quad (DBCA), \quad (BCDA).$$

On peut remarquer que les rapports inverses ne diffèrent ici des rapports directs que par l'interversion des deux derniers points conjugués.

On peut toujours se contenter de considérer les trois premières valeurs du rapport anharmonique, où le point A a successivement pour conjugué les trois autres points B, C, D.

D'ailleurs, sur ces trois rapports, il y en a toujours *deux positifs et un négatif*. C'est ce qu'on vérifiera facilement en tenant compte des signes des segments (325).

327. *Connaissant l'un des trois rapports anharmoniques directs, trouver les deux autres.*

Si l'on suppose les quatre points considérés A, B, C, D, placés sur la droite qui les contient suivant l'ordre alphabétique, on a l'identité

$$AC.BD = (AB + BC)(BC + CD).$$

Si l'on effectue dans le second membre, elle devient

$$AC.BD = (AB + BC + CD)BC + AB.CD,$$

c'est-à-dire

$$(\alpha) \qquad AC.BD = AD\ BC + AB.CD.$$

Posons, d'ailleurs, pour les trois rapports anharmoniques

directs (¹),

$$(CDAB) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC.BD}{AD.BC} = \lambda_1,$$

$$(DBAC) = \frac{AD}{AB} : \frac{CD}{CB} = \frac{AD.CB}{AB.CD} = \lambda_2,$$

$$(BCAD) = \frac{AB}{AC} : \frac{DB}{DC} = \frac{AB.DC}{AC.DB} = \lambda_3.$$

Or, si l'on divise les deux membres de l'identité (α) par le produit AD.BC, il vient

$$\frac{AC.BD}{AD.BC} = 1 + \frac{AB.CD}{AD.BC},$$

c'est-à-dire, en tenant compte des expressions précédentes et des signes des segments,

$$(\beta) \qquad \lambda_1 = 1 - \frac{1}{\lambda_2} \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = \frac{1}{1 - \lambda_1}.$$

Si l'on divise ensuite tour à tour les deux membres de la même identité (α) par les deux autres produits AB.CD et AC.BD, il vient également

$$\frac{AC.BD}{AB.CD} = \frac{AD.BC}{AB.CD} + 1,$$

$$1 = \frac{AD.BC}{AC.BD} + \frac{AB.CD}{AC.BD},$$

c'est-à-dire

$$(\gamma) \qquad \frac{1}{\lambda_3} = -\lambda_2 + 1 \quad \text{ou} \quad \lambda_3 = \frac{1}{1 - \lambda_2},$$

$$(\delta) \qquad 1 = \frac{1}{\lambda_1} + \lambda_3 \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = \frac{1}{1 - \lambda_3}.$$

Les relations (β), (γ), (δ) résolvent la question.

328. On peut remarquer que l'identité (α), indiquée au numéro précédent, conduit évidemment, en remplaçant BD par DB, à la condition

$$(\alpha') \qquad AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0.$$

Il est facile de voir que cette condition subsiste dans tous les cas, c'est-à-dire lors même que les points considérés ne sont

(¹) Le produit de ces trois rapports est évidemment égal à -1.

plus disposés suivant l'ordre alphabétique. En effet, si l'on change, par exemple, A en B et B en A, la relation ci-dessus prend la forme

$$BA.CD + BC.DA + BD.AC = 0,$$

et, les signes de tous les termes étant changés, on retombe sur la relation (α') elle-même.

Ainsi, *la somme des trois produits formés par les distances du premier point au deuxième et du troisième au quatrième, du premier point au troisième et du quatrième au second, du premier point au quatrième et du deuxième au troisième, est toujours égale à zéro lorsqu'on tient compte des signes des segments.*

329. *Connaissant un rapport anharmonique* λ *de quatre points et trois de ces points, déterminer le quatrième.*

Désignons par A, B, C, D, les quatre points, et supposons qu'on doive déterminer le quatrième point D par la condition indiquée. On aura, par exemple, par hypothèse,

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC.BD}{AD.BC} = \lambda.$$

On en déduit

$$\frac{BD}{AD} = \lambda \frac{BC}{AC}. \tag{1}$$

Le second membre étant connu en grandeur et en signe, ainsi que les points A et B sur la droite qui doit contenir le point D, ce point est complètement déterminé (136).

Il est facile de voir que λ *peut prendre toutes les valeurs possibles, positives ou négatives, excepté les trois valeurs* 0, ∞, $+1$.

En effet, si λ était égal à 0, la relation (1) donnerait $BD = 0$, et le point D coïnciderait avec le point B.

Si λ était infini, la relation (1) donnerait $AD = 0$, et le point D coïnciderait avec le point A.

Enfin, pour $\lambda = +1$, on aurait

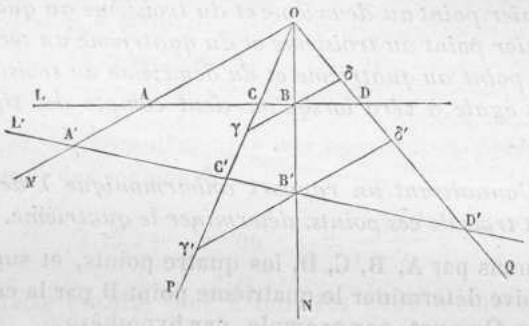
$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC},$$

et le point D coïnciderait avec le point C.

THÉORÈME.

330. *Tout faisceau de quatre droites* OM, ON, OP, OQ, *partant d'un même point ou centre* O, *est coupé par une transversale quelconque suivant un rapport anharmonique constant, qui devient alors le rapport anharmonique du faisceau* (1) (*fig.* 199).

Fig. 199.



Pour démontrer ce théorème fondamental, on considérera deux transversales quelconques L et L'. La première coupant les quatre droites aux points A, B, C, D, et la seconde coupant ces mêmes droites aux points A', B', C', D', il suffira de prouver qu'on a, par exemple,

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

La démonstration est identique à celle que nous avons exposée dans le cas d'un faisceau harmonique (307), avec cette seule différence que la valeur du premier rapport est supposée quelconque au lieu d'être donnée égale à -1. Nous prierons donc le lecteur de s'y reporter.

Il en résulte, en particulier, que le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est *projectif*.

Il est évident que le rapport anharmonique d'un faisceau ne varie pas lorsqu'on échange entre eux deux rayons quelconques, pourvu qu'on échange en même temps les deux autres (326).

En résumé, tout ce que nous avons dit précédemment du

(1) On trouve cette importante proposition dans le 7e Livre des précieuses *Collections mathématiques* de PAPPUS (385 ap. J.-C.).

rapport anharmonique de quatre points en ligne droite peut s'appliquer à celui d'un faisceau de quatre droites.

Les rayons, qui correspondent aux points *conjugués* sur une transversale quelconque (325), sont eux-mêmes *conjugués*.

331. Quand deux systèmes de quatre points *qui se correspondent un à un*, sont situés sur deux droites et présentent un rapport anharmonique égal, les deux autres rapports anharmoniques du premier système sont respectivement égaux aux deux autres rapports anharmoniques du second système.

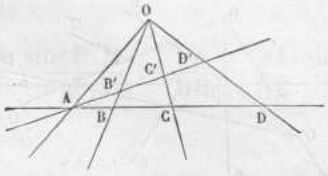
C'est ce qui résulte immédiatement des expressions des trois rapports anharmoniques directs d'un système rectiligne de quatre points, qui sont telles que la valeur d'un seul rapport fixe les valeurs des deux autres (327).

On peut donc dire indifféremment que les deux systèmes proposés où les points se correspondent un à un, et qui présentent un rapport anharmonique égal, ont alors *les mêmes rapports anharmoniques* ou, simplement, *le même rapport anharmonique*.

THÉORÈME.

332. *Quand deux systèmes rectilignes de quatre points, qui se correspondent un à un sur deux droites différentes, ont un point homologue commun et un rapport anharmonique égal, c'est-à-dire le même rapport anharmonique, les trois droites qui joignent les autres points correspondants pris deux à deux sont concourantes* (*fig.* 200).

Fig. 200.



Soient A, B, C, D et A′, B′, C′, D′ les deux systèmes rectilignes de quatre points correspondants, dont les deux premiers, A et A′, coïncident. Supposons que les droites BB′ et CC′ qui joignent les points correspondants B et B′, C et C′, se coupent en O. Il faut prouver que la troisième droite DD′ passe aussi par le point O.

Admettons, pour un instant, que la droite OD′ prolongée ne contienne pas le point D et coupe la droite ABCD en δ.

On aura alors, en raison du faisceau partant du point O et formé sur AB′C′D′ (330),

$$(AB'C'D') = (ABC\delta).$$

Mais on a, par hypothèse,

$$(AB'C'D') = (ABCD).$$

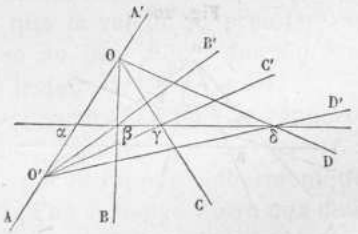
Les points D et δ coïncident donc nécessairement (329), et la droite OD′δ n'est autre que la droite DD′.

THÉORÈME.

333. *Quand deux faisceaux de quatre droites qui se correspondent une à une, ont un rayon homologue commun et un rapport anharmonique égal, les trois points d'intersection des autres rayons correspondants pris deux à deux sont en ligne droite* (*fig.* 201).

Les rapports anharmoniques d'un faisceau n'étant autre chose que les rapports anharmoniques des points que ses rayons déterminent sur une transversale quelconque (330), la valeur d'un seul de ses trois rapports anharmoniques directs fixe la valeur des deux autres (327). Quand deux faisceaux *dont les rayons se correspondent* ont un rapport anharmonique égal, on peut donc dire indifféremment qu'ils ont *les mêmes rapports anharmoniques,* ou *le même rapport anharmonique.*

Fig. 201.



Cela posé, OO′ étant le rayon homologue commun des deux faisceaux considérés, dont les rayons correspondants sont OA et O′A′, OB et O′B′, OC et O′C′, OD et O′D′, admettons pour un instant que la droite βγ, qui joint les points d'intersection des couples de rayons correspondants intermédiaires,

coupe en α le rayon commun et, en deux points différents δ et δ', les deux derniers rayons correspondants OD et O'D'.

Il viendra alors, les deux faisceaux ayant, tels qu'on les considère, le même rapport anharmonique,

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma\delta').$$

Cette égalité exige que les points δ et δ' se confondent et, par suite, la droite $\beta\gamma$ coupe les rayons OD et O'D' au même point δ.

On remarquera que les deux théorèmes précédents offrent un nouvel exemple de *figures corrélatives* ou de la *dualité* des figures planes (323, 324).

II. — De la division homographique.

334. En nous reportant à la *fig.* 199 du n° 330, nous allons chercher à exprimer d'une autre manière le rapport anharmonique

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

L'angle POM de deux droites OP et OM étant représenté par la notation (P, M), on a sur cette figure (voir la *Trigonométrie*)

$$\frac{CA}{OA} = \frac{\sin(P,M)}{\sin OCA}, \quad \frac{CB}{OB} = \frac{\sin(P,N)}{\sin OCB},$$

$$\frac{DA}{OA} = \frac{\sin(Q,M)}{\sin ODA}, \quad \frac{DB}{OB} = \frac{\sin(Q,N)}{\sin ODB}.$$

Les deux angles OCA et OCB étant supplémentaires ont même sinus, et l'angle ODB est l'angle ODA lui-même. Il vient donc par division

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{OB}\frac{\sin(P,M)}{\sin(P,N)}, \quad \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB}\frac{\sin(Q,M)}{\sin(Q,N)},$$

et l'on a finalement

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\sin(P,M)}{\sin(P,N)} : \frac{\sin(Q,M)}{\sin(Q,N)}.$$

Le rapport anharmonique du faisceau des quatre droites OM, ON, OP, OQ, pris sur une transversale quelconque, ne dépend donc que des angles formés par les rayons correspondants, et il conserve par conséquent la même valeur, quelle

que soit cette transversale. C'est là une seconde démonstration de la proposition fondamentale du n° 330.

335. Le rapport anharmonique des sinus des angles formés par les rayons du faisceau le caractérise complètement. *Deux faisceaux, pour lesquels ce rapport est le même, sont coupés par une transversale quelconque suivant le même rapport anharmonique.* C'est ce qui arrive, *par exemple,* pour des faisceaux qui présentent respectivement les mêmes angles.

De pareils faisceaux sont dits *homographiques.*

On peut considérer des faisceaux formés par plus de quatre droites partant d'un même point : ils formeront autant de faisceaux de quatre droites qu'on pourra former de combinaisons avec les droites qui les composent prises quatre à quatre.

Si l'on compare deux de ces faisceaux comprenant le même nombre de droites, et si les groupes de quatre droites de même rang dans les deux faisceaux ont des rapports anharmoniques égaux, les deux faisceaux sont encore *homographiques.*

Par exemple, deux faisceaux composés d'angles égaux disposés dans le même ordre sont homographiques.

Il faut bien remarquer que, dans un faisceau, les rayons doivent être supposés prolongés de part et d'autre du centre du faisceau. Par suite, *deux faisceaux dont les rayons, en même nombre et dans le même ordre, sont deux à deux perpendiculaires, ont des angles égaux ou supplémentaires* (58), *et sont homographiques.*

Nous allons indiquer quelques applications importantes des notions précédentes.

336. Si l'on prend des points *fixes* sur une circonférence (quatre au moins), et si on les joint à un point *variable* de cette circonférence, tous les faisceaux obtenus sont homographiques, car ces faisceaux, en raison de la mesure des angles inscrits (108), conserve les mêmes angles, quelle que soit la position du point variable. Le rapport anharmonique de l'un d'eux est dit *le rapport anharmonique des quatre points fixes de la circonférence.*

337. Remarquons que l'angle sous lequel on voit, du centre d'une circonférence, la portion d'une tangente *mobile* comprise entre deux tangentes *fixes,* est égal à la moitié de

l'angle des deux rayons qui aboutissent aux points de contact de ces tangentes fixes. Le premier angle est donc constant comme le second.

Il en résulte que tous les faisceaux obtenus en joignant le centre d'une circonférence aux points où quatre tangentes *fixes* sont coupées par une tangente *mobile* sont homographiques. Le rapport anharmonique des quatre points d'intersection des tangentes *fixes* avec la tangente *mobile* est donc constant, et on l'appelle *le rapport anharmonique des quatre tangentes fixes.*

338. *Le rapport anharmonique de quatre tangentes à une circonférence est égal à celui de leurs quatre points de contact.*

En effet, si l'on mène à la circonférence une cinquième tangente, le rapport anharmonique du faisceau formé par les rayons menés du centre aux points d'intersection des quatre premières tangentes avec la cinquième est le rapport anharmonique des quatre premières tangentes (337); d'autre part, le rapport anharmonique du faisceau formé en joignant le point de contact de la cinquième tangente avec les points de contact des quatre premières est le rapport anharmonique de ces quatre points de contact (336). D'ailleurs, les deux faisceaux considérés ayant leurs rayons perpendiculaires sont homographiques (335). L'énoncé est donc justifié.

339. Soient deux droites divisées par un certain nombre de points *qui se correspondent un à un*, de manière que le rapport anharmonique de quatre points quelconques de l'une soit égal au rapport anharmonique des quatre points *correspondants* de l'autre. On dit que ces deux droites sont *divisées homographiquement*, ou que les points considérés sur elles forment *deux divisions homographiques.*

Il est clair que, si l'on joint deux centres quelconques aux points *correspondants* de deux divisions homographiques, on forme nécessairement deux faisceaux homographiques (335), où les rayons *se correspondent un à un* comme les points des deux divisions.

THÉORÈME.

340. *Deux divisions homographiques sont déterminées par trois couples de points correspondants.*

Supposons que les deux droites L et L′ présentent les trois

couples de points correspondants (a, a'), (b, b'), (c, c'). Il s'agit de déterminer les points d', e', f', g' de la seconde droite, qui correspondent homographiquement aux points donnés d, e, f, g de la première. Le rapport anharmonique des trois points a', b', c' et d'un quatrième d', ou e', ou f', ou g', doit être alors égal au rapport anharmonique des quatre points a, b, c, d, ou a, b, c, e, ou a, b, c, f, ou a, b, c, g.

Cette condition étant remplie (329), les deux droites L et L' seront divisées homographiquement, c'est-à-dire que le rapport anharmonique de quatre points quelconques d, e, f, g de L sera égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants d', e', f', g' de L'.

En effet, transportons L', *de manière à faire coïncider les deux points correspondants a et a'*, L' faisant d'ailleurs un angle quelconque avec L. Les deux rapports anharmoniques $(abcd)$ et $(ab'c'd')$ étant égaux par construction, les droites bb', cc', dd' concourront en un même point O (332), par lequel passeront également les droites ee', ff', gg', en raison de l'égalité respective des rapports anharmoniques $(abce)$ et $(ab'c'e')$, $(abcf)$ et $(ab'c'f')$, $(abcg)$ et $(ab'c'g')$. On aura donc nécessairement (330)

$$(defg) = (d'e'f'g').$$

COROLLAIRE.

341. *Deux faisceaux homographiques sont déterminés par trois couples de rayons correspondants* (339).

PROBLÈME.

342. *Deux droites* L *et* L' *étant divisées homographiquement, déterminer sur la première droite le point qui correspond au point situé à l'infini sur la seconde droite, et réciproquement.*

Soient les points correspondants a, b, c, d, ... et a, b', c', d', ... sur les deux droites.

Géométriquement, il suffit de transporter la droite L' parallèlement à elle-même, de manière que les points correspondants a et a' coïncident. Les droites bb', cc', dd', ..., concourront alors en un même point O (332), et formeront, avec Oa, un faisceau homographique. En menant par O une parallèle à L', on obtiendra le rayon correspondant au

point situé à l'infini sur L′, et ce rayon coupera L au point correspondant I.

De même, en menant par O une parallèle à L, on obtiendra le rayon correspondant au point situé à l'infini sur L, et ce rayon coupera L′ au point correspondant J′.

Par le calcul, les trois rapports anharmoniques directs des deux divisions étant égaux deux à deux et se déduisant les uns des autres (326, 327), il suffit, en considérant les mêmes points correspondants, de poser

$$(cdab) = (c'd'a'b'),$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}.$$

Si le point b' passe à l'infini, cette égalité devient, en remplaçant b par I et en regardant le rapport $\frac{b'c'}{b'd'}$ de deux distances infinies comptées sur la même droite comme égal à l'unité (190),

$$(\alpha) \qquad \frac{ac}{ad} \cdot \frac{\mathrm{I}d}{\mathrm{I}c} = \frac{a'c'}{a'd'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{I}c}{\mathrm{I}d} = \frac{ac}{ad} : \frac{a'c'}{a'd'},$$

ce qui détermine le point I (136).

De même, si le point b de L passe à l'infini et si l'on désigne spécialement par J′ le point b' qui lui correspond sur L′, on a, en partant encore de l'égalité (1) et en remplaçant b' par J′,

$$(\alpha') \qquad \frac{ac}{ad} = \frac{a'c'}{a'd'} \cdot \frac{\mathrm{J}'d'}{\mathrm{J}'c'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{J}'c'}{\mathrm{J}'d'} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{ac}{ad},$$

ce qui détermine le point J′.

Les relations (α) et (α') restent évidemment applicables, lorsque les deux divisions homographiques considérées sont distribuées sur une même droite (344).

343. On voit que donner un point I ou J′ correspondant de l'infini revient à donner deux points correspondants b et b' situés à distance finie.

C'est ce qui résulte des relations (α) et (α') qui permettent: soit de trouver d', lorsqu'on donne un point quelconque d de la première division, en même temps que les deux couples de points correspondants (a, a'), (c, c') et I; soit de trouver d,

lorsqu'on donne un point quelconque d' de la seconde division, en même temps que les deux couples de points correspondants (a', a), (c', c) et J' (340).

III. — Divisions homographiques de même base. Points doubles.

344. Les deux droites L et L' divisées homographiquement peuvent se confondre. On a alors deux divisions homographiques situées sur une même droite ou deux divisions homographiques *de même base*.

On appelle alors *point double* des deux divisions tout point de l'une d'elles, qui est à lui-même son correspondant sur l'autre.

THÉORÈME.

345. *Deux divisions homographiques de même base qui ont trois points doubles coïncident.*

En effet, désignons par a, b, c, les trois points doubles, et par (m, m') un couple quelconque de points correspondants : on aura

$$(abcm) = (abcm'),$$

ce qui exige que les points m et m' coïncident.

Tous les points des deux divisions étant doubles, elles n'en forment qu'une seule.

COROLLAIRE.

346. *Lorsque deux divisions homographiques de même base sont distinctes, elles ne peuvent présenter que deux points doubles.*

PROBLÈME.

347. *Étant données deux divisions homographiques de même base, supposées distinctes, déterminer leurs points doubles.*

Nous prendrons pour *origine* le point a de la première division.

Il s'agit de trouver la condition pour qu'un point d de la première division soit *double*, c'est-à-dire pour qu'il coïncide avec son correspondant d' sur la seconde division.

Considérons à cet effet la relation (α) du n° 342

$$\frac{ac}{ad}\cdot\frac{Id}{Ic} = \frac{a'c'}{a'\mathcal{J}'},$$

obtenue en supposant b' à l'infini et b remplacé par I, et supposons que le point c de la première division passe à son tour à l'infini. Son correspondant c' sur la seconde division sera alors J', et l'on aura évidemment, le rapport $\frac{ac}{\mathrm{I}c}$ devenant égal à l'unité, la relation

$$(\beta) \qquad \frac{\mathrm{I}d}{ad} = \frac{a'\mathrm{J}'}{a'd'} = \frac{a'\mathrm{J}'}{a'd},$$

si d est un point *double*.

En tenant compte des signes des segments, on peut alors écrire d'une manière générale

$$\mathrm{I}d = ad - a\mathrm{I}, \quad a'd = ad - aa', \quad a'\mathrm{J}' = a\mathrm{J}' - aa'.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (β), il vient

$$\frac{ad - a\mathrm{I}}{ad} = \frac{a\mathrm{J}' - aa'}{ad - aa'},$$

c'est-à-dire

$$(ad - a\mathrm{I})(ad - aa') = (a\mathrm{J}' - aa')ad,$$

ou, en effectuant et en simplifiant,

$$(\gamma) \qquad \overline{ad}^2 - (a\mathrm{I} + a\mathrm{J}')ad + a\mathrm{I}.aa' = 0.$$

Si O est le milieu de la distance IJ' qui sépare les points correspondants de l'infini sur les deux divisions, on a nécessairement

$$\mathrm{OJ}' = -\mathrm{OI},$$

c'est-à-dire

$$-a\mathrm{O} + a\mathrm{J}' = -a\mathrm{I} + a\mathrm{O}.$$

Il en résulte

$$a\mathrm{I} + a\mathrm{J}' = 2a\mathrm{O} \quad \text{ou} \quad a\mathrm{O} = \frac{a\mathrm{I} + a\mathrm{J}'}{2}.$$

L'équation (γ) devient ainsi finalement

$$(\delta) \qquad \overline{ad}^2 - 2a\mathrm{O}.ad + a\mathrm{I}.aa' = 0.$$

L'équation (δ) qui détermine le point d cherché étant du second degré, il y a *deux points doubles, réels ou imaginaires*. La somme et le produit de leurs distances à l'*origine a* demeurent *constants* dans les deux cas, la somme de ces distances étant toujours $2a\mathrm{O}$ et, leur produit, $a\mathrm{I}.aa'$.

On peut d'ailleurs construire très facilement les deux points

doubles quand ils sont réels, à l'aide de la remarque suivante.

L'origine a étant arbitraire, on peut placer cette origine sur la première division au point O, milieu de la distance IJ'. On a alors

$$aO = o \quad \text{et} \quad aI = OI = -OJ'.$$

Si O' est alors, sur la deuxième division, le correspondant de O, le point a' correspondant de a devient O' correspondant de O, et l'équation (δ) prend la forme

$$(\delta_1) \qquad \overline{Od}^2 - OJ'.OO' = o,$$

d'où

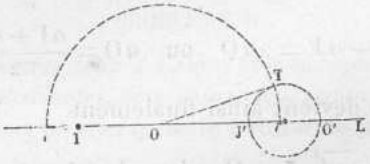
$$Od = \pm\sqrt{OJ'.OO'}.$$

Les deux points doubles représentés par cette double valeur de Od, et que nous désignerons par e et f, sont donc placés sur la base de part et d'autre du point O et à égale distance de ce point.

Les points doubles sont *imaginaires,* lorsque les segments OJ' et OO' sont de *signes contraires,* c'est-à-dire lorsque les points O' et J' sont de part et d'autre du point O.

Les points doubles sont *réels,* lorsque les segments OJ' et OO' sont de *même signe,* c'est-à-dire lorsque les points O' et J' sont d'un même côté du point O. Dans ce cas, on n'a (187) qu'à mener par le point O une tangente OT au cercle décrit sur O'J' comme diamètre, et à rabattre cette tangente sur la base en Oe et en Of, pour obtenir les deux points doubles en e et en f (*fig.* 202).

Fig. 202.



Si l'on a $OO' = o$, le point O devient un point double. Comme on a en même temps $Od = o$, *les points doubles e et f coïncident* alors *au point* O.

348. Deux faisceaux homographiques de même centre déterminent, sur une transversale quelconque, deux divisions homographiques de même base.

Ces faisceaux ont toujours deux *rayons doubles* (c'est-à-dire tels que chacun d'eux, considéré comme appartenant au premier faisceau, coïncide avec son correspondant dans le second faisceau), et on les obtient en joignant le centre commun des faisceaux aux *points doubles* des deux divisions qu'ils déterminent sur la transversale considérée. Ces rayons doubles peuvent donc être eux-mêmes *réels ou imaginaires*.

349. Soient les quatre points a, b, c, d et leurs correspondants a', b', c', d' sur deux divisions homographiques de même base. On a, par définition,

$$(cdab) = (c'd'a'b'),$$

c'est-à-dire

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}.$$

Admettons que les points c et c' se confondent et deviennent le premier point double e et, de même, que les points d et d' se confondent et deviennent le second point double f. Il viendra

$$\frac{ae}{af} : \frac{be}{bf} = \frac{a'e}{a'f} : \frac{b'e}{b'f},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f} = \frac{be}{bf} : \frac{b'e}{b'f} = \text{const.},$$

quels que soient les points correspondants a et a' dont on prenne les distances aux points doubles.

En désignant par k une constante appropriée, on peut donc écrire

$$\frac{ae}{a'e} = k\,\frac{af}{a'f}.$$

350. Supposons que l'un des points doubles f passe à l'infini. La relation précédente donne, dans cette hypothèse,

$$\frac{ae}{a'e} = \frac{be}{b'e} = k,$$

ou bien (t. I, *Arithm.*, 392),

$$\frac{ae - be}{a'e - b'e} = \frac{ab}{a'b'} = k.$$

Les segments correspondants des deux divisions homogra-

phiques sont alors proportionnels, et l'on dit que les deux divisions sont *semblables*. La relation (β) du n° 347 montre que, dans ce cas, le point double d ou f s'éloignant à l'infini, il en est de même de J' qui est, sur la seconde division, le correspondant du point à l'infini sur la première.

On peut dire, d'après cela, que deux droites quelconques divisées en parties proportionnelles sont divisées homographiquement, avec cette condition que les points à l'infini sur les deux droites sont des points correspondants.

Si les deux points doubles e et f passent à la fois à l'infini, la constante k devient égale à l'unité, et l'on a

$$ab = a'b'.$$

On dit alors que les deux divisions sont *égales et de même sens*.

Enfin, si le point double f passant seul à l'infini, on a

$$k = -1,$$

les deux divisions sont *égales et de sens contraires*. En même temps,

$$ae = -a'e, \quad be = -b'e, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire que *le second point double e est*, dans ce cas, *le milieu de tous les segments* aa', bb', ..., *formés par deux points correspondants quelconques* (1).

(1) Lorsque deux divisions homographiques de même base ont leurs points doubles *imaginaires*, ces divisions et les faisceaux homographiques de même centre qu'on peut élever sur elles jouissent de propriétés particulières. Nous renverrons, pour l'exposé de ces propriétés, au *Traité de Géométrie* par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition (1891)

CHAPITRE IV.

PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE.

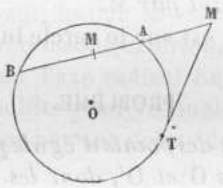
I. — Axe radical et centre radical.

351. Soient un cercle O et un point M pris dans son plan (*fig.* 203). Si l'on mène la sécante MAB au cercle, on a (180)

$$MA.MB = \text{constante},$$

quelle que soit la direction de la sécante.

Fig. 203.



Steiner a donné à ce produit constant, qui est positif *ou* négatif, suivant que le point M est extérieur *ou* intérieur au cercle, le nom de *puissance du point* M *par rapport au cercle* O.

Si l'on considère spécialement la sécante passant par le centre du cercle, on a, en désignant par R son rayon et en supposant d'abord le point M *extérieur*,

$$MA = MO - R, \qquad MB = MO + R,$$

d'où (t. I, *Alg. élém.*, 30)

$$MA.MB = \overline{MO}^2 - R^2.$$

Si le point M est *intérieur*, on a, *en valeur absolue*,

$$MA = R - MO, \qquad MB = R + MO,$$

c'est-à-dire, puisque les segments MA et MB sont ici *de sens opposés*,

$$MA.MB = -(R^2 - \overline{MO}^2) = \overline{MO}^2 - R^2.$$

On peut donc dire que *la puissance d'un point par rapport à un cercle est toujours représentée, en grandeur et en signe, par l'excès du carré de la distance du point considéré au centre du cercle sur le carré du rayon.*

Lorsque le point M est *extérieur* au cercle, on a (181), en menant la tangente MT,

$$MA.MB = \overline{MT}^2.$$

La puissance d'un point extérieur M *est* donc encore *représentée par le carré de la tangente menée de ce point au cercle.*

Lorsque le point M est *intérieur*, on peut mener par M une corde perpendiculaire à la sécante déterminée par ce point et le centre du cercle (c'est la plus petite corde passant par M), et le produit MA.MB ou *la puissance du point* M *est* alors (167), *en valeur absolue, égal au carré de la moitié de la corde minimum passant par* M.

Lorsque le point M est sur le cercle lui-même, sa puissance est nulle.

PROBLÈME.

352. *Trouver le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles donnés* O *et* O', *dont les rayons sont* R *et* R'.

Pour que M soit un point du lieu, il faut qu'on ait (351), en supposant $R > R'$,

$$\overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2,$$

c'est-à-dire

$$\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2.$$

Le lieu cherché n'est, par suite, autre chose que le lieu des points dont la différence des carrés des distances aux centres O et O' est égale à la différence constante des carrés des rayons. Ce lieu est donc (177) une perpendiculaire à la droite des centres OO', plus voisine du centre du plus petit cercle O', et dont la distance au milieu de OO' est égale à

$$\frac{R^2 - R'^2}{2OO'}.$$

Gaultier (de Tours) [*Journal de l'École Polytechnique*, XVI^e Cahier] a donné à cette droite le nom d'*axe radical des deux cercles*.

SCOLIE.

353. Tout point commun à deux cercles appartient à leur axe radical; car il a des puissances nulles, c'est-à-dire égales, par rapport aux deux cercles. Réciproquement, tout point de l'axe radical qui appartient à l'un des cercles appartient nécessairement à l'autre.

Il en résulte que *l'axe radical de deux cercles qui se coupent se confond avec leur corde commune*, et que *l'axe radical de deux cercles qui se touchent est leur tangente commune*.

Lorsque les deux cercles n'ont aucun point commun, leur axe radical leur est extérieur à tous deux.

Le carré de la tangente menée d'un point extérieur à un cercle représentant sa puissance par rapport au cercle (351), *le lieu des points d'où l'on peut mener des tangentes égales à deux cercles donnés est leur axe radical*, pris dans toute son étendue, lorsque les deux cercles n'ont aucun point commun. Si ces cercles se coupent, le lieu se compose seulement des parties de l'axe radical qui sont extérieures aux deux cercles. La partie intérieure de l'axe radical ou la corde commune est alors le lieu des points pour lesquels les cordes de plus petite longueur menées par ces points dans les deux cercles sont égales (351).

THÉORÈME.

354. *L'axe radical de deux cercles est équidistant des polaires par rapport à ces cercles de l'un quelconque de leurs centres de similitude.*

Soit S l'un des deux centres d'homothétie ou de similitude directe ou inverse (162) des cercles donnés, dont les centres sont O et O' et, les rayons, R et R'. Soient L et P, P' les pieds sur OO' de l'axe radical et des deux polaires de S par rapport aux cercles donnés (318).

On a, pour la distance de l'axe radical au centre O, en supposant $R > R'$ (352),

$$OL = \frac{OO'}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2OO'}.$$

On peut écrire, d'après la détermination du centre de simi-

litude S (162),

$$\frac{OS}{R} = \frac{O'S}{R'} = \frac{OO'}{R - R'}.$$

Enfin, les propriétés des polaires donnent (318)

$$OP = \frac{R^2}{OS}, \qquad O'P' = \frac{R'^2}{O'S}.$$

En tenant compte de ces relations et en partant de l'identité

$$\frac{R^2 - R'^2}{OO'} = \frac{R(R - R')}{OO'} + \frac{R'(R - R')}{OO'},$$

il vient

$$\frac{R^2 - R'^2}{OO'} = \frac{R^2}{OS} + \frac{R'^2}{O'S} = OP + O'P',$$

c'est-à-dire

$$OL = \frac{OP + OO' + O'P'}{2} = \frac{OP + OP'}{2} = OP + \frac{PP'}{2}.$$

L'énoncé est donc justifié.

Ce théorème est d'ailleurs évident, lorsque S est extérieur aux deux cercles; car les polaires de S sont alors les cordes de contact des tangentes communes menées par S aux deux cercles, tandis que l'axe radical joint les milieux de ces tangentes communes (353).

COROLLAIRE.

355. *L'axe radical d'un cercle* O *et d'un point* O' *est parallèle à la polaire de ce point par rapport au cercle et équidistant de ce point et de sa polaire.*

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème qu'on vient d'établir, en supposant que le second cercle O' se réduise à son centre.

En faisant $R' = 0$ dans les relations précédentes, on a

$$OL = \frac{\overline{OO'}^2 + R^2}{2OO'}.$$

Le centre de similitude S se confondant évidemment dans ce cas avec le point O', on a aussi

$$OP = \frac{R^2}{OO'},$$

P étant sur OO′ le pied de la polaire de O′ par rapport au cercle O.

Il en résulte

$$PO' = OO' - OP = \frac{\overline{OO'}^2 - R^2}{OO'}$$

et

$$PL = OL - OP = \frac{\overline{OO'}^2 - R^2}{2OO'} = \frac{PO'}{2},$$

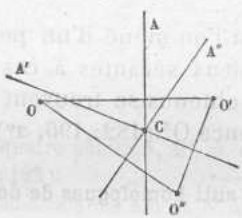
ce qui justifie l'énoncé.

THÉORÈME.

356. *Les axes radicaux de trois cercles considérés deux à deux se coupent en un même point* (*fig.* 204).

Soient trois cercles O, O′, O″ n'ayant pas leurs centres en ligne droite; soient A, A′, A″ les axes radicaux de ces cercles pris deux à deux.

Fig. 204.



Les axes radicaux A et A′, étant perpendiculaires (352) à deux droites OO′ et O′O″ qui se coupent, se rencontrent eux-mêmes en un point C. Ce point, étant alors d'égale puissance par rapport aux trois cercles donnés, appartient à l'axe radical A″ des deux cercles O″ et O.

Le point C, ainsi commun aux trois axes radicaux, est appelé le *centre radical* des trois cercles donnés.

Si les centres O, O′, O″ sont en ligne droite, le centre radical passe à l'infini ou est indéterminé, suivant que les axes radicaux des cercles O et O′, O′ et O″ sont parallèles ou coïncident.

COROLLAIRE.

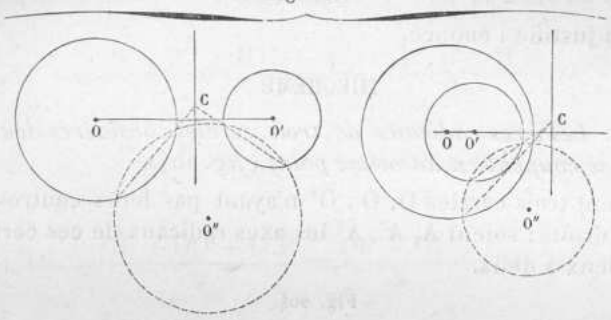
357. *Si les trois cercles proposés se coupent deux à deux, leurs cordes communes se croisent en leur centre radical* (353).

On peut se servir de cette remarque pour construire facile-

ment l'axe radical de deux cercles O et O′, extérieurs ou intérieurs.

Il suffit (*fig.* 205) de les couper par un troisième cercle quelconque O″. Les cordes communes à ce cercle et aux deux cercles donnés se couperont au centre radical C des trois cercles et, en abaissant de ce point une perpendiculaire sur la droite OO′, on obtiendra l'axe radical cherché.

Fig. 205.



Réciproquement, si l'on mène d'un point de l'axe radical des cercles O et O′ deux sécantes à ces cercles, les quatre points d'intersection obtenus se trouvent nécessairement sur une même circonférence O″ (182; 196, 2°).

II. — Points anti-homologues de deux cercles.

358. Soient (*fig.* 206) deux cercles O et O′. Considérons un de leurs centres de similitude; par exemple, le centre de similitude directe S. Une sécante issue de S coupant les deux cercles en quatre points M, N, M′, N′, les points M et M′ sont des points *homologues* par rapport au centre S, puisque les rayons OM et O′M′ sont parallèles (162); de même, les points N et N′ sont homologues.

Quant aux points M et N′ ou N et M′, on les appelle *points anti-homologues*.

Menons une autre sécante S*mnm′n′*. Les cordes telles que M*n* et N′*m*′, qui joignent respectivement deux points quelconques du premier cercle et leurs points anti-homologues sur le second cercle, sont dites *cordes anti-homologues*.

THÉORÈME.

359. *Deux cercles étant donnés, le produit des distances de l'un quelconque de leurs centres de similitude à deux points anti-homologues est constant; deux couples de points anti-homologues appartiennent à une même circonférence; deux cordes anti-homologues se coupent sur l'axe radical des deux cercles donnés* (*fig.* 206).

Soient R et R′ les rayons des deux cercles et p la puissance du point S par rapport au cercle O. On a (351, 162)

$$SM.SN = p \qquad \text{et} \qquad \frac{SM}{SM'} = \frac{SN}{SN'} = \frac{R}{R'}.$$

En divisant la première égalité par la seconde, il vient d'abord

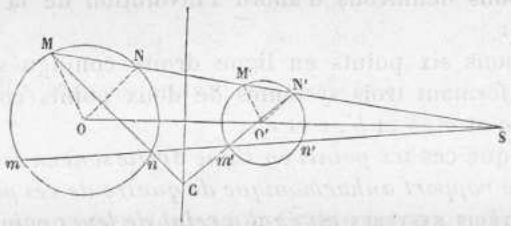
$$SN.SM' = SM.SN' = p.\frac{R'}{R} = \text{const.}$$

Si l'on considère une autre sécante $Smnm'n'$, on aura donc, par exemple,

$$SM.SN' = Sn.Sm' \qquad \text{et} \qquad SN.SM' = Sm.Sn'.$$

Par suite, les quatre points M, N′, n, m' appartiennent à une même

Fig. 206.



circonférence O″, et les quatre points N, M′, m, n', appartiennent à une même circonférence O‴ (182).

Enfin, les cordes anti-homologues Mn et N′m' étant respectivement les axes radicaux des cercles O et O″ et des cercles O′ et O″, leur point d'intersection C est le centre radical des trois cercles O, O′, O″ et, par conséquent, se trouve sur l'axe radical des deux cercles O et O′.

Cette dernière propriété prise à la limite montre que les tangentes en deux points anti-homologues, M et N′, des deux cercles se croisent sur leur axe radical.

CHAPITRE V.

DE L'INVOLUTION (1).

I. — Propriétés fondamentales.

360. Nous définirons d'abord l'involution de la manière suivante :

Supposons six points en ligne droite conjugués deux à deux ou formant trois systèmes de deux points conjugués, tels que a et a', b et b', c et c'.

On dit que ces *six points en ligne droite sont en involution, lorsque le rapport anharmonique de quatre de ces points* PRIS DANS LES TROIS SYSTÈMES *est égal à celui de leurs points conjugués;* par exemple, si l'on a (325)

$$(abcc') = (a'b'c'c).$$

Pour que cette définition soit admissible, il faut prouver que *si la condition indiquée est vérifiée pour une combinaison convenable de quatre des six points considérés, elle sera également satisfaite pour toute autre combinaison analogue.*

Les seules combinaisons possibles de quatre points pris dans les trois systèmes réuniront évidemment, d'une manière quelconque, deux points sans accent et deux points accentués (première forme); ou bien trois points sans accent avec un seul point accentué, et réciproquement (seconde forme).

D'ailleurs, il suffit d'examiner, pour chaque combinaison,

(1) La Théorie de l'involution est due au célèbre géomètre Desargues (1593-1663). On en trouve des cas particuliers dans les *Collections* de Pappus. Chasles a beaucoup étendu et perfectionné cette Théorie (*Aperçu historique*, p. 317; *Traité de Géométrie supérieure*).

un seul des rapports anharmoniques qu'on peut former avec les quatre points choisis (326, 327).

Cela posé, prenons une combinaison telle que c, a, c', b et admettons qu'on ait, d'après la définition adoptée,

$$(\alpha) \qquad (cac'b) = (c'a'cb').$$

Il s'agit de démontrer qu'il en sera de même pour toute autre combinaison de quatre points pris dans les trois systèmes et comparés à leurs conjugués.

D'après ce qui précède, on peut changer dans la première combinaison c' ou c en a' (ou en b'), ou bien a en a' (ou b en b').

Changeons c' en a'. Il faut alors prouver qu'on a

$$(caa'b) = (c'a'ab')$$

ou

$$\frac{a'c}{a'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{ac'}{aa'} : \frac{b'c'}{b'a'}.$$

Or, l'égalité conventionnelle (α) revient à

$$\frac{c'c}{c'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{cc'}{ca'} : \frac{b'c'}{b'a'}.$$

On peut supprimer dans cette égalité les deux facteurs $c'c$ et cc', qui ne diffèrent que par le signe, et les remplacer respectivement par les facteurs $a'a$ et aa' qui remplissent la même condition. Il vient ainsi

$$\frac{a'a}{c'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{aa'}{ca'} : \frac{b'c'}{b'a'},$$

c'est-à-dire, précisément,

$$\frac{a'c}{a'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{ac'}{aa'} : \frac{b'c'}{b'a'}.$$

On passe ainsi de la combinaison de seconde forme, prise pour point de départ, à une autre combinaison de seconde forme.

Changeons maintenant b en b' dans la même combinaison c, a, c', b. Il faut prouver qu'on aura encore

$$(cac'b') = (c'a'cb)$$

ou (325)

$$\frac{b'c'}{b'c} : \frac{ac'}{ac} = \frac{bc}{bc'} : \frac{a'c}{a'c'}.$$

L'égalité conventionnelle (α) revient aussi à

$$\frac{bc'}{bc} : \frac{ac'}{ac} = \frac{b'c}{b'c'} : \frac{a'c}{a'c'};$$

ce qui donne précisément, comme il est facile de le voir, l'égalité précédente.

On passe ainsi de la combinaison de seconde forme prise pour point de départ à une autre combinaison de première forme, et la définition adoptée est complètement justifiée.

361. Nous venons de vérifier (360) l'égalité

$$\frac{b'c'}{b'c} : \frac{ac'}{ac} = \frac{bc}{bc'} : \frac{a'c}{a'c'},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{b'c'.ac}{b'c.ac'} = \frac{bc.a'c'}{bc'.a'c} \quad \text{ou, encore,} \quad \frac{ca.ca'}{cb.cb'} = \frac{c'a'.c'a}{c'b'.c'b}.$$

On obtiendra, par symétrie, les deux autres formules

$$\frac{bc.bc'}{ba.ba'} = \frac{b'c'.b'c}{b'a'.b'a}, \qquad \frac{ab.ab'}{ac.ac'} = \frac{a'b'.a'b}{a'c'.a'c}.$$

Nous avons pu poser (360)

$$\frac{c'c}{c'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{cc'}{ca'} : \frac{b'c'}{b'a'};$$

ce qui revient, en tenant compte des signes et en simplifiant, à

$$\frac{c'c.ba}{c'a.bc} = -\frac{c'c.b'a'}{ca'.b'c'}$$

ou à

$$ab.a'c.b'c' + a'b'.ac'.bc = 0.$$

Cette relation est facile à retenir. En associant respectivement b et c à a et à a', on obtient les deux premiers facteurs du premier terme, le troisième facteur étant formé des mêmes lettres b et c accentuées. Quant au second terme, on le déduit du premier, en remplaçant les différentes lettres par leurs conjuguées.

On aura, par symétrie, les deux égalités suivantes :

$$bc.b'a.c'a' + b'c'.ba'.ca = 0,$$
$$ca.c'b.a'b' + c'a'.cb'.ab = 0.$$

Enfin, s'il y a involution, on a

$$(acb'c') = (a'c'bc),$$

c'est-à-dire (325)

$$\frac{ab'}{ac'} : \frac{cb'}{cc'} = \frac{a'b}{a'c} : \frac{c'b}{c'c}.$$

Cette égalité revient à

$$\frac{ab'}{ac'.cb'} = -\frac{a'b}{a'c.c'b}$$

ou à

$$ac'.cb'.ba' + a'c.c'b.b'a = 0.$$

Cette relation étant d'elle-même symétrique, restera seule de son espèce. Elle est aussi facile à retenir.

362. En résumé, *toutes les fois que trois systèmes de deux points conjugués a et a', b et b', c et c' sont en involution, on a* (361) *les sept équations suivantes :*

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{ab.ab'}{ac.ac'} = \dfrac{a'b'.a'b}{a'c'.a'c}, \\ \dfrac{bc.bc'}{ba.ba'} = \dfrac{b'c'.b'c}{b'a'.b'a}, \\ \dfrac{ca.ca'}{cb.cb'} = \dfrac{c'a'.c'a}{c'b'.c'b}. \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} ab.a'c.b'c' + a'b'.ac'.bc = 0, \\ bc.b'a.c'a' + b'c'.ba'.ca = 0, \\ ca.c'b.a'b' + c'a'.cb'.ab = 0. \end{cases}$$

$$(3)\qquad ac'.cb'.ba' + a'c.c'b.b'a = 0.$$

Réciproquement, *chacune de ces sept équations,* revenant à l'égalité du rapport anharmonique de quatre des six points considérés et de celui de leurs points conjugués, *exprime que les six points dont il s'agit sont en involution et entraîne, par conséquent, les six autres équations* (360).

On voit que, si l'on donne deux des trois couples de points conjugués, tels que (a, a') et (b, b'), on peut prendre arbitrairement le point c du troisième couple et déterminer son conjugué c' à l'aide de l'une des sept équations précédentes.

Comme cas particuliers, les relations d'involution auront lieu *entre cinq points seulement,* quand le point c' passera à l'infini ou lorsqu'il coïncidera avec son conjugué c.

THÉORÈME

363. *Quand trois systèmes de deux points conjugués* (a, a'), (b, b'), (c, c') *forment une involution, si deux autres points conjugués* (d, d') *forment une involution avec les deux premiers couples* (a, a'), (b, b'), *ils formeront aussi une involution avec le troisième couple* (c, c') *et l'un des deux premiers.*

En effet, supposons qu'on ait, par hypothèse, les deux égalités

$$(bb'ac) = (b'ba'c') \quad \text{et} \quad (bb'ad) = (b'ba'd'),$$

c'est-à-dire

$$\frac{ab}{ab'} : \frac{cb}{cb'} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{c'b'}{c'b} \quad \text{et} \quad \frac{ab}{ab'} : \frac{db}{db'} = \frac{a'b'}{a'b} : \frac{d'b'}{d'b}.$$

Il en résulte évidemment

$$\frac{cb}{cb'} : \frac{db}{db'} = \frac{c'b'}{c'b} : \frac{d'b'}{d'b} \quad \text{ou} \quad (bb'cd) = (b'bc'd').$$

Les trois couples (b, b'), (c, c'), (d, d') forment donc une involution.

Ce théorème montre que *la propriété involutive peut être étendue à un nombre quelconque de couples de deux points conjugués, ces couples étant combinés successivement trois à trois.* On dit alors que ces couples, toujours situés sur une même droite, sont en involution.

II. — Point central.

364. Soient, en nombre quelconque (363), des couples (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), ..., en involution. En écrivant, par exemple, que le couple quelconque (d, d') est en involution avec les deux premiers (a, a') et (b, b'), on aura

$$(abdd') = (a'b'd'd) \quad \text{ou} \quad \frac{da}{db} : \frac{d'a}{d'b} = \frac{d'a'}{d'b'} : \frac{da'}{db'}.$$

Si l'on suppose alors que d' passe à l'infini, et si l'on désigne par O le conjugué d de d', il viendra

$$\frac{Oa}{Ob} = 1 : \frac{Oa'}{Ob'} = \frac{Ob'}{Oa'},$$

c'est-à-dire

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'.$$

En remplaçant le couple (b, b') par le couple (c, c') ou par tout autre, on aurait de même

$$Oa \cdot Oa' = Oc \cdot Oc'.$$

Il en résulte que, étant donné un nombre quelconque de couples de points conjugués (a, a'), (b, b'), (c, c'), ..., situés sur une même droite L et formant une involution, on peut toujours trouver sur cette droite un point O tel qu'on ait

$$(1) \quad Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob' = Oc \cdot Oc' = \ldots = \text{const.} = K.$$

Le point O prend alors le nom de *point central de l'involution,* dont la droite L est la *base* et K la *constante.*

Réciproquement, si trois des couples de points conjugués considérés satisfont à la relation (1), tous ces couples pris trois à trois sont en involution.

En effet, si le sixième point c' ne formait pas une involution avec les cinq premiers points a, a', b, b', c, on pourrait toujours déterminer un point c'' remplissant cette condition (362), et l'on aurait alors à la fois

$$Oa \cdot Oa' = Oc \cdot Oc' = Oc \cdot Oc'',$$

c'est-à-dire

$$Oc' = Oc'',$$

ce qui exige la coïncidence de c' avec c''. Les six points a, a', b, b', c, c', sont donc nécessairement en involution.

365. La propriété du *point central* O permet de donner de l'involution une seconde définition (360) très simple et qui fait image.

La relation (1) du numéro précédent est, en effet, susceptible d'une importante interprétation géométrique.

Soient les trois couples (a, a'), (b, b'), (c, c'); décrivons trois circonférences sur les segments aa', bb', cc', comme diamètres. La relation

$$(1) \qquad Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob' = Oc \cdot Oc'$$

montre que le point O est d'*égale puissance* (351) par rapport aux trois circonférences, de sorte qu'il appartient aux trois axes radicaux de ces circonférences prises deux à deux (352). Ces axes radicaux étant d'ailleurs perpendiculaires à la base L de l'involution se confondent, et le point central O est le point

d'intersection de l'axe radical de deux quelconques des trois circonférences avec la base L.

Réciproquement, si trois circonférences ayant leurs centres sur une même droite L ont même axe radical, les extrémités de leurs diamètres sur L sont en involution (364).

En définitive, *des couples de points conjugués situés sur une même droite sont en involution, lorsqu'on peut trouver sur cette droite un point qui soit d'égale puissance par rapport à chaque couple,* c'est-à-dire satisfasse à la relation (1).

Voici des conséquences immédiates de cette nouvelle définition.

1° *Si, sur les deux segments aa' et bb', on décrit deux circonférences* quelconques, *leur corde commune passe par le point central* O.

En effet, p étant l'un des points d'intersection de ces deux circonférences, la droite Op les coupera respectivement en deux autres points p' et p'', et l'on aura (351)

$$Op.Op' = Oa.Oa', \qquad Op.Op'' = Ob.Ob'.$$

Il en résulte

$$Op' = Op'',$$

et les points p' et p'' coïncident. La droite Op se confond donc avec la corde commune des deux circonférences.

On en déduit cette autre proposition :

2° *Si, sur les trois segments aa', bb', cc', on décrit trois circonférences* quelconques, *mais passant par un même point, ces circonférences ont une corde commune passant par le point central* O.

3° Remarquons encore que si les trois circonférences décrites sur les trois segments *aa', bb', cc', comme diamètres,* se coupent effectivement, les droites menées respectivement de l'une des extrémités de la corde commune aux extrémités de chaque segment sont rectangulaires.

Les points d'intersection des trois circonférences peuvent être imaginaires. Elles n'ont plus alors de corde commune, mais elles ont toujours même axe radical.

Par suite, *lorsque les extrémités de trois segments en ligne droite forment une involution, il existe deux points* (réels ou imaginaires) *de chacun desquels on aperçoit les trois segments sous un angle droit;* et, réciproquement, *les extrémités des segments déterminés sur une droite fixe par trois positions*

quelconques d'un angle droit tournant autour de son sommet sont en involution.

366. Deux couples de points conjugués (a, a'), (b, b') suffisent pour déterminer le point central. Sa construction résulte de ce qui précède (365).

Si les deux segments aa' et bb' *empiètent* l'un sur l'autre, c'est-à-dire si chacun d'eux comprend une *seule* extrémité de l'autre, on décrira sur les deux segments comme diamètres deux cercles dont la corde commune coupera la base de l'involution au point central O.

Si les deux segments n'empiètent pas l'un sur l'autre, c'est-à-dire s'ils sont *intérieurs* ou *extérieurs* l'un à l'autre, on prendra un point p hors de la droite ab, et l'on fera passer respectivement deux circonférences par les trois points a, b, p et par les trois points a', b', p. La corde commune de ces deux circonférences coupera la droite ab au point central O.

III. — Points doubles.

367. On appelle *point double* d'une involution tout point e de la base L qui est à lui-même son conjugué. Pour qu'un tel point existe, il faut qu'on ait (364, 365)

$$(1) \qquad Oa.Oa' = Ob.Ob' = Oc.Oc' = \ldots = \overline{Oe}^2 = K.$$

Il en résulte

$$Oe = \pm\sqrt{K}.$$

Si K est *positif*, il y a deux points doubles e et f, situés de part et d'autre du point central O, à une distance égale à $\sqrt{K}$.

Si K est *négatif*, ces deux points doubles deviennent imaginaires.

Lorsque les points doubles e et f sont réels, le point central O est le milieu de ef.

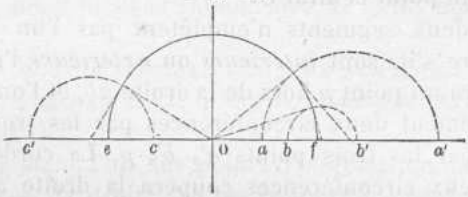
Par suite, d'après la relation (1), ces points doubles sont les conjugués harmoniques des extrémités de tous les segments aa', bb', cc', ..., ou divisent harmoniquement tous ces segments (303).

On voit par là que le point central O ne peut alors jamais être compris entre deux points conjugués de l'involution (302). Les segments déterminés par ces points conjugués sont donc, comme aa' et bb' (*fig.* 207), d'un même côté de O et, alors, d'après la relation (1), *compris l'un dans l'autre;* ou bien,

comme aa' et cc', situés de part et d'autre du point O et, alors, *extérieurs l'un à l'autre;* et, dans les deux cas, les circonférences décrites sur les segments en involution comme diamètres ne se coupent pas (365, 3°).

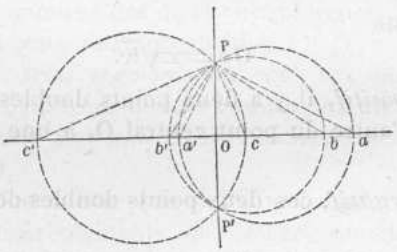
Il est clair, d'après la même relation (1), que, si l'on décrit des circonférences de cercle sur les segments aa', bb', cc', ... comme diamètres, Oe et Of seront représentées par la longueur constante des tangentes menées du point O à ces circonférences (181).

Fig. 207.



Si K *est négatif,* les différents produits $Oa.Oa'$, $Ob.Ob'$, $Oc.Oc'$, ... sont négatifs. Le point central O est alors compris entre deux points conjugués quelconques de l'involution ; et il s'ensuit, d'après la relation (1), que les segments déterminés par les points conjugués empiètent (366) tous les uns sur les autres (*fig.* 208).

Fig. 208.



Les cercles décrits sur ces différents segments comme diamètres ont alors une corde commune PP', perpendiculaire à la base L de l'involution au point central O, et qui est l'axe radical commun de tous ces cercles pris deux à deux. On a d'ailleurs

$$OP.OP' = -\overline{OP}^2 = Oa.Oa' = Ob.Ob' = \ldots = K,$$

c'est-à-dire

$$OP = \sqrt{-K},$$

quantité réelle, puisque K est ici négatif.

Une involution de cette espèce étant donnée (362) par deux couples de points conjugués (a, a'), (b, b'), tels que les segments aa' et bb' empiètent l'un sur l'autre, les circonférences décrites sur aa' et bb' comme diamètres détermineront la corde PP′ et, par suite, le point central O, projection de P ou de P′ sur la base de l'involution. Il suffira alors de faire pivoter un angle droit autour du point P pris comme sommet de cet angle droit, pour obtenir par les rencontres de ses côtés avec la base L tous les couples de points conjugués.

THÉORÈME.

368. *Les points doubles e, f, de l'involution déterminée par les deux couples de points conjugués* (a, a'), (b, b'), *sont aussi en involution avec les deux couples* (a, b'), (a', b).

En effet, les points e et f étant les conjugués harmoniques des extrémités des segments aa' et bb' (367), on a

$$\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{be}{bf} : \frac{b'e}{b'f} = -1.$$

Il en résulte évidemment

$$\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f} = \frac{b'f}{b'e} : \frac{bf}{be},$$

c'est-à-dire (325)

$$(efaa') = (feb'b).$$

Les quatre points e, f, a, a' ont donc leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points f, e, b', b. Par suite, les trois couples (a, b'), (a', b), (e, f) sont en involution (360).

IV. — Faisceaux en involution.

369. Six droites partant d'un même point et conjuguées deux à deux sont en involution ou forment un faisceau involutif, lorsque quatre droites, *prises dans les trois couples,* ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre droites conjuguées (360).

Un pareil faisceau jouit évidemment (330) de la propriété de rencontrer une droite quelconque en six points en involution. Par suite, toutes les relations applicables à ces points et démontrées précédemment (361) se trouvent transportées par cela même aux six droites.

En particulier (334), les six droites du faisceau conjuguées deux à deux, formant les couples (A, A'), (B, B'), (C, C'), auront entre les sinus de leurs angles des relations telles que (362)

$$\frac{\sin(A, B)\sin(A, B')}{\sin(A, C)\sin(A, C')} = \frac{\sin(A', B')\sin(A', B)}{\sin(A', C')\sin(A', C)},$$

$$\sin(A, B)\sin(A', C)\sin(B', C') + \sin(A', B')\sin(A, C')\sin(B, C) = 0.$$

Ces relations sont au nombre de sept, chacune entraîne les six autres et suffit pour définir l'involution du faisceau des six droites.

De même qu'on a étendu la propriété involutive à un nombre quelconque de couples de points conjugués situés sur une même droite, en les combinant successivement trois à trois (363), on peut considérer des faisceaux en involution formés d'un nombre quelconque de couples de droites conjuguées partant d'un même point, et combinées également trois à trois. Un pareil faisceau déterminera sur une droite quelconque des couples de points en involution, en même nombre que les couples de droites conjuguées.

Aux deux points doubles, réels ou imaginaires, de ce système de points (367), correspondront dans le faisceau *deux rayons doubles,* réels ou imaginaires. *Ces deux rayons,* quand ils existent, *forment un faisceau harmonique avec deux rayons conjugués quelconques* (367, 306).

THÉORÈME.

370. *Dans tout faisceau en involution, il existe un couple de rayons conjugués rectangulaires.*

En effet, si l'on coupe un pareil faisceau par une transversale quelconque L, on obtient sur cette transversale des couples de points conjugués en involution, tels que (a, a'), (b, b'), (c, c'), ... Et, si l'on décrit des circonférences sur les segments aa', bb', cc', ..., comme diamètres, ces circonférences prises deux à deux ont même axe radical (365). On peut alors distinguer deux cas.

Si les points doubles de l'involution rectiligne (ou les rayons doubles du faisceau) sont *réels,* l'axe radical commun OM est *extérieur* à toutes ces circonférences (367). Soit alors ω le centre du faisceau. Joignons le point central O de l'involution rectiligne au point ω, et déterminons sur la

droite $O\omega$ un point x tel qu'on ait

$$Oa.Oa' = O\omega.Ox.$$

Si l'on élève une perpendiculaire sur le milieu de ωx, et si cette perpendiculaire coupe L en un point C, l'axe radical de la circonférence ayant pour centre C et passant par le point ω de la circonférence aa' sera encore OM, et les extrémités du diamètre de la circonférence $C\omega$ qui est situé sur L seront des points conjugués de l'involution rectiligne. Or, en joignant ces points à ω, on déterminera un angle droit, c'est-à-dire un couple de rayons conjugués rectangulaires du faisceau involutif donné.

Si les points doubles de l'involution (ou les rayons doubles du faisceau) sont *imaginaires*, les circonférences décrites sur les segments aa', bb', cc', ..., comme diamètres, se coupent toutes suivant une même corde qui est leur axe radical commun (367). En faisant passer une circonférence par les extrémités de cette corde et le centre ω du faisceau, et en joignant ω aux extrémités du diamètre de cette circonférence qui est situé sur L, on aura encore un couple de rayons conjugués rectangulaires du faisceau donné.

D'ailleurs, *si, dans un faisceau involutif de centre* ω, *on considère six rayons en involution, et si deux des trois couples sont formés de rayons conjugués rectangulaires, il en sera de même du troisième couple.*

En effet, la transversale L coupera alors ces six rayons suivant les couples de points conjugués en involution (a, a'), (b, b'), (c, c'), et si l'on décrit deux circonférences sur les segments aa' et bb' qui répondent aux rayons conjugués rectangulaires, comme diamètres, ces circonférences passeront toutes deux par le point ω. Elles auront donc une corde commune qui sera leur axe radical et dont l'une des extrémités sera le centre ω du faisceau. Ce même axe radical étant celui de la circonférence aa' et de la circonférence décrite sur le troisième segment cc' comme diamètre, cette circonférence passera également par ω, et le troisième couple de rayons conjugués sera aussi rectangulaire.

Il en résulte évidemment (369) que, *lorsqu'un faisceau involutif possède plus d'un couple de rayons conjugués rectangulaires, tous les couples de rayons conjugués sont rectangulaires, et* que *ce cas ne peut se présenter que quand les rayons doubles du faisceau sont imaginaires* (367).

V. — Divisions et faisceaux homographiques en involution.

371. Considérons sur une même droite L des couples de points conjugués en involution (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), ...

Il est facile de voir que *ces points font partie de deux divisions homographiques de même base* L (335, 344), *et qui sont telles que chaque point de la base regardé successivement comme appartenant aux deux divisions a toujours le même point correspondant sur l'autre division.*

Prenons, par exemple, les trois couples (a, a'), (b, b'), (c, c') en involution. Le rapport anharmonique des quatre points a, a', b, c sera égal au rapport anharmonique des quatre points conjugués a', a, b', c'.

Or, les trois points a, a', b et leurs conjugués a', a, b' pris comme correspondants déterminent deux divisions homographiques (340); et, si l'on désigne par m et m' deux points correspondants quelconques de ces deux divisions, on aura

$$(aa'bm) = (a'ab'm').$$

Mais, par hypothèse,

$$(aa'bc) = (a'ab'c').$$

Par conséquent, si m coïncide avec c, son correspondant m' coïncidera avec c'.

Les points conjugués (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), ..., de l'involution font donc partie des deux divisions homographiques indiquées qui, dès lors, sont en involution.

En outre, la relation $(aa'bm) = (a'ab'm')$ pouvant s'écrire à la fois (325)

$$\frac{ma}{ma'} : \frac{ba}{ba'} = \frac{m'a'}{m'a} : \frac{b'a'}{b'a},$$

$$\frac{m'a}{m'a'} : \frac{ba}{ba'} = \frac{ma'}{ma} : \frac{b'a'}{b'a},$$

et la seconde expression revenant à $(aa'b'm') = (a'ab'm)$, on voit que, si l'on regarde m comme appartenant à la première division, son correspondant sur la seconde est m'; et que, si l'on regarde m comme appartenant à la seconde division, son correspondant sur la première est encore m'.

Réciproquement, *deux divisions homographiques de même base* L *forment une involution, lorsqu'un point regardé suc-*

cessivement comme appartenant aux deux divisions a toujours le même point correspondant sur l'autre division.

Soient a, b, c trois points de la première division, et a', b', c' leurs correspondants sur la seconde division. Nous admettons que le point c, regardé comme appartenant à la seconde division, a encore comme correspondant sur la première le point c'. Il est facile de voir que les deux divisions sont en involution et que la propriété dont jouit le point c existe pour tout autre point, le point a par exemple.

En effet, les quatre points a, b, c, c', regardés comme appartenant à la première division, ont, par hypothèse, comme correspondants sur la seconde, les points a', b', c', c. Les rapports anharmoniques de ces deux séries de quatre points sont donc égaux et, par suite, les trois couples de points conjugués (a, a'), (b, b'), (c, c') sont en involution (360); ce qui entraîne, d'après la proposition directe, l'involution des deux divisions. Mais alors on a

$$(aa'bc) = (a'ab'c');$$

et le point a, regardé comme appartenant à la seconde division, a encore pour correspondant dans la première le point a'.

Deux divisions homographiques en involution ont la même généralité que deux divisions homographiques quelconques, et les relations qui existent entre trois couples de deux points conjugués dans les divisions homographiques en involution dépendent seulement de la manière dont ces divisions, de même base, peuvent être placées l'une par rapport à l'autre.

Considérons, en particulier, le point situé à l'infini sur l'une des deux divisions. Il faudra qu'il ait le même point correspondant sur l'une et sur l'autre, c'est-à-dire que les points I et J', correspondants de l'infini sur les deux divisions (342), devront coïncider entre eux.

Ainsi, *dans deux divisions homographiques en involution, les deux points correspondants de l'infini se réunissent en un même point, qui est le point central de l'involution* (365).

372. En joignant un même point ou centre aux points correspondants de deux divisions homographiques en involution, on obtient deux faisceaux homographiques en involution qui jouissent des mêmes propriétés (369).

Il résulte de ce qui précède (371) que toute droite regardée

successivement comme rayon appartenant aux deux faisceaux a toujours le même rayon correspondant dans l'autre faisceau.

Par exemple, si deux faisceaux ont même centre et sont formés par des droites respectivement perpendiculaires, ils sont à la fois homographiques et en involution (335, 371); car chaque rayon, regardé successivement comme appartenant aux deux faisceaux, a toujours pour correspondant dans l'autre le rayon qui lui est perpendiculaire.

Deux faisceaux homographiques en involution présentent toujours un système de deux rayons conjugués rectangulaires et, s'ils en présentent plus d'un, tous les systèmes de rayons conjugués des deux faisceaux sont rectangulaires. Dans ce dernier cas, les rayons doubles des deux faisceaux sont imaginaires (370).

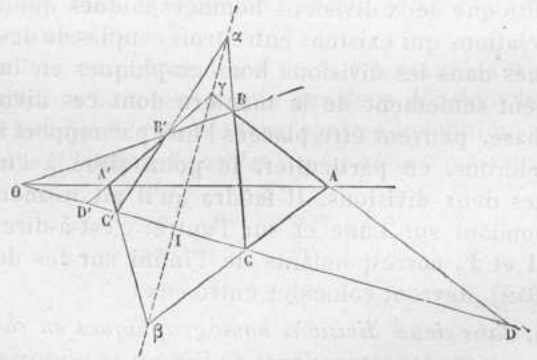
VI. — Applications de l'homographie et de l'involution.

TRIANGLES HOMOLOGIQUES.

THÉORÈME.

373. *Quand deux triangles* ABC, A'B'C', *ont leurs sommets situés deux à deux sur trois droites concourantes* OAA', OBB', OCC', *leurs côtés se rencontrent deux à deux en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite* (*fig.* 209).

Fig. 209.



La droite OCC' étant coupée par les deux côtés AB et A'B' en D et en D', les droites Oγ, OB, OA, OC, forment un faisceau de quatre droites coupé par les deux transversales AB et A'B' suivant le même rapport anharmonique (330). On a donc

$$(\gamma BAD) = (\gamma B'A'D').$$

Les deux faisceaux formés sur ces deux systèmes rectilignes de quatre

points, l'un de centre C sur γBAD, l'autre de centre C' sur γB'A'D', ont alors même rapport anharmonique et un rayon homologue commun DD'. Les trois points d'intersection α, β, γ, des autres rayons correspondants pris deux à deux (CB et C'B', CA et C'A', Cγ et C'γ) sont donc en ligne droite (333).

RÉCIPROQUEMENT, *quand les côtés de deux triangles* ABC, A'B'C', *se coupent respectivement en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite, leurs sommets appartiennent deux à deux à trois droites concourantes* (*fig.* 209).

Soit I le point où la droite $\alpha\beta\gamma$ coupe la droite CC'. Les deux faisceaux, l'un de centre C, l'autre de centre C', formés sur le système rectiligne de quatre points $\alpha\gamma$Iβ, ont même rapport anharmonique. En les coupant respectivement par les droites AB et A'B', on aura donc (330)

$$(\gamma BAD) = (\gamma B'A'D').$$

Or, ces deux systèmes rectilignes qui ont même rapport anharmonique, ont aussi un point homologue commun γ. Les droites BB', AA', DD' ou CC', qui joignent deux à deux les autres points homologues, concourent par suite en un même point O (332).

Les deux théorèmes précédents, attribués à *Desargues,* ont été repris par Poncelet, qui en a fait le point de départ de sa *Théorie des figures homologiques* (1). Il a donné au point O et à la droite $\alpha\beta\gamma$ les noms de *centre* et d'*axe d'homologie*. Les deux triangles ABC, A'B'C', sont dits *homologiques*.

PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES DU QUADRILATÈRE.

THÉORÈME.

374. *Toute transversale* L, *menée dans le plan d'un quadrilatère* ABCD, *rencontre ses côtés opposés et ses deux diagonales en six points* (a, a'), (b, b'), (c, c'), *qui sont en involution* (*fig.* 210).

En effet, les quatre droites AB, AC, Ac', AD, issues du sommet A, et les quatre droites CB, CA, Cc', CD, issues du sommet C, rencontrent la diagonale BD aux quatre mêmes points. Les deux faisceaux correspondants ont donc même rapport anharmonique (330) ou sont homographiques (333). Par suite, ces faisceaux rencontrent respectivement la transversale L en quatre points qui ont le même rapport anharmonique, et l'on a

$$(acb'c') = (bca'c').$$

Mais on peut échanger dans ce dernier rapport les deux groupes de points conjugués (326) et écrire, par suite,

$$(acb'c') = (a'c'bc).$$

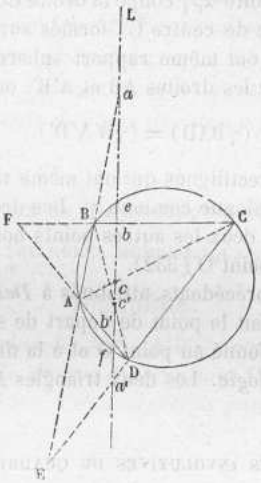
---

(1) *Traité des propriétés projectives des figures,* 2e édition, t. I, p. 85 et 154; 1865.

On en conclut (360) que les trois couples de points conjugués (a, a'), (b, b'), (c, c'), sont en involution.

On peut déduire de ce théorème la *construction du sixième point d'une involution dont on connaît les cinq premiers points.* En effet, étant donnés les deux couples de points conjugués (b, b') et (c, c') sur la droite L (*fig.* 210), ainsi que le point a, on n'a qu'à mener par ce point une droite quelconque aE sur laquelle on prendra arbitrairement les points A et B. Les droites Bb et Ac se couperont en C, et les droites

Fig. 210.



Bc' et Ab' se couperont en D. La droite CD coupera L au point cherché a'.

COROLLAIRES.

373. *Les six droites menées d'un point quelconque* O *du plan d'un quadrilatère complet* ABCDEF *à ses six sommets forment un faisceau involutif* (*fig.* 210).

Soit O le point quelconque choisi dans le plan du quadrilatère complet, et considérons le quadrilatère OAFB dont les diagonales sont OF et AB. Les côtés opposés et les diagonales de ce quadrilatère déterminent sur la transversale CD six points en involution. Donc, les droites OA et OC, OB et OD, OE et OF, qui passent par ces six points, forment un faisceau involutif.

Considérons maintenant le quadrilatère ABCD (*fig.* 210), et décrivons deux circonférences sur ses diagonales AC et BD comme diamètres. Plaçons alors le point O en l'un des points d'intersection de ces deux circonférences. Les couples de rayons conjugués OA et OC, OB et OD, seront alors rectangulaires. Par suite, le troisième couple OE et OF du faisceau involutif indiqué ci-dessus le sera aussi (370), et la circonfé-

rence décrite sur EF comme diamètre passera par les points d'intersection des deux circonférences décrites sur les diagonales AC et BD.

Il en résulte que *les circonférences décrites sur les diagonales d'un quadrilatère complet* ABCDEF *comme diamètres, se coupent aux deux mêmes points;* ce qui prouve en même temps que *les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite* (297).

THÉORÈME.

376. *Une transversale quelconque* L *rencontre les côtés opposés d'un quadrilatère* ABCD *inscrit dans une circonférence et cette circonférence elle-même suivant trois couples de points* (a, a'), (b, b'), (e, f), *qui sont en involution* (*fig.* 210).

En effet, les six points A, B, C, D, e, f, étant sur la circonférence circonscrite au quadrilatère, le faisceau des quatre droites AB, AD, Ae, Af, est homographique au faisceau des quatre droites CB, CD, Ce, Cf (335). Ces deux faisceaux traceront donc sur la transversale L deux divisions homographiques, qui auront pour points doubles les points e et f (344), et seront par suite en involution (371). D'ailleurs, AB et CB, AD et CD, étant des couples de rayons correspondants des deux faisceaux, les points a et b, b' et a', sont des couples de points correspondants des deux divisions; et il en résulte (368) que les trois couples (a, a'), (b, b'), (e, f) forment une involution.

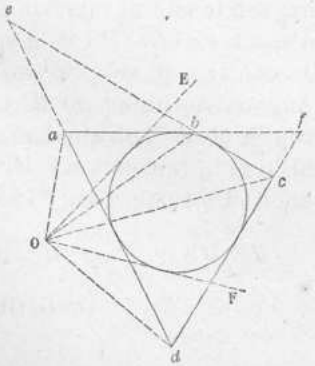
Cet important théorème est dû à Desargues, et on lui donne ordinairement son nom.

La proposition corrélative est la suivante.

THÉORÈME.

377. *Le quadrilatère abcd étant circonscrit à une circonférence, les quatre droites menées d'un point* O *pris dans le plan de cette circonférence aux sommets opposés du quadrilatère et les deux tangentes menées du même point à la circonférence forment un faisceau involutif* (*fig.* 211).

Fig. 211.



En effet, chacune des tangentes *ab* et *cd* est divisée homographique

ment par les quatre autres tangentes OE, OF, bc, ad (337). Les droites, menées du point O aux points correspondants de ces deux divisions homographiques, forment donc deux faisceaux homographiques dont OE et OF sont les rayons doubles et qui sont, par suite, en involution (369, 371). D'ailleurs, les points a et d, b et c, sont deux couples de points correspondants des deux divisions homographiques, de sorte que Oa et Od, Ob et Oc, sont deux couples de rayons correspondants des deux faisceaux. Il en résulte (369, 368) que les trois couples de rayons Oa et Oc, Od et Ob, OE et OF, forment un faisceau involutif.

CHAPITRE VI.

DE L'INVERSION

I. — Propriétés des figures inverses.

378. Définissons ce qu'on entend par deux figures *inverses*. Considérons dans un plan un point arbitraire S et des points quelconques A, B, C, ..., isolés ou disposés d'une manière continue. Désignons par μ une quantité quelconque, positive ou négative, et déterminons sur les rayons vecteurs SA, SB, SC, ..., issus du point S, les points A', B', C', ..., tels qu'on ait

$$SA.SA' = SB.SB' = SC.SC' = \ldots = \mu.$$

On dit que les deux systèmes ou les deux figures ABC ..., A'B'C' ..., sont *inverses* l'une de l'autre. S est l'*origine* et μ est la *puissance* de l'inversion. Si μ est positif, les points correspondants A et A', B et B', C et C', ..., sont situés d'un même côté de S; si μ est négatif, ces points correspondants sont situés de part et d'autre de l'origine.

379. Les figures inverses jouissent des propriétés suivantes :

1° *Deux figures* F' *et* F'', *inverses d'une même figure* F *par rapport à une même origine* S, *sont homothétiques.*

Soient, en effet, M un point quelconque de F, et M' et M'' les points correspondants de F' et de F'' qui sont situés sur la droite indéfinie SM. En appelant μ' et μ'' les puissances d'inversion de F' et de F'' par rapport à F, nous aurons (378)

$$SM.SM' = \mu', \qquad SM.SM'' = \mu'',$$

c'est-à-dire, par division,

$$\frac{SM'}{SM''} = \frac{\mu'}{\mu''}.$$

Les deux figures F' et F'' sont donc homothétiques (158). Leur centre d'homothétie est S et leur rapport d'homothétie est égal au rapport des puissances μ' et μ''.

2° *Dans deux figures inverses, la longueur d'une corde de la seconde figure est égale à la longueur de la corde correspondante de la première figure, multipliée par le rapport de la puissance d'inversion au produit des rayons vecteurs des extrémités de la corde de la première figure* (*fig.* 212).

En effet, considérons deux figures inverses F et F', l'origine étant S et la puissance de l'inversion étant μ.

Les points M et N de la figure F ayant M' et N' pour points correspondants sur la figure F', les deux cordes MN et M'N' sont correspondantes, et l'on a (378)

$$SM.SM' = SN.SN' = \mu.$$

Il en résulte que les triangles SMN, SM'N' sont semblables et que les cordes MN et M'N' sont anti-parallèles par rapport à l'angle MSN (148, 183). On en déduit

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{SN'}{SM} = \frac{SN'.SN}{SM.SN} = \frac{\mu}{SM.SN}$$

ou

$$M'N' = MN\,\frac{\mu}{SM.SN}.$$

3° *L'angle de deux lignes quelconques qui se coupent est égal à l'angle des deux lignes inverses* (*fig.* 212 *et* 213).

Fig. 212.

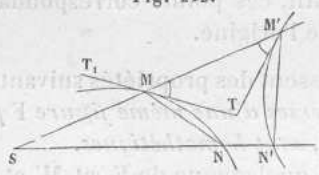
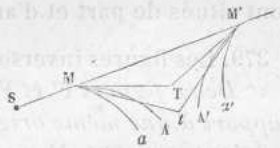


Fig. 213.



On sait qu'on appelle *angle de deux courbes* qui se coupent l'angle de leurs tangentes en leur point d'intersection.

Cela posé, considérons d'abord les deux courbes inverses MN et M'N' (*fig.* 212). Les cordes MN et M'N' étant, comme on vient de le voir, anti-parallèles relativement à l'angle MSN, l'angle SM'N' est égal à l'angle SNM. Or, à la limite de rapprochement des deux rayons vecteurs SNN' et SMM', le premier angle SM'N' devient l'angle SM'T formé par la tangente en M' à la seconde courbe avec le rayon vecteur SM' et *au-*

dessous de ce rayon; le second angle SNM devient l'angle SMT_1 formé par la tangente en M à la première courbe avec le même rayon vecteur, mais *au-dessus* de ce rayon.

En remplaçant l'angle SMT_1 par son opposé par le sommet, on voit que les tangentes en M et en M′ aux deux courbes forment des angles égaux avec le segment MM′, au-dessous de ce segment.

Considérons maintenant (*fig.* 213) deux courbes M*a* et MA qui se coupent en M, et les deux courbes inverses M′*a*′ et M′A′ qui se coupent en M′. Si l'on mène les tangentes M*t*, MT aux deux premières courbes et les tangentes M′*t*, M′T aux deux autres, on a, d'après ce qui précède,

$$tMM' = tM'M, \qquad TMM' = TM'M,$$

c'est-à-dire, en retranchant ces deux égalités membre à membre,

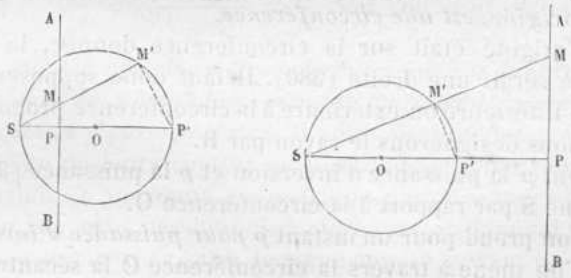
$$tMT = tM'T;$$

ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME.

380. *La figure inverse d'une ligne droite qui ne passe pas par l'origine est une circonférence passant par l'origine* (*fig.* 214).

Fig. 214.



Si la droite donnée passait par l'origine, elle serait à elle-même son inverse (378).

Soit donc la droite AB qui ne passe pas par l'origine S. Menons par cette origine les deux droites SM et SP, la seconde perpendiculaire à AB, et déterminons sur ces rayons vecteurs les inverses M′ et P′ des points M et P. Les droites MP et M′P′ étant anti-parallèles par rapport à l'angle MSP (379, 2°), l'angle SM′P′ doit être droit comme l'angle SPM. Par suite,

le lieu du point M′ ou la figure inverse de la droite AB est la circonférence décrite sur SP′ comme diamètre.

Réciproquement, *la figure inverse d'une circonférence passant par l'origine est une droite perpendiculaire au diamètre mené par l'origine* (*fig.* 214).

En effet, soit P l'inverse de l'extrémité P′ du diamètre SP′ et M l'inverse d'un point quelconque M′ de la circonférence. Les droites MP et M′P′ étant anti-parallèles par rapport à l'angle M′SP′, l'angle SPM doit être droit comme l'angle SM′P′. Le lieu des points M ou la figure inverse de la circonférence donnée est donc la perpendiculaire élevée par le point P sur le diamètre SP′.

On a (*fig.* 214), en grandeur et en signe, la relation

$$SP.SP' = \mu \quad \text{ou} \quad SP.2SO = \mu.$$

Elle montre qu'*une droite* AB *et une circonférence* O, *situées dans le même plan, peuvent toujours être regardées comme des figures inverses l'une de l'autre.* Il suffit de prendre pour origine S l'une des extrémités du diamètre de cette circonférence qui est perpendiculaire à AB, et d'admettre pour la puissance μ la valeur ci-dessus.

THÉORÈME.

381. *La figure inverse d'une circonférence qui ne passe pas par l'origine, est une circonférence.*

Si l'origine était sur la circonférence donnée, la figure inverse serait une droite (380). Il faut donc supposer l'origine S intérieure ou extérieure à la circonférence proposée O, dont nous désignerons le rayon par R.

Soient μ la puissance d'inversion et p la puissance (351) de l'origine S par rapport à la circonférence O.

Si l'on prend pour un instant p *pour puissance d'inversion,* et si l'on mène à travers la circonférence O la sécante SMN, on a (351)

$$SM.SN = p,$$

de sorte que tout point M de la circonférence O a alors pour inverse le point N où le rayon vecteur SM rencontre une seconde fois la circonférence, et que cette circonférence est à elle-même son inverse.

La figure inverse cherchée est, par suite, homothétique à la circonférence O (379, 1°), et elle est elle-même une cir-

conférence. Le centre d'homothétie des deux circonférences est l'origine S et leur rapport d'homothétie est égal à $\frac{\mu}{p}$.

Si l'on appelle O′ et R′ le centre et le rayon de la seconde circonférence, on a (162)

$$(\alpha) \qquad \frac{SO'}{SO} = \frac{\mu}{p} = \pm \frac{R'}{R},$$

suivant que l'homothétie est directe ou inverse.

Reportons-nous à la théorie des points anti-homologues de deux circonférences. On sait (358, 359) que ces points satisfont à la condition

$$SM.SN' = SN.SM' = p\frac{R'}{R}.$$

On a donc, d'après la relation (α),

$$SM.SN' = SN.SM' = \mu.$$

Les points anti-homologues sont donc en même temps des points inverses, et il résulte de ce rapprochement que *les tangentes aux points correspondants de deux circonférences inverses se coupent sur l'axe radical de ces deux circonférences* (359).

Si p' est la puissance de l'origine par rapport à la circonférence O′, on a d'ailleurs (351) et d'après la relation (α)

$$\frac{p'}{p} = \frac{SO'^2 - R'^2}{SO^2 - R^2} = \frac{\mu^2}{p^2} \quad \text{ou} \quad pp' = \mu^2;$$

ce qui montre que *deux circonférences quelconques* O *et* O′, *situées dans le même plan, peuvent toujours être regardées comme deux figures inverses.* Il suffit de prendre pour origine S l'un de leurs centres de similitude et, pour puissance d'inversion, la moyenne géométrique des puissances p et p' de S par rapport à ces deux circonférences, en donnant à cette moyenne le signe de p ou le signe opposé suivant que S est un centre de similitude externe ou interne.

II. — Méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques.

382. On donne encore à la figure inverse d'une figure donnée le nom de *transformée* de cette figure *par rayons vecteurs réciproques.* En effet, les rayons vecteurs correspondants des deux figures sont formés l'un par rapport à l'autre

de la même manière, en divisant pour chacun d'eux la puissance d'inversion par l'autre rayon. Ils peuvent donc être appelés *réciproques*.

Il est clair qu'en construisant la figure inverse de celle qui représente un théorème connu, on obtiendra nécessairement une nouvelle proposition applicable à la figure inverse. Cette méthode d'investigation constitue donc un précieux moyen de recherche.

Par exemple, quel nouveau théorème répond à celui-ci : *Dans tout triangle rectiligne, la somme des angles est égale à deux angles droits?*

Dans la figure inverse, on aura, au lieu des côtés du triangle rectiligne, des arcs de cercle se coupant tous à l'origine (380). D'ailleurs, la transformation effectuée n'altère pas les angles (379, 3°), et l'angle de deux courbes est l'angle de leurs tangentes en leur point d'intersection. On a donc cet énoncé : *Dans tout triangle curviligne formé par des arcs de cercle se croisant en un même point, la somme des angles est égale à deux angles droits.*

Cette indication sommaire suffit pour montrer de quelle manière on peut appliquer ce procédé fécond (1).

III. — Applications.

PROPRIÉTÉS DU QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE.

THÉORÈME.

383. *Dans tout quadrilatère inscriptible convexe, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, et le rapport de ces mêmes diagonales est représenté par celui des sommes des produits des côtés qui aboutissent à leurs extrémités.*

La première partie de cette importante proposition est attribuée à Ptolémée (125 ap. J.-C.) qui l'a donnée dans son *Almageste*.

Nous allons la démontrer élégamment à l'aide de la théorie des figures inverses.

Soit un quadrilatère inscriptible convexe SABC (*fig.* 215). Les quatre sommets se trouveront sur une circonférence O. Si l'on prend le sommet S pour origine, la transformée de la figure par rayons vecteurs

(1) On trouvera d'autres détails intéressants sur les propriétés des figures inverses et sur la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques dans le *Traité de Géométrie*, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition, 1891.

réciproques (382) sera une droite A'B'C' perpendiculaire au diamètre SO passant par l'origine (380).

Les points A', B', C', qui correspondent aux sommets A, B, C, étant en ligne droite, on a, d'après leur ordre de succession,

$$A'C' = A'B' + B'C'.$$

Mais (379, 2°)

$$A'C' = AC\,\frac{\mu}{SA.SC}, \quad A'B' = AB\,\frac{\mu}{SA.SB}, \quad B'C' = BC\,\frac{\mu}{SB.SC}.$$

En substituant ces valeurs dans l'identité précédente et en supprimant le facteur commun μ, il vient

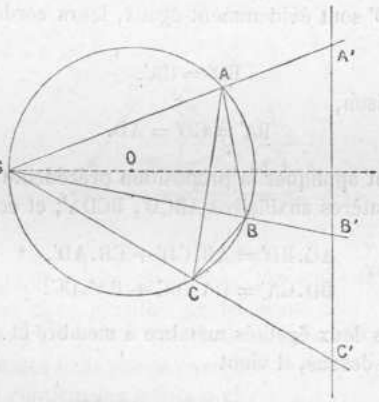
$$(\alpha) \qquad \frac{AC}{SA.SC} = \frac{AB}{SA.SB} + \frac{BC}{SB.SC},$$

c'est-à-dire, en multipliant les deux membres par le produit SA.SB.SC,

$$(1) \qquad AC.SB = AB.SC + BC.SA;$$

ce qui justifie la première partie de l'énoncé.

Fig. 215.



RÉCIPROQUEMENT, *si un quadrilatère convexe* SABC *satisfait à la relation* (1), *il est inscriptible* (*fig.* 215).

Transformons la figure SABC par rayons vecteurs réciproques, en prenant le sommet S pour origine et μ pour puissance d'inversion. Les points A', B', C' seront sur la figure inverse les correspondants des sommets A, B, C.

Mais la relation (1), en divisant ses deux membres par le produit SA.SB.SC, ramène à la relation (α), et celle-ci, en multipliant ses deux membres par μ, reproduit la relation

$$A'C' = A'B' + B'C',$$

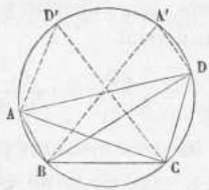
qui prouve que les trois points A', B', C', sont en ligne droite (35).

La figure inverse étant une droite, les points A, B, C, de la figure directe appartiennent à une circonférence O passant par l'origine S (380), et le quadrilatère SABC est inscriptible.

Passons à la seconde partie du théorème, qui dépend immédiatement de la première, et cherchons l'expression du rapport des diagonales d'un quadrilatère inscriptible.

Considérons (*fig.* 216) un quadrilatère convexe inscrit ABCD. Pre-

Fig. 216.



nons sur le cercle circonscrit l'arc DA' égal à l'arc AB et l'arc AD' égal à l'arc CD : les cordes correspondantes seront égales, et nous pourrons former ainsi deux autres quadrilatères inscrits ABCD' et BCDA'. Les arcs CDA' et BAD' sont évidemment égaux, leurs cordes sont égales et l'on a

$$BD' = CA'.$$

Pour la même raison,

$$BA' = CD' = AD.$$

Cela posé, on peut appliquer la proposition précédente ou la relation (1) aux deux quadrilatères auxiliaires ABCD', BCDA', et écrire

$$AC.BD' = AB.CD' + CB.AD',$$
$$BD.CA' = DA'.BC + BA'.DC.$$

En divisant ces deux égalités membre à membre et en tenant compte des conditions ci-dessus, il vient

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + CB.CD}{BA.BC + DA.DC}; \tag{2}$$

ce qui justifie la seconde partie de l'énoncé.

Ce théorème permet de calculer les deux diagonales d'un quadrilatère inscriptible, quand on connaît ses quatre côtés.

Posons, en effet,

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad AC = x, \quad BD = y.$$

Nous aurons, en substituant dans les relations (1) et (2),

$$xy = ac + bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Il en résulte, par multiplication et par division,

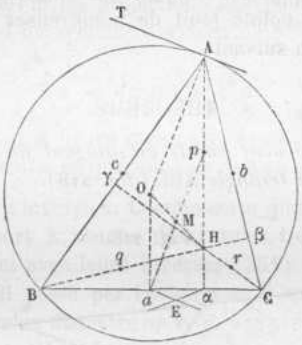
$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}, \quad y^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

CERCLE DES NEUF POINTS.

THÉORÈME.

384. *Soient* O *le centre du cercle circonscrit à un triangle* ABC *et* M *le milieu de la droite qui joint le point* O *au point de concours* H *des trois hauteurs du triangle : le cercle, dit des neuf points, qui a pour centre le point* M *et pour rayon la moitié du rayon* OA *du cercle circonscrit, passe par les milieux* a, b, c, *des côtés du triangle, par les pieds* α, β, γ, *de ses hauteurs et par les milieux* p, q, r, *des distances du point* H *aux sommets du triangle* (*fig.* 217).

Fig. 217.



En effet, la droite Mp joint les milieux des côtés HO et HA du triangle OHA. Elle est donc parallèle au troisième côté OA et égale à sa moitié ou à la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Par suite, le cercle des neuf points passe par le point p, et l'on prouverait de même qu'il contient les points q et r.

On sait (81) que les hauteurs du triangle ABC se confondent avec les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un second triangle MNP obtenu en menant par les sommets du triangle ABC des parallèles aux côtés qui leur sont opposés. Les triangles MNP et ABC sont donc semblables (151) et leur rapport de similitude est égal à 2. Il s'ensuit que la droite AH, considérée comme liée au triangle MNP, est double de la droite Oa qui est son homologue dans le triangle ABC. Les droites Oa et Ap sont donc égales et parallèles. Il en résulte que pa est égale et parallèle à OA et passe par le point M (70, 50), qui est alors le milieu de pa. Le cercle des neuf points passe donc par le point a, et l'on prouverait de même qu'il contient les points b et c.

Enfin, l'angle $p\alpha a$ étant droit et pa étant un diamètre du cercle des

neuf points, ce cercle passe par le point α, et l'on prouverait de même qu'il contient les points β et γ.

Cette curieuse proposition est due à EULER.

On peut déterminer facilement *a priori* les *tangentes* menées *au cercle des neuf points par les neuf points indiqués*.

La tangente aE au point a est perpendiculaire au rayon Ma ou à sa parallèle OA. Elle est donc parallèle à la tangente AT menée par le sommet A au cercle circonscrit au triangle ABC. De plus, les angles TAB et ACB ayant la même mesure, cette tangente AT est anti-parallèle au côté BC par rapport à l'angle BAC. Il en est donc de même de la tangente aE. On construira d'une manière analogue les tangentes au cercle des neuf points en b et en c.

Au point p, la tangente est parallèle à aE. De même, aux points q et r, les tangentes seront parallèles aux tangentes en b et en c.

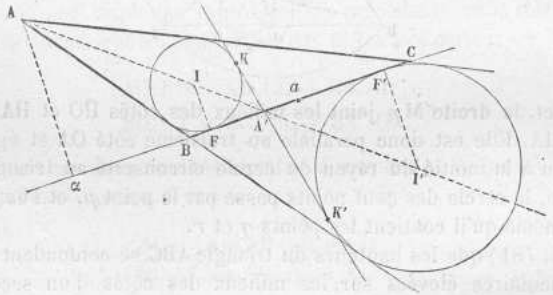
Enfin, le triangle aMα étant isocèle, la tangente αE en α fait avec la direction CB le même angle que la tangente aE fait avec la direction BC. On construira d'une manière analogue les tangentes aux points β et γ.

Le cercle des neuf points jouit de nombreuses propriétés. Nous démontrerons encore la suivante.

THÉORÈME.

383. *Le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits au triangle* ABC (*fig.* 218).

Fig. 218.



On peut établir cette proposition due à Feuerbach par le calcul. Mais il est plus simple et plus élégant d'avoir recours à la théorie des figures inverses.

Désignons par I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et par I' le centre du cercle ex-inscrit compris dans l'angle BAC.

Le côté BC est une tangente commune aux cercles I et I' aux points F et F', et son milieu a est aussi le milieu de la distance FF' des points de contact.

En effet, si l'on représente par p le demi-périmètre du triangle ABC,

on a (130)

$$BF = p - AC, \quad BF' = p - AB,$$

d'où

$$BF + BF' = 2BF + FF' = 2p - AC - AB = BC,$$

c'est-à-dire

$$BF + \frac{FF'}{2} = \frac{BC}{2} = Ba.$$

La seconde tangente commune intérieure KK' aux deux cercles I et I' passe par le point A' où la première BC rencontre la droite II', bissectrice de l'angle BAC, et les deux tangentes BC et KK' sont également inclinées sur II' (129). Il en résulte évidemment que la tangente KK' est anti-parallèle à la tangente BC par rapport à l'angle BAC.

De plus, les points A et A' sont les centres de similitude des deux cercles I, I', et les quatre points I, I', A, A' sont harmoniques (162). Par suite, le rapport harmonique de quatre points en ligne droite restant projectif lors même que le centre de la projection concourante s'éloigne à l'infini (307), les projections des points considérés sur le côté BC forment aussi un système harmonique FF'αA'. On a donc (303)

$$\overline{Fa}^2 = a\alpha . aA' = \overline{F'a}^2. \tag{1}$$

Cela posé, cherchons la figure inverse du système des cercles I, I', et du cercle des neuf points, en plaçant l'origine au point a et en prenant $\overline{Fa}^2$ pour puissance d'inversion. Comme cette quantité est la puissance du point a par rapport à chacun des cercles I et I' (351), ces deux cercles se confondront avec leurs inverses (381). Quant au cercle des neuf points, puisqu'il passe par l'origine a, il aura pour inverse une droite perpendiculaire au diamètre ap (*fig.* 217), ou parallèle à aE ou à AT (*fig.* 217), c'est-à-dire (384) anti-parallèle au côté BC par rapport à l'angle BAC ou parallèle à la seconde tangente commune intérieure KK' aux cercles I et I'. D'ailleurs, cette droite passe par le point A' et se confond par suite avec la tangente KK' elle-même, puisque, en raison de l'égalité (1), le point A' est l'inverse du point α du cercle des neuf points.

L'inversion ne changeant pas les angles (379, 3°), et l'inverse KK' du cercle des neuf points touchant les cercles I et I' dans la figure inverse, le cercle des neuf points touche lui-même ces cercles dans la figure directe. On démontrerait d'une manière analogue qu'il touche les deux autres cercles ex-inscrits au triangle ABC.

INVERSEURS.

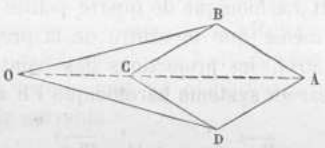
386. Dans la machine à vapeur à balancier de Watt, l'illustre ingénieur s'est servi du parallélogramme articulé qui porte son nom, pour lier très approximativement, mais non exactement, le mouvement circulaire alternatif de l'extrémité du balancier au mouvement rectiligne

alternatif de la tige du piston du cylindre à vapeur. C'est là l'origine du problème des *inverseurs*, qui a trouvé sa solution rigoureuse dans la théorie des figures inverses ou dans la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques.

On doit à M. le général Peaucellier la première application qui en ait été faite à cette importante question pratique. Nous indiquerons donc d'abord le dispositif proposé par lui et auquel on a donné le nom de *réciprocateur*.

Inverseur de Peaucellier. — Soit ABCD un losange *articulé*, c'est-à-dire formé de tiges rigides pouvant tourner librement autour des sommets A, B, C, D, de manière à modifier les angles du losange sans changer ses côtés. Soient, en outre, OB et OD deux autres tiges égales entre elles et articulées en O, B, D (*fig.* 219).

Fig. 219.



Il est clair que, lorsqu'on déforme le système quant aux angles, *le point* O *restant fixe*, les points A et C décrivent des figures inverses par rapport au point O considéré comme origine.

En effet, pour toute position du système, les points O, A, C resteront à égale distance des points B et D, c'est-à-dire sur une même ligne droite perpendiculaire au milieu de BD. Si l'on conçoit maintenant le cercle décrit du point B comme centre avec BA pour rayon, la puissance du point O par rapport à ce cercle, égale à $\overline{OB}^2 - \overline{BA}^2$ (331), demeurera constante. Mais cette puissance constante s'exprime également par le produit OC.OA. Les points A et C décrivent, par conséquent, pendant la déformation, des figures inverses.

D'après cela, si l'on assujettit le point C à décrire une circonférence passant par l'origine O, le point A décrira une droite perpendiculaire au diamètre de cette circonférence mené par l'origine O (380).

Il suffit, pour obtenir ce résultat, de relier le point C à un centre *fixe* ω par une tige rigide articulée ayant pour longueur la distance $O\omega$. Le point C décrira alors autour de ω une circonférence qui passera par O, et le point A se déplacera suivant une droite perpendiculaire à la direction $O\omega$. En reliant par une bielle l'extrémité du balancier à la tête de la tige du piston articulée en A, dirigée suivant la perpendiculaire que ce point doit décrire et soutenue par le système $O\omega CBAD$, la transmission du mouvement de la tige du piston au balancier n'entraînera aucune déviation latérale de la tige du piston.

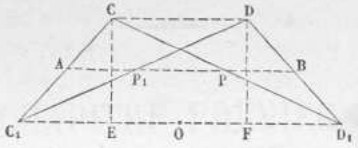
387. *Inverseur de Hart.* — L'inverseur de Peaucellier exige sept tiges, celui de M. Hart n'en demande que cinq.

Considérons dans un trapèze isocèle CC_1DD_1 les quatre tiges articulées CC_1 et DD_1, CD_1 et DC_1, formant les côtés égaux et les diagonales du trapèze (*fig.* 220).

Soient les points A, P_1, P, qui divisent les tiges CC_1, DC_1, CD_1, dans un même rapport. Il est facile de voir que, si le système se déforme, *le point* A *restant fixe*, les points P et P_1 décrivent des figures inverses par rapport au point A considéré comme origine.

En effet, dans toutes les positions du système, la figure CC_1DD_1 demeure un trapèze isocèle. D'ailleurs, en raison du rapport constant supposé, les couples AP_1 et CD, AP et C_1D_1 conservent leur parallélisme, en même temps que les bases CD et C_1D_1. Il s'ensuit évidemment (50) que les trois points A, P_1, P restent en ligne droite.

Fig. 220.



Cela posé, des proportions

$$\frac{AP}{C_1D_1} = \frac{CA}{CC_1}, \quad \frac{AP_1}{CD} = \frac{C_1A}{CC_1},$$

on déduit

$$AP.AP_1 = \frac{CA.C_1A}{\overline{CC_1}^2}\, CD.C_1D_1;$$

et le produit $AP.AP_1$ demeurera constant, s'il en de même du produit $CD.C_1D_1$.

Or, si O est le milieu de C_1D_1 et, E et F, les projections des sommets C et D sur C_1D_1, on a évidemment

$$CD.C_1D_1 = EF.C_1D_1 = 2OE.C_1D_1 = 2C_1D_1.OE;$$

et ce dernier produit revient, d'après un théorème connu (176) appliqué au triangle C_1CD_1, à la quantité constante $\overline{CD_1}^2 - \overline{CC_1}^2$.

Le point P décrira donc une droite, si P_1 décrit une circonférence passant par l'origine fixe A. Il suffira pour cela d'introduire dans le système une cinquième tige rigide articulée reliant le point P_1 à un centre fixe α, et telle qu'on ait $\alpha P_1 = \alpha A$. La droite suivie par le point P sera perpendiculaire à la direction $A\alpha$.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE QUATRIÈME.

LE PLAN.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

I. — Premières notions sur le plan considéré en lui-même et relativement à la droite.

388. Comme nous l'avons déjà dit (6), un plan est une surface telle, qu'une ligne droite y est contenue tout entière dès qu'elle y a deux points. Cette surface est illimitée; mais, pour la représenter, on est obligé de lui assigner des limites. On représente donc un plan par une figure tracée dans ce plan, le plus souvent par un parallélogramme; néanmoins, puisqu'il s'agit d'une surface sans forme déterminée, il faut toujours concevoir le plan comme prolongé au delà du contour qui sert à le figurer.

THÉORÈME.

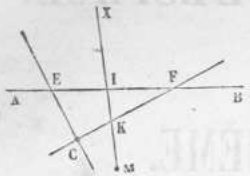
389. *Deux plans* P *et* Q, *qui contiennent tous deux une même droite* AB *et un point* C *extérieur à cette droite, coïncident dans toute leur étendue* (*fig.* 221).

Par le point C et par deux points E et F pris à volonté sur AB, traçons les droites indéfinies CE et CF. Comme elles

ont chacune deux points dans les plans P et Q, elles appartiennent tout entières à ces plans (388).

Cela posé, par un point M quelconque du plan P, menons dans ce plan une droite quelconque MX. Cette droite rencontrera au moins (50) deux des trois droites AB, CE, CF, et les points de rencontre obtenus, I et K, appartiendront alors au plan Q. Il en sera donc de même de la droite MX tout entière et, en particulier, du point M.

Fig. 221.



Ainsi, tout point M de l'un des plans considérés appartient nécessairement à l'autre, de sorte que ces deux plans coïncident dans toute leur étendue.

THÉORÈME.

390. *Un plan est déterminé :*

1° *Par une droite* AB *et un point* C *extérieur à cette droite ;*

2° *Par trois points* A, B, C, *non en ligne droite ;*

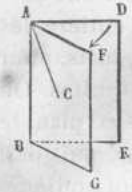
3° *Par deux droites* AB *et* AC, *se coupant en un point* A ;

4° *Par deux droites parallèles.*

En effet (*fig.* 222) :

1° Menons un plan ABDE par la droite AB, et faisons-le tourner autour de cette droite, comme une porte sur ses gonds, jusqu'à ce qu'il vienne passer par le point C. On obtiendra alors un plan ABGF, contenant la droite AB et le point C. Ce plan est d'ailleurs complètement déterminé, car tout autre plan remplissant les mêmes conditions coïncidera avec lui (389).

Fig. 222.



2° On ramène immédiatement ce deuxième cas au premier, en remarquant que tout plan passant par la droite AB et le point C contient les trois points A, B, C, non en ligne droite, et réciproquement.

3° On ramène aussi le troisième cas au premier, en remarquant que tout plan passant par AB et par un point quelconque C de AC contient les deux droites AB et AC, et réciproquement.

4° Par définition (50), deux parallèles sont toujours situées dans un même plan, qu'elles déterminent, puisqu'il n'y a

qu'un seul plan qui puisse contenir la première parallèle et un point quelconque de la seconde.

COROLLAIRE.

391. *Dans l'espace comme sur un plan, par un point donné, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée.*

Soit (*fig.* 222) AB une parallèle menée par le point A à la droite DE; AB sera alors située dans le plan défini ADE, et, dans un plan, on ne peut mener, par un point donné, qu'une seule parallèle à une droite donnée (50).

SCOLIE.

392. Un plan et une droite ne peuvent présenter que trois positions relatives :

1° La droite a deux points communs avec le plan et, alors, elle y est contenue tout entière ;

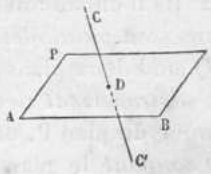
2° La droite a un seul point commun avec le plan, et, alors, la droite et le plan se *coupent*

3° La droite n'a aucun point commun avec le plan, et l'on dit alors que la droite et le plan sont *parallèles*.

Quand une droite CC′ et un plan P se coupent (*fig.* 223), leur point commun D divise la droite CC′ en deux parties DC, DC′, situées de part et d'autre du plan P.

Cela résulte avec évidence de ce que la droite et le plan sont indéfinis. Le plan partage l'espace (2) en deux régions qui, par rapport à l'observateur, peuvent être qualifiées de supérieure et d'inférieure au plan, de sorte que le point de rencontre de la droite avec le plan la partage nécessairement de la même manière. On exprime ce fait en disant que la droite *traverse* le plan. Le point d'intersection de la droite et du plan s'appelle le *pied* de la droite dans le plan.

Fig. 223.



THÉORÈME.

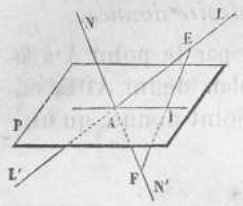
393. *Deux plans* P *et* Q, *qui ont un point commun* A, *ont une droite commune passant par ce point* (*fig.* 224).

Par le point A commun aux plans P et Q, menons dans le plan Q deux droites quelconques LAL′, NAN′. Si l'une de ces

droites avait avec le plan P un point commun autre que A, elle serait commune aux plans P et Q, et le théorème serait démontré.

Supposons donc que les droites considérées coupent toutes les deux le plan P. Prenons un point quelconque E sur la partie de la droite LAL′ qui est *au-dessus* du plan P et un point quelconque F sur la partie de la droite NAN′ qui est *au-dessous* du même plan. La droite EF, qui appartient au plan Q, traversera nécessairement le plan P en un point I; et la droite AI, ayant deux points dans chacun des plans P et Q, sera commune à ces deux plans.

Fig. 224.



COROLLAIRES.

394. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

En effet, dès que deux plans ont un point commun, ils ont une droite commune passant par ce point, et ils ne peuvent avoir aucun point commun extérieur à cette droite sans coïncider (389).

395. Deux plans *distincts* ne peuvent présenter que deux positions relatives :

1° Ils ont en commun une droite unique, qui est leur intersection; on dit alors que les deux plans se *coupent;*

2° Ils n'ont aucun point commun; on dit alors que les deux plans sont *parallèles.*

Quand deux plans P et Q se coupent suivant une droite AB, ils se *traversent* nécessairement. En effet, une droite quelconque du plan P, non parallèle à AB, traverse elle-même AB en *coupant* le plan Q en un point de cette droite commune (389), c'est-à-dire en passant d'un côté à l'autre du plan Q (392).

SCOLIE.

396. Deux droites AB et CD étant données d'une manière quelconque dans l'espace (*fig.* 223), le plan P mené par AB et par un point quelconque D de CD peut couper cette droite CD ou la contenir tout entière.

Dans le premier cas, il n'existe aucun plan qui contienne à

la fois AB et CD; car un tel plan, ayant la droite AB et le point D communs avec le plan P, coïnciderait avec lui, de sorte que le plan P contiendrait la droite CD, contrairement à l'hypothèse. Les deux droites AB et CD, *ne pouvant être situées dans un même plan*, ne peuvent non plus ni se couper ni être parallèles (390, 3° et 4°).

Deux droites *distinctes* peuvent donc présenter dans l'espace trois positions relatives :

1° Elles se coupent ;

2° Elles sont parallèles ;

3° Elles ne sont pas situées dans un même plan.

Comme dans les deux derniers cas elles n'ont aucun point commun, on voit que, *pour prouver le parallélisme de deux droites considérées dans l'espace, il ne suffit plus, comme en Géométrie plane, d'établir qu'elles ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge ; il faut, en outre, vérifier qu'elles sont situées dans un même plan.*

397. Modes de génération du plan. — Toute surface géométrique peut être regardée comme engendrée par une ligne, droite ou courbe, appelée *génératrice*, qui se déplace dans l'espace suivant une loi déterminée.

Cette loi astreint généralement la génératrice à s'appuyer sur certaines lignes fixes appelées *directrices*.

D'après cela, on voit qu'un plan peut être considéré comme engendré par le mouvement d'une droite génératrice qui, passant par un point fixe de l'espace, s'appuie constamment sur une droite fixe donnée comme directrice. En effet, la droite mobile est constamment dans le plan déterminé par la droite et le point fixes donnés (390, 1°).

De même, une droite donnée, glissant parallèlement à elle-même en s'appuyant sur une droite fixe donnée, engendre un plan. En effet, la droite mobile est toujours dans le plan déterminé par l'une quelconque de ses positions successives et la droite fixe donnée (390, 4°).

Un triangle est toujours dans le plan déterminé par ses trois sommets (390, 2°). Il n'en est pas nécessairement ainsi d'un quadrilatère, dont les quatre sommets peuvent n'être pas situés dans un même plan. Dans ce dernier cas, le quadrilatère proposé est un *quadrilatère gauche*. Même remarque pour un polygone.

II. — Droite et plan perpendiculaires.

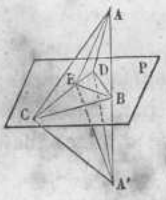
398. Quand une droite et un plan se rencontrent, on dit qu'ils sont *perpendiculaires entre eux* lorsque la droite est perpendiculaire à toutes les droites du plan qui passent par son pied. Une droite est dite *oblique* à un plan, lorsqu'elle le rencontre sans lui être perpendiculaire.

THÉORÈME.

399. *Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites qui passent par son pied dans ce plan* (*fig.* 225).

Soit la droite AB perpendiculaire à deux droites BC et BD qui passent par son pied B dans le plan P : elle sera perpendiculaire à toute autre droite BE menée par son pied dans ce plan.

Fig. 225.



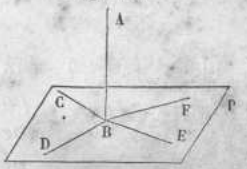
En effet, traçons dans le plan P une droite quelconque qui rencontre les droites BC, BD, BE, aux points C, D, E. Prolongeons AB au-dessous du plan d'une longueur BA′ = AB. Joignons les points C, D, E, aux points A et A′. Les deux triangles ACD, A′CD sont égaux : ils ont le côté CD commun; le côté AC est égal au côté A′C, car, dans le plan ACA′, les deux obliques AC et A′C s'écartent également du pied de la perpendiculaire CB élevée sur AA′; le côté AD est égal au côté A′D pour une raison analogue. L'égalité des deux triangles ACD, A′CD, entraîne celle des deux angles ACE, A′CE. Les deux triangles ACE, A′CE, sont alors égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Par suite, AE = A′E. La droite BE, ayant alors, dans le plan AEA′, deux de ses points à égale distance des extrémités A et A′, est perpendiculaire sur AA′ ou sur AB (46). AB est donc perpendiculaire à une droite quelconque BE du plan P, c'est-à-dire perpendiculaire à ce plan.

THÉORÈME.

400. *Le lieu des perpendiculaires menées à une droite* AB *par un point* B *de cette droite est le plan* P *perpendiculaire à* AB *au point* B (*fig.* 226).

Par la droite AB, on peut faire passer une infinité de plans, et, par le point B, on peut mener dans chacun de ces plans une perpendiculaire à la droite AB. C'est le lieu de ces perpendiculaires qu'il s'agit de déterminer.

Fig. 226.



Par les deux perpendiculaires BC, BD, menées à AB au point B, dans les plans ABC, ABD, faisons passer un plan P; puis, par AB, faisons passer un plan quelconque ABE qui coupe le plan P suivant BE. La droite AB, étant perpendiculaire au plan P (399), sera perpendiculaire à BE, qui est alors la perpendiculaire élevée à AB par le point B dans le plan ABE.

D'ailleurs, toute autre droite menée par le point B dans le plan ABE est oblique à AB (15). Le plan P est donc le lieu des perpendiculaires considérées.

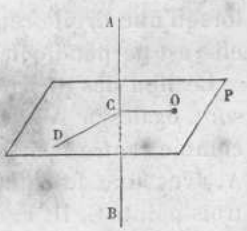
COROLLAIRES.

401. Ce théorème conduit à un nouveau mode de génération du plan (397). On peut le regarder comme engendré par le mouvement d'une droite qui reste constamment perpendiculaire à une droite donnée en un point donné.

402. *Par un point donné, on peut toujours mener un plan perpendiculaire à une droite, mais on n'en peut mener qu'un.*

1° Si le point donné est sur la droite donnée, en B par exemple sur AB (*fig.* 226), on mène à AB les perpendiculaires BC, BD, dans les plans quelconques ABC, ABD, et l'on fait passer un plan P par les deux droites ainsi obtenues. Ce plan est perpendiculaire à AB au point B (399), et il peut seul remplir cette condition (400).

Fig. 227.



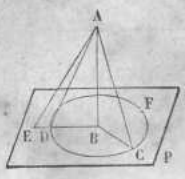
2° Si le point donné est extérieur à la droite donnée, comme le point O par exemple (*fig.* 227), on fait passer un plan par ce point O et la droite AB (390, 1°). Dans ce plan ABO, menons OC perpendiculaire sur AB; élevons au point C, dans le plan quelconque ABD, la perpendiculaire CD à AB, et faisons passer un plan P par les deux droites CD et CO. Ce plan, perpendiculaire à AB au point C (399), passe

au point O, et il peut seul remplir ces deux conditions, puisque, du point O, on ne peut abaisser sur AB que la perpendiculaire OC (21).

THÉORÈME.

403. *Si d'un point pris hors d'un plan on lui mène une perpendiculaire et plusieurs obliques : la perpendiculaire est plus courte que toute oblique; deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales; de deux obliques inégalement distantes du pied de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus est la plus grande* (*fig.* 228).

Fig. 228.



Soient le point A et le plan P, la perpendiculaire AB à ce plan et les obliques AC, AD, AE.

Dans le plan ABC, la perpendiculaire AB est plus courte que l'oblique quelconque AC.

Supposons BC = BD. Les deux triangles rectangles ABC, ABD, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Par suite, les deux obliques AC, AD, sont égales.

Supposons BE > BC, et prenons BD = BC; on a alors AD = AC. Mais, dans le plan ABE, on a AE > AD (41). On a donc aussi AE > AC.

COROLLAIRES.

404. Les réciproques de ces propositions sont évidentes. Si l'on se rappelle qu'en Géométrie le mot *distance* est toujours synonyme de *plus courte distance*, on voit, en particulier, que, lorsqu'une droite représente la distance d'un point à un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.

Le lieu des pieds des obliques qui, passant par le point A, sont égales à AC, est la circonférence décrite du point B comme centre avec BC pour rayon. Il en résulte que, si du point A, avec une longueur convenable, on marque sur le plan P trois points C, D, F, également éloignés du point A, le centre B de la circonférence déterminée par les trois points C, D, F, est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan P.

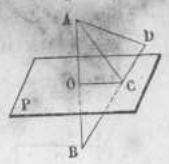
Ainsi, *le lieu des points d'un plan* P *situés à égale distance*

d'un point donné A *est une circonférence ayant pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du point* A *sur le plan* P.

THÉORÈME.

405. *Le lieu géométrique de tous les points de l'espace à égale distance des extrémités d'une droite donnée est le plan mené perpendiculairement à cette droite par son milieu* (*fig.* 229).

Fig. 229.



Soient la droite AB et le plan P, perpendiculaire à AB au point O, milieu de AB. Soit C un point quelconque du plan P : dans le plan ACB, les deux obliques CA et CB sont égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire OC. Tout point du plan est donc à égale distance des extrémités de la droite. Soit D un point quelconque extérieur au plan P : dans le plan ADB, les distances DA et DB sont inégales, parce que le point D est hors de la perpendiculaire OC élevée sur le milieu de AB dans le même plan. Tout point extérieur au plan est donc inégalement distant des extrémités de la droite. Le plan P est donc bien le lieu géométrique indiqué.

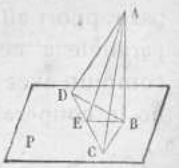
COROLLAIRE.

406. *Trois points non en ligne droite suffisant pour déterminer un plan* (390, 2°), *dès qu'un plan a trois de ses points non en ligne droite à égale distance des extrémités d'une droite donnée, il est perpendiculaire sur le milieu de cette droite.*

THÉORÈME.

407. *Soient la droite* AB *perpendiculaire au plan* P *et la droite* CD *quelconque dans le plan* P; *si l'on abaisse* BE *perpendiculaire sur* CD *et si l'on joint* AE, *la droite* AE *est perpendiculaire sur* CD (*fig.* 230).

Fig. 230.



Prenons EC = ED, et joignons les points C et D aux points B et A. Les droites BC et BD sont égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire BE dans le plan P. Dès lors, les droites AC et AD sont égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire AB dans

l'espace. Le triangle CAD étant isocèle, la droite AE qui joint son sommet A au milieu de sa base CD est perpendiculaire sur cette base (27).

La proposition qu'on vient de démontrer est connue sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires.*

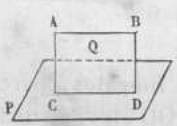
III. — Droites et plans parallèles.

THÉORÈME.

408. *Toute droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan ou contenue dans ce plan* (*fig.* 231).

Soit la droite AB parallèle à la droite CD du plan P. Si elle n'est pas dans le plan P, elle détermine avec CD (390, 4°) un plan Q, dont l'intersection avec le plan P est la droite CD. La droite AB, appartenant au plan Q, ne pourrait rencontrer le plan P qu'en coupant CD : elle est donc parallèle au plan P.

Fig. 231.



THÉORÈME.

409. *Si par une droite* AB, *parallèle à un plan* P, *on mène un plan* ABCD *qui coupe le plan* P, *l'intersection* CD *des deux plans est parallèle à* AB (*fig.* 231).

En effet, les deux droites AB et CD sont dans un même plan, et la droite AB, parallèle au plan P, ne peut rencontrer CD, qui est contenue dans ce plan (396).

COROLLAIRES.

410. *Si deux droites* AC *et* BD *sont parallèles, tout plan* P *qui coupe l'une* AC *coupe l'autre* BD (*fig.* 231).

En effet, la droite BD ne peut occuper que trois positions par rapport au plan P (392); et, si BD était dans le plan P ou parallèle à ce plan, AC, qui, par hypothèse, a le point C commun avec le plan P, serait dans ce plan (390, 4°, 409) et ne le couperait pas.

411. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

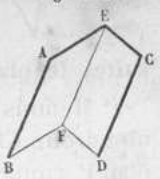
Soient les deux droites B et C parallèles à une même droite A.

Elles n'ont aucun point commun, puisque d'un point donné on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée (391). De plus, elles sont dans le plan déterminé par la droite B et un point quelconque de C; car, si ce plan coupait C, il couperait A (410) et, par suite, B contre l'hypothèse. Les deux droites B et C sont donc parallèles (396).

412. *Si, par deux droites parallèles* AB *et* CD, *on mène deux plans qui se coupent, leur intersection est parallèle aux deux droites données* (*fig.* 232).

En effet, quel que soit le plan mené par AB, le plan conduit par CD le coupe suivant une droite EF parallèle à CD (409) et, par conséquent, à AB, puisque AB et CD sont parallèles (411).

Fig. 232.



Si l'on imagine une parallèle quelconque à AB et à CD, elle sera parallèle aux deux plans (408) et à leur intersection. On peut donc dire encore que *l'intersection de deux plans parallèles à une même droite est parallèle à cette droite.*

THÉORÈME.

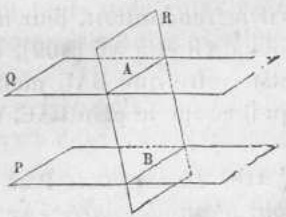
413. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

En effet, deux plans ne peuvent occuper l'un par rapport à l'autre que deux positions (395), et, si les plans considérés se coupaient, on pourrait, d'un point de leur intersection, abaisser deux plans perpendiculaires sur une même droite, ce qui est impossible (402).

THÉORÈME.

414. *Quand deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, les intersections obtenues sont parallèles* (*fig.* 233).

Fig. 233.

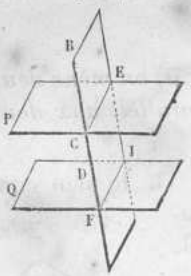


Soient les plans parallèles P et Q coupés par le plan R suivant les droites A et B. Ces droites ne peuvent se rencontrer, puisque les plans P et Q ne peuvent avoir aucun point commun, et elles sont situées dans un même plan : elles sont donc parallèles (396).

THÉORÈME.

415. *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles :* 1° *toute droite* D *qui coupe le premier* P *coupe le second* Q ; 2° *tout plan* R *qui coupe le premier* P *coupe le second* Q (*fig.* 234).

Fig. 234.



1° Par un point quelconque I du plan Q et par la droite D qui coupe le plan P en C, concevons un plan R ; ce plan, ayant un point commun avec chacun des deux premiers, coupera ceux-ci suivant deux parallèles CE et FI (414). Or D coupe CE ; elle coupe donc sa parallèle FI et, par suite, le plan Q.

2° Menons dans le plan R, qui coupe le plan P suivant CE, une droite CD non parallèle à CE. Cette droite CD, coupant le plan P, coupera le plan Q (1°) ; donc le plan R coupe le plan Q.

COROLLAIRES.

416. *Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle au premier ou contenue dans le premier est parallèle au second ou contenue dans le second ;* car, si elle coupait le second plan, elle couperait aussi le premier. Ainsi, *deux plans parallèles ont leurs parallèles communes.*

417. *Par un point* A *extérieur à un plan* B′A′C′, *on peut toujours mener un plan parallèle à ce plan, et l'on n'en peut mener qu'un* (*fig.* 235).

En effet, menons par A deux droites AB et AC parallèles au plan B′A′C′. Le plan BAC sera parallèle au plan B′A′C′ ; car, s'il le rencontrait, leur intersection devrait être parallèle à la fois à AB et à AC (409), ce qui est impossible. De plus, tout plan autre que BAC mené par A coupe le plan B′A′C′, puisqu'il coupe le plan BAC, qui est parallèle à B′A′C′ (415).

418. *Deux plans* P *et* Q, *parallèles à un troisième plan* R, *sont parallèles entre eux,* car, s'ils avaient un point commun, on pourrait, de ce point, mener deux plans parallèles à un même plan, ce qui est impossible (417).

419. *Le lieu des parallèles menées à un plan* Q *par un point* A *extérieur à ce plan est le plan* P *mené par ce point parallèlement au plan* Q.

En effet, toutes les parallèles menées par A au plan Q sont parallèles au plan P ou contenues dans ce plan (416); et c'est le dernier cas qui a lieu, puisque les parallèles considérées ont déjà le point A commun avec le plan P.

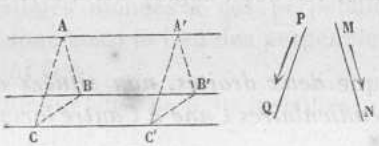
THÉORÈME.

420. *Deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires, et leurs plans sont parallèles* (*fig.* 235).

1° Les plans des deux angles sont parallèles en vertu du n° 417.

2° Deux angles BAC, B′A′C′, dont les côtés AB et A′B′, AC et A′C′, sont deux à deux parallèles et de même sens, sont égaux. En effet, par deux points B et C pris à volonté et res-

Fig. 235.



pectivement sur les côtés de l'angle A, menons des parallèles à AA′ jusqu'à leur rencontre B′ et C′ avec les côtés de l'angle A′; les droites BC, B′C′, sont parallèles comme intersections des deux plans parallèles BAC, B′A′C′, avec le plan BB′C′C. Donc les deux triangles BAC, B′A′C′, ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, comme parallèles comprises entre parallèles, et les angles BAC, B′A′C′, sont égaux.

On prouvera d'ailleurs, comme en Géométrie plane, que deux angles dont les côtés sont deux à deux parallèles et de sens contraires sont égaux, et que deux angles dont deux côtés sont parallèles et de même sens, tandis que les deux autres sont parallèles et de sens contraires, sont supplémentaires.

SCOLIES.

421. Sur une droite quelconque MN (*fig.* 235), il y a deux sens à distinguer : le sens de MN et celui de NM.

On appelle *angle de deux droites*, dont la position dans l'espace et le sens sont donnés, l'angle que l'on forme en menant par un point quelconque de l'espace, à chacune des deux droites données, une droite parallèle et de même sens. Ainsi MN et PQ étant les deux droites données, par un point quelconque A de l'espace, menons AB parallèle à MN et de même sens, AC parallèle à PQ et de même sens : l'angle BAC sera, par définition, l'angle des deux droites MN et PQ.

Pour que cette définition n'offre rien de contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle ainsi obtenu soit indépendante de la position qu'occupe dans l'espace le point par lequel on mène des parallèles aux droites données. Or soient BAC, B′A′C′, les valeurs obtenues pour l'angle de MN et de PQ, lorsqu'on mène à ces droites des parallèles par deux points différents A et A′ ; les droites AC et A′C′, étant toutes deux parallèles à MN et de même sens que cette droite, sont parallèles entre elles et de même sens (411) ; il en est de même pour AB et A′B′ ; par suite, les deux angles BAC, B′A′C′, sont égaux (420).

422. On dit que *deux droites, non situées dans le même plan, sont perpendiculaires l'une à l'autre lorsque leur angle est droit.*

On voit, par la définition même de l'angle de deux droites, que, *lorsque deux droites sont* ainsi *perpendiculaires entre elles, toute parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Cette remarque est importante. Elle permet de généraliser des théorèmes dont le sens demeurerait, sans elle, trop restreint.

Par exemple, nous avons dit qu'une droite et un plan sont perpendiculaires lorsque la droite est perpendiculaire à toutes les droites passant *par son pied* dans le plan (398). Nous pouvons maintenant compléter cette définition en disant : *Une droite et un plan sont perpendiculaires, lorsque la droite est perpendiculaire à toutes les droites situées d'une manière quelconque dans le plan ou parallèles au plan.* En effet, soit AB une perpendiculaire au plan P, dont le pied dans

ce plan est A. Soient C une droite quelconque du plan P et D une parallèle quelconque à ce plan. Si l'on mène par A une parallèle C' à C, elle est, dans le plan P, perpendiculaire en A à AB; et, si l'on fait passer un plan par la droite D et le point A, il coupe le plan P suivant une droite D' parallèle à D (409), et perpendiculaire encore à AB au point A. La première définition est donc renfermée dans la seconde.

Nous avons démontré (399) qu'une droite est perpendiculaire à un plan dès qu'elle est perpendiculaire à deux droites passant *par son pied* dans ce plan. On peut, d'après ce qui précède, étendre cet énoncé en disant : *Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites quelconques contenues dans ce plan ou parallèles à ce plan.*

De même, le lieu des perpendiculaires élevées sur une droite *par un de ses points* étant le plan mené par ce point perpendiculairement à la droite (400), on retrouve un lieu identique lorsque le point donné est *extérieur* à la droite. En effet, soient la droite AB et le point extérieur O. Abaissons, dans le plan ABO, OC perpendiculaire sur AB. Le plan P, perpendiculaire à AB au point C, est le lieu des perpendiculaires menées à AB par le point C, et ce plan contient en même temps les parallèles menées à ces perpendiculaires par le point O. Il est donc aussi le lieu des perpendiculaires menées à AB par le point O.

De la remarque sur laquelle nous insistons, résultent immédiatement les théorèmes suivants :

THÉORÈME.

423. *Si deux droites* A *et* B *sont parallèles, tout plan* P *perpendiculaire à la première est perpendiculaire à la seconde.*

En effet, toute droite parallèle au plan P ou située dans ce plan, étant perpendiculaire à A (422), est aussi perpendiculaire à B, qui dès lors est perpendiculaire au plan P.

THÉORÈME.

424. *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles, toute droite* A *perpendiculaire au premier est perpendiculaire au second.*

En effet, toute droite située dans le plan Q ou parallèle à ce

plan, étant parallèle au plan P ou située dans ce plan (416), est perpendiculaire à la droite A.

Ce théorème est la réciproque de celui du n° 413.

SCOLIE.

425. On peut résumer les deux propositions précédentes en disant :

Deux droites parallèles ont les mêmes plans perpendiculaires; deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes.

THÉORÈME.

426. *Si une droite* AB *est perpendiculaire au plan* P, *toute perpendiculaire* CD *à* AB *est parallèle au plan* P *ou située dans ce plan.*

En effet, si CD n'est pas située dans le plan P, on peut, par un point de CD, faire passer un plan Q perpendiculaire à AB (400, 422); et, ce plan, qui contient CD, étant parallèle au plan P (413), il en est de même de la droite CD (416).

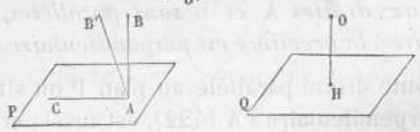
Ce théorème est la réciproque de la définition de la perpendicularité entre une droite et un plan (398, 422).

THÉORÈME.

427. *Par un point donné* A, *on peut toujours mener une droite perpendiculaire à un plan donné* P, *mais on ne peut en mener qu'une.*

1° Supposons d'abord le point A situé dans le plan P (*fig.* 236). Considérons à part une droite OH et le plan Q élevé perpendiculairement à cette droite par l'un de ses

Fig. 236.



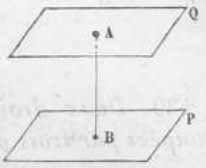
points H; puis, transportons cette figure tout d'une pièce, de manière que, le plan Q s'appliquant sur le plan P, ce qui est toujours possible (389), le point H coïncide avec le point A. La droite OH, dans sa nouvelle position, sera une perpendiculaire AB menée au plan P par le point A.

On ne peut en mener qu'une, car, si l'on pouvait en mener

deux, AB et AB′, le plan BAB′ couperait le plan P suivant une droite AC perpendiculaire à la fois à AB et à AB′.

2° Supposons le point A extérieur au plan P (*fig.* 237). Soit Q le plan mené par A parallèlement au plan P. Les plans parallèles P et Q ayant leurs perpendiculaires communes (424), dire que par le point A on peut abaisser une perpendiculaire sur le plan P et qu'on ne peut en abaisser qu'une, c'est dire que par le point A on peut élever une perpendiculaire sur le plan Q et qu'on ne peut en élever qu'une ; or c'est ce que nous venons d'établir (1°).

Fig. 237.



COROLLAIRE.

428. *Deux droites* A *et* B, *perpendiculaires à un même plan* P, *sont parallèles ou coïncident.*

En effet, si les droites A et B ont un point commun, elles coïncident, puisque, de ce point, on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P. Si les droites A et B n'ont pas de point commun, imaginons, par un point M de B, la parallèle A′ à A. Cette droite A′ sera perpendiculaire au plan P (423); elle coïncidera donc avec B, puisque, du point M, on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P.

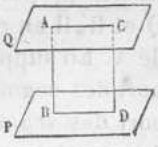
Cette proposition est la réciproque de celle du n° 423.

THÉORÈME.

429. 1° *Les parallèles* AB *et* CD, *comprises entre une droite* AC *et un plan* P *parallèles, sont égales* (*fig.* 238).

2° *Les parallèles* AB *et* CD, *comprises entre deux plans parallèles* P *et* Q, *sont égales* (*fig.* 238).

Fig. 238.



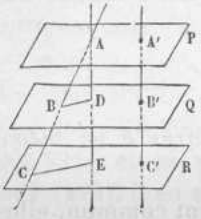
Cette double proposition résulte de ce que le plan des deux parallèles AB et CD coupe, dans le premier cas, le plan P suivant une parallèle BD à AC, et coupe, dans le second cas, les plans P et Q suivant des droites parallèles BD et AC (409, 414); les droites AB et CD sont donc, dans les deux cas, égales comme parallèles comprises entre parallèles.

Les droites AB et CD pourraient être perpendiculaires au plan P : elles mesureraient alors les distances de deux points quelconques de la droite AC ou du plan Q au plan P. *Une droite et un plan parallèles* ou *deux plans parallèles sont* donc *partout également distants.*

THÉORÈME.

430. *Deux droites quelconques* AC, A'C' (*fig.* 239), *sont coupées par trois plans parallèles* P, Q, R, *en parties proportionnelles;* en d'autres termes, si la droite AC coupe les plans P, Q, R, en A, B, C, et si la droite A'C' coupe les mêmes plans en A', B', C', on a

Fig. 239.



$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

En effet, menons par A la parallèle à A'C', et désignons par D et E les points où elle coupe les plans Q et R. Les droites BD et CE étant parallèles (414), on a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE};$$

mais les segments AD, DE, AE, sont respectivement égaux à A B', B'C', A'C', comme parallèles comprises entre plans parallèles. La relation (1) est donc démontrée.

COROLLAIRE.

431. Deux droites concourantes AC et AE étant divisées en parties proportionnelles par le point A et les plans parallèles Q et R, il en est de même pour une série de sécantes partant de A. En supposant, en effet, qu'il y ait trois sécantes, le rapport des segments de la première étant égal à la fois au rapport des segments de la seconde et au rapport des segments de la troisième, ces deux derniers rapports sont égaux entre eux.

IV. — Projection d'une droite sur un plan. — Angle d'une droite et d'un plan. — Plus courte distance de deux droites.

432. On appelle *projection* d'un point A sur un plan P le pied *a* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan (*fig.* 240).

La projection d'une ligne quelconque ABC... sur un plan P est le lieu des projections *a*, *b*, *c*, ... des divers points de cette ligne.

Fig. 240.

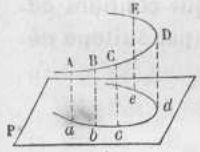


Fig. 241.

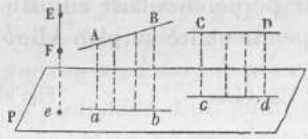
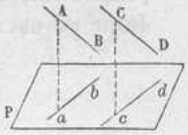


Fig. 242.



THÉORÈME.

433. *La projection d'une ligne droite* AB *sur un plan* P *est une ligne droite* (*fig.* 241).

Car toutes les perpendiculaires A*a*, B*b*, ... abaissées sur le plan P par les divers points de la droite AB sont parallèles (428); leur lieu est donc un plan (397), et, par suite, le lieu de leurs pieds est la droite *ab* suivant laquelle ce plan coupe le plan P.

SCOLIES.

434. Lorsque la droite est, comme EF, perpendiculaire au plan P, sa projection sur ce plan se réduit évidemment à un point *e*.

435. Lorsque la droite est, comme CD, parallèle au plan P, elle est parallèle à sa projection *cd* sur ce plan (409).

COROLLAIRES.

436. *Les projections ab et cd de deux droites parallèles* AB *et* CD, *sur un même plan* P, *sont parallèles* (*fig.* 242).

Car la *projetante* A*a* d'un point quelconque de AB et la projetante C*c* d'un point quelconque de CD étant parallèles, les angles BA*a*, DC*c*, ont leurs plans parallèles (420); et, par

suite, les droites *ab* et *cd*, suivant lesquelles le plan P coupe ces deux plans, sont parallèles.

THÉORÈME.

437. *Lorsque deux droites* AB *et* CD *de l'espace sont perpendiculaires l'une à l'autre, leurs projections ab et cd sur un plan* P *parallèle à l'une d'elles* CD *sont aussi perpendiculaires entre elles* (*fig.* 243).

En effet, la droite *cd* est, comme sa parallèle CD, à angle droit sur AB; elle est d'ailleurs à angle droit sur la projetante A*a*, droite perpendiculaire au plan P qui contient *cd*. Donc *cd* est perpendiculaire au plan AB*ab* et, par suite, à *ab*.

Fig. 243.

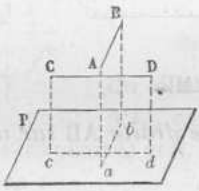
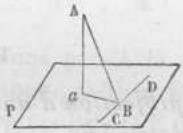


Fig. 244.



Ainsi, *la projection d'un angle droit sur un plan est un angle droit, lorsqu'un des côtés de l'angle est parallèle au plan de projection.*

438. Réciproquement, *deux droites de l'espace* AB *et* CD *sont perpendiculaires l'une à l'autre, si leurs projections ab et cd sur un plan* P *parallèle à l'une d'elles* CD *sont perpendiculaires entre elles* (*fig.* 243).

En effet, la droite *cd*, étant à angle droit sur *ab* et sur A*a*, est perpendiculaire au plan AB*ba*. Il en est donc de même de sa parallèle CD, qui, par suite, est perpendiculaire à AB.

Dans le cas très particulier où le plan P contient CD et où les droites AB et CD se coupent, cette réciproque revient au théorème connu sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires* (*fig.* 244) et déjà démontré (407).

COROLLAIRE.

439. Considérons une droite quelconque AB et un plan Q perpendiculaire à cette droite; soient *ab* la projection de AB

sur un plan quelconque P (*fig.* 245), et CD l'intersection des plans P et Q, ou la *trace* du plan Q sur le plan P. Les deux droites AB et CD étant perpendiculaires l'une à l'autre, il doit en être de même de leurs projections *ab* et CD; de là ce théorème, fondamental en Géométrie descriptive : *Lorsqu'une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* Q, *la projection de cette droite et la trace de ce plan sur un plan quelconque* P *sont perpendiculaires.*

THÉORÈME.

440. *Lorsqu'une droite* AB *est oblique à un plan* P, *l'angle aigu* BA*b que cette droite fait avec sa projection sur ce plan est moindre que l'angle* BAC *qu'elle forme avec toute autre droite* AC *passant par son pied dans le plan* (*fig.* 246).

En effet, *b* étant la projection d'un point quelconque B de la droite AB, prenons AC = A*b* et menons BC. Les deux

Fig. 245.

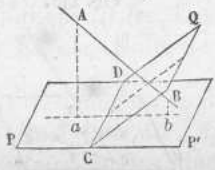
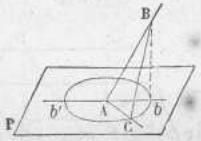


Fig. 246.



triangles BA*b*, BAC, ont deux côtés égaux; mais le troisième côté B*b* du premier étant moindre que le troisième côté BC du second, puisque la perpendiculaire est plus courte que l'oblique, il faut que l'angle BA*b* soit moindre que l'angle BAC.

SCOLIE.

441. En faisant parcourir au point C le cercle décrit dans le plan P, du point A comme centre avec A*b* pour rayon, on voit que l'oblique BC croît d'une manière continue depuis le point *b* jusqu'au point *b'*, puis décroît en reprenant successivement les mêmes valeurs depuis *b'* jusqu'en *b*. Par suite, l'angle BAC, minimum lorsque le point C est en *b*, croît jusqu'à ce que le point C soit en *b'* : il est alors maximum; puis il décroît, en reprenant successivement les mêmes valeurs, depuis *b'* jusqu'en *b*.

442. On appelle *angle d'une droite et d'un plan* l'angle aigu que cette droite forme avec sa projection sur ce plan.

443. On voit aisément que *l'angle d'une droite* D *et d'un plan* P *est égal à l'angle d'une droite quelconque* D′ *parallèle à* D *et d'un plan quelconque* P′ *parallèle à* P.

THÉORÈME.

444. *Étant données deux droites* AB *et* CD *non situées dans le même plan :* 1° *il existe une droite, et une seule, qui les rencontre l'une et l'autre à angle droit;* 2° *cette perpendiculaire commune est la plus courte distance des deux droites* (*fig.* 247).

1° Par un point quelconque A de AB menons la parallèle AE à CD; le plan BAE, que nous désignerons par P, sera parallèle à CD; par suite, nous aurons la projection de CD sur ce plan P en menant une parallèle *dc* à la droite DC par la projection *d* d'un point quelconque D de cette droite. Cela posé, pour

Fig. 247.

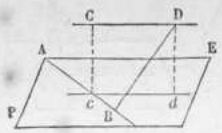
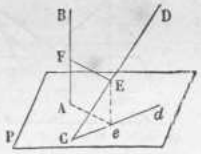


Fig. 248.



qu'une droite rencontre à la fois AB et CD à angle droit, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire au plan P en un point de AB, et qu'elle ait son pied sur *cd*, lieu des pieds des perpendiculaires au plan P menées par les divers points de CD. Or la perpendiculaire au plan P élevée par le point *c* commun à AB et à *cd* remplit seule ces conditions. Il existe donc une droite C*c*, et une seule, qui rencontre à angle droit les deux droites données AB et CD.

2° Cette perpendiculaire commune C*c* est moindre que toute autre droite BD joignant un point de AB à un point de CD, car, D*d* étant la projetante du point D, on a évidemment $Cc = Dd$ et $Dd < DB$.

SCOLIES.

445. La démonstration qui précède permet d'obtenir la plus courte distance des deux droites AB et CD. Voici un second procédé très usuel (*fig.* 248).

On projette l'une des droites CD sur un plan P perpendiculaire à l'autre droite AB. Du pied A de AB sur le plan P, on abaisse la perpendiculaire A*e* sur la projection C*d* de CD; on mène *e*E parallèle à AB jusqu'à sa rencontre E avec CD, et enfin EF parallèle à A*e*. La droite EF, étant perpendiculaire à AB et à CD, est, en grandeur et en position, leur plus courte distance.

446. Souvent, dans la pratique, on n'a besoin que de la longueur de la plus courte distance; il suffit alors de mener par l'une AB des deux droites un plan P parallèle à l'autre CD, et de prendre la distance D*d* d'un point quelconque de CD au plan P (*fig.* 247).

V. — Angles dièdres.

447. Lorsque deux plans P et Q se rencontrent (*fig.* 249) et sont terminés à leur intersection commune BE, on dit qu'ils forment un *angle dièdre*. Les deux plans P et Q sont les *faces*, et la droite BE est l'*arête* de cet angle.

448. Pour désigner un angle dièdre isolé, il suffit d'indiquer son arête; ainsi l'on dit (*fig.* 249) l'angle dièdre BE. Mais lorsque plusieurs angles dièdres ont la même arête, pour désigner celui d'entre eux que l'on considère, il faut employer

Fig. 249.

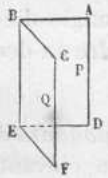
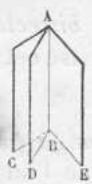


Fig. 250.



quatre lettres, savoir une lettre pour chaque face et deux pour l'arête; on place d'ailleurs les deux lettres relatives a l'arête entre les deux autres. Ainsi, dans la *fig.* 250, on distingue les trois dièdres CABD, DABE, CABE.

Deux angles, tels que CABD, DABE (*fig.* 250), qui ont la même arête AB, une face commune ABD, et les deux autres faces situées de part et d'autre de la face commune, sont dits *adjacents*.

449. Deux angles dièdres sont égaux lorsqu'on peut les faire coïncider. Pour ajouter deux angles dièdres, on transporte le second à la suite du premier, de manière à former deux angles adjacents, tels que CABD, DABE (*fig.* 250); l'angle CABE des deux faces non communes ABC, ABE, est la somme des deux angles dièdres proposés.

450. Pour avoir une idée nette de la grandeur de l'angle dièdre, il faut supposer le plan P d'abord confondu avec le plan Q (*fig.* 251); puis, qu'il s'en est écarté en tournant autour de la droite AB comme axe, de manière à prendre sa position actuelle. L'amplitude de ce mouvement de rotation correspond à la grandeur de l'angle dièdre, qui croît ainsi d'une manière continue.

Un plan P_2 est dit *perpendiculaire* sur un plan QQ' (*fig.* 251), lorsque les deux angles adjacents P_2ABQ, P_2ABQ', qu'il forme avec celui-ci sont égaux. Un plan P, qui forme avec QQ' des angles adjacents PABQ, PABQ', inégaux, est dit *oblique* sur le plan QQ'.

On nomme *angle dièdre droit* tout dièdre P_2ABQ dont une face est perpendiculaire sur l'autre.

451. Deux angles dièdres sont dits *opposés par l'arête* lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre. Deux plans indéfinis PP', QQ' (*fig.* 252), forment, en se coupant, quatre angles dièdres qui sont deux à deux opposés par l'arête AB.

On nomme *plan bissecteur* d'un angle dièdre le plan qui, mené par l'arête, divise cet angle dièdre en deux autres dièdres égaux entre eux.

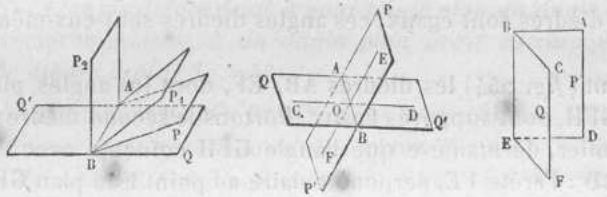
451. On appelle *angle plan correspondant à un angle dièdre* l'angle rectiligne que l'on forme en élevant, par un même point de l'arête, une perpendiculaire à cette arête dans chacune des faces. Ainsi, B étant un point de l'arête BE de l'angle dièdre PBEQ (*fig.* 253), si l'on élève dans le plan P la perpendiculaire BA sur l'arête BE, et dans le plan Q la perpendiculaire BC sur la même arête, l'angle ABC sera l'*angle plan* du dièdre considéré.

Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle plan correspondant à un angle dièdre reste la même, en quelque point de l'arête qu'on forme

cet angle plan. Or, soient les angles plans ABC, DEF, formés en deux points A et E de l'arête de l'angle dièdre PBEQ (*fig.* 253): les côtés BC et EF sont parallèles et de même sens, comme étant, dans un même plan Q, perpendiculaires à la même droite BE; il en est de même de BA et de ED par rapport au plan P; les angles ABC, DEF, sont donc égaux.

Il est à remarquer que le plan ABC est perpendiculaire à l'arête BE; réciproquement, tout plan perpendiculaire à l'arête

Fig. 251. Fig. 252. Fig. 253.



coupe les faces suivant des perpendiculaires à cette arête et, par suite, l'angle dièdre suivant son angle plan.

THÉORÈME.

452. *Par une droite* AB, *située dans un plan* QQ', *on peut toujours mener un plan* P_2 *perpendiculaire à ce plan, et l'on ne peut en mener qu'un* (*fig.* 251).

COROLLAIRES.

453. *Tous les angles dièdres droits sont égaux.*

La démonstration de ce théorème et de son corollaire est tout à fait semblable à celle qui a été donnée aux nos 15 et 16 de la Géométrie plane.

Un angle dièdre est dit *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à l'angle dièdre droit. Deux angles dièdres sont *complémentaires* lorsque leur somme est égale à un angle dièdre droit.

454. *Tout plan* P *qui en rencontre un autre* QQ' *fait avec celui-ci deux angles dièdres adjacents* PABQ, PABQ', *dont la somme est égale à deux dièdres droits* (*fig.* 252). Réciproquement, *si deux angles dièdres adjacents* PABQ, PABQ', *sont supplémentaires, c'est-à-dire ont une somme égale à deux*

dièdres droits, leurs faces non communes Q *et* Q′ *sont dans le prolongement l'une de l'autre.* (*Voir* les nos 17 et 19.)

455. *Lorsque deux plans* PP′, QQ′, *se coupent, les angles dièdres opposés par l'arête* AB *sont égaux* (*fig.* 252). (*Voir* le n° 22.)

THÉORÈME.

456. *Le rapport de deux angles dièdres est égal au rapport de leurs angles plans.*

Il faut d'abord établir que, lorsque les angles plans de deux angles dièdres sont égaux, ces angles dièdres sont eux-mêmes égaux.

Soient (*fig.* 254) les dièdres AB, EF, dont les angles plans CBD, GFH, sont supposés égaux. Portons le second dièdre sur le premier, de manière que l'angle GFH coïncide avec son égal CBD : l'arête FE, perpendiculaire au point F au plan GFH, prendra la direction de l'arête BA, perpendiculaire au point B au plan CBD (427). Les deux plans ABC, EFG, auront alors

Fig. 254.

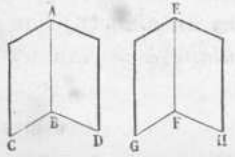
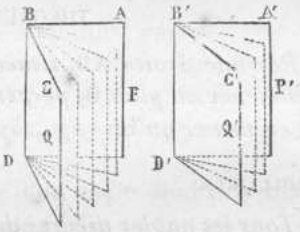


Fig. 255.



deux droites communes et coïncideront (390, 3°); il en sera de même des plans ABD, EFH. Les deux angles dièdres AB et EF, coïncident donc et sont égaux.

Cela posé, soient les deux dièdres PBDQ et P′B′D′Q′ (*fig.* 255), et admettons que le rapport de leurs angles plans ABC, A′B′C′, soit égal à $\frac{5}{3}$, c'est-à-dire que ces deux angles plans aient une commune mesure contenue cinq fois dans ABC et trois fois dans A′B′C′. Si, par chaque rayon de division et par chaque arête correspondante, on fait passer des plans, on partage l'angle PBDQ en cinq angles dièdres partiels et l'angle P′B′D′Q′ en trois angles dièdres partiels. Ces angles dièdres

partiels sont tous égaux entre eux, comme correspondant à des angles plans égaux, et l'un d'eux est une commune mesure des angles dièdres PBDQ, P'B'D'Q'. Le rapport des deux angles dièdres est donc égal à $\frac{5}{3}$, comme celui de leurs angles plans.

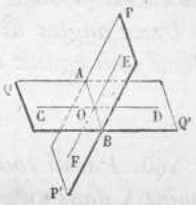
Si les deux angles plans n'avaient pas de commune mesure, on suivrait la marche déjà indiquée (105).

COROLLAIRE.

457. *L'angle dièdre droit a pour angle plan un angle droit*, et, réciproquement, *à un angle plan droit correspond un angle dièdre droit* (*fig.* 256).

En effet, soient PABQ, PABQ', deux angles dièdres adjacents déterminés par la rencontre des plans P et Q. Par un point O de l'arête commune AB, menons un plan perpendiculaire à cette arête : il coupera les plans P et Q suivant les droites EF et CD, et ces droites formeront deux angles adjacents EOC, EOD, qui seront les angles plans des deux angles dièdres considérés. Si ces angles dièdres sont égaux ou droits, il en sera donc de même de leurs angles plans, et réciproquement (456).

Fig. 256.



THÉORÈME.

458. *Si l'on fait correspondre l'unité d'angle dièdre à l'unité d'angle plan, le même nombre abstrait représente la mesure de l'angle dièdre et celle de son angle plan.*

L'angle droit étant l'unité d'angle plan, on prend pour unité d'angle dièdre l'angle dièdre droit (457). Si l'on suppose l'angle A'B'C' droit dans la *fig.* 255, on a donc (456)

$$\frac{\text{PBDQ}}{1^{\text{D.d.}}} = \frac{\text{ABC}}{1^{\text{d}}}.$$

Le rapport de PBDQ à un dièdre droit est la mesure de l'angle dièdre PBDQ, le rapport de ABC à un droit est la mesure de l'angle plan ABC (106) : les deux mesures sont donc bien exprimées par le même nombre abstrait.

En ayant toujours présentes les explications qui précèdent,

on peut employer sans inconvénient la locution plus rapide, mais inexacte : *Tout angle dièdre a pour mesure son angle plan.*

Lorsqu'on dit qu'un angle dièdre est un angle de 27°30′, cela veut dire que son angle plan est un angle de 27°30′ (107).

SCOLIE.

459. La proportionnalité des angles dièdres et des angles plans correspondants permet de conclure un grand nombre de propriétés des angles dièdres des propriétés analogues des angles rectilignes démontrées en Géométrie plane. Nous citerons, par exemple, les propositions suivantes, qui sont souvent utiles :

Le plan bissecteur d'un angle dièdre est le lieu des points qui, situés dans l'intérieur de cet angle, sont équidistants de ses faces. (*Voir* le n° 48.)

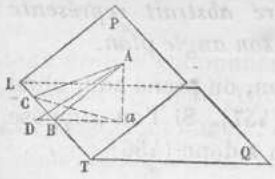
Deux angles dièdres qui ont leurs faces parallèles deux à deux sont égaux ou supplémentaires. (*Voir* le n° 57.)

THÉORÈME.

460. *Parmi toutes les droites que l'on peut mener par un point* A *dans un plan* P, *celle qui fait le plus grand angle avec un autre plan donné* Q *est la perpendiculaire* AB *abaissée du point* A *sur l'intersection* LT *des deux plans* P *et* Q (*fig.* 257).

Soient AC une droite quelconque menée par le point A dans le plan P, et a la projection du point A sur le plan Q; aB et aC seront les projections de AB et de AC, et il s'agit de démontrer (442) que l'angle ABa est plus grand que l'angle ACa. Or, la droite aB étant perpendiculaire sur LT, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, la droite aC est une oblique, et l'on a $aB < aC$. Si l'on prend sur la droite aB, à partir du point a, une longueur aD égale à aC, le point D sera donc situé au delà de B, et l'angle ABa, extérieur au triangle ABD, surpassera l'angle intérieur ADa; mais, les triangles AaC et AaD étant égaux comme ayant un angle droit compris entre deux côtés égaux, l'angle ADa est égal à l'angle ACa; donc, enfin, l'angle ABa est plus grand que l'angle ACa.

Fig. 257.



SCOLIE.

461. Lorsque le plan Q est horizontal, la droite AB prend le nom de *ligne de plus grande pente* du plan P. L'angle de cette ligne avec le plan Q est l'angle plan du dièdre PLTQ. Par chaque point d'un plan passe une ligne de plus grande pente de ce plan, et une seule.

VI. — Plans perpendiculaires.

THÉORÈME.

462. *Lorsque deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite* AB, *menée dans le premier plan* P *perpendiculairement à l'intersection commune* CD, *est perpendiculaire à l'autre plan* Q (*fig.* 258).

En effet, les deux plans P et Q étant perpendiculaires l'un à l'autre, l'angle plan correspondant à l'angle dièdre PCDQ

Fig. 258.

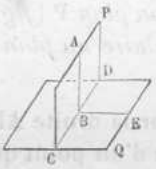
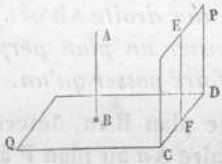


Fig. 259.



doit être droit; or on forme cet angle plan ABE en élevant, dans le plan Q et par le point B, la perpendiculaire BE à CD; donc la droite AB est perpendiculaire à BE, et, comme elle l'est aussi par hypothèse à CD, elle est perpendiculaire au plan Q.

THÉORÈME.

463. *Si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* Q, *tout plan* P *passant par cette droite ou parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan* Q.

1° Si le plan P passe par AB (*fig.* 258), menons dans le plan Q et par le point B la perpendiculaire BE à l'intersection CD des deux plans P et Q. L'angle ABE sera droit, puisque la droite AB est, par hypothèse, perpendiculaire au plan Q; d'ailleurs, cet angle ABE est l'angle plan du dièdre PCDQ; donc ce dièdre est droit, et le plan P est perpendiculaire au plan Q.

2° Si le plan P est parallèle à AB (*fig.* 259), menons par un point quelconque E de ce plan la parallèle EF à AB; cette droite EF sera à la fois perpendiculaire au plan Q et située dans le plan P. Donc le plan P, passant par une droite EF perpendiculaire au plan Q, sera perpendiculaire à ce plan (1°).

464. Réciproquement, *si deux plans* Q *et* P *sont perpendiculaires entre eux, toute droite* AB *perpendiculaire au premier plan* Q *est située dans l'autre plan* P *ou lui est parallèle.*

En effet, si la droite AB n'avait qu'un seul point commun avec le plan P, en menant de ce point une perpendiculaire sur l'intersection CD des plans P et Q (*fig.* 259), cette perpendiculaire serait perpendiculaire au plan Q, et l'on pourrait mener d'un même point deux perpendiculaires au plan Q, ce qui est impossible (427). La droite AB, ne pouvant couper le plan P, est donc parallèle à ce plan ou située dans ce plan (392).

COROLLAIRE.

465. *Par une droite* AB *oblique à un plan* P (*fig.* 260), *on peut faire passer un plan perpendiculaire au plan* P, *et l'on ne peut en faire passer qu'un.*

En effet, le plan BAa, déterminé par la droite AB et par la perpendiculaire Aa au plan P abaissée d'un point quelconque

Fig. 260.

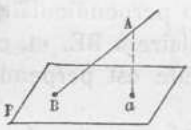
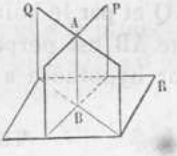


Fig. 261.



de AB, est perpendiculaire au plan P. C'est le seul, car tout plan conduit par AB perpendiculairement au plan P doit contenir la perpendiculaire Aa (464).

THÉORÈME.

466. *Si deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires à un troisième* R, *leur intersection* AB *est perpendiculaire à ce troisième plan* (*fig.* 261).

Car si, par un point quelconque de l'intersection AB, on

mène la perpendiculaire au plan R, cette perpendiculaire doit se trouver à la fois dans le plan P et dans le plan Q (464); elle ne diffère donc pas de AB.

COROLLAIRES.

467. Un plan perpendiculaire à deux plans qui se coupent est perpendiculaire à leur intersection.

468. Si les plans P et Q de la *fig.* 261 forment un angle dièdre droit, les trois plans P, Q, R, sont perpendiculaires deux à deux. On dit alors qu'ils sont perpendiculaires entre eux. L'intersection de deux de ces plans est perpendiculaire au troisième, et les trois intersections correspondantes sont perpendiculaires entre elles.

CHAPITRE II.

ANGLES POLYÈDRES.

I. — Propriétés fondamentales des angles polyèdres et, en particulier, des angles trièdres.

469. Lorsque plusieurs plans ASB, BSC, CSD, ... (*fig.* 262), se coupent successivement suivant des droites SB, SC, SD, ..., concourant en un même point S, on dit qu'ils forment un *angle polyèdre*. Le point S est le *sommet* de cet angle polyèdre, les droites SA, SB, SC, ..., sont ses *arêtes*, et les angles ASB, BSC, CSD, ..., sont ses *faces*. Enfin, les angles dièdres formés par les faces successives d'un angle polyèdre sont ses *angles dièdres*.

On désigne un angle polyèdre par la lettre du sommet suivie des lettres relatives aux diverses arêtes. Ainsi, pour indiquer l'angle polyèdre de la *fig.* 262, on dit l'angle SABCDE, ou plus simplement l'angle S, car, quand un angle polyèdre est isolé, la lettre du sommet suffit.

Il faut au moins trois plans pour former un angle polyèdre. L'angle formé par trois plans prend le nom d'*angle trièdre*. Dans un angle trièdre BACS (*fig.* 262), on distingue six éléments, savoir : les trois faces SBA, SBC, ABC, et les trois dièdres BA, BC, BS.

470. On dit qu'un angle polyèdre est *convexe* lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté par rapport au plan indéfini de chacune de ses faces (*fig.* 262); il est *concave* dans le cas contraire (*fig.* 263). Tout angle trièdre est convexe.

Tout plan qui coupe un angle polyèdre convexe, en rencontrant toutes ses arêtes d'un même côté du sommet S (*fig.* 262), donne évidemment comme intersection un polygone convexe ABCDE.

Lorsqu'un angle trièdre présente un angle dièdre droit, il est dit *rectangle*; il est *birectangle* ou *trirectangle* s'il ren-

Fig. 262.

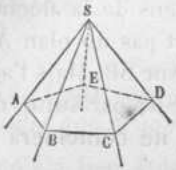


Fig. 263.

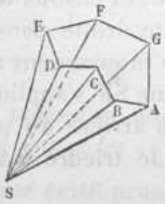
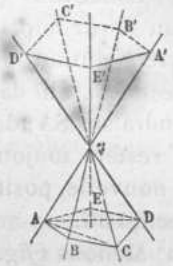


Fig. 264.



ferme deux ou trois angles dièdres droits. Le plancher ou le plafond et les murs d'un appartement se coupent en général en formant des angles trièdres trirectangles.

471. Si l'on prolonge au delà du sommet S toutes les arêtes d'un angle polyèdre SABCDE (*fig.* 264), on obtient un autre angle polyèdre SA'B'C'D'E', qui est dit le *symétrique* du premier.

Deux angles polyèdres symétriques SABCDE, SA'B'C'D'E', ont tous leurs éléments respectivement égaux : les faces ASB et A'SB', BSC et B'SC', ..., sont égales deux à deux comme angles plans opposés par le sommet, et les angles dièdres SA et SA', SB et SB', ..., sont égaux comme opposés par l'arête. Mais la disposition des parties égales n'est pas la même dans les deux angles polyèdres. En effet, un observateur couché sur l'arête SA, ayant la tête en S, les pieds en A et regardant l'intérieur de l'angle SABCDE, verra les arêtes se présenter de droite à gauche dans l'ordre SB, SC, SD, SE, tandis qu'un observateur placé de la même manière dans l'autre angle SA'B'C'D'E', c'est-à-dire couché sur SA', ayant la tête en S, les pieds en A' et regardant l'intérieur de l'angle, verra les arêtes se succéder de droite à gauche dans l'ordre inverse SE', SD', SC', SB'.

A cause de cette différence de disposition, *deux angles polyèdres symétriques, bien qu'égaux dans toutes leurs parties, ne sont pas superposables.*

En effet, considérons, par exemple, deux trièdres symétriques SABC et SA'B'C' (*fig.* 265), et supposons, pour fixer les idées, que l'arête SC soit en avant du plan ASB et, par suite,

que son prolongement SC′ soit en arrière du même plan. Il y a deux manières différentes d'essayer la superposition des deux trièdres.

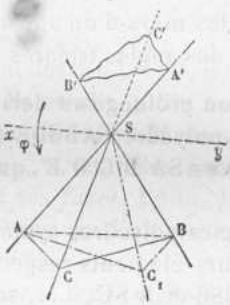
1° Concevons (*fig.* 265) la perpendiculaire élevée par le point S sur le plan ASB, et faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180° autour de cette droite dans le sens de la flèche *f*; l'arête SA′, qui dans ce mouvement ne sort pas du plan ASB, viendra sur SA; de même SB′ s'appliquera sur SB. Mais l'arête SC′ restera toujours en arrière du plan ASB; par suite, dans sa nouvelle position, le trièdre SA′B′C′ ne coïncidera pas avec SABC.

2° Menons (*fig.* 266) la bissectrice xSy de l'angle BSA′, et,

Fig. 265.



Fig. 266.



autour de cette droite, qui est située dans le plan ASB, faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180° dans le sens de la flèche φ. L'arête SA′ s'appliquera sur SB, l'arête SB′ sur SA, et, par suite, la face A′SB′ coïncidera avec BSA; de plus, l'arête SC′ viendra cette fois en avant du plan ASB. Mais la nouvelle position SC_1 de cette arête différera en général de SC; car les angles dièdres suivant les arêtes SA et SB étant en général inégaux, il en sera de même des angles dièdres SB et SA′, et, par suite, les plans CSB et C_1SB, étant inégalement inclinés sur le plan ASB, ne coïncideront pas.

On voit cependant que la coïncidence aurait lieu si le trièdre SABC était *isocèle* ou avait les deux angles dièdres SA et SB égaux entre eux, car, dans cette hypothèse, les plans C_1SB et CSB seraient également inclinés sur le plan ASB; ils tomberaient donc l'un sur l'autre. Il en serait de même des plans C_1SA et CSA, et, par suite, les arêtes SC et SC_1 se confondraient. Observons d'ailleurs que la face C′SA′, qui est égale à CSA,

s'applique alors sur CSB, de sorte que l'égalité des deux angles dièdres SA et SB entraîne celle des faces CSB et CSA. Donc, en résumé, *pour qu'un trièdre soit superposable à son symétrique, il faut et il suffit que ce trièdre ait deux angles dièdres égaux; et, dans un tel trièdre, les faces opposées aux dièdres égaux sont égales.*

THÉORÈME.

472. *Dans tout angle polyèdre, une face quelconque est moindre que la somme de toutes les autres.*

Il n'y a lieu à démontrer cette proposition que lorsque la face considérée est plus grande que chacune des autres.

Cela posé, considérons d'abord un angle trièdre SABC (*fig.* 267). Dans la face ASB, que nous supposons plus grande que chacune des deux autres, formons un angle ASD égal à ASC, et prenons, à partir de S, sur les droites SD et SC, des longueurs SC et SD égales entre elles. Par le point D, menons

Fig. 267.

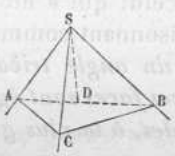
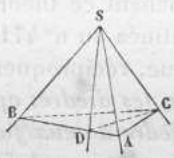


Fig. 268.



une droite ABD qui rencontre les arêtes SA et SB en A et en B; enfin, joignons le point C aux points A et B. L'égalité des deux triangles ASD, ASC, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, donne $AD = AC$, et, comme on a

$$AB \quad \text{ou} \quad AD + DB < AC + CB,$$

on voit que le segment DB est moindre que CB. Dès lors, les deux triangles CSB, DSB, ayant SB commun, $SC = SD$ et $DB < CB$, il faut (39) que l'angle DSB soit moindre que CSB. Donc, en ajoutant d'une part l'angle ASD et de l'autre son égal ASC, on a

$$ASD + DSB \quad \text{ou} \quad ASB < ASC + CSB.$$

Pour étendre le théorème au cas d'un angle polyèdre quelconque, il suffit de décomposer cet angle en trièdres en me-

nant par l'une des arêtes SA et par les arêtes opposées SC, SD, des plans diagonaux ASC, ASD (*fig.* 264); la démonstration est évidente.

COROLLAIRE.

473. *Dans tout angle trièdre, à un plus grand angle dièdre est opposée une plus grande face.*

Soit (*fig.* 268) le trièdre SABC, dans lequel l'angle dièdre SC est plus grand que l'angle dièdre SB. On pourra mener dans le dièdre SC et par l'arête SC un plan CSD qui fasse, avec le plan CSB, un angle dièdre égal au dièdre SB. Le trièdre SBCD ayant deux dièdres égaux, les faces BSD, CSD, opposées à ces angles, seront égales (471). Or le trièdre SACD donne

$$\text{ASC} < \text{ASD} + \text{DSC};$$

on aura donc, en remplaçant la face DSC par son égale DSB,

$$\text{ASC} < \text{ASD} + \text{DSB} \quad \text{ou} \quad \text{ASC} < \text{ASB}.$$

En rapprochant ce théorème de celui qui a été démontré au dernier alinéa du n° 471, et en raisonnant comme au n° 33, on verra que, réciproquement, *si un angle trièdre a deux faces égales, les dièdres opposés à ces faces sont égaux, et, si un angle trièdre a deux faces inégales, à la plus grande face est opposé le plus grand dièdre.*

THÉORÈME.

474. *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que quatre angles droits* (*fig.* 269).

En effet, soit ABCDE un polygone *convexe* obtenu en coupant l'angle polyèdre par un plan qui rencontre toutes les arêtes (470). En ajoutant les inégalités

$$\text{EAB} < \text{EAS} + \text{BAS},$$
$$\text{ABC} < \text{ABS} + \text{CBS},$$
$$\text{BCD} < \text{BCS} + \text{DCS},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

que fournissent les trièdres A, B, C, ... (472), on voit que la somme des angles intérieurs du polygone ABCDE est moindre que la somme des angles à la base des triangles SAB, SBC,

SCD, ..., qui ont S pour sommet. Or, la somme des angles *tant intérieurs qu'extérieurs* du polygone convexe ABCDE est égale à la somme de tous les angles des triangles dont S est le sommet commun, puisque le nombre des côtés du polygone et le nombre des triangles sont les mêmes. Donc, la somme des angles en S de ces triangles, c'est-à-dire la somme des faces de l'angle polyèdre, est moindre que la somme des angles extérieurs du polygone, c'est-à-dire moindre que quatre angles droits (65).

SCOLIE.

475. Il résulte des deux théorèmes précédents (472, 474) que, pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois faces données, *il faut* que la plus grande face soit inférieure à la somme des deux autres et que la somme des trois faces soit

Fig. 269.

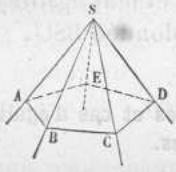
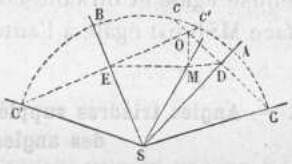


Fig. 270.



moindre que quatre angles droits. Nous allons prouver que ces deux conditions sont *suffisantes*.

Soient (*fig.* 270) ASB la plus grande face, et ASC, BSC', les deux autres faces rabattues dans le plan de la première, de part et d'autre de celle-ci; SC et SC' sont les deux droites provenant du dédoublement de la troisième arête.

Décrivons du point S comme centre un arc de cercle CC' de rayon arbitraire; cet arc est moindre qu'une circonférence, puisque la somme des trois faces données est inférieure à quatre angles droits. Cc et $C'c'$ étant les cordes menées des points C et C' perpendiculairement aux arêtes SA et SB, les arcs AC et Ac sont égaux entre eux, ainsi que les arcs BC' et Bc'; par suite, la relation

$$\text{arc AB} < \text{arc AC} + \text{arc BC'},$$

qui exprime que la plus grande face ASB est inférieure à la somme des deux autres, peut s'écrire

$$\text{arc AB} < \text{arc A}c + \text{arc B}c';$$

elle montre que le point c tombe entre B et c', que c' tombe entre c et A et, par conséquent, que les deux cordes Cc et $C'c'$ se croisent en un point O intérieur au cercle CC'.

Élevons au point O la perpendiculaire OM au plan ASB, et dans le plan DOM décrivons du point D comme centre, avec un rayon égal à DC, un arc de cercle qui coupera nécessairement la perpendiculaire OM, puisque OD est moindre que DC. M étant le point d'intersection, menons SM : le trièdre SABM sera formé avec les trois faces données. En effet, si l'on tire MD et ME, ces droites seront respectivement perpendiculaires sur SA et sur SB, en vertu du théorème des trois perpendiculaires; dès lors, les deux triangles SDM, SDC, sont égaux comme ayant un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; on en conclut d'abord que la face ASM est égale à la face donnée ASC et que l'arête SM est égale à SC. Les deux triangles rectangles SME, SC'E, ont donc l'hypoténuse égale et un côté commun, et leur égalité prouve que la face MSB est égale à l'autre face donnée BSC'.

II. — Angles trièdres supplémentaires et cas d'égalité des angles trièdres.

THÉORÈME.

476. *Si un angle trièdre* SA'B'C' *est le trièdre supplémentaire d'un angle trièdre donné* SABC, *réciproquement* SABC *sera le trièdre supplémentaire de* SA'B'C'.

Pour bien comprendre la définition du trièdre supplémentaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque (1). Par un point O d'un plan P, menons une perpendiculaire OM à ce plan et une oblique ON. Si les deux droites OM et ON *sont d'un même côté du plan* P, l'angle MON qu'elles forment est *aigu* (*fig.* 271), car il est compris dans l'un des angles droits MOT ou MOT' que fait la perpendiculaire OM avec la trace TOT' du plan MON sur le plan P. Si les deux droites OM et ON sont *situées de part et d'autre* du plan P, l'angle MON est *obtus* (*fig.* 272), car il contient l'un des angles MOT ou MOT'. Donc, réciproquement, suivant que

(1) *Voir* TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition, 1891.

l'angle MON est aigu ou obtus, on peut affirmer que la perpendiculaire OM et l'oblique ON sont d'un même côté du plan P ou de part et d'autre de ce plan.

Cela posé, on nomme *trièdre supplémentaire* d'un trièdre SABC (*fig.* 273) un nouveau trièdre SA'B'C' formé de la manière suivante.

Par le sommet S, on élève une perpendiculaire SC' à la

Fig. 271.

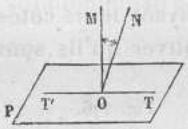


Fig. 272.

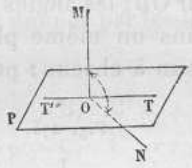
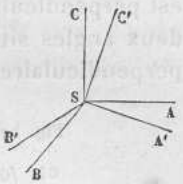


Fig. 273.



face ASB, du même côté que SC par rapport au plan de cette face; on mène SB' perpendiculaire à la face ASC, du même côté que SB par rapport au plan ASC, et l'on trace enfin SA' perpendiculaire à la face BSC, du même côté que SA par rapport au plan BSC.

Il s'agit maintenant de démontrer que le trièdre SABC résulte du trièdre SA'B'C', comme celui-ci du premier, ou, en d'autres termes, que l'arête SC, par exemple, est perpendiculaire à la face A'SB' et du même côté que SC' par rapport au plan de cette face. Or, par hypothèse, SA' est perpendiculaire au plan BSC et, par suite, à SC; de même, SB' est perpendiculaire à SC comme perpendiculaire au plan ASC; donc SC est perpendiculaire au plan A'SB'. De plus, SC' ayant été mené perpendiculairement au plan ASB et du côté de SC, l'angle CSC' est aigu; par suite, la perpendiculaire SC au plan A'SB' et l'oblique SC' formant un angle aigu, ces deux droites sont situées d'un même côté par rapport à ce plan A'SB'.

THÉORÈME.

477. *Si* SABC *et* SA'B'C' *sont deux trièdres supplémentaires, chaque angle dièdre de l'un de ces trièdres est le supplément de la face qui lui est opposée dans l'autre* (*fig.* 274).

La démonstration est fondée sur la remarque suivante :

Lorsque, par un point O *pris sur l'arête d'un angle dièdre* OI,

on élève sur la face IOA *une perpendiculaire* OA′ *du même côté du plan* IOA *que la face* IOB, *et sur la face* IOB *une perpendiculaire* OB′ *du même côté du plan* IOB *que la face* IOA, *l'angle* A′OB′ *est le supplément de l'angle plan* AOB *qui mesure le dièdre* OI (*fig.* 275, 276).

En effet, les quatre droites OA, OB, OA′, OB′, sont dans le plan perpendiculaire à OI mené par O ; d'ailleurs, OA′, perpendiculaire au plan IOA, est perpendiculaire à OA, et de même OB′ est perpendiculaire sur OB ; les angles AOB, A′OB′, sont donc deux angles situés dans un même plan et ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun ; pour prouver qu'ils sont

Fig. 274.

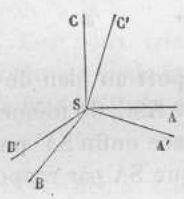


Fig. 275.

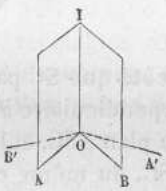
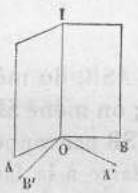


Fig. 276.



supplémentaires, il suffit de prouver qu'ils sont toujours d'espèce différente, c'est-à-dire l'un aigu, l'autre obtus. Or, cela résulte de la direction que l'énoncé impose aux perpendiculaires OA′ et OB′. Car, si l'angle AOB est aigu (*fig.* 275), l'angle A′OB′ renferme l'angle droit AOA′ et, par suite, est obtus ; si l'angle AOB est obtus (*fig.* 276), l'angle A′OB′ est contenu dans l'angle droit AOA′ et, par suite, est aigu.

Cela posé, revenons aux trièdres supplémentaires SABC, SA′B′C′ (*fig.* 274), et considérons, par exemple, le dièdre SC. La droite SB′ est une perpendiculaire à la face ASC de ce dièdre du côté de SB, et par suite du côté de l'autre face BSC ; de même, SA′ est une perpendiculaire à la face BSC du dièdre, du côté de la face ASC ; donc, l'angle A′SB′ est le supplément de l'angle qui mesure le dièdre SC ou, plus brièvement, le supplément du dièdre SC. On procéderait de même pour les dièdres SA et SB.

Puisque les deux trièdres SABC, SA′B′C′, se déduisent l'un de l'autre par la même construction, il est clair que la propriété qui vient d'être établie pour les dièdres du premier s'étend aux dièdres du second.

C'est en raison de cette double propriété que les deux trièdres ont été appelés *supplémentaires*.

SCOLIE.

478. Désignons par a, b, c, les nombres qui mesurent les faces et par A, B, C, les nombres qui mesurent les angles dièdres d'un angle trièdre, l'angle droit étant pris pour unité d'angle. Les nombres a', b', c', qui mesureront les faces et ceux A', B', C', qui mesureront les angles dièdres du trièdre supplémentaire, seront donnés par les formules

$$a' = 2 - A, \quad A' = 2 - a,$$
$$b' = 2 - B, \quad B' = 2 - b,$$
$$c' = 2 - C, \quad C' = 2 - c.$$

Si l'on connaît une propriété quelconque d'un angle trièdre, c'est-à-dire une relation entre ses éléments a, b, c, A, B, C, en appliquant cette relation aux éléments a', b', c', A', B', C', du trièdre supplémentaire, puis en remplaçant ces éléments par leurs valeurs tirées des formules précédentes, on aura une relation nouvelle entre a, b, c, A, B, C, c'est-à-dire une nouvelle propriété du trièdre primitif.

De même, toute propriété relative à plusieurs trièdres *conduira*, par la considération des trièdres supplémentaires des proposés, à une propriété nouvelle de ce système de trièdres.

On conçoit par là l'importance du théorème précédent. Voici d'ailleurs quelques applications de la méthode générale que nous venons d'indiquer.

479. Nous avons vu (474) que la somme des faces d'un trièdre était toujours comprise entre zéro et quatre angles droits. Cherchons le théorème correspondant, ou, comme on dit, le théorème *corrélatif*. Considérons à cet effet le trièdre supplémentaire du proposé; a', b', c', étant ses faces, on a

$$0 < a' + b' + c' < 4.$$

Par suite, A, B, C, étant les dièdres du trièdre proposé, on a

$$0 < (2 - A) + (2 - B) + (2 - C) < 4$$

ou

$$6 > A + B + C > 2.$$

Ainsi, la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre deux droits et six droits.*

Nous avons vu encore (472) que, dans tout trièdre, la plus grande face est moindre que la somme des deux autres : quel est le théorème corrélatif?

Soient a', b', c', les faces du trièdre supplémentaire du trièdre considéré. a' étant la plus grande, on a

$$a' < b' + c';$$

par suite, si A, B, C, sont les dièdres du trièdre proposé, on aura

$$2 - A < (2 - B) + (2 - C) \quad \text{ou} \quad A + 2 > B + C.$$

D'ailleurs, le supplément d'un angle diminuant quand cet angle augmente, A doit être le plus petit des dièdres A, B, C, puisque a' est la plus grande des faces a', b', c'. Donc enfin la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, le plus petit angle dièdre, augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres dièdres.*

480. En résumé, pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois dièdres donnés A, B, C, *il faut* que leur somme soit comprise entre deux droits et six droits, et que le plus petit augmenté de deux droits soit supérieur à la somme des deux autres.

Ces conditions sont *suffisantes*, car, quand elles sont remplies, les suppléments a', b', c', des angles donnés A, B, C, satisfont aux deux conditions du n° 475. On peut donc, avec les trois faces a', b', c', construire un trièdre et un seul; puis, en construisant le trièdre supplémentaire de celui-là, on obtient le trièdre dont les dièdres sont les angles donnés A, B, C.

THÉORÈME.

481. *Deux angles trièdres sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés;*

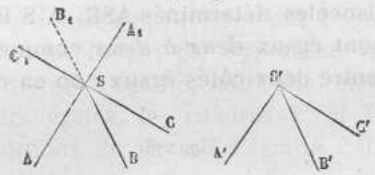
2° *Lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées;*

3° *Lorsqu'ils ont leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées;*

4° *Lorsqu'ils ont leurs angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

1° Soient les deux trièdres SABC et S'A'B'C' (*fig.* 277). Par hypothèse, la face ASB est égale à la face A'S'B', les angles dièdres SA et S'A' sont égaux entre eux, ainsi que les dièdres SB et S'B'. On suppose en outre que la disposition des élé-

Fig. 277.



ments comparés est la même, c'est-à-dire que, si un observateur dont la tête est en S, le dos appuyé sur la face ASB et le regard dirigé vers SC, a l'arête SA à sa gauche et l'arête SB à sa droite, un autre observateur, dont la tête serait en S', le dos appuyé sur la face A'S'B' et le regard dirigé vers S'C', aurait l'arête S'A' à sa gauche et l'arête S'B' à sa droite.

Dans ces conditions, les deux trièdres sont égaux, c'est-à-dire superposables. En effet, si l'on place la face A'S'B' sur son égale ASB, de façon que S'A' coïncide avec SA et S'B' avec SB, l'arête S'C' tombe, par rapport au plan ASB, du même côté que SC, d'après ce qu'on vient de dire sur la disposition des éléments. Alors, les dièdres SA et S'A' étant égaux, le plan A'S'C' s'applique sur le plan ASC; de même, les dièdres SB et S'B' étant égaux, le plan B'S'C' s'applique sur le plan BSC; donc enfin, les arêtes S'C' et SC se confondent, et les deux trièdres coïncident.

2° Le second cas résulte du précédent, dont il est le *corrélatif* (479). En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont une face égale adjacente à deux dièdres respectivement égaux et semblablement disposés; ils sont donc superposables, et, par suite, il en est de même des trièdres primitifs.

D'ailleurs, la démonstration directe n'offre aucune difficulté: on voit, par un raisonnement analogue au précédent (1°), que la superposition est possible si, conformément à l'hypothèse, la disposition des éléments est la même.

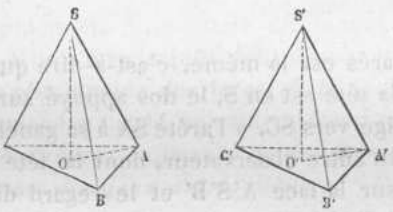
3° Pour le troisième cas, on pourrait suivre la méthode

de réduction à l'absurde, en étendant aux angles trièdres les propositions démontrées pour les triangles aux n° 38 et 39.

Voici d'ailleurs une démonstration directe très simple :

Prenons (*fig.* 278) sur les arêtes du premier trièdre des longueurs SA = SB = SC. Prenons aussi sur les arêtes du second trièdre des longueurs S'A', S'B', S'C', égales entre elles et à SA. Formons ensuite les triangles ABC, A'B'C'. Les six triangles isocèles déterminés ASB, A'S'B', ASC, A'S'C', BSC, B'S'C', sont égaux *deux à deux* comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux : on en conclut l'égalité

Fig. 278.



des côtés AB et A'B', AC et A'C', BC et B'C', c'est-à-dire l'égalité des triangles ABC, A'B'C'. Abaissons du point S la perpendiculaire SO sur le plan ABC; les trois obliques SA, SB, SC, étant égales, le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (404). Si l'on abaisse de même S'O' perpendiculaire sur le plan A'B'C', le point O' est le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'. Si l'on transporte alors le triangle A'B'C' sur son égal ABC, le point O' tombe au point O et la droite O'S' prend la direction OS. Mais les deux triangles rectangles SAO, S'A'O', sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal (OA = O'A'). Il en résulte O'S' = OS, le sommet S' se confond avec le sommet S, et les deux angles trièdres ayant les mêmes arêtes coïncident.

4° Le dernier cas résulte du précédent, dont il est le *corrélatif*. En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont leurs faces respectivement égales et semblablement disposées; ils sont donc superposables, et, par suite, il en est de même des trièdres primitifs.

SCOLIE.

482. Si, dans chacun des quatre cas examinés, la disposition des éléments égaux était différente dans les deux trièdres, il n'y aurait plus *égalité*, mais seulement *symétrie*. En effet, soient T et T′ les deux trièdres proposés, et T_1 le symétrique de T, c'est-à-dire celui que l'on déduit de T en prolongeant ses arêtes au delà du sommet (*fig.* 265). Les trièdres T et T_1 ont leurs éléments égaux et inversement disposés; par suite, comme T et T′ remplissent par hypothèse toutes les conditions de l'un des cas d'égalité, sauf celle relative à la disposition des parties égales, les trièdres T′ et T_1 satisferont à toutes les conditions de ce cas d'égalité : ils seront donc superposables, d'où l'on voit que T′ est superposable au symétrique de T.

483. On a pu se rendre suffisamment compte, dans le courant de ce paragraphe, de l'analogie entre certaines propriétés des trièdres et des triangles rectilignes. Il importe toutefois d'observer, en terminant, que, si à toute propriété des triangles répond une propriété des trièdres, la réciproque n'est pas vraie; par exemple, tandis que l'égalité des angles dièdres de deux trièdres entraîne l'égalité de leurs faces, l'égalité des angles de deux triangles n'entraîne que la proportionnalité de leurs côtés.

THÉORÈME.

484. *Deux angles polyèdres de même espèce sont égaux lorsque, sauf une face et les deux dièdres adjacents, tous leurs autres éléments sont égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

La superposition s'opère en effet directement et de proche en proche, les faces qui comprennent celle qui est exceptée sur les deux angles polyèdres arrivant nécessairement à coïncider deux à deux.

Lorsque les éléments égaux se succèdent en ordre inverse dans les deux angles polyèdres, le second est évidemment égal au symétrique du premier (471).

On voit, par ce théorème, qu'un angle polyèdre de n faces est déterminé par $n-1$ faces et $n-2$ angles dièdres. La

détermination d'un pareil angle polyèdre exige donc $2n-3$ conditions.

III. — Exercices et questions complémentaires.

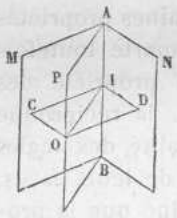
PROBLÈME.

485. *Trouver le lieu géométrique des points également distants des trois faces d'un angle trièdre.*

Nous avons déjà remarqué (459) que le lieu géométrique des points qui, situés *à l'intérieur* d'un angle dièdre, sont équidistants de ses faces, est le *plan bissecteur* de ce dièdre. On peut d'ailleurs le démontrer comme il suit.

Soient (*fig.* 279) MAB, NAB, deux plans dont l'intersection est AB; soit O un point du lieu. Abaissons de ce point sur les deux plans les perpendiculaires OC et OD : elles déterminent un plan perpendiculaire à l'arête AB au point I (413, 417). Les deux triangles rectangles OCI, ODI, sont égaux comme ayant l'hypoténuse OI commune et un côté de l'angle droit égal (OC = OD). Par suite, il en est de même des angles CIO et DIO. Si l'on mène par la droite IO et l'arête AB un plan PAB, ce plan partage l'angle dièdre MABN en deux parties égales, puisque les angles plans CIO, DIO, mesurent respectivement les dièdres MABP, PABN (405). Le lieu cherché se confond donc bien avec le *plan bissecteur* de l'angle dièdre proposé.

Fig. 279.



Si l'on prolonge maintenant les faces de l'angle dièdre MABN au delà de l'arête AB, on forme autour de AB quatre angles dièdres, deux à deux opposés par le sommet et deux à deux supplémentaires. Le lieu des points de l'espace également distants des deux plans donnés prolongés au delà de AB se compose alors évidemment, d'après ce qui précède, des plans bissecteurs, perpendiculaires entre eux et prolongés au delà de AB, de deux de ces angles supplémentaires.

Cela posé, considérons un angle trièdre SABC. D'après ce que nous venons de dire, le lieu des points qui, situés *à l'intérieur* de cet angle trièdre, sont à égale distance de ses trois faces, est l'intersection commune des plans bissecteurs des trois dièdres SA, SB, SC. En effet, l'intersection des deux premiers plans bissecteurs, ayant tous ses points à égale distance des trois faces, appartient nécessairement au troisième plan bissecteur.

Mais, en prolongeant les arêtes de l'angle trièdre donné au delà de son

sommet S, on forme autour de S huit angles trièdres deux à deux symétriques (471) ; car, deux des faces prolongées du trièdre formant, comme on vient de le voir, quatre angles dièdres, la troisième face constitue dans chacun de ces dièdres deux angles trièdres. Le lieu des points de l'espace équidistants des trois plans donnés ASB, BSC, CSA, supposés prolongés indéfiniment, est donc composé de huit droites passant par le point S et situées *à l'intérieur* de chacun des huit angles trièdres indiqués. Il est clair d'ailleurs que les deux droites qui répondent à deux angles trièdres symétriques sont en prolongement l'une de l'autre. *Le lieu cherché se compose* donc, en réalité, *de quatre droites, une intérieure, les trois autres extérieures à l'angle trièdre donné* SABC, *et concourant au sommet* S.

Les trois droites extérieures représentent respectivement l'intersection commune du plan bissecteur d'un dièdre *intérieur* au trièdre donné avec les plans bissecteurs de deux dièdres *extérieurs* à ce même trièdre et non adjacents au dièdre intérieur considéré.

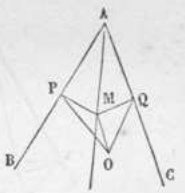
PROBLÈME.

486. *Trouver le lieu géométrique des points également distants des trois arêtes d'un angle trièdre.*

Nous commencerons par chercher le lieu des points de l'espace également distants des côtés d'un angle donné.

Soient BAC l'angle donné et O un point du lieu (*fig.* 280). Abaissons de ce point OM perpendiculaire sur le plan BAC. Du pied M de cette perpendiculaire, menons sur les côtés de l'angle donné les perpendiculaires MP, MQ ; puis, joignons OP et OQ. Les droites OP et OQ, représentant les distances du point O aux côtés AB et AC (407), sont égales par hypothèse. Les triangles rectangles OMP, OMQ, sont donc aussi égaux, et l'on a MP = MQ, c'est-à-dire que le point M appartient à la bissectrice de l'angle BAC. Les perpendiculaires abaissées des points du lieu sur le plan BAC ayant leurs pieds sur la bissectrice AM, le lieu demandé est le plan conduit perpendiculairement au plan BAC par cette même bissectrice.

Fig. 280.



Si l'on regarde les côtés de l'angle BAC comme indéfiniment prolongés, le lieu se compose de deux plans distincts menés par les bissectrices des angles supplémentaires formés par ces côtés. Ces plans sont perpendiculaires entre eux, car leur angle dièdre est précisément mesuré par l'angle des bissectrices des deux angles supplémentaires.

Cela posé, considérons un angle trièdre SABC. D'après ce qu'on vient de dire, le lieu des points de l'espace équidistants des deux arêtes SA et SB indéfiniment prolongées, se compose des deux plans menés perpendiculairement à la face ASB par les bissectrices des angles supplémentaires formés par ces deux arêtes. De même, le lieu des points de l'espace

équidistants des deux arêtes SB et SC, aussi prolongées, se compose de deux autres plans menés perpendiculairement à la face BSC par les bissectrices des angles supplémentaires formés par ces deux arêtes. Le lieu cherché est donc formé par les intersections mutuelles des quatre plans indiqués, qui se croisent au point S, les deux premiers devant être combinés successivement avec les deux autres. *Le lieu géométrique des points de l'espace équidistants des trois arêtes du trièdre* SABC *se compose,* par suite, *de quatre droites concourant au sommet* S.

THÉORÈME.

487. *Démontrer que les plans menés perpendiculairement aux faces d'un angle trièdre par les arêtes opposées à ces faces, se croisent suivant une même droite* (*fig.* 281).

Soit l'angle trièdre SABC. Menons par l'arête SA le plan ASa, perpendiculaire sur la face BSC et, par l'arête SB, le plan BSb, perpendiculaire sur la face ASC. Par un point quelconque C de la troisième arête, abaissons CB perpendiculaire sur Sa, CA perpendiculaire sur Sb, et joignons les points A et B. La droite CB étant, dans le plan BSC, perpendiculaire sur l'intersection Sa de ce même plan et du plan ASa, qui lui est perpendiculaire, est perpendiculaire au plan ASa (462), et par suite à Aa. On prouve de la même manière que CA est perpendiculaire sur Bb. Aa et Bb sont donc

Fig. 281.

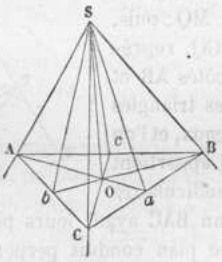
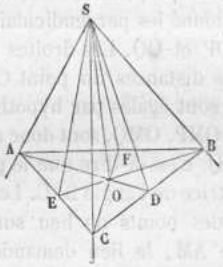


Fig. 282.



deux hauteurs du triangle ABC, et leur point d'intersection O appartient à la troisième hauteur Cc de ce triangle (81). Le plan ABC étant à la fois perpendiculaire aux plans ASa, BSb, comme contenant deux droites perpendiculaires à ces plans (463), est aussi perpendiculaire à leur intersection SO (467). Dès lors, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, AB, perpendiculaire à Cc, l'est aussi à Sc, c'est-à-dire au plan CSc de ces deux droites. Ce plan est donc le troisième plan mené perpendiculairement par l'arête SC sur la face ASB, et la proposition énoncée est démontrée.

THÉORÈME.

488. *Démontrer que les plans menés par les arêtes d'un angle trièdre et les bissectrices des faces opposées à ces arêtes se croisent suivant une même droite* (*fig.* 282).

Prenons sur les arêtes de l'angle trièdre trois longueurs égales SA = SB = SC, de manière à former les triangles isocèles SAB, SAC, SBC. Les bissectrices des angles au sommet de ces triangles isocèles passeront par les milieux des bases de ces mêmes triangles, c'est-à-dire par les milieux des côtés du triangle ABC. Les médianes AD, BE, CF, de ce triangle, se coupant en un même point O (84), les trois plans ASD, BSE, CSF, se coupent suivant la même droite SO.

LIVRE CINQUIÈME.

LES AIRES ET LES VOLUMES DES CORPS.

CHAPITRE PREMIER.

LES PRISMES ET LES CYLINDRES.

I. — Définitions préliminaires.

489. Un corps terminé par une surface fermée de forme quelconque occupe une certaine portion limitée de l'espace qui constitue ce qu'on appelle son *volume* (2).

Les volumes de deux corps sont *égaux* (7) lorsqu'on peut les placer exactement l'un dans l'autre, c'est-à-dire les faire *coïncider*.

Ajouter les volumes de plusieurs corps, c'est les disposer à la suite les uns des autres, dans un ordre d'ailleurs quelconque, de manière qu'ils n'aient aucune partie intérieure commune et qu'ils ne se relient que par certaines portions de leurs surfaces.

Si un volume A est ainsi la *somme* de deux volumes B et C, le volume C, à son tour, est la *différence* des deux volumes A et B.

490. *Mesurer* un volume limité, c'est trouver son rapport à un autre volume limité pris pour *unité*.

Deux volumes limités peuvent n'être pas *superposables* et contenir cependant le même nombre d'unités de volume. On

dit alors que ces deux volumes sont *équivalents* (7). Par exemple, si l'on ajoute trois volumes quelconques A, B, C, d'abord dans l'ordre ABC, puis dans l'ordre ACB, puis enfin dans l'ordre CAB, les volumes *sommes* obtenus ne sont pas, en général, superposables; mais ils renferment évidemment le même nombre d'unités de volume et sont équivalents.

Si, à des volumes équivalents, on ajoute ou l'on retranche d'autres volumes équivalents, les sommes ou les différences ainsi formées sont encore équivalentes. De même, si l'on divise deux volumes équivalents en un même nombre de parties équivalentes, les parties du premier sont équivalentes à celles du second.

491. Le problème de la mesure des volumes limités présente, comme celui de la mesure des aires des surfaces planes limitées (241), un caractère particulier, à cause de la difficulté de porter à l'intérieur du volume considéré, pour effectuer la comparaison nécessaire, le volume choisi pour unité. On ne peut donc résoudre ce problème *directement* que dans un très petit nombre de cas simples. Mais, une fois ces solutions obtenues, les considérations d'équivalence et la théorie des limites permettent de passer à des cas plus compliqués.

Nous indiquerons d'abord les définitions suivantes.

492. On appelle *polyèdre* tout corps terminé de toutes parts par des plans.

Ces plans, en se limitant mutuellement, déterminent les *arêtes*, les *faces* et les *sommets* du polyèdre. Les angles dièdres et polyèdres formés par les faces sont les angles dièdres et polyèdres de la figure. Le polyèdre a pour *diagonales* les droites qui unissent deux sommets quelconques non situés sur une même face.

On a donné des noms particuliers à certains polyèdres d'après le nombre de leurs faces. Ainsi, tout polyèdre ayant quatre faces est un *tétraèdre*. Les noms *hexaèdre*, *octaèdre*, *dodécaèdre*, *icosaèdre*, correspondent aux polyèdres de six, huit, douze, vingt faces.

493. Un polyèdre est *convexe* lorsqu'il reste tout entier d'un même côté de chacune de ses faces prolongées indéfiniment.

Une droite quelconque ne peut rencontrer la surface d'un polyèdre convexe en plus de deux points, car tout plan mené suivant cette droite rencontre nécessairement la surface du polyèdre suivant un polygone convexe (62), dont le contour a, avec la droite donnée, les mêmes points d'intersection que la surface du polyèdre.

Dans ce qui suit, il ne s'agira que de polyèdres convexes.

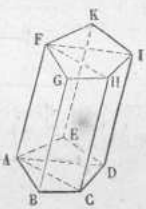
494. Parmi les polyèdres, on distingue le *prisme* et la *pyramide*. Nous considérerons d'abord le prisme.

Le *prisme* est un polyèdre compris sous plusieurs plans parallélogrammes réunis entre eux par deux faces opposées égales et parallèles.

On construit un prisme de la manière suivante :

Soit (*fig.* 283) ABCDE un polygone plan quelconque. Par le sommet A, menons extérieurement au plan de ce polygone la droite AF et, par le point F, un plan parallèle au plan ABCDE; puis, par les sommets B, C, D, E, traçons, jusqu'à la rencontre du plan mené par le point F, les droites BG, CH, DI, EK, parallèles à AF. Ces droites sont toutes égales à AF (429, 2°); toutes les faces ABGF, BCHG, CDIH, ..., sont donc des parallélogrammes. De plus, les deux polygones parallèles ABCDE, FGHIK, sont égaux, comme ayant leurs côtés égaux et parallèles. Le polyèdre obtenu est donc un prisme.

Fig. 283.



495. Si la droite AF est perpendiculaire au plan ABCDE, le prisme est *droit;* sinon, il est *oblique*.

Les droites AF, BG, CH, ..., sont les *arêtes latérales* du prisme, et la somme des faces parallélogrammes ABGE, BCHG, ..., forme son aire latérale.

Le prisme a pour *bases* les deux polygones égaux et parallèles ABCDE, FGHIK, et sa *hauteur* est la distance des plans de ses deux bases.

496. Dans un prisme droit, chaque arête latérale est égale à la hauteur. Les faces latérales d'un prisme droit sont des rectangles.

Dans un prisme oblique, la hauteur est moindre que l'arête latérale.

Un prisme *régulier* est un prisme droit qui a pour bases des polygones réguliers.

497. Suivant que les bases d'un prisme sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, des hexagones, etc., le prisme est dit *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *hexagonal*, etc.

498. Parmi les prismes quadrangulaires, on distingue celui qui a pour bases des parallélogrammes, et on lui donne le nom de *parallélipipède*. Toutes les faces d'un parallélipipède sont des parallélogrammes (*fig.* 284).

Un parallélipipède peut être *droit* ou *oblique* (496).

Parmi les parallélipipèdes droits, on distingue le *parallélipipède rectangle*, dont les bases sont des rectangles. Toutes

Fig. 284.

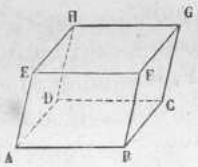


Fig. 285.

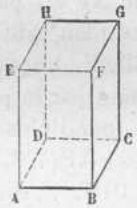
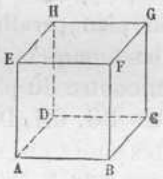


Fig. 286.



les faces d'un parallélipipède rectangle sont des rectangles (*fig.* 285).

On nomme *cube* le parallélipipède rectangle dont les bases et les faces latérales sont des carrés, nécessairement égaux (*fig.* 286).

On remarquera que, la perspective déformant les angles, la *fig.* 285 représente aussi bien un parallélipipède droit qu'un parallélipipède rectangle.

499. De même qu'on appelle *dimensions* d'un rectangle les longueurs de deux côtés adjacents, on appelle *dimensions* d'un parallélipipède rectangle les longueurs de trois arêtes contiguës, c'est-à-dire partant d'un même sommet. Le parallélipipède rectangle AG (*fig.* 285) a pour dimensions les longueurs des arêtes AB, AD, AE.

500. *L'unité de volume est*, en général, *le cube construit sur l'unité de longueur, c'est-à-dire le mètre cube.*

Par conséquent, évaluer le volume d'un corps, c'est chercher combien ce volume renferme de mètres cubes et de subdivisions du mètre cube.

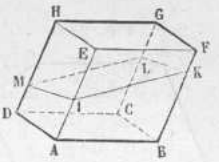
II. — Théorèmes généraux relatifs au prisme.

THÉORÈME.

501. *Les faces opposées d'un parallélipipède sont égales et parallèles.*

Soit (*fig.* 287) le parallélipipède AG. Ses bases ABCD, EFGH, sont, par définition, des parallélogrammes égaux et parallèles. Il faut donc prouver seulement que deux faces latérales opposées, ADHE et BCGF par exemple, remplissent la même condition. Or, AD et BC sont égaux et parallèles comme côtés opposés du parallélogramme ABCD; AE et BF sont aussi égaux et parallèles comme côtés opposés du parallélogramme ABFE. Par suite, les deux angles DAE et CBF sont égaux, et leurs plans sont parallèles. Les deux parallélogrammes ADHE, BCGF, sont donc égaux et parallèles.

Fig. 287.



Corollaires.

502. Le parallélipipède étant un prisme compris sous six faces parallélogrammes dont les opposées sont égales et parallèles, *on peut prendre pour bases d'un parallélipipède deux faces opposées quelconques* (494).

503. *Tout plan qui rencontre deux faces opposées d'un parallélipipède le coupe suivant un parallélogramme.* Soit le plan IKLM (*fig.* 287) qui rencontre les deux faces opposées ADHE et BCGF du parallélipipède AG. Les côtés opposés de la section IKLM étant parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, cette section est un parallélogramme.

Scolie.

504. Pour construire un parallélipipède sur trois droites données AB, AD, AE, partant d'un même point A et non si-

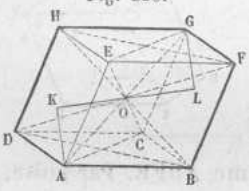
tuées dans un même plan (*fig.* 287), il suffit de mener par l'extrémité non commune de chacune de ces droites un plan parallèle au plan des deux autres. Ainsi, par le point E, on conduira un plan parallèle au plan BAD, par le point D un plan parallèle au plan BAE, par le point B un plan parallèle au plan DAE. Le polyèdre compris sous les six plans considérés sera un parallélipipède.

THÉORÈME.

505. *Dans un parallélipipède, les quatre diagonales se coupent mutuellement en parties égales.*

Considérons le parallélépipède AG et les deux diagonales BH et DF (*fig.* 288). Les arêtes latérales BF, DH, étant égales et parallèles, la figure BDHF est un parallélogramme dont les diagonales BH et DF sont inégales et se coupent mutuellement en parties égales au point O (71). Considérons les deux diagonales DF et AG. Les arêtes AD et FG étant égales et parallèles, la figure ADGF est un parallélogramme dont les diagonales DF et AG se coupent mutuellement en parties égales : le point O, étant déjà le milieu de DF, est aussi le milieu de AG; on prouverait de même qu'il est le milieu de la quatrième diagonale CE du parallélipipède.

Fig. 288.



COROLLAIRES.

506. Si le parallélipipède devient rectangle, les parallélogrammes que nous venons de considérer se transforment en rectangles, et leurs diagonales deviennent égales. *Les quatre diagonales d'un parallélipipède rectangle sont donc égales.*

507. Le point O est appelé le *centre* du parallélipipède AG, parce que toute droite limitée à la surface du parallélipipède et passant par ce point y est partagée en deux parties égales : c'est ce que les deux triangles AOK, GOL, prouvent immédiatement.

508. *Dans tout parallélipipède, la somme des carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes.*

Les parallélogrammes ACGE, BDHF, permettent de poser (175)

$$AG^2 + CE^2 = 2AE^2 + 2AC^2,$$
$$BH^2 + DF^2 = 2BF^2 + 2BD^2.$$

Si l'on ajoute ces deux égalités membre à membre, et si l'on remarque que BF = AE, il vient

$$AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = 4AE^2 + 2(AC^2 + BD^2).$$

Mais le parallélogramme ABCD donne

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2.$$

En substituant, on a donc

$$AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = 4AE^2 + 4AB^2 + 4AD^2.$$

509. Si le parallélipipède est rectangle, ses diagonales sont égales (506) et le premier membre se réduit à $4AG^2$. En divisant par 4, on obtient donc

$$AG^2 = AE^2 + AB^2 + AD^2.$$

Ainsi, *dans tout parallélipipède rectangle, le carré d'une diagonale est égal à la somme des carrés des trois arêtes qui partent d'un même sommet.* Cette relation est facile à démontrer directement. Nous ne nous y arrêterons pas.

510. Si le parallélipipède rectangle devient un cube, toutes les arêtes sont égales, et l'on a $AG^2 = 3AE^2$ ou $AG = AE\sqrt{3}$. Ainsi, *le carré de la diagonale d'un cube est égal au triple carré de son arête.* La diagonale d'un cube est donc le côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle ayant pour rayon l'arête du cube.

THÉORÈME.

511. *Les sections faites dans un prisme par deux plans parallèles sont deux polygones égaux.*

Soient (*fig.* 289) le prisme AH et les sections LMNOP, QRSTU, faites par deux plans parallèles. Les côtés de ces sections sont deux à deux parallèles, comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, et égaux, comme parallèles comprises entre parallèles. Les deux poly-

gones obtenus ont donc à la fois leurs angles égaux et leurs côtés égaux.

COROLLAIRE.

512. Lorsque le plan sécant est parallèle à la base du prisme, la section obtenue est égale à cette base.

En supposant les arêtes latérales du prisme prolongées au delà des bases, la démonstration précédente s'applique, que les sections soient intérieures ou extérieures au prisme, et même lorsqu'elles sont en partie intérieures et en partie extérieures. Il suffit que les plans sécants rencontrent toutes les arêtes latérales.

Fig. 289.

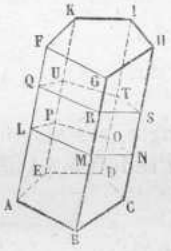
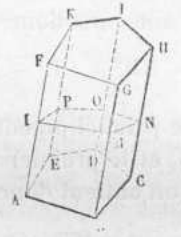


Fig. 290.



SCOLIE.

513. On appelle *section droite* d'un prisme la section déterminée dans ce prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales.

514. Si l'on détache une portion d'un prisme par un plan incliné à sa base, le polyèdre restant est un *prisme tronqué*. La section obtenue est la base supérieure du tronc de prisme.

III. — Aire et volume du prisme.

THÉORÈME.

515. *L'aire latérale d'un prisme a pour mesure le produit du périmètre de sa section droite par son arête latérale.*

Soient (*fig.* 290) le prisme AH et sa section droite LMNOP. Les côtés de cette section droite sont les hauteurs des parallélogrammes qui forment l'aire latérale du prisme, et ces

parallélogrammes ont pour bases égales les arêtes latérales du polyèdre. La somme de leurs mesures sera donc

$$\begin{aligned} &AF.LM + BG.MN + \ldots + KE.PL \\ &= AF(LM + MN + \ldots + PL). \end{aligned}$$

COROLLAIRE.

516. Si le prisme est droit, sa section droite est égale à sa base et son arête latérale à sa hauteur (512, 496). *L'aire latérale d'un prisme droit a* donc *pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur.*

SCOLIE.

517. En ajoutant à l'aire latérale d'un prisme deux fois l'aire de sa base, on obtient son aire totale.

THÉORÈME.

518. *Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux.*

Car, si l'on fait coïncider les bases inférieures de ces prismes, leurs arêtes latérales prendront deux à deux la même direction (427), et, comme elles sont égales à la hauteur donnée, les bases supérieures des deux prismes coïncideront aussi.

SCOLIE.

519. La démonstration précédente s'applique au cas de deux prismes droits tronqués de même base, lorsque leurs arêtes latérales sont égales deux à deux.

THÉORÈME.

520. *Tout prisme oblique est équivalent au prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique et pour hauteur son arête latérale.*

Soit (*fig.* 291) le prisme oblique ABCDEFGHIK ou AH. Par un point G′ de l'arête BG, menons la section droite F′G′H′I′K′. Prolongeons l'arête BG au-dessous de la base ABCDE d'une longueur BB′ = GG′, et par le point B′ menons un plan parallèle au plan de la section droite. Les intersections de ce plan avec les arêtes latérales du prisme prolongées détermineront un polygone A′B′C′D′E′ égal (512) au polygone F′G′H′I′K′

La figure A'B'C'D'E'F'G'H'I'K' ou A'H' sera donc un prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique AH et pour hauteur son arête latérale BG, car on a B'G' = BG, puisque, par construction, BB' = GG'.

Cela posé, le volume compris entre la base inférieure du prisme oblique AH et la base supérieure du prisme droit A'H' est commun aux deux prismes. Pour démontrer l'équivalence de ces deux prismes, il suffit donc de démontrer l'égalité des deux polyèdres ou prismes droits tronqués (514)

Fig. 291.

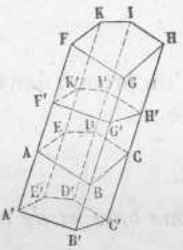
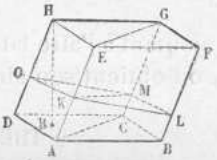


Fig. 292.



A'B'C'D'E'ABCDE ou A'C et F'G'H'I'K'FGHIK ou F'H. Cette égalité résulte immédiatement de la remarque faite au n° 419, car les deux bases A'B'C'D'E', F'G'H'I'K', sont égales, ainsi que les arêtes correspondantes A'A et F'F, B'B et G'G, etc. A'A, par exemple, est l'arête latérale ou la hauteur du prisme droit A'H', diminuée de AF', et F'F est l'arête latérale du prisme oblique AH, diminuée de la même quantité.

THÉORÈME.

521. *Le plan mené par deux arêtes latérales opposées d'un parallélipipède le partage en deux prismes triangulaires équivalents.*

Soit (*fig.* 292) le parallélipipède quelconque AG. Le plan AEGC, mené par les arêtes opposées AE et CG, partage ce parallélipipède en deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, dont il s'agit de démontrer l'équivalence.

Menons la section droite du parallélipipède AG. Cette section OKLM est un parallélogramme (503), et les deux triangles égaux KLM, KMO, suivant lesquels la diagonale KM la divise, sont respectivement les sections droites des prismes ABCEFG, ACDEGH.

Or le prisme triangulaire ABCEFG est équivalent au prisme droit ayant pour base KLM et pour hauteur AE (520); de même, le prisme triangulaire ACDEGH, est équivalent au prisme droit ayant pour base KMO et pour hauteur AE. Les deux prismes droits énoncés étant égaux (518), les deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, sont équivalents, et chacun d'eux est la moitié du parallélipipède AG.

SCOLIE.

522. Les théorèmes précédents font dépendre la mesure du volume du prisme de celle du volume du parallélipipède et permettent de ramener la mesure du volume du parallélipipède quelconque à celle du volume du parallélipipède rectangle.

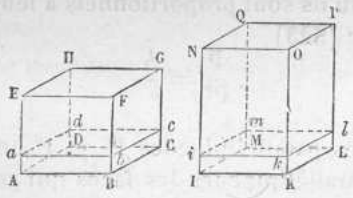
Pour obtenir l'expression du volume du parallélipipède rectangle, nous allons chercher quelle influence la variation de la hauteur ou la variation de la base a sur celle du volume.

THÉORÈME.

523. *Deux parallélipipèdes rectangles qui ont même base, ont des volumes proportionnels à leurs hauteurs* (*fig.* 293).

Soient les deux parallélipipèdes rectangles AG et IP, dont

Fig. 293.



les bases ABCD, IKLM, sont égales. Supposons une commune mesure $Aa = Ii$ entre les deux hauteurs AE, IN, et admettons que cette commune mesure soit contenue cinq fois dans AE et sept fois dans IN; on aura $\frac{AE}{IN} = \frac{5}{7}$.

Par tous les points de division des hauteurs, menons dans les deux parallélipipèdes des plans parallèles aux bases. Nous déterminerons ainsi dans le parallélipipède AG cinq parallélipipèdes rectangles partiels et dans le parallélipipède IP sept parallélipipèdes rectangles partiels; ces parallélipipèdes par

tiels seront tous égaux entre eux, comme prismes droits ayant même base et même hauteur (518), de sorte que l'un d'eux pourra servir de commune mesure entre les deux parallélipipèdes AG et IN, et qu'on aura aussi $\frac{\text{par. AG}}{\text{par IN}} = \frac{5}{7}$. Les volumes de ces deux parallélipipèdes sont donc bien proportionnels à leurs hauteurs.

Si les deux hauteurs AE, IN, étaient incommensurables, on emploierait le raisonnement connu (105).

COROLLAIRE.

524. *Deux parallélipipèdes rectangles qui ont même hauteur ont des volumes proportionnels à leurs bases.*

Soient P et P′ les deux parallélipipèdes considérés. Désignons par a leur hauteur commune, par b et c les dimensions de la base B du parallélipipède P, par b' et c' les dimensions de la base B′ du parallélipipède P′. Prenons un troisième parallélipipède rectangle P″, dont les dimensions (499) soient a, b', c.

Comparons les parallélipipèdes P et P″. On peut prendre pour base d'un parallélipipède l'une quelconque de ses faces (502); si l'on prend pour bases des parallélipipèdes considérés les faces qui, dans ces parallélipipèdes, ont pour dimensions a et c, on pourra dire que ces deux parallélipipèdes ont même base et qu'ils sont proportionnels à leurs hauteurs b et b'. On aura donc (523)

$$\frac{\text{P}}{\text{P}''} = \frac{b}{b'}.$$

Comparons les parallélipipèdes P″ et P′, et prenons pour bases de ces parallélipipèdes les faces qui ont pour dimensions a et b'. Ces deux parallélipipèdes, ayant alors même base, seront proportionnels à leurs hauteurs c et c'. On aura donc

$$\frac{\text{P}''}{\text{P}'} = \frac{c}{c'}.$$

Multiplions membre à membre les deux égalités obtenues; il viendra

$$\frac{\text{PP}''}{\text{P}''\text{P}'} = \frac{bc}{b'c'} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{P}}{\text{P}'} = \frac{bc}{b'c'} = \frac{\text{B}}{\text{B}'}.$$

On énonce encore la proposition qu'on vient de démontrer

en disant que *deux parallélipipèdes rectangles qui ont une dimension commune sont proportionnels aux produits de leurs deux autres dimensions.*

THÉORÈME.

525. *Le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit des mesures de sa base et de sa hauteur, quand on prend pour unités d'aire et de volume le carré et le cube construits sur l'unité de longueur.*

Soient deux parallélipipèdes rectangles P et P'; désignons leurs bases par B et B', leurs hauteurs par H et H'. Les volumes de ces parallélipipèdes, étant *proportionnels* à leurs hauteurs et *proportionnels* à leurs bases, sont aussi *proportionnels* aux produits des bases par les hauteurs (t. I, *Arithm.*, 411). On a donc immédiatement

$$\frac{P}{P'} = \frac{BH}{B'H'} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{H}{H'}.$$

Si P' devient le mètre cube, B' deviendra le mètre carré et H' le mètre. On aura, par conséquent,

$$\frac{P}{1^{Mc}} = \frac{B}{1^{Mq}} \cdot \frac{H}{1^{M}}.$$

$\frac{P}{1^{Mc}}$ représente la *mesure* du volume du parallélipipède rectangle P (500), $\frac{B}{1^{Mq}}$ représente la *mesure* du rectangle qui lui sert de base (245) et $\frac{H}{1^{M}}$ représente la *mesure* de sa hauteur. On voit donc que le même nombre abstrait représente la mesure du volume du parallélipipède et le produit des mesures de sa base et de sa hauteur. C'est ce qu'on exprime plus rapidement, en employant la locution inexacte : *Tout parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

SCOLIE.

526. Si l'on désigne par a, b, c, les dimensions du parallélipipède P et par a', b', c', celles du parallélipipède P', on peut

écrire

$$\frac{P}{P'} = \frac{abc}{a'b'c'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

P′ devenant le mètre cube, on a $a' = b' = c' = 1^M$, c'est-à-dire

$$\frac{P}{1^{Mc}} = \frac{a}{1^M} \cdot \frac{b}{1^M} \cdot \frac{c}{1^M}.$$

On aurait donc pu énoncer les résultats précédents en disant : *Deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont proportionnels aux produits de leurs trois dimensions; tout parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions.*

Mais cette forme n'est applicable qu'aux parallélipipèdes rectangles, tandis que celle que nous avons adoptée est applicable à tous les prismes.

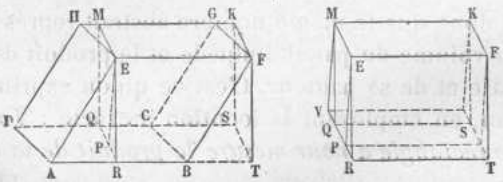
527. *Le volume d'un cube est*, d'après ce que nous venons de dire, *égal à la troisième puissance de son arête.* On comprend maintenant la synonymie des mots *cube* et *troisième puissance* employés en Arithmétique.

THÉORÈME.

528. *Le volume d'un parallélipipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit (*fig.* 294) le parallélipipède quelconque AG ayant pour base ABCD ou EFGH et pour hauteur la perpendiculaire EP abaissée du sommet E sur le plan ABCD. Menons par le

Fig. 294.



point E, dans le plan EFGH, la perpendiculaire EM à HG. Si l'on prend la face AEHD pour base du parallélipipède proposé (502), son arête latérale sera EF et sa section droite (513) sera le parallélogramme EMQR déterminé par le plan MEP.

Le parallélipipède AG sera donc équivalent au parallélipipède droit RK, ayant pour base la section droite EMQR et pour hauteur l'arête EF (520).

Cela posé, reproduisons à part, pour plus de clarté (*fig.* 294), ce parallélipipède droit RK, et construisons un parallélipipède rectangle PK, ayant pour dimensions EF, EM, EP. Le parallélipipède droit RK et le parallélipipède rectangle PK ainsi déterminé, présentent seulement comme parties non communes les deux prismes droits qui ont pour hauteur EF et pour bases les deux triangles égaux EPR, MVQ. Ces deux prismes étant égaux (518), les deux parallélipipèdes seront équivalents, et, par suite, il en sera de même du parallélipipède quelconque AG et du parallélipipède rectangle PK. Donc, le produit EF.EM.EP, qui exprime la mesure (526) du parallélipipède rectangle PK, mesure aussi le volume du parallélipipède quelconque AG. Or, EF.EM mesure la base EFGH de ce parallélipipède, et EP est sa hauteur.

Donc enfin, le volume du parallélipipède quelconque AG est égal au produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME.

529. *Le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

1° Soit (*fig.* 295) le prisme triangulaire ABCEFG. Par l'extrémité A de l'arête AB, menons le plan ADHE parallèle à la face BCGF, et par l'extrémité C de l'arête BC le plan CDHG

Fig. 295.

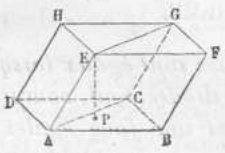
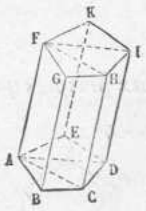


Fig. 296.



parallèle à la face ABFE; prolongeons en même temps les deux bases du prisme jusqu'à la rencontre de ces plans. On obtiendra ainsi (504) le parallélipipède AG, construit sur les trois droites AB, BC, BF. La face ACGE du prisme triangulaire considéré étant un plan diagonal du parallélipipède AG,

ce prisme en sera la moitié (521). Donc, le volume du parallélipipède AG ayant pour mesure le produit de sa base ABCD par sa hauteur EP (528), le volume du prisme triangulaire ABCEFG aura pour mesure la moitié de ce produit, c'est-à-dire le produit de sa base ABC, moitié du parallélogramme ABCD, par sa hauteur EP.

2° Soit (*fig.* 296) un prisme quelconque ABCDEFGHIK. On le décompose en prismes triangulaires en faisant passer des plans diagonaux par l'arête AF et chacune des arêtes CH, DI. Ces prismes triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base du prisme donné, et leur hauteur commune est celle H du prisme. La somme de leurs mesures (1°)

$$ABC.H + ACD.H + ADE.H,$$

ou la mesure du prisme AI, sera donc égale au produit de sa base ABCDE par sa hauteur H.

COROLLAIRES.

530. En désignant par V, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'un prisme, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

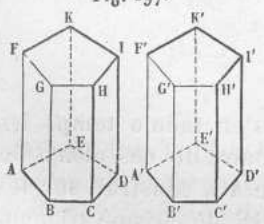
$$V = B.H.$$

Donc, *deux prismes de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents; deux prismes sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux prismes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

THÉORÈME.

531. *Deux prismes quelconques sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre une base et une face égales chacune à chacune et semblablement disposées* (*fig.* 297).

Fig. 297.



Supposons les deux prismes AH, A'H'. Soient le dièdre AB égal au dièdre A'B', la base ABCDE égale à la base A'B'C'D'E', la face ABGF égale à la face A'B'G'F'. Portons les deux prismes l'un sur l'autre,

de manière que les bases égales coïncident. Le dièdre A′B′ étant égal au dièdre AB, la face A′B′G′F′ tombera dans le plan de la face ABGF. D'après l'égalité de ces deux faces, l'angle ABG est égal à l'angle A′B′G′ : l'arête B′G′ prendra donc la direction de l'arête BG, et le sommet G′ coïncidera avec le sommet G, puisqu'on a B′G′ = BG.

Une fois la coïncidence des deux bases inférieures établie, ainsi que celle de deux arêtes latérales BG, B′G′, il résulte de la règle indiquée pour la construction d'un prisme (494) que tous les autres sommets des deux bases supérieures des prismes considérés devront aussi coïncider. Ces deux prismes eux-mêmes, ayant mêmes sommets, se confondront donc et seront égaux.

SCOLIE.

532. L'égalité des deux bases inférieures exige $2n - 3$ conditions (66); comme AB est alors égal à A′B′, l'égalité des deux faces latérales n'exige plus que deux conditions, puisque ces faces sont des parallélogrammes; enfin, l'égalité des deux angles dièdres compte pour une condition. L'égalité des deux prismes AH, A′H′, exige donc $2n$ conditions, en désignant par n le nombre des côtés de l'une des bases.

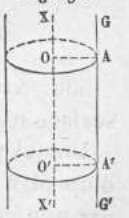
IV. — Notions relatives au cylindre.

533. On nomme *surface cylindrique de révolution* la surface engendrée par une droite GG′ qui tourne autour d'une droite fixe XX′ à laquelle elle est parallèle et invariablement liée (*fig.* 298).

La droite fixe XX′ reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG′ celui de *génératrice* ou d'*arête*.

534. Tout point A de la droite GG′ décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe; car, pendant la rotation, la perpendiculaire AO abaissée du point A sur XX′ reste perpendiculaire à cet axe et conserve toujours la même longueur.

Fig. 298.



On appelle *section droite* toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe. Il résulte des considérations précédentes que *les diverses sections droites d'une même surface cylindrique sont des cir-*

conférences égales; le rayon commun de ces cercles, c'est-à-dire la distance des deux parallèles XX′ et GG′, est le *rayon de la surface cylindrique,* et l'on voit que *le lieu des points de l'espace situés à une distance donnée d'une droite fixe est la surface cylindrique de révolution qui a cette droite pour axe et la distance donnée pour rayon.*

535. Considérons une droite fixe XX′, un plan P parallèle à cette droite, et désignons par R la distance de la droite au plan ou, ce qui revient au même, la distance de la droite à sa projection AA′ sur le plan (*fig.* 299). Le lieu des points du plan P, situés à une distance donnée δ de la droite XX′, se compose de deux droites BB′ et CC′ parallèles à XX′, placées de part et d'autre de AA′, et à une distance de cette droite égale au côté AB de l'angle droit d'un triangle rectangle OAB, dont l'hypoténuse OB est égale à δ, et l'autre côté OA de l'angle droit égal à R. Il en est ainsi tant que δ est plus grand que R; lorsque δ devient égal ou inférieur à R, le lieu se réduit à la droite AA′ ou cesse d'exister.

D'après cela (534), un plan parallèle à l'axe d'une surface cylindrique de révolution renferme deux génératrices de cette surface, ou une seule, ou n'a aucun point commun avec la surface, suivant que la distance du plan à l'axe est inférieure, égale ou supérieure au rayon de la surface.

Fig. 299.

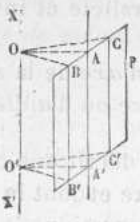
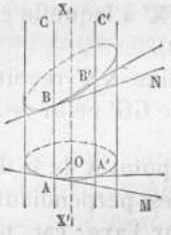


Fig. 300.



536. Arrêtons-nous un moment sur le cas où le plan et la surface n'ont en commun qu'une génératrice AC (*fig.* 300).

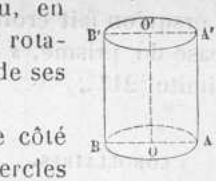
Un tel plan peut être considéré comme la position limite d'un plan variable qui, passant par la génératrice fixe AC et par une génératrice voisine A′C′, tourne autour de AC jusqu'à ce que A′C′ vienne, en restant sur la surface cylindrique, se

confondre avec AC. Cela étant, soit BB′ une courbe quelconque tracée sur la surface cylindrique; la sécante BB′, qui unit les points B et B′ où la courbe rencontre les génératrices AC et A′C′, reste constamment dans le plan variable ACA′C′; d'ailleurs, cette sécante devient la tangente BN à la courbe BB′ lorsque la génératrice mobile A′C′ vient se confondre avec AC, c'est-à-dire lorsque le plan variable ACA′C′ atteint sa position limite; donc ce plan limite contient la tangente BN. Ainsi, le plan limite considéré renferme les tangentes à toutes les courbes que l'on peut tracer sur la surface, aux points où ces courbes rencontrent la génératrice AC; on lui donne le nom de *plan tangent suivant la génératrice* AC.

La génératrice AC et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface, au point où cette courbe rencontre AC, suffisent pour déterminer le plan tangent suivant cette génératrice. Si l'on choisit en particulier la tangente AM à la section droite AA′, on voit que *le plan tangent est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et par la génératrice de contact,* plan qui est un *plan méridien* de la surface; en effet, le plan tangent renferme la droite AM qui, étant à angle droit sur AO et sur AC, est perpendiculaire à leur plan CAOX.

537. On appelle *cylindre de révolution* le corps compris entre une surface cylindrique et deux plans perpendiculaires à l'axe de cette surface, ou, en d'autres termes, la figure engendrée par la rotation d'un rectangle AA′O′O autour d'un de ses côtés OO′ (*fig.* 301).

Fig. 301.



La surface cylindrique engendrée par le côté AA′ est la *surface latérale* du cylindre; les cercles décrits par les côtés OA et O′A′ en sont les *bases,* et la droite OO′ en est la *hauteur.*

538. Deux cylindres de révolution sont dits *semblables* lorsqu'ils sont engendrés par des rectangles semblables.

THÉORÈME.

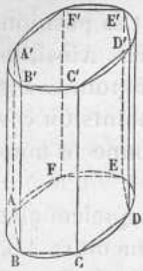
539. *L'aire latérale d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de base du cylindre par sa hauteur.*

Si l'on construit un prisme droit de même hauteur que le

cylindre donné et ayant pour base un polygone ABCDEF inscrit dans la circonférence de base du cylindre (*fig.* 302), on obtient un *prisme droit inscrit* dans le cylindre.

L'aire latérale de ce prisme droit inscrit est égale au produit du périmètre de sa base par sa hauteur (516). Or, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base, le périmètre de ce polygone tend vers une limite fixe, indépendante de la loi d'inscription, et qui est la longueur de la circonférence de base du cylindre (221). D'ailleurs, la hauteur du prisme reste constamment égale à la hauteur du cylindre. Donc, à mesure qu'on fait croître le nombre des côtés de sa base, l'aire latérale du prisme droit inscrit tend vers une limite définie (217), et *c'est cette limite qu'on appelle l'aire latérale du cylindre de révolution.*

Fig. 302.



Cela posé, soient S, C, H, l'aire latérale, la circonférence de base et la hauteur du cylindre considéré; soient s et p l'aire latérale et le périmètre de la base d'un prisme droit inscrit. On a, d'après ce qu'on vient de rappeler,

$$s = p.H.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du prisme, s tend vers S et p vers C; on a donc, à la limite (217),

$$S = C.H.$$

COROLLAIRES.

540. Si R est le rayon du cylindre, on a $C = 2\pi R$, et par suite

$$S = 2\pi RH.$$

En ajoutant à cette aire latérale les aires des deux bases ou le double $2\pi R^2$ de l'aire de l'une d'elles, on obtient, pour l'aire totale T du cylindre,

$$T = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + H).$$

541. Soient S, S', les aires latérales, T, T', les aires totales, R, R', les rayons et H, H', les hauteurs de deux cylindres de

révolution semblables. On aura (538)

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'} = \frac{R+H}{R'+H'}$$

et, par suite,

$$\frac{S}{S'} = \frac{R'H'}{RH} = \frac{R}{R'}\cdot\frac{H}{H'} = \frac{H^2}{H'^2} = \frac{R^2}{R'^2},$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{R(R+H)}{R'(R'+H')} = \frac{R}{R'}\cdot\frac{R+H}{R'+H'} = \frac{H^2}{H'^2} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Donc, *les aires latérales ou totales de deux cylindres de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou comme les carrés des hauteurs.*

SCOLIE.

542. Considérons un cylindre de révolution et un prisme régulier inscrit ABCDEFA'B'C'D'E'F' (*fig.* 302); par une rotation autour de l'arête BB', amenons la face ABB'A' dans le prolongement de la face BCC'B'; puis, par une rotation autour de CC', amenons les deux faces déjà réunies dans le prolonge-

Fig. 302.

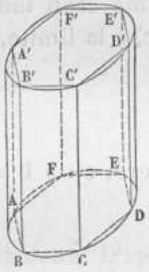
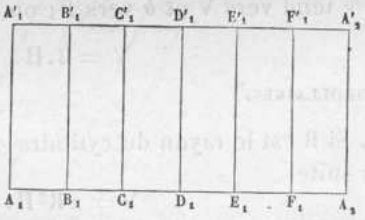


Fig. 303.



ment de la face suivante CDD'C', et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces latérales du prisme soient réunies sur le plan de la dernière d'entre elles AFF'A'. Dans son mouvement autour de l'arête BB', le côté AB reste perpendiculaire à cette arête; il se place donc sur le prolongement de CB; de même, la droite ABC, formée par la réunion de AB et de BC, vient se placer sur le prolongement de DC,.... On obtient donc finalement sur le dernier plan un rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ (*fig.* 303), dont la hauteur est celle du prisme droit et dont la

base est égale au périmètre de la base du prisme. Ce rectangle est le *développement* de l'aire latérale du prisme.

Si le nombre des faces du prisme régulier inscrit dans le cylindre croît indéfiniment, le rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ conserve la même hauteur, et la longueur de sa base A_1A_2 tend vers la circonférence de la base du cylindre. Le rectangle limite, qui a une hauteur égale à celle du cylindre et une base égale à la circonférence de la base du cylindre, est dit le *développement* de l'aire latérale de ce cylindre.

THÉORÈME.

543. *Le volume d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

En se reportant au n° 539, on peut dire immédiatement que le volume du cylindre est la limite des volumes des prismes droits inscrits, dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H, le volume du cylindre, l'aire de sa base et sa hauteur; soient v et b le volume et l'aire de la base d'un prisme droit inscrit au cylindre; on a (529)

$$v = b.H.$$

Mais, lorsque le nombre des faces du prisme croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B; on a donc, à la limite,

$$V = B.H.$$

COROLLAIRES.

544. Si R est le rayon du cylindre considéré, on a $B = \pi R^2$ et, par suite,

$$V = \pi R^2 H.$$

545. Soient V, V', les volumes, R, R', les rayons, H, H', les hauteurs de deux cylindres de révolution semblables; on aura (538)

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'}$$

et, par suite,

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^2H}{R'^2H'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \cdot \frac{H}{H'} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{H^3}{H'^3}.$$

Donc, *les volumes de deux cylindres de révolution sem-*

blables sont entre eux comme les cubes des rayons ou comme les cubes des hauteurs.

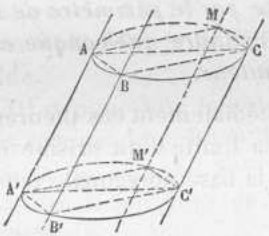
546. D'une manière générale, on appelle *surface cylindrique* (*fig.* 304) toute surface engendrée par une droite AA' astreinte à rester parallèle à une direction donnée, en s'appuyant sur une courbe fixe quelconque ABC. Cette courbe est la *directrice* de la surface, tandis que la droite mobile en est la *génératrice*.

THÉORÈME.

547. *Les sections d'une surface cylindrique par deux plans parallèles sont égales* (*fig.* 304).

En effet, soient la surface cylindrique AA' et deux sections ABC, A'B'C', faites par deux plans parallèles. Prenons quatre points A, B, C, M, sur la première section, et menons les génératrices AA', BB', CC', MM', qui rencontrent la seconde section en A', B', C', M'. Les quadrilatères ABCM, A'B'C'M', sont superposables comme bases opposées d'un prisme qua-

Fig. 304.



drangulaire. D'après cela, si l'on transporte le plan de la seconde section sur celui de la première, dès que les trois points A', B', C', seront appliqués sur leurs correspondants A, B, C, tout point M' de la seconde section coïncidera avec son correspondant M de la première.

SCOLIE.

548. Si l'on mène d'un point une perpendiculaire ou une oblique à un plan, le *pied* de cette *perpendiculaire* ou de cette *oblique* est la *projection orthogonale* ou *oblique* du point sur le plan (432).

Quand on effectue une projection oblique, la direction des droites projetantes doit rester la même pour tous les points de la figure projetée.

Cela posé, la section A'B'C' peut être considérée comme la projection oblique de ABC, et l'on peut encore énoncer le théorème précédent de la manière suivante : *Une courbe plane quelconque est égale à sa projection oblique* (*ou orthogonale*) *sur un plan parallèle au sien.*

549. On nomme *section droite d'une surface cylindrique* la section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices.

Un *cylindre* est le corps compris entre une surface cylindrique et deux sections planes parallèles. Ces sections sont les *bases* du cylindre, et la distance de leurs plans parallèles est la hauteur de ce corps. Le cylindre est *droit* ou *oblique*, suivant que ses génératrices sont *perpendiculaires* ou *obliques* au plan de la base. Le *cylindre droit à base circulaire* n'est autre que le cylindre de révolution étudié plus haut.

THÉORÈMES.

550. *L'aire latérale d'un cylindre quelconque est égale au produit de son arête par le périmètre de sa section droite.*

Le volume d'un cylindre quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.

On démontre immédiatement ces théorèmes en considérant le cylindre comme la limite d'un prisme inscrit quelconque, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

CHAPITRE II.

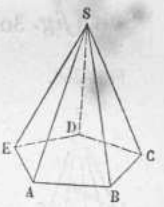
LES PYRAMIDES ET LES CONES.

I. — Théorèmes généraux relatifs à la pyramide.

551. La *pyramide* est un polyèdre dont l'une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres faces sont des triangles ayant pour bases respectives les différents côtés de la face polygonale et, pour sommet commun, un point extérieur à cette face.

Ainsi, soit (*fig.* 305) un polygone ABCDE et un point S pris hors du plan de ce polygone. Le corps limité par la face polygonale ABCDE et par les faces triangulaires SAB, SBC, SCD, SDE, SEA, est une pyramide.

Fig. 305.



La pyramide SABCDE a pour *base* le polygone ABCDE et pour *sommet* le point S. Sa *hauteur* est la distance du sommet S à la base ABCDE, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan. Les droites SA, SB, SC, ..., sont les *arêtes latérales* de la pyramide, et la somme des faces triangulaires SAB, SBC, SCD, ... constitue son *aire latérale.*

552. La pyramide est *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier dont le centre se confond avec le pied de la hauteur de la pyramide.

Les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont nécessairement égales, comme obliques s'écartant également du pied de la hauteur; ses faces latérales sont donc des triangles isocèles, tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces triangles est l'*apothème* de la pyramide régulière.

553. Suivant que la base de la pyramide est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc., la pyramide est dite *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale, hexagonale*, etc.

554. Toute pyramide triangulaire ayant quatre faces, on lui donne souvent aussi le nom de *tétraèdre* (492).

D'après la définition générale de la pyramide, on voit qu'on a le droit de prendre pour base d'un tétraèdre telle face qu'on veut; le sommet du tétraèdre est alors le sommet opposé à la base choisie.

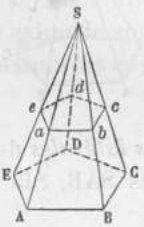
Les tétraèdres sont dans la Géométrie de l'espace ce que les triangles sont dans la Géométrie plane. On fixe la position d'un point sur un plan en le rattachant par un triangle à deux points donnés. On fixe la position d'un point dans l'espace en le rattachant par un tétraèdre à trois points donnés.

555. Si l'on coupe une pyramide par un plan qui rencontre toutes ses faces latérales, le polyèdre compris entre la section obtenue et la base de la pyramide est une *pyramide tronquée* ou un *tronc de pyramide*.

Si le plan sécant est parallèle au plan de la base de la pyramide, le tronc de pyramide est dit *à bases parallèles*.

Soit (*fig.* 306) la pyramide SABCDE. Coupons cette pyramide par le plan *abcde*, parallèle à la base ABCDE et compris entre cette base et le sommet S. La section *abcde* et la base ABCDE sont les bases du tronc de pyramide à bases parallèles ABCDE *abcde*. La *hauteur* du tronc est la distance constante des plans de ses deux bases. Les segments A*a*, B*b*, C*c*, ..., sont ses *arêtes latérales*, et son *aire latérale* est la somme des trapèzes AB*ab*, BC*bc*, CD*cd*, ...

Fig. 306.



Si la pyramide considérée est régulière, le tronc de pyramide à bases parallèles qui lui correspond est un tronc de pyramide *régulier*.

THÉORÈME.

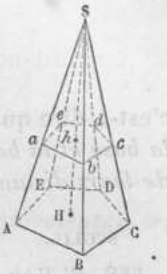
556. *Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base :*

1° *Ses arêtes latérales et sa hauteur sont divisées en parties proportionnelles;*

2° *La section est un polygone semblable à la base de la pyramide.*

1° Soit (*fig.* 307) la pyramide SABCDE, coupée par le plan *abcde* parallèle à sa base. Ce plan rencontre les arêtes latérales SA, SB, SC, ..., et la hauteur SH de la pyramide aux points a, b, c, ..., h. Deux plans parallèles coupant en parties proportionnelles une série de sécantes issues d'un même point (331), on peut écrire immédiatement

Fig. 307.



$$\frac{Sa}{SA} = \frac{Sb}{SB} = \frac{Sc}{SC} = \ldots = \frac{Sh}{SH}.$$

2° Les polygones ABCDE et *abcde* ont leurs côtés deux à deux parallèles (414) et dirigés dans le même sens. Les angles homologues de ces polygones sont donc égaux (420). De plus, le parallélisme de leurs côtés entraîne la similitude des triangles SAB et S*ab*, SBC et S*bc*, ... Par suite,

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sb}{SB}, \quad \frac{Sb}{SB} = \frac{bc}{BC},$$

d'où

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC}.$$

On prouverait de la même manière qu'on a

$$\frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \frac{de}{DE} = \frac{ea}{EA}.$$

Les polygones ABCDE et *abcde*, ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels, sont semblables.

COROLLAIRE.

557. La similitude des triangles SAB et S*ab* donne

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sa}{SA}$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Sh}{SH}.$$

La similitude des polygones ABCDE et *abcde* donne à son tour

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}.$$

On a donc

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{sh}^2}{\overline{SH}^2},$$

c'est-à-dire que, *dans une pyramide, les sections parallèles à la base et la base elle-même sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet de la pyramide.*

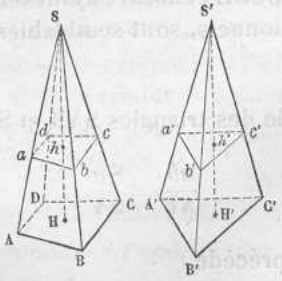
SCOLIE.

558. Si l'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle à la base, la section *abcde*, étant semblable à la base ABCDE, est aussi un polygone régulier. Comme les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont égales, il en est de même des arêtes du tronc de pyramide régulier obtenu. Les faces latérales d'un tronc de pyramide régulier sont donc des trapèzes isocèles, tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces trapèzes est l'*apothème* du tronc de pyramide.

THÉORÈME.

559. *Lorsque deux pyramides ont des hauteurs égales, les sections faites dans ces pyramides parallèlement à leurs bases et à la même distance de leurs sommets, sont proportionnelles aux bases des deux pyramides.*

Fig. 308.



Soient (*fig.* 308) les deux pyramides SABCD, S'A'B'C', dont les hauteurs SH et S'H' sont égales. Prenons Sh = S'h' et,

par les points h et h', menons la section $abcd$ parallèle à la base ABCD et la section $a'b'c'$ parallèle à la base A'B'C'. Nous aurons (557)

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2}, \quad \frac{a'b'c'}{A'B'C'} = \frac{\overline{S'h'}^2}{\overline{S'H'}^2},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'hypothèse et de la construction,

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{a'b'c'}{A'B'C'}.$$

SCOLIE.

560. *Si les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections obtenues sont équivalentes.*

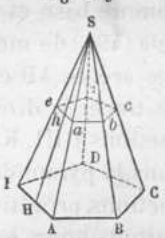
II. — Aire et volume de la pyramide.

THÉORÈME.

561. *L'aire latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par son apothème.*

Soit (*fig.* 309) la pyramide régulière SABCDE. Les triangles isocèles et égaux qui composent sa surface latérale ayant respectivement pour bases les côtés AB, BC, ..., EA, de la base de la pyramide et, pour hauteur, son apothème SH (552), la somme des aires de ces triangles, c'est-à-dire l'aire demandée, a pour mesure la moitié du produit de la somme des côtés AB, BC, ..., EA, par l'apothème SH, c'est-à-dire la moitié du produit du périmètre de la base de la pyramide par son apothème.

Fig. 309.



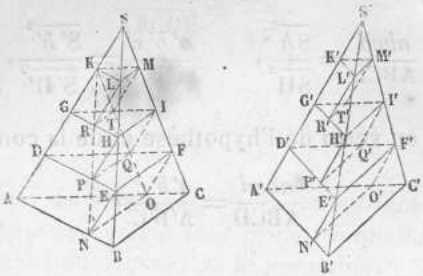
THÉORÈME.

562. *Deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de hauteurs égales sont équivalentes.*

Soient (*fig.* 310) SABC et S'A'B'C' les deux pyramides proposées. Si leurs bases ABC, A'B'C', sont placées sur un même plan, leurs sommets S et S' seront à la même distance du plan

commun des deux bases, puisque ces pyramides ont même hauteur.

Fig. 310.



Divisons l'arête SA en un certain nombre de parties égales aux points D, G, K, et par ces points menons des plans parallèles au plan commun des bases. Nous déterminerons ainsi dans la première pyramide les sections DEF, GHI, KLM, et dans la seconde pyramide les sections correspondantes D'E'F', G'H'I', K'L'M'.

Comme les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections faites dans ces pyramides par un même plan parallèle au plan commun des bases sont équivalentes (560). La section DEF est équivalente à la section D'E'F', la section GHI à la section G'H'I',....

Construisons maintenant un prisme sur la section DEF comme base et sur la division DA comme arête. Il suffit pour cela (494) de mener par les points E et F, jusqu'à la rencontre des arêtes AB et AC, des parallèles EN et FO à DA ou SA, et de tracer la droite NO. En agissant de même pour les autres sections GHI, KLM, et les autres divisions GD, KG, on inscrira dans la pyramide SABC un nombre de prismes égal à celui des sections primitivement obtenues, et tous ces prismes inscrits auront pour hauteur la distance constante de deux plans sécants consécutifs.

En opérant d'une manière identique, on inscrit dans la seconde pyramide S'A'B'C' les prismes D'E'F'A'N'O', G'H'I'D'P'Q', ..., qui sont en même nombre que ceux inscrits dans la pyramide SABC.

Les prismes de même rang dans les deux pyramides sont équivalents comme ayant des bases équivalentes et des hauteurs égales (530). Le prisme GHIDPQ, par exemple, est équivalent au prisme G'H'I'D'P'Q', parce que les deux sections

correspondantes GHI, G'H'I', sont équivalentes, et parce que les hauteurs de ces prismes représentent toutes deux la $n^{ième}$ partie de la hauteur commune des pyramides données, si l'on a divisé l'arête SA en n parties égales. Par suite, la somme des prismes inscrits dans la pyramide SABC est équivalente à la somme des prismes inscrits dans la pyramide S'A'B'C'.

Or, si l'on fait croître indéfiniment le nombre des divisions égales de l'arête SA, la somme des prismes inscrits dans la pyramide SABC a pour limite le volume de cette pyramide. En effet, les points K, R, P, N, sont en ligne droite, puisque les droites SK, LR, HP, EN, sont égales et parallèles, et la droite KN est parallèle à SB. De même, les points K, T, Q, O, sont sur une droite KO parallèle à SC. Le plan KNO est donc parallèle à la face SBC, et le polyèdre KNOSBC est un tronc de pyramide à bases parallèles, dont la hauteur, distance des deux plans KNO, SBC, est au plus égale à SK = AD. La limite de AD, quand on fait croître indéfiniment le nombre des divisions égales de l'arête SA, est zéro. Donc la hauteur du tronc de pyramide KNOSBC tend vers zéro, et il en est de même, par conséquent, du volume de ce tronc. Mais ce volume est évidemment supérieur à la différence qui existe entre la pyramide SABC et la somme des prismes qui y sont inscrits. Cette différence s'annule donc à la limite.

On prouverait de même que la différence entre la pyramide S'A'B'C' et la somme des prismes qui y sont inscrits a zéro pour limite.

Les deux sommes de prismes étant constamment équivalentes, leurs limites (216), qui représentent les volumes des deux pyramides SABC, S'A'B'C', sont égales.

THÉORÈME.

563. *Le volume d'une pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

1° Soit (*fig.* 311) la pyramide triangulaire EABC. Par les sommets A et C menons les droites AD et CF, parallèles à l'arête BE, jusqu'à leurs rencontres D et F avec le plan mené par le sommet E parallèlement à la base ABC de la pyramide. Le polyèdre ABCDEF sera un prisme triangulaire ayant même base et même hauteur que la pyramide proposée.

Si l'on fait passer un plan par les trois sommets D, E, C, le prisme triangulaire ABCDEF se trouve décomposé en trois

pyramides triangulaires EABC, EDCA, EDCF. La première est la pyramide donnée. Les deux autres sont équivalentes (562), car elles ont même hauteur et leurs bases sont équivalentes comme moitiés du parallélogramme ACFD. Or, si l'on prend

Fig. 311.

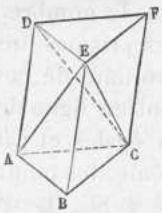
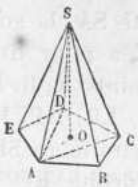


Fig. 312.



la face DEF pour base de la pyramide EDCF, son sommet est le point C. Cette pyramide a donc même base et même hauteur que le prisme ABCDEF; elle est donc équivalente à la pyramide EABC.

Les trois pyramides dont se compose le prisme ABCDEF étant équivalentes, chacune d'elles est le tiers de ce prisme. Or, le volume du prisme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; le volume de la pyramide EABC a donc pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

2° Soit (*fig.* 312) la pyramide polygonale SABCDE. On la décompose en pyramides triangulaires en faisant passer des plans par l'arête SA et chacune des arêtes SC, SD. Ces pyramides triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base de la pyramide donnée, et leur hauteur commune est celle de cette pyramide. La somme de leurs mesures ou la mesure de la pyramide SABCDE sera donc égale au tiers du produit de sa base ABCDE par sa hauteur SO.

COROLLAIRES.

564. En désignant par V, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'une pyramide, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

$$V = \frac{1}{3} BH.$$

Donc, *toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur. Deux pyramides quelconques de bases*

équivalentes et de même hauteur sont équivalentes. Deux pyramides sont entre elles comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur. Deux pyramides de même base sont entre elles comme leurs hauteurs. Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.

565. Quand un tétraèdre est régulier, son volume s'exprime en fonction de son arête a.

Un tétraèdre régulier est compris sous quatre triangles équilatéraux égaux. Sa base a donc pour expression (250)

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sa hauteur est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour second côté de l'angle droit le rayon du cercle circonscrit au triangle de base, c'est-à-dire $\frac{a}{\sqrt{3}}$, et pour hypoténuse l'arête a du tétraèdre. Cette hauteur est, par suite,

$$\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

On a donc, pour le volume du tétraèdre régulier en fonction de son arête,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

SCOLIE.

566. Pour évaluer le volume d'un polyèdre, il suffit de décomposer ce polyèdre en pyramides, de calculer les volumes de ces pyramides et de faire la somme des nombres obtenus. Plus généralement, il suffit de décomposer le polyèdre proposé en parties telles, que l'expression de leur volume soit connue.

Pour opérer la décomposition en pyramides, on peut choisir un point quelconque dans l'espace et le joindre à tous les sommets du polyèdre. Les bases des différentes pyramides formées sont les faces du polyèdre, et leurs hauteurs sont les perpendiculaires abaissées du point choisi sur ces faces. Le volume du polyèdre est la somme arithmétique ou algébrique des volumes des pyramides obtenues, suivant que leur

sommet commun est lui-même intérieur ou extérieur au polyèdre.

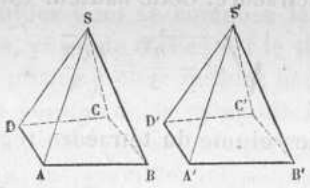
Souvent, on effectue la décomposition en prenant pour centre l'un des sommets du polyèdre, c'est-à-dire en menant toutes les diagonales qui partent d'un même sommet.

Si l'on peut trouver dans l'intérieur du polyèdre un point à égale distance de toutes ses faces, les pyramides qui le composeront auront alors pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'une des faces, et *le volume du polyèdre aura pour expression le tiers du produit de son aire par cette perpendiculaire.*

THÉORÈME.

567. *Deux pyramides sont égales lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre une base et une face égales chacune à chacune et semblablement disposées* (*fig.* 313).

Fig. 313.



Soient l'angle dièdre AB égal à l'angle dièdre A'B', la base ABCD égale à la base A'B'C'D', la face ASB égale à la face A'S'B'. Portons la pyramide S'A'B'C'D' sur la pyramide SABCD, de manière que les deux bases égales coïncident. L'angle dièdre A'B' étant égal à l'angle dièdre AB, et les parties égales étant disposées de la même manière dans les deux pyramides, la face A'S'B' tombera dans le plan de la face ASB. L'angle S'A'B' étant égal à l'angle SAB, l'arête A'S' prendra la direction de l'arête AS, et le point S' tombera au point S, puisqu'on a A'S' = AS. Les deux pyramides, ayant mêmes sommets, coïncideront et seront égales.

SCOLIE.

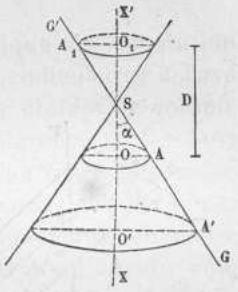
568. Si l'on désigne par n le nombre des côtés de l'une des bases des deux pyramides, l'égalité des bases de ces pyramides exigera $2n-3$ conditions (66). L'égalité des angles dièdres AB

et A′B′ compte pour une condition. Enfin, l'égalité des triangles SAB, S′A′B′, n'exige plus que deux conditions, puisqu'on a AB = A′B′ d'après l'égalité des bases. Ainsi, l'égalité des deux pyramides exige en tout $2n$ conditions.

III. — Notions relatives au cône.

569. On appelle *surface conique de révolution* la surface engendrée par une droite GSG′ tournant autour d'une droite fixe XSX′, qu'elle rencontre en un point S, et à laquelle elle est invariablement liée (*fig.* 314).

Fig. 314.



La droite fixe XX′ reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG′ celui de *génératrice* ou d'*arête*. Le point S, qu'on nomme *sommet*, divise la surface conique en deux parties indéfinies qu'on appelle *nappes*.

Le lieu géométrique des droites qui, passant par un point donné S, font un angle donné α avec une droite donnée D, est une surface conique de révolution ayant le point S pour sommet et la parallèle menée à D par le point S pour axe.

Un point quelconque A de la droite GG′ décrit une circonférence dont le centre est sur l'axe et dont le plan est perpendiculaire à l'axe (534). Par suite, toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des circonférences dont le lieu des centres est l'axe lui-même. Quant aux rayons OA, O′A′, de ces cercles, la similitude des triangles SOA, SO′A′, prouve qu'ils sont proportionnels aux distances SO, SO′, de leurs plans au sommet, ou encore aux portions correspondantes SA, SA′, de la génératrice GSG′. Leurs aires sont donc proportionnelles aux carrés des mêmes lignes.

570. Considérons une droite fixe XSX′, un plan P passant par un point S de cette droite, et désignons par α l'angle de la droite et du plan, c'est-à-dire l'angle aigu de la droite SX avec sa projection SA sur ce plan (*fig.* 315). Par le point S, on peut mener dans le plan P (441) deux droites SB, SC, faisant avec SX un angle aigu donné ω. Ces deux droites sont sy-

métriques par rapport à AA'. Il en est ainsi tant que ω est supérieur à α; lorsque ω devient égal ou inférieur à α, les deux droites se réduisent à la droite unique SA ou cessent d'exister.

D'après cela, un plan passant par le sommet d'une surface conique de révolution renferme deux génératrices de cette surface, ou une seule, ou enfin n'a de commun avec la surface que le sommet, suivant que l'inclinaison du plan sur l'axe est inférieure, égale ou supérieure à l'angle aigu de la génératrice avec l'axe, c'est-à-dire au *demi-angle au sommet* de la surface conique.

Fig. 315.

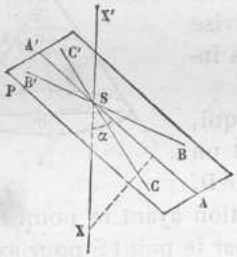
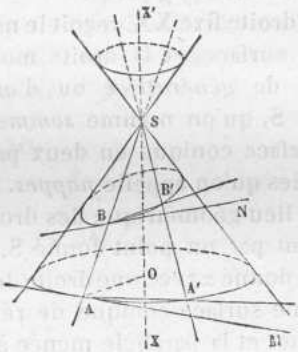


Fig. 316.



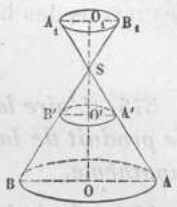
Dans le cas où le plan donné n'a de commun avec la surface qu'une seule génératrice SA (*fig.* 316), on peut le considérer comme la position limite d'un plan variable qui, passant par la génératrice fixe SA et par une génératrice voisine SA', tourne autour de SA jusqu'à ce que SA' vienne se confondre avec SA. On voit dès lors, par un raisonnement identique à celui qu'on a fait pour le cylindre (536), que ce plan renferme les tangentes AM, BN, ..., à toutes les courbes AA', BB', ..., que l'on peut tracer sur la surface, aux points A, B, ..., où la génératrice SA rencontre ces courbes. On donne à ce plan le nom de *plan tangent suivant la génératrice* SA.

La génératrice SA et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface au point où cette courbe rencontre SA suffisent pour déterminer le plan tangent suivant cette génératrice. Si l'on choisit en particulier la tangente AM à une section AA' perpendiculaire à l'axe, on voit, comme pour le cy-

lindre, que *le plan tangent est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et la génératrice de contact*, plan qui est un *plan méridien* de la surface.

571. On nomme *cône de révolution* le corps engendré par la rotation d'un triangle rectangle SOA autour de l'un des côtés SO de l'angle droit SOA (*fig.* 317).

Fig. 317.



La surface conique engendrée par l'hypoténuse SA est la *surface latérale* du cône; le cercle décrit par le côté OA est la *base*, la droite SO est la *hauteur*, et l'hypoténuse SA est le *côté* ou l'*apothème*.

572. Si l'on coupe une surface conique de révolution (*fig.* 317) par deux plans AB, A'B', perpendiculaires à l'axe et situés d'un même côté du sommet S, on obtient un volume terminé par une portion de la surface conique et par les deux cercles AB, A'B'. Ce corps, que l'on nomme *tronc de cône de révolution à bases parallèles*, est la différence des deux cônes SAB, SA'B'. On peut encore le considérer comme engendré par la rotation du trapèze rectangle AOO'A' autour du côté OO'. La droite OO' est la *hauteur* du tronc; les cercles AB, A'B' en sont les bases, et AA' en est le *côté* ou l'*apothème*.

573. En construisant une pyramide de même sommet que le cône et ayant pour base un polygone inscrit au cercle de base du cône, on obtient une pyramide inscrite au cône (*fig.* 318). Si le polygone de base est régulier, la pyramide inscrite est régulière.

On appelle *aire latérale d'un cône* la limite de l'aire latérale d'une pyramide régulière inscrite dont le nombre des faces croît indéfiniment. On légitime cette définition en montrant que la limite considérée existe et est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de la base de la pyramide tendent vers zéro. Le raisonnement est analogue à celui qu'on a employé pour le cylindre (539); seulement, tandis que la hauteur du prisme droit inscrit au cylindre reste fixe, l'apothème de la pyramide régulière inscrite au cône est variable et tend vers l'apothème du cône.

On voit, comme dans le cas du cylindre, que le volume d'un cône de révolution est la limite des volumes des pyra-

mides inscrites dont on fait croître indéfiniment le nombre des faces.

574. Deux cônes de révolution sont dits *semblables*, lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons des bases.

THÉORÈME.

575. *L'aire latérale d'un cône de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son apothème.*

L'aire latérale du cône est la limite des aires latérales des pyramides régulières inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, A, l'aire latérale, la circonférence de base et l'apothème du cône considéré, et s, p, a, l'aire latérale, le périmètre de la base et l'apothème d'une pyramide régulière inscrite. On a (561)

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de la pyramide, s tend vers S, p vers C, a vers A; on a donc, à la limite,

$$S = C \cdot \frac{1}{2} A.$$

576. Si R est le rayon de la base du cône, on a $C = 2\pi R$ et, par suite,

$$S = \pi RA.$$

En ajoutant la base πR^2, on a, pour l'aire totale,

$$T = \pi RA + \pi R^2 = \pi R(A + R).$$

577. En raisonnant comme au n° 541, on reconnaît que *les aires latérales ou totales de deux cônes de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou des apothèmes ou des hauteurs.*

SCOLIE.

578. Considérons un cône de révolution et une pyramide régulière inscrite SABCDEF (*fig.* 318); par une rotation autour

de l'arête SB, amenons la face SAB dans le prolongement de la face SBC; puis, par une rotation autour de SC, amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante SCD, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces

Fig. 318.

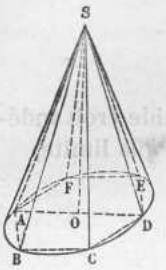
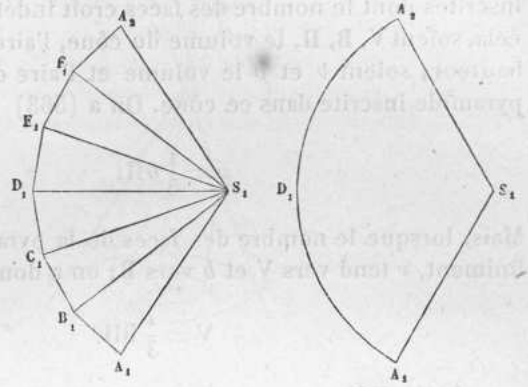


Fig. 319.



latérales de la pyramide soient réunies dans le plan de la dernière d'entre elles FSA. On obtiendra ainsi un secteur polygonal régulier $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ (*fig.* 319), ayant pour rayon l'arête de la pyramide régulière, c'est-à-dire l'apothème du cône, et pour base une ligne brisée régulière $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ égale au périmètre de la base de la pyramide.

Si le nombre des faces de la pyramide régulière inscrite dans le cône croît indéfiniment, le secteur $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ conserve le même rayon, et la base dégénère en un arc de cercle ayant une longueur égale à celle de la circonférence du cône. Le secteur circulaire $S_1A_1D_1A_2$ obtenu est dit le *développement* de l'aire latérale du cône. Il est aisé de calculer le nombre n de degrés contenus dans l'angle $A_1S_1A_2$ de ce secteur circulaire. A étant l'apothème du cône et R le rayon de sa base, on a

$$\frac{n}{360} = \frac{\text{arc } A_1A_2}{2\pi S_1A_1} = \frac{2\pi R}{2\pi A}, \quad \text{d'où} \quad n = 360^\circ \frac{R}{A}.$$

Pour $A = 2R$, on a $n = 180^\circ$, de sorte que le développement est un demi-cercle. Le cône correspondant est dit *équilatéral;* sa section par un plan passant par l'axe SO est un triangle équilatéral SAD.

de l'arête SB, amenons la face SAB dans le prolongement de la face SBC; puis, par une rotation autour de SC, amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante SCD, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces

Fig. 318.

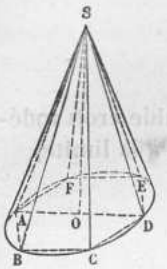
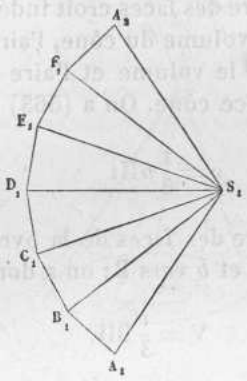
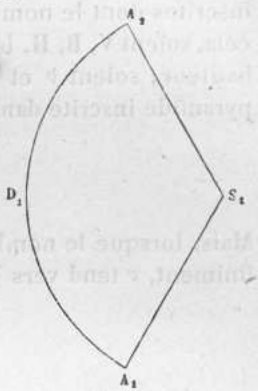


Fig. 319.





latérales de la pyramide soient réunies dans le plan de la dernière d'entre elles FSA. On obtiendra ainsi un secteur polygonal régulier $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ (*fig.* 319), ayant pour rayon l'arête de la pyramide régulière, c'est-à-dire l'apothème du cône, et pour base une ligne brisée régulière $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ égale au périmètre de la base de la pyramide.

Si le nombre des faces de la pyramide régulière inscrite dans le cône croît indéfiniment, le secteur $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ conserve le même rayon, et la base dégénère en un arc de cercle ayant une longueur égale à celle de la circonférence du cône. Le secteur circulaire $S_1A_1D_1A_2$ obtenu est dit le *développement* de l'aire latérale du cône. Il est aisé de calculer le nombre n de degrés contenus dans l'angle $A_1S_1A_2$ de ce secteur circulaire. A étant l'apothème du cône et R le rayon de sa base, on a

$$\frac{n}{360} = \frac{\text{arc } A_1A_2}{2\pi S_1A_1} = \frac{2\pi R}{2\pi A}, \quad \text{d'où} \quad n = 360^\circ \frac{R}{A}.$$

Pour $A = 2R$, on a $n = 180^\circ$, de sorte que le développement est un demi-cercle. Le cône correspondant est dit *équilatéral;* sa section par un plan passant par l'axe SO est un triangle équilatéral SAD.

THÉORÈME.

579. *Le volume d'un cône de révolution a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.*

Le volume du cône est la limite des volumes des pyramides inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H, le volume du cône, l'aire de sa base et sa hauteur; soient v et b le volume et l'aire de la base d'une pyramide inscrite dans ce cône. On a (563)

$$v = \frac{1}{3} bH.$$

Mais, lorsque le nombre des faces de la pyramide croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B; on a donc, à la limite,

$$V = \frac{1}{3} BH.$$

COROLLAIRES.

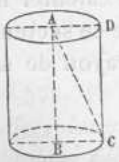
580. Si R est le rayon de la base du cône, on a $B = \pi R^2$ et, par suite,

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

On voit, comme au n° 545, que *les volumes de deux cônes de révolution semblables sont dans le rapport des cubes des hauteurs ou des rayons des bases.*

581. Lorsqu'un rectangle ABCD tourne autour de l'un de ses côtés AB (*fig.* 320), le triangle ABC engendre un cône dont le volume est le tiers (543, 579) de celui du cylindre engendré par le rectangle ABCD. Par suite, le volume engendré en même temps par le triangle ADC est les deux tiers du même cylindre. Cette remarque nous sera utile plus tard.

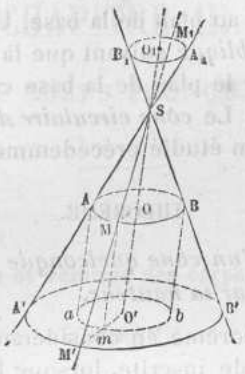
Fig. 320.



582. D'une manière générale, on appelle *surface conique* toute surface engendrée par une droite mobile ASA_1 (*fig.* 321), qui passe constamment par un point fixe S en s'appuyant sur une courbe fixe AMB, plane ou gauche. Cette courbe est la

directrice de la surface, tandis que la droite mobile en est la *génératrice*. Le point S est le *sommet* de la surface conique, qu'il divise en deux nappes SAB, SA_1B_1.

Fig. 321.



THÉORÈME.

583. *Les sections d'une surface conique, par deux plans parallèles, sont semblables.*

En effet, soient la surface conique SAMB et deux sections AMB, A'M'B', faites par deux plans parallèles (*fig.* 321). Menons par le sommet une droite quelconque SOO' qui rencontre les deux plans en O et O', et projetons, parallèlement à SOO', la première section AMB sur le plan de la seconde; cette projection *amb* étant égale à AMB (548), la proposition sera démontrée si nous prouvons que *amb* et A'M'B' sont homothétiques (160). Or, SMM' étant une génératrice quelconque de la surface, les droites OM et O'M' sont parallèles, et l'on a

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{SO}{SO'},$$

ou, en observant que la projection m de M est située sur O'M' et que $O'm = OM$,

$$\frac{O'm}{O'M'} = \frac{SO}{SO'}.$$

Le second membre de cette égalité ayant une valeur indépen-

dante de la position du point M′ sur la courbe A′M′B′, les courbes *amb* et A′M′B′ sont homothétiques.

584. Un *cône* est le corps compris sous une surface conique limitée d'une part à son sommet et de l'autre à une section plane, qui prend le nom de *base;* la *hauteur* du cône est la distance du sommet au plan de la base. Un cône à *base circulaire* est *droit* ou *oblique* suivant que la projection orthogonale du sommet sur le plan de la base coïncide ou non avec le centre du cercle. Le *cône circulaire droit* n'est autre que le cône de révolution étudié précédemment.

THÉORÈME.

585. *Le volume d'un cône quelconque est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

On arrive à ce théorème en considérant le cône comme la limite d'une pyramide inscrite, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

CHAPITRE III.

LES CORPS TRONQUÉS.

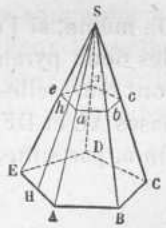
I. — Aires et volumes des corps tronqués.

THÉORÈME.

586. *L'aire latérale d'un tronc de pyramide régulier a pour mesure le produit de la demi-somme des périmètres de ses deux bases par son apothème.*

Soit (*fig.* 322) le tronc de pyramide régulier ABCDE*abcde*. Les trapèzes isocèles qui composent son aire latérale étant tous égaux entre eux (558), il suffit de multiplier l'aire de l'un d'eux AE*ae* par leur nombre n. On obtient ainsi

Fig. 322.



$$n\frac{\mathrm{AE}+ae}{2}\mathrm{H}h \quad \text{ou} \quad \frac{n.\mathrm{AE}+n.ae}{2}\mathrm{H}h.$$

Les produits $n.\mathrm{AE}$ et $n.ae$ représentant les périmètres des deux bases du tronc de pyramide, l'énoncé est justifié.

THÉORÈME.

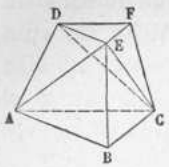
587. *Le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

1° Soit (*fig.* 323) le tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles ABCDEF.

Les plans AEC, DEC, le partagent en trois pyramides triangulaires EABC, EDCF, EDCA, dont nous désignerons les volumes respectifs par P, P′, P″.

La première EABC a pour base la base inférieure ABC du tronc de pyramide, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet E est un sommet de la base supérieure.

Fig. 323.



Si l'on prend le point C pour sommet, la deuxième pyramide EDCF a pour base DEF la base supérieure du tronc, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet C se confond avec un sommet de la base inférieure.

Pour évaluer la troisième pyramide EDCA, comparons-la successivement aux deux autres.

Si l'on prend le point C comme sommet commun des deux pyramides EABC, EDCA, elles ont même hauteur et sont entre elles comme leurs bases EAB, ADE; mais ces triangles, dont la hauteur est aussi la même, sont entre eux comme leurs bases AB et DE, et l'on peut écrire

$$\frac{P}{P''} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad (556, 2^{o}).$$

De même, si l'on prend le point E comme sommet commun des deux pyramides EDCA, EDCF, elles ont même hauteur et sont entre elles comme leurs bases DAC, CDF, ou comme les bases AC et DF de ces triangles, qui ont aussi même hauteur. On a, par suite,

$$\frac{P}{P''} = \frac{P''}{P'}.$$

Il en résulte

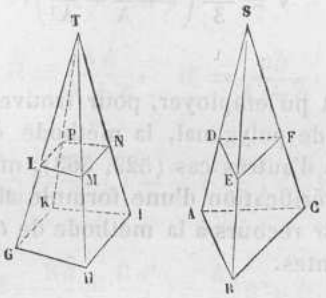
$$P''^{2} = PP'.$$

Le volume de la troisième pyramide est donc la moyenne proportionnelle des volumes des deux premières, c'est-à-dire que la pyramide EDCA équivaut à une pyramide ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la moyenne proportionnelle entre ses deux bases.

2° Soit (*fig.* 324) le tronc de pyramide polygonal GHIKLMNP. Ce tronc a été obtenu en coupant la pyramide TGHIK par un plan parallèle à sa base Prenons un point S à la même hau-

teur que le point T au-dessus de la base GHIK, et construisons dans le plan de cette base un triangle ABC qui lui soit équivalent. La pyramide triangulaire SABC sera équivalente à la pyramide polygonale TGHIK (564). Si l'on prolonge le plan

Fig. 324.



LMNP jusqu'à la pyramide SABC, il déterminera dans cette pyramide une section DEF équivalente à la section LMNP (560); les deux pyramides SDEF, TLMNP, seront donc aussi équivalentes. Par suite, le tronc polygonal GHIKLMNP, différence des pyramides TGHIK, TLMNP, sera équivalent au tronc triangulaire ABCDEF, différence des pyramides SABC, SDEF. Et comme le tronc de pyramide triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases, il en sera de même du tronc de pyramide polygonal qui a même hauteur et des bases équivalentes.

COROLLAIRES.

588. En désignant par V, B, b, h, les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$V = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}bh + \frac{1}{3}h\sqrt{Bb}$$

ou

$$(1) \qquad V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Souvent, au lieu de donner les deux bases B et b, on donne l'une d'elles B et le rapport $\frac{a}{A}$ de deux côtés homologues de

ces deux bases; on a alors

$$\frac{b}{B}=\frac{a^2}{A^2}, \quad \text{d'où} \quad b=\frac{a^2}{A^2}B.$$

Il en résulte

$$(2) \qquad V=\frac{Bh}{3}\left(1+\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}\right).$$

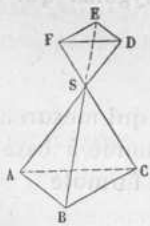
SCOLIE.

589. On aurait pu employer, pour trouver le volume d'un tronc de pyramide polygonal, la méthode de *décomposition* déjà suivie dans d'autres cas (529, 563); mais, cette marche exigeant ici la vérification d'une formule algébrique, il était préférable d'avoir recours à la méthode de *transformation* en figures équivalentes.

590. On peut donner au mot *tronc* une extension utile (1). De même que les théorèmes relatifs aux sections d'un prisme s'étendent au cas où elles sont extérieures (512), les théorèmes relatifs aux sections d'une pyramide (556, 557) s'étendent au cas où ces sections deviennent extérieures, qu'elles soient faites au delà du sommet ou au-dessous de la base de la pyramide proposée. Les plans sécants doivent seulement rester parallèles à la base de cette pyramide.

On peut distinguer les deux cas possibles en disant que les sections faites au-dessous du sommet donnent des troncs de *première espèce* et que les sections faites au-dessus du sommet donnent des troncs de *seconde espèce*.

Fig. 325.



Pour évaluer le volume d'un tronc de seconde espèce ABCDEF (*fig.* 325), il suffit d'effectuer la somme des pyramides SABC, SDEF. La hauteur h du tronc est d'ailleurs égale à la somme des hauteurs H et H′ des deux pyramides. On a ainsi, en conservant les notations du n° 588,

$$V=\frac{1}{3}BH+\frac{1}{3}bH'=\frac{B}{3}\left(H+\frac{bH'}{B}\right).$$

(1) *Voir* TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition, 1891.

De la relation (556, 557)

$$\frac{B}{b} = \frac{A^2}{a^2} = \frac{H^2}{H'^2},$$

il résulte

$$\frac{H}{A} = \frac{H'}{a} = \frac{H + H'}{A + a} = \frac{h}{A + a},$$

d'où

$$H = \frac{Ah}{A + a}, \quad H' = \frac{ah}{A + a}.$$

Par suite,

$$V = \frac{Bh}{3}\,\frac{A^3 + a^3}{A^2(A + a)} = \frac{Bh}{3}\left(1 - \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right) \text{ (t. I, } \textit{Alg. élém.}\text{, 54)},$$

et aussi

$$V = \frac{h}{3}\left(B - \frac{Ba}{A} + \frac{Ba^2}{A^2}\right) = \frac{h}{3}(B + b - \sqrt{Bb}).$$

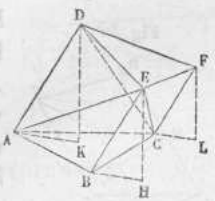
Pour un tronc de seconde espèce, la formule du volume est donc la même que pour un tronc de première espèce, sauf le signe de la moyenne proportionnelle. On passe donc de l'une à l'autre formule en changeant le signe de cette moyenne ou en changeant a en $-a$.

On aurait pu suivre une marche analogue pour calculer l'expression du volume d'un tronc de pyramide de première espèce; seulement, au lieu d'ajouter les pyramides SABC, SDEF, il aurait fallu les retrancher (*fig.* 324).

THÉORÈME.

591. *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour base commune la base inférieure du tronc et, pour sommets, ceux de la base supérieure.*

Fig. 326.



Soit (*fig.* 326) le tronc de prisme triangulaire ABCDEF (514); soient EH, DK, FL, les hauteurs des sommets de sa base supérieure par rapport au plan de sa base inférieure ABC.

Les plans AEC, DEC, partagent le tronc en trois pyramides triangulaires EABC, EDCF, EDCA.

La première EABC a pour base ABC la base inférieure du tronc, et pour hauteur EH.

Pour évaluer la deuxième pyramide EDCF, cherchons son rapport à la pyramide EABC. Si l'on prend pour sommets des pyramides EDCF, EABC, les points D et A, leurs bases sont les triangles ECF, ECB, et leur hauteur est la même, puisque l'arête DA est parallèle à la face EBCF. Ces pyramides sont donc entre elles comme les triangles ECF, ECB. D'ailleurs ces triangles, compris entre les parallèles EB, FC, ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases FC, EB. Donc, les pyramides EDCF, EABC, sont entre elles comme les arêtes FC et EB ou comme les hauteurs FL et EH, évidemment proportionnelles à ces arêtes en vertu de la similitude des triangles rectangles EBH, FCL.

Pour évaluer la troisième pyramide EDCA, cherchons son rapport à la pyramide EDCF. Ces deux pyramides, ayant même hauteur, sont entre elles comme leurs bases DCA, DCF, ou comme les arêtes DA et FC, puisque les triangles DCA, DCF, compris entre les parallèles DA, FC, ont même hauteur. Donc les pyramides EDCA, EDCF, sont entre elles comme les hauteurs DK et FL, proportionnelles aux arêtes DA et FC.

Les trois pyramides EABC, EDCF, EDCA, étant proportionnelles aux hauteurs EH, FL, DK, et le volume de la première étant

$$\frac{ABC.EH}{3},$$

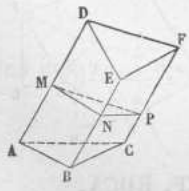
les volumes des deux autres sont respectivement

$$\frac{ABC.FL}{3} \quad \text{et} \quad \frac{ABC.DK}{3}.$$

SCOLIE.

592. Si le tronc considéré est un tronc de prisme droit, les hauteurs EH, FL, DK, se confondent avec les arêtes latérales EB, FC, DA, et la base ABC avec la section droite du tronc. Le volume du corps tronqué a donc alors pour mesure *le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de ses arêtes latérales.*

Fig. 327.



On étend facilement cet énoncé au cas du tronc de prisme oblique. Soit (*fig.* 327) le tronc de prisme oblique ABCDEF. Menons sa section droite MNP. Elle le par-

tage en deux troncs de prisme MNPABC, MNPDEF, qui sont droits relativement à cette section, considérée comme base. Le premier a pour mesure

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{MA}+\text{NB}+\text{PC}}{3}\right);$$

le second,

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{MD}+\text{NE}+\text{PF}}{3}\right).$$

Le tronc de prisme oblique ABCDEF, somme des deux troncs de prismes droits MNPABC, MNPDEF, a donc pour mesure la somme de leurs mesures, c'est-à-dire

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{AD}+\text{BE}+\text{CF}}{3}\right).$$

COROLLAIRES.

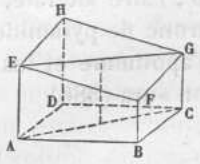
593. En désignant par V, B, β, h, h', h'', a, a', a'', les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de prisme triangulaire, sa base et sa section droite, les hauteurs des sommets de sa base supérieure au-dessus du plan de sa base inférieure et ses arêtes latérales, on a les formules

$$(1) \qquad \text{V}=\text{B}\left(\frac{h+h'+h''}{3}\right),$$

$$(2) \qquad \text{V}=\beta\left(\frac{a+a'+a''}{3}\right).$$

594. Si l'on représente par A et a, B et b, les arêtes latérales, opposées deux à deux, d'un parallélipipède tronqué quelconque (*fig.* 328) et par S sa section droite, les volumes v et v' des deux prismes triangulaires tronqués qui le composent sont

Fig. 328.



$$v=\frac{\text{S}}{2}\,\frac{\text{A}+a+b}{3}, \qquad v'=\frac{\text{S}}{2}\,\frac{\text{A}+a+\text{B}}{3};$$

par suite, son volume $\text{V}=v+v'$ a pour expression

$$\text{V}=\text{S}\,\frac{2(\text{A}+a)+(\text{B}+b)}{6}.$$

Mais, si l'on représente par δ la longueur de la droite qui

unit les centres des deux bases du tronc, on a

$$A + a = B + b = 2\delta,$$

d'où

$$V = S.\delta.$$

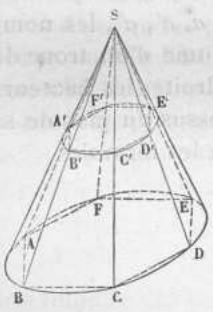
Le volume d'un parallélipipède tronqué quelconque a donc *pour mesure le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de deux arêtes latérales opposées.*

THÉORÈME.

595. *L'aire latérale d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles a pour mesure le produit de la demi-somme des circonférences de ses bases par son apothème.*

L'aire latérale du tronc de cône ADD'A' (*fig.* 329) est la différence des aires latérales des cônes SAD, SA'D'. Cela posé, inscrivons dans le cône SAD une pyramide régulière SABCDEF; le plan A'D' de la base supérieure du tronc de cône décompose cette pyramide en deux parties qui sont, l'une, SA'B'C'D'E'F', une pyramide régulière inscrite dans le cône SA'D', l'autre, ABCDEFA'B'C'D'E'F', un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône ADD'A'. Or, les aires latérales des cônes SAD, SA'D', étant les limites des aires latérales des pyramides SABCDEF, SA'B'C'D'E'F', lorsque le nombre commun de leurs faces croît indéfiniment, l'aire latérale du tronc de cône sera égale à la limite de l'aire latérale du tronc de pyramide régulier inscrit. Soient s, a, p, p', l'aire latérale, l'apothème et les périmètres des bases du tronc de pyramide; soient de même S, A, C, C', l'aire latérale, l'apothème et les circonférences des bases du tronc de cône; on aura (586)

Fig. 329.



$$s = \frac{1}{2}(p + p')a.$$

Mais, à la limite, lorsque les côtés du polygone ABCDEF tendent vers zéro, s tend vers S, p vers C, p' vers C', a vers A, et l'on a

$$S = \frac{1}{2}(C + C')A.$$

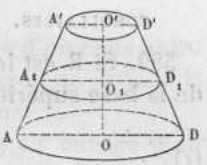
COROLLAIRES.

596. Si R et R′ sont les rayons des bases du tronc, on a $C = 2\pi R$, $C' = 2\pi R'$ et, par suite,

$$S = \pi(R + R')A.$$

597. Par le milieu A_1 du côté AA′ (*fig.* 330), menons un plan parallèle aux bases du tronc de cône; le rayon A_1O_1 de la section circulaire déterminée par ce plan est parallèle (414) aux rayons AO, A′O′, des bases et, par suite (85), égal à la demi-somme de ces rayons. Donc la circonférence A_1D_1 est la moyenne arithmétique des circonférences de base, et l'on peut dire que *l'aire latérale d'un tronc de cône de révolution a pour mesure le produit de l'apothème par la circonférence équidistante des deux bases.*

Fig. 330.



Ce dernier énoncé s'applique aussi au cylindre et au cône: car la circonférence équidistante des bases est égale, dans le cylindre, à celle de la base, et, dans le cône, à la moitié de celle de la base.

THÉORÈME.

598. *Le volume d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles est équivalent à la somme des volumes de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases, le premier la base inférieure, le deuxième la base supérieure, et le troisième la moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.*

Considérons, comme au n° 595, un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône. Les volumes des deux pyramides, dont ce tronc de pyramide est la différence, ayant respectivement pour limites les volumes des deux cônes dont le tronc de cône proposé est la différence, on aura le volume de ce tronc de cône en prenant la limite du volume du tronc de pyramide. D'après cela, soient V, b, B, H, le volume, les bases et la hauteur du tronc de cône, v_1, b_1, B_1, le volume et les bases du tronc de pyramide inscrit; on aura (588)

$$v_1 = \frac{H}{3}(B_1 + b_1 + \sqrt{B_1 b_1}).$$

Mais, lorsque le nombre des faces du tronc de pyramide croît indéfiniment, v_1 tend vers V, b_1 vers b, B_1 vers B, et l'on a, à la limite, la formule

$$V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{Bb}),$$

dont l'énoncé ci-dessus n'est que la traduction en langage ordinaire.

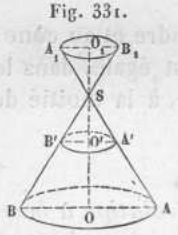
COROLLAIRES.

599. Si R est le rayon de la base inférieure B, et r le rayon de la base supérieure b, on a $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$ et, par suite,

$$(1) \qquad V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

600. En coupant une surface conique de révolution par deux plans AB, A_1B_1, perpendiculaires à l'axe, mais situés de part et d'autre du sommet S (*fig.* 331), on obtient un corps qui est la somme des deux cônes SAB, SA_1B_1. Il convient de donner encore à ce corps le nom de *tronc de cône;* mais, pour le distinguer du tronc de cône proprement dit, nous l'appellerons *tronc de cône de seconde espèce* (590).

Fig. 331.



Le raisonnement qui précède s'applique au tronc de seconde espèce; il faut seulement substituer le mot *somme* au mot *différence* et remarquer que, le tronc de pyramide inscrit correspondant étant de seconde espèce, le radical qui figure dans l'expression de v_1 doit avoir le signe — (590). On obtient ainsi, pour le volume du tronc de cône de seconde espèce, la formule

$$V = \frac{H}{3}(B + b - \sqrt{Bb}) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 - Rr).$$

601. Parfois, dans la pratique, notamment pour le *cubage des troncs d'arbres* non équarris, les bases diffèrent assez peu pour qu'on puisse assimiler sans inconvénient le cône tronqué à un cylindre ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la section faite dans le tronc à égale distance des deux bases. L'erreur commise est d'ailleurs facile à évaluer;

en retranchant le volume cylindrique

$$(2) \qquad v = \pi H \left(\frac{R + r}{2}\right)^2$$

du cône tronqué dont le volume est donné par la formule (1), on trouve

$$V - v = \frac{1}{3}\pi H \left(\frac{R - r}{2}\right)^2.$$

L'erreur commise est donc égale au volume d'un cône ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour rayon de sa base la demi-différence des rayons des bases du tronc.

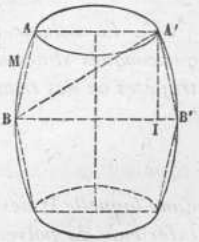
Quand on veut appliquer la formule (2) au cubage d'un tronc d'arbre, il convient de la préparer de la manière suivante. Soit C la longueur de la circonférence moyenne, que l'on évalue au moyen d'un cordon métrique; le rayon de cette circonférence sera $\frac{C}{2\pi}$, et, par suite, le volume cherché

$$v = \frac{\pi HC^2}{4\pi^2} = \frac{HC^2}{4\pi}.$$

602. La question du *jaugeage des tonneaux* se rattache à la mesure du tronc de cône.

En considérant le tonneau (*fig.* 332) comme la somme de deux troncs de cône identiques opposés par leur grande base, on aurait la formule

Fig. 332.



$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr),$$

dans laquelle H est la hauteur totale du double tronc, r le rayon du *fond* AA', et R le rayon de la grande base BB', à laquelle on donne le nom de *bouge*. Mais cette formule donne un résultat trop faible, car on néglige deux fois le volume engendré par la rotation du segment AMB compris entre la droite AB et l'arc AMB. En remplaçant, dans la parenthèse, Rr par R^2, on obtient une formule

$$V = \frac{1}{3}\pi H(2R^2 + r^2),$$

qui donne au contraire un résultat trop fort. La formule qui

s'adapte le mieux à la forme générale des tonneaux est la suivante (¹) :

$$V = \frac{1}{3}\pi H\left[2R^2 + r^2 - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)\right].$$

Enfin, nous signalerons la formule

$$V = 0{,}525 \cdot D^3,$$

qui permet de jauger les tonneaux ordinaires d'une manière très rapide et suffisamment approchée, en mesurant seulement la diagonale $BA' = D$ qui va du trou B ou *bonde* au point le plus bas A' de l'un des fonds. Les *jauges diagonales* sont surtout employées dans les octrois. En calculant d'avance, à l'aide de la formule précédente, les valeurs de V qui répondent aux diverses valeurs de D et inscrivant ces valeurs sur la tige de fer que l'on introduit dans le tonneau, on obtient la capacité du fût par une simple lecture.

Pour comparer cette dernière formule avec la précédente, il suffit d'observer que l'on a, dans le triangle rectangle BA'I,

$$\overline{BA'}^2 = \overline{A'I}^2 + \overline{BI}^2 \quad \text{ou} \quad D^2 = \frac{1}{4}H^2 + (R + r)^2.$$

II. — Exercices et questions complémentaires.

THÉORÈME.

603. *Le volume de tout polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des plans parallèles et pour faces latérales des trapèzes ou des triangles, est exprimé par la formule*

$$\frac{H}{6}(B + B' + 4B''),$$

dans laquelle H *désigne la distance des deux plans parallèles,* B *la base inférieure du polyèdre,* B' *la base supérieure et* B'' *la section équidistante des deux bases* (²).

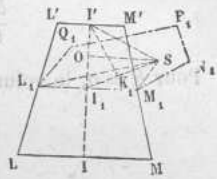
En effet, soient $L_1M_1N_1P_1Q_1$ la section équidistante des bases (*fig.* 333) et S un point pris à volonté dans l'intérieur de cette section. Le polyèdre peut être décomposé en pyramides ayant pour bases ses diverses faces et

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLVIII, p. 96.

(²) *Voir* TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition, 1891.

pour sommet commun le point S. Les volumes des deux pyramides qui reposent sur les bases B et B' ont évidemment pour mesures $\frac{BH}{6}$, $\frac{B'H}{6}$, et il reste à évaluer les volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales. Soit donc LMM'L' une quelconque de ces faces, par exemple celle qui répond au côté L_1M_1 du polygone $L_1M_1N_1P_1Q_1$; pour raisonner d'une manière générale, nous supposerons que cette face soit un trapèze (si c'était un triangle, l'un des côtés parallèles LM ou L'M' serait nul). Abaissons du point S la perpendiculaire SO sur le plan de la face LMM'L'; dans ce plan, menons par le point O la perpendiculaire $I'OI_1$ à L_1M_1; la droite SI_1 sera perpendiculaire à L_1M_1; enfin, menons $I'K_1$ perpendiculaire au plan de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$: $I'K_1$ sera la moitié de la distance H des bases du polyèdre. Cela posé, la pyramide SLMM'L' a pour mesure

Fig. 333.



$$L_1M_1 . 2I'I_1 . \frac{1}{3}SO.$$

Or, le produit $I'I_1 . SO$ peut être remplacé par le produit $SI_1 . I'K_1$, qui, comme lui, exprime le double de l'aire du triangle $I'I_1S$; on a donc, pour le volume de la pyramide,

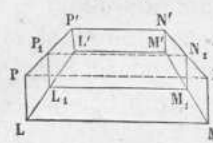
$$\frac{H}{6} \cdot 2L_1M_1 . SI_1 = \frac{H}{6} \cdot 4SL_1M_1.$$

Par suite, pour avoir la somme des volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales du polyèdre, il faut multiplier par $\frac{H}{6}$ quatre fois la somme des triangles qui ont S pour sommet commun et pour bases les côtés de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$, c'est-à-dire multiplier par $\frac{H}{6}$ quatre fois l'aire B'' de cette section.

APPLICATION.

604. Les amas de pierres, les fossés ou cuvettes établies de distance en distance le long des routes, les tombereaux, etc., sont terminés haut et bas par deux rectangles parallèles LMNP, L'M'N'P', et latéralement par quatre trapèzes LMM'L', MNN'M', NPP'N', PLL'P'. Exprimons le volume d'un pareil corps en fonction de la distance h des plans des deux rectangles et des dimensions a et b, a' et b', de ces rectangles (*fig.* 334).

Fig. 334.



La section $L_1M_1P_1Q_1$, équidistante des bases, est un rectangle dont les dimensions, L_1M_1, L_1P_1, sont évidemment égales à $\frac{1}{2}(a+a')$ et $\frac{1}{2}(b+b')$.

Le volume du corps est donc, en vertu du théorème précédent, donné par la formule

$$\frac{h}{6}[ab + a'b' + (a + a')(b + b')],$$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\frac{bh}{6}(2a + a') + \frac{b'h}{6}(2a' + a).$$

Pour $b' = 0$, le volume se réduit à

$$\frac{bh}{6}(2a + a'),$$

et le corps a la forme qu'on donne dans les parcs d'artillerie aux piles de boulets sphériques rectangulaires.

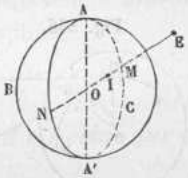
CHAPITRE IV.

LA SPHÈRE.

I. — Théorèmes généraux relatifs à la sphère.

605. On appelle *surface sphérique* la surface engendrée par la rotation d'une demi-circonférence ABA′ autour du diamètre AA′ qui la termine (*fig.* 335).

Fig. 335.



Dans ce mouvement, tout point de cette demi-circonférence décrit un cercle dont le centre est situé sur l'axe de rotation AA′ et dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

La *sphère* est le corps limité par une surface sphérique. On confond souvent dans le discours les mots *sphère* et *surface sphérique*, de même qu'en Géométrie plane les mots *cercle* et *circonférence de cercle*.

606. Considérons la sphère engendrée par la rotation du demi-cercle ABA′ autour du diamètre AA′, et un point quelconque de l'espace. Quand le demi-cercle générateur vient se placer suivant ACA′ dans le plan déterminé par AA′ et par le point considéré, il peut se faire que ce point soit comme E à l'extérieur du cercle ACA′, ou comme I à l'intérieur, ou enfin comme M sur la circonférence de ce cercle. Dans le premier cas, le point E est *extérieur* à la sphère, et sa distance au centre O du cercle ACB est plus grande que le rayon R de ce cercle; dans le deuxième cas, le point I est *intérieur* à la sphère, et la distance OI est moindre que R; enfin, dans le troisième cas, le point M est sur la surface sphérique et la distance OM est égale à R.

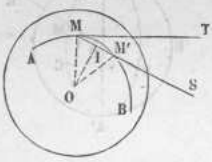
La *surface sphérique* peut donc être encore définie le *lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe.*

Ce point fixe O est dit le *centre* de la sphère. On nomme *rayon* toute droite, telle que OA ou OM, menée du centre O à la surface; *tous les rayons d'une même sphère sont égaux.* On nomme *diamètre* toute droite, telle que MN, passant par le centre et limitée à la surface sphérique; *tous les diamètres d'une même sphère sont égaux*, car chacun d'eux est la somme de deux rayons.

Deux sphères de même rayon sont égales.

607. La définition donnée au n° 96 pour la tangente aux courbes planes s'étend aux courbes de l'espace. Il est aisé de voir, d'après cela, que *la tangente* MT *à une courbe quelconque* AMB *tracée sur la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OM *mené au point de contact.* En effet (*fig.* 336), prenons sur la courbe AMB un point M′ voisin du point M, menons la sécante MM′S et joignons le centre O au milieu I de la corde MM′. Le triangle MOM′ étant isocèle, la droite OI est perpendiculaire sur MM′. Or, lorsque la sécante MM′S tourne autour du point M de manière à devenir à la limite la tangente MT, le point I, milieu de MM′, se réunit au point M en même temps que le point M′. L'angle OMT, position limite de l'angle droit OIS, est donc lui-même un angle droit.

Fig. 336.



THÉORÈME.

608. *Toute section plane de la sphère est un cercle.*

En effet, les points de la section sont, puisqu'ils appartiennent à la sphère, situés à la même distance du centre de cette sphère; or, on sait (88, 404) que le lieu des points d'un plan équidistants d'un point fixe est une circonférence de cercle.

COROLLAIRES.

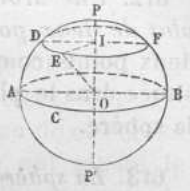
609. Si le point fixe O, qui est ici le centre de la sphère (*fig.* 337), est situé dans le plan sécant, ce point est le centre même de la section ACB, dont le rayon ne diffère pas de celui de la sphère.

Si le point fixe O est extérieur au plan sécant, le centre I

de la section DEF est la projection du centre O de la sphère sur le plan sécant (404). Quant au rayon IE $= r$ de la section, c'est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle OIE, dont l'hypoténuse OE est le rayon R de la sphère et dont l'autre côté de l'angle droit OI est la distance d du centre de la sphère au plan sécant. Ce rayon r résulte donc de la formule

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

Fig. 337.



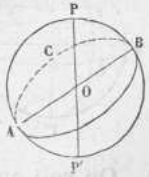
On est ainsi conduit à diviser les sections planes de la sphère en deux classes : les *grands cercles*, dont les plans passent par le centre de la sphère et qui sont tous égaux entre eux, puisqu'ils ont tous pour rayon le rayon de la sphère, et les *petits cercles*, dont les plans ne contiennent pas le centre de la sphère et dont les rayons, inférieurs à celui de la sphère, décroissent à mesure que leurs plans s'éloignent du centre de la sphère.

Deux petits cercles également éloignés du centre de la sphère sont égaux, et, de deux petits cercles inégalement éloignés du centre de la sphère, le plus grand est celui qui est le plus voisin de ce centre.

Ajoutons qu'il faut *trois points* de la surface sphérique pour déterminer un petit cercle (95, 390), tandis que *deux points* suffisent pour déterminer un grand cercle, puisque le centre est connu; toutefois, dans ce dernier cas, les deux points donnés ne doivent pas être en ligne droite avec le centre de la sphère, sans quoi le plan du grand cercle, assujetti seulement à passer par un diamètre, pourrait occuper une infinité de positions (390).

610. *Tout grand cercle divise la surface sphérique et la sphère en deux parties égales.* Car si, après avoir séparé les deux parties, on les applique sur la base commune en tournant leur convexité dans le même sens, les deux surfaces coïncideront, sans quoi tous les points de la surface sphérique ne seraient pas à la même distance du centre.

Fig. 338.



611. *Deux grands cercles* APBP', ABC (*fig.* 338), *se divisent*

mutuellement en deux parties égales. Car le centre O de la sphère, appartenant à la fois aux plans de ces deux cercles, est situé sur leur intersection commune, qui est alors un diamètre.

612. *Une droite ne peut couper la surface sphérique en plus de deux points.* Car cette droite ne peut avoir plus de deux points communs avec la circonférence de grand cercle située dans le plan déterminé par cette droite et le centre de la sphère.

613. *La sphère est de révolution autour d'un diamètre quelconque* AB. Car la circonférence ACB déterminée par un plan quelconque passant par AB, ayant même centre O et même rayon OA que la sphère, engendrera évidemment cette surface en tournant autour de AB (*fig.* 338).

614. On nomme *pôles* d'un cercle de la sphère, les extrémités du diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan du cercle.

Deux cercles DFE, ACB (*fig.* 339), dont les plans sont parallèles, ont les mêmes pôles P et P'.

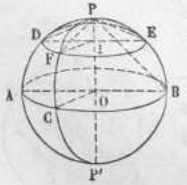
Le centre I d'un cercle quelconque DE, ses pôles P et P', et le centre O de la sphère sont sur une même perpendiculaire au plan de ce cercle.

Tout grand cercle PFCP' passant par les pôles P et P' d'un cercle DFE a son plan perpendiculaire au plan de ce cercle, puisqu'il contient la droite PP', qui est perpendiculaire à ce dernier plan.

THÉORÈME.

615. *Tous les points de la circonférence d'un cercle* DFE *de la sphère sont à égale distance de chacun des pôles* P et P' *de ce cercle* (*fig.* 339).

Fig. 339.



En effet, la droite PI, qui joint le pôle P au centre I du cercle DFE, étant perpendiculaire au plan DFE, les droites PD, PF, PE, ..., sont des obliques qui s'écartent également du pied I de la perpendiculaire et qui, par suite, sont égales.

On voit encore que les arcs de grand cercle PD, PF, PE, ..., sont égaux comme sous-tendus par des cordes égales.

Enfin, dans le cas où le cercle considéré DFE devient un grand cercle ACB, la même propriété subsiste; mais, les angles droits POA, POC, POB, . . . , ayant leurs sommets au centre des grands cercles PAP′, PCP′, PBP′, . . . , les arcs PA, PC, PB, . . . sont tous égaux au quart d'une circonférence de grand cercle.

SCOLIE.

616. Des deux pôles P et P′ d'un petit cercle DFE, nous ne considérerons désormais, à moins d'avertissement contraire, que le pôle P, qui est le plus rapproché du plan de ce cercle. Nous donnerons à la distance rectiligne PD, qui sépare le pôle P d'un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *distance polaire* de ce cercle, et à la longueur de l'arc de grand cercle PD, qui va du pôle à un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *rayon sphérique* de ce cercle.

Le rayon sphérique d'un grand cercle est égal au quart de la circonférence de ce cercle ou à un quadrant, et sa distance polaire est égale à la corde de cet arc, c'est-à-dire au côté du carré inscrit dans un grand cercle.

617. Le théorème précédent permet de tracer des circonférences sur une sphère solide comme on les trace sur un plan. On emploie à cet effet un *compas à branches courbes*, afin de ne pas être gêné par la convexité de la sphère. On donne au compas une ouverture (distance des deux pointes) égale à la distance polaire voulue, et l'on place la pointe sèche au point choisi pour pôle; l'autre pointe décrit alors le cercle demandé.

Pour décrire un grand cercle, il faut avoir sa distance polaire, c'est-à-dire la corde d'un arc égal au quart d'un grand cercle, ce qui exige la connaissance du rayon de la sphère.

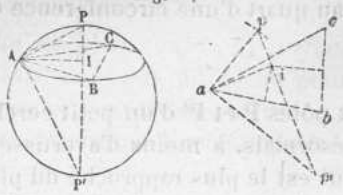
PROBLÈME.

618. *Trouver le rayon d'une sphère solide* (*fig.* 340).

D'un point P de la surface sphérique comme pôle, avec une ouverture de compas arbitraire, on décrit un cercle ABC. On relève avec le compas les trois distances rectilignes AB, BC, CA, et l'on construit sur le papier un triangle *abc* ayant pour côtés ces trois longueurs. On détermine le centre *i* du cercle circonscrit au triangle *abc*, et la droite *ai* est égale au rayon AI du cercle ABC. Par suite, si du point *a* comme centre, avec

une ouverture de compas égale à celle qui a servi à décrire le cercle ABC sur la sphère, on décrit un petit arc de cercle jusqu'à la rencontre p de la perpendiculaire pip' élevée en i

Fig. 340.



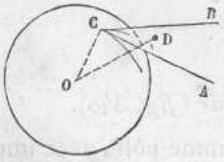
sur ai, on forme un triangle api égal à API, et il ne reste plus qu'à élever la perpendiculaire ap' sur ap pour avoir en pp' le diamètre PP′ de la sphère.

Pour obtenir des résultats précis lorsqu'on n'a à sa disposition qu'une portion de sphère, il faut choisir le point P à peu près au milieu de la portion de surface dont on dispose, prendre une distance polaire PA aussi grande que possible, et enfin, dans tous les cas, choisir les points A, B, C, sur le cercle ABC, de telle sorte que le triangle ABC soit à peu près équilatéral.

THÉORÈME.

619. *Tout plan* ACB *perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon* OC *est tangent à la sphère, et,* réciproquement, *tout plan* ACB *tangent à la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OC *mené au point de contact* C (*fig.* 341).

Fig. 341.



On dit qu'un plan ACB est *tangent* à la sphère lorsqu'il n'a avec cette surface qu'un point commun C, qu'on nomme *point de contact.*

Cela posé, soit ACB un plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon OC. D étant un point quelconque de ce plan, autre que C, OD est oblique à ce plan, et l'on a $OD > OC$, de sorte que le point D est extérieur à la sphère. Le plan ACB, n'ayant d'après cela que le point C commun avec la surface sphérique, est tangent à cette surface.

Inversement, si ACB est un plan tangent à la sphère au point C, tout point D de ce plan, autre que C, est extérieur à la sphère, et l'on a $OD > OC$; donc OC, étant la plus courte

distance du centre O au plan ACB, est perpendiculaire sur ce plan.

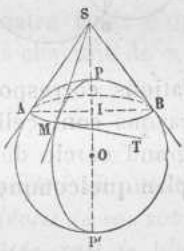
COROLLAIRES.

620. *Par un point pris sur la surface sphérique, on peut toujours mener un plan tangent à cette surface, et l'on ne peut en mener qu'un* (402).

621. *Le plan tangent à la sphère en un point* C *contient les tangentes en ce point à toutes les courbes qu'on peut tracer par ce point sur la surface sphérique* (607, 400).

622. Considérons une sphère O et un point extérieur S (*fig.* 342). Par la droite OS, menons un plan quelconque qui déterminera dans la sphère un grand cercle PAP', et menons par S une tangente SA à ce cercle. Pendant que le demi-cercle PAP' en tournant autour de l'axe SO engendre la sphère, la tangente SA engendre un cône de révolution qui a en commun avec la sphère le cercle AB décrit par le point A. De plus, en tout point M de ce cercle, le cône et la sphère ont le même plan tangent, car la génératrice SM et la tangente MT au cercle AB, qui déterminent le plan tangent au cône (570), sont situées l'une et l'autre (621) dans le plan tangent à la sphère. On dit d'après cela que *le cône est circonscrit à la sphère* et que *la sphère est inscrite au cône* le long du cercle commun AB.

Fig. 342.



On voit encore par là que, *par un point extérieur* S, *on peut mener une infinité de plans tangents à une sphère* O, et que *toutes les tangentes* SA, SM, SB, ..., *à la sphère, issues du même point* S, *sont égales.*

Si le point S s'éloigne indéfiniment sur la droite PP', le cône dégénère en un *cylindre circonscrit,* et le lieu des points de contact de la sphère et de ce cylindre de révolution devient le grand cercle perpendiculaire à la direction PP' des génératrices du cylindre.

THÉORÈME.

623. *L'intersection de deux sphères* A *et* B *est une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des*

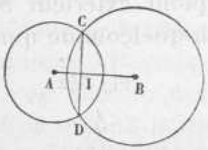
centres AB *des deux sphères et dont le centre est sur cette ligne* (*fig.* 343).

Car cette intersection n'est autre que la circonférence engendrée par la rotation autour de AB du point C commun aux deux circonférences suivant lesquelles les deux sphères sont coupées par un plan quelconque passant par AB.

SCOLIE.

624. Lorsque deux sphères n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles sont tangentes en ce point, qu'on nomme *point de contact;* le point de contact est situé sur la ligne des centres, et en ce point les sphères ont le même plan tangent (101).

Fig. 343.



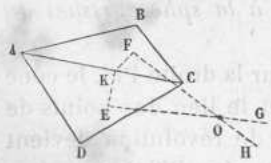
Les positions relatives de deux sphères sont au nombre de cinq (102), et les relations correspondantes entre la distance des centres et les rayons sont celles qui ont lieu pour les circonférences de grand cercle déterminées dans les sphères données par un plan quelconque passant par la droite des centres.

THÉORÈME.

625. *Par quatre points* A, B, C, D, *non situés dans un même plan, on peut faire passer une surface sphérique, mais une seule* (*fig.* 344).

Il s'agit de prouver qu'il existe un point, et un seul, situé à la même distance des quatre points A, B, C, D.

Fig. 344.



Or, tout point équidistant de A, B, C, D, doit se trouver sur la perpendiculaire FH élevée au plan ABC par le centre F du cercle circonscrit au triangle ABC, puisque cette perpendiculaire est le lieu des points équidistants de A, B, C (404); il doit aussi appartenir à la perpendiculaire EG élevée au plan ACD par le centre E du cercle circonscrit au triangle ACD. Comme deux droites FH, EG, ne peuvent avoir qu'un point commun, on voit d'abord qu'il ne saurait jamais exister qu'un seul point équidistant de A, B, C, D. En second lieu, un tel point existe

toujours si, conformément à l'hypothèse, les points A, B, C, D, ne sont pas situés dans un même plan. En effet, le plan perpendiculaire sur le milieu K de AC, étant le lieu des points équidistants de A et de C, doit contenir EG et FH; d'ailleurs, les deux droites KF et KE, suivant lesquelles il rencontre les plans ABC et ADC, se coupent, puisque les plans ABC et ADC sont distincts; donc les deux droites EG et FH, étant situées dans un même plan EKF, et étant, dans ce plan, perpendiculaires à deux droites KF et KE qui se coupent, ont un point commun O qui est le centre de la sphère demandée.

COROLLAIRES.

626. Deux sphères, qui ont quatre points communs non situés dans un même plan, coïncident.

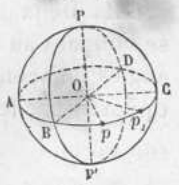
627. Les perpendiculaires élevées aux quatre faces d'un tétraèdre, par le centre du cercle circonscrit à chacune de ces faces, se coupent en un même point.

THÉORÈME.

628. *L'angle* APB *de deux arcs de grand cercle* PAP', PBP', *a pour mesure, soit l'arc de grand cercle* AB *décrit de son sommet* P *comme pôle et compris entre ses côtés, soit le plus petit arc de grand cercle* pp_1, *qui unit les pôles de ses côtés* (*fig.* 345).

On nomme *angle de deux courbes* passant par un même point de l'espace l'angle de leurs tangentes en ce point. *L'angle de deux courbes tracées sur la sphère est* donc *égal à l'angle des plans menés respectivement par le centre de la sphère et par les tangentes à ces courbes au point commun;* car, ces tangentes étant perpendiculaires au rayon qui aboutit au point commun (607), leur angle mesure le dièdre des deux plans considérés. En particulier, *l'angle de deux arcs de grand cercle est égal à l'angle des plans de ces arcs.*

Fig. 345.



Cela posé, les arcs PA, PB, étant des quadrants, les angles POA, POB, sont droits et l'angle AOB est l'angle plan qui mesure l'angle dièdre formé par les plans des deux grands cercles. Mais cet angle dièdre est égal à l'angle APB des deux arcs de grand cercle, et l'angle

au centre AOB a pour mesure l'arc AB; donc l'arc AB est aussi la mesure de l'angle APB.

En second lieu, prenons sur la circonférence ABC, à partir des points A et B, *dans le même sens*, deux arcs Ap et Bp_1, égaux à un quadrant; l'arc pp_1 est évidemment égal à l'arc AB, et, pour justifier le second énoncé du théorème, il suffit de prouver que p et p_1 sont les pôles des cercles PAP', PBP'. Or la droite Op, perpendiculaire à OA, puisque l'arc Ap est un quadrant, et perpendiculaire à OP, puisqu'elle est dans le plan ABC, est perpendiculaire au plan du grand cercle PAP'; p est donc le pôle de ce grand cercle. De même, p_1 est le pôle du grand cercle PBP'.

Nous avons dit que nous portions les arcs Ap et Bp_1 dans le même sens, à partir de leurs origines respectives A et B; si on les portait l'un dans un sens et l'autre en sens contraire, l'arc pp_1 serait le supplément de l'angle des deux grands cercles. Il y a donc une précaution à prendre dans l'application du second énoncé. Il faut considérer, pour l'un des grands cercles PAP', le pôle p, qui est du même côté que le demi-cercle PBP' et, pour l'autre grand cercle PBP', le pôle p_1, qui n'est pas du même côté que le demi-cercle PAP'.

COROLLAIRES.

629. *Le lieu géométrique des pôles des grands cercles inclinés d'un angle donné sur un grand cercle donné se compose de deux cercles dont les pôles se confondent avec ceux du grand cercle donné. Le rayon sphérique de ces cercles est égal à l'arc de grand cercle qui mesure l'angle donné.*

630. *Pour que deux grands cercles se coupent à angle droit, il faut et il suffit que chacun d'eux renferme le pôle de l'autre.*

631. Deux grands cercles APC, BPD (*fig.* 345), forment en se coupant au point P quatre angles APB, BPC, CPD, DPA; les angles adjacents APB, BPC, sont supplémentaires, les angles opposés par le sommet APB, CPD, sont égaux.

II. — Des triangles et des polygones sphériques.

632. On appelle *polygone sphérique* la portion de surface sphérique ABCDE comprise entre plusieurs arcs de grand

Cercle. Ces arcs AB, BC, CD, DE, EA, sont les *côtés* du polygone; les angles ABC, BCD, ..., qu'ils forment et les sommets B, C, ..., de ces angles sont les *angles* et les *sommets* du polygone (*fig.* 346).

Un polygone sphérique est dit *convexe* lorsque chaque côté prolongé laisse tout le polygone dans le même hémisphère.

Chaque côté d'un polygone sphérique convexe est moindre qu'une demi-circonférence de grand cercle. Car, si le côté AB, par exemple, était plus grand qu'une demi-circonférence, on pourrait prendre sur AB, entre A et B, un point I tel, que AI fût égal à une demi-circonférence; dès lors, le grand cercle auquel appartient le côté AE passerait par le point I (611), et le polygone ne serait pas tout entier dans l'un des deux hémisphères déterminés par ce grand cercle AE.

Un polygone sphérique convexe ne peut être rencontré en plus de deux points par un arc de grand cercle (62).

Fig. 346.

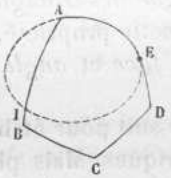
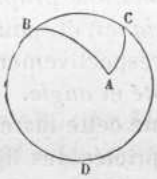


Fig. 347.



633. Le polygone sphérique le plus simple est le *triangle sphérique;* c'est la portion ABC de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grand cercle AB, BC, CA, *qui sont chacun moindres qu'une demi-circonférence.* D'après cela, un triangle sphérique est toujours convexe (*fig.* 347).

On pourrait admettre des côtés qui surpasseraient la demi-circonférence et appeler encore *triangle sphérique* la figure formée par des arcs tels que AB, AC, BDC, dont le dernier est supérieur à une demi-circonférence. Mais d'abord, cela serait incommode, parce que ces nouvelles figures présenteraient des angles tels que A, qui surpasse deux angles droits; et ensuite, cela est inutile, car la connaissance des éléments du triangle sphérique proprement dit ABC entraîne celle de tous les éléments de la figure formée par les arcs AB, AC, BDC.

Un triangle sphérique est *isocèle, équilatéral, rectangle,* dans les mêmes circonstances qu'un triangle rectiligne (24).

634. En joignant les sommets d'un triangle sphérique ABC (*fig.* 348) au centre O de la sphère, on forme un angle triedre OABC, dont les faces AOB, BOC, . . . , ont la même mesure (106) que les côtés correspondants AB, BC, . . . , du triangle sphérique, et dont les angles dièdres OA, OB, . . . , ont la même mesure (628) que les angles A, B, . . . , de ce triangle. La même remarque s'étend à un polygone sphérique ABCD (*fig.* 349) et à l'angle polyèdre correspondant OABCD.

Fig. 348.

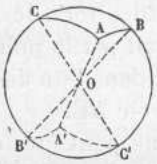
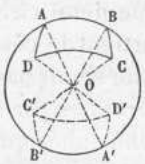


Fig. 349.



D'après cela, *à chaque propriété des angles trièdres ou polyèdres répond une propriété analogue des triangles ou polygones sphériques*, et, pour énoncer cette propriété, il suffit de remplacer respectivement les mots *face* et *angle dièdre* par les mots *côté* et *angle*.

C'est même cette marche que l'on suit pour établir les premières propriétés des figures sphériques. Mais plus tard, et pour des propriétés moins simples, il est ordinairement préférable de faire l'inverse, c'est-à-dire d'établir directement les propriétés des figures sphériques pour en déduire les propriétés des angles polyèdres correspondants. On raisonne en effet sur une surface, et en particulier sur la sphère, presque aussi aisément que sur un plan, tandis qu'il faut un certain effort pour se représenter une figure de l'espace un peu compliquée. L'étude de l'Astronomie ne laisse à cet égard aucun doute, et la conception de la sphère céleste est un des plus heureux artifices géométriques qu'on ait imaginés.

635. Si l'on prolonge les arêtes de l'angle polyèdre OABCD (*fig.* 349) au delà du sommet O, on forme un angle polyèdre symétrique OA'B'C'D', qui détermine sur la surface de la sphère un polygone A'B'C'D'. Les deux polygones ABCD, A'B'C'D', dont les sommets sont ainsi diamétralement opposés deux à deux, sont appelés *polygones sphériques symétriques*.

Les considérations développées au n° 471 conduisent aux propriétés suivantes :

1° *Deux polygones symétriques ont leurs angles et leurs côtés égaux deux à deux ; 2° ces polygones ne sont pas en général superposables, attendu que les parties respectivement égales sont disposées dans un ordre inverse ; 3° pour qu'un triangle sphérique soit superposable à son symétrique (fig.* 348), *il faut et il suffit qu'il ait deux angles égaux, et dans un tel triangle les côtés opposés aux angles égaux sont égaux ;* en d'autres termes, ce triangle est *isocèle.*

THÉORÈME.

636. *Dans tout polygone sphérique, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres.*

En effet, soit ABCD le polygone proposé (*fig.* 349). Dans l'angle polyèdre correspondant OABCD, on a (472)

$$\text{AOB} < \text{BOC} + \text{COD} + \text{DOA}.$$

Donc (106)

$$\text{arc AB} < \text{arc BC} + \text{arc CD} + \text{arc DA}.$$

SCOLIES.

637. *Dans tout triangle sphérique* ABC (*fig.* 350), *à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.*

Fig. 350.

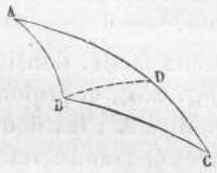
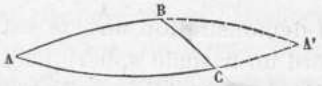


Fig. 351.



Cela résulte de la propriété analogue de l'angle trièdre (473). On peut aussi le démontrer de la manière suivante. Soit l'angle ABC plus grand que l'angle C ; on pourra mener dans l'angle ABC un arc de grand cercle BD qui fasse avec BC un angle DBC égal à l'angle C. Le triangle BDC, ayant deux angles égaux DBC, DCB, sera isocèle (635), et l'on aura BD = DC. Or, le triangle ABD donne (636)

$$\text{AB} < \text{AD} + \text{BD}$$

et, en remplaçant le côté BD par son égal DC,

$$AB < AD + DC \quad \text{ou} \quad AB < AC.$$

En rapprochant ce théorème de celui qui a été énoncé au n° 635 (3°), et en raisonnant comme au n° 33, on voit que, réciproquement, *si un triangle sphérique est isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux, et si un triangle sphérique a deux côtés inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

638. De ce qu'un triangle sphérique isocèle est superposable à son symétrique, il résulte, comme au n° 27, que, *dans tout triangle sphérique isocèle, l'arc de grand cercle qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire sur cette base et divise l'angle au sommet en deux parties égales.*

639. Enfin, comme au n° 28, *tout triangle sphérique équiangle est équilatéral, et tout triangle sphérique équilatéral est équiangle.*

THÉORÈME.

640. *Dans tout polygone sphérique convexe, la somme des côtés est moindre qu'une circonférence.*

Car la somme des faces de l'angle polyèdre correspondant est moindre que quatre angles droits (474).

La démonstration directe est d'ailleurs facile. Considérons d'abord un triangle sphérique ABC (*fig.* 351), et prolongeons les côtés AB et AC jusqu'à leur rencontre A'; les deux arcs ABA', ACA', sont des demi-circonférences de grand cercle (611), et, comme dans le triangle BCA' le côté BC est moindre que BA' + CA', la somme AB + AC + BC des côtés du triangle ABC est inférieure à ABA' + ACA', c'est-à-dire à une circonférence de grand cercle.

En opérant d'une manière analogue sur un polygone, c'est-à-dire en remplaçant un côté par les prolongements des deux qui lui sont adjacents, on voit que, si la proposition est vraie pour un polygone convexe, elle subsiste pour le polygone convexe qui a un côté de plus; donc elle est générale.

THÉORÈME.

641. *Si un triangle sphérique* A′B′C′ *est le triangle polaire d'un triangle sphérique donné* ABC, *réciproquement* ABC *sera le triangle polaire de* A′B′C′.

Pour bien comprendre la définition du triangle polaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque (1).

Soient EIF un grand cercle (*fig.* 352), P l'un de ses pôles et M un point quelconque de la sphère. Si P et M sont d'un même côté du grand cercle EF, le plus petit arc de grand cercle qui va de P à M est moindre qu'un quadrant PI. Si P et M sont de part et d'autre du grand cercle EF, le plus petit arc de grand cercle allant de P à M est supérieur à un quadrant.

Fig. 352.

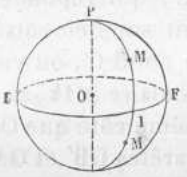
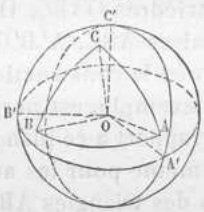


Fig. 353.



Cela posé, on nomme *triangle polaire* d'un triangle sphérique ABC un nouveau triangle A′B′C′ (*fig.* 353) dont les sommets sont définis de la manière suivante : A′ est celui des deux pôles du grand cercle BC qui est, par rapport à ce grand cercle, du même côté que le sommet opposé A ; de même, B′ est le pôle de AC qui est situé par rapport à AC du même côté que B, et C′ est le pôle de AB qui est placé par rapport à AB du même côté que C.

Il s'agit de démontrer que, réciproquement, le triangle ABC est le triangle polaire de A′B′C′. A cet effet, considérons l'un quelconque de ses sommets, C par exemple ; A′ étant le pôle de BC, l'arc de grand cercle qui joindrait C et A′ est un quadrant ; de même, l'arc de grand cercle CB′ est un quadrant, puisque B′ est le pôle de AC. Donc le point C (615) est le

(1) *Voir* Traité de Géométrie, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse 6e édition, 1891.

pôle de A'B'. De plus, puisque C' est le pôle de AB qui se trouve par rapport à AB du même côté que C, le plus petit arc du grand cercle allant de C en C' est moindre qu'un quadrant; par suite, C est le pôle de A'B' qui se trouve par rapport à A'B' du même côté que C'.

SCOLIE.

642. D'après cela, le triangle polaire A'B'C' d'un triangle donné ABC peut être considéré comme obtenu en décrivant des sommets A, B, C, pris successivement pour pôles, trois circonférences de grand cercle. Ces trois circonférences divisent la surface de la sphère (*fig.* 353) en huit triangles, dont l'un A'B'C' est le triangle polaire de ABC. C'est celui qui est tel que les sommets A et A' soient d'un même côté par rapport à BC, les sommets B et B' d'un même côté par rapport à AC, et les sommets C et C' d'un même côté par rapport à AB.

Les deux trièdres OABC, OA'B'C', qui répondent à deux triangles polaires ABC, A'B'C', sont supplémentaires (476). En effet, d'après la construction du point C', on voit que l'arête OC', par exemple, est perpendiculaire (614) au plan AOB et située par rapport à ce plan du même côté que OC : on raisonnerait de même pour les autres arêtes OB' et OA'. Chaque angle de l'un des triangles ABC, A'B'C', doit donc (477) être le supplément du côté opposé de l'autre triangle. Mais cette propriété, en vertu de laquelle deux triangles polaires sont aussi appelés *triangles supplémentaires*, mérite d'être démontrée directement; c'est là l'objet du théorème qui suit.

THÉORÈME.

643. *Si* ABC, A'B'C', *sont deux triangles polaires, chaque angle de l'un de ces triangles a pour mesure une demi-circonférence de grand cercle, moins le côté opposé dans l'autre triangle* (*fig.* 354).

En effet, considérons, par exemple, l'angle A et prolongeons, s'il le faut, les côtés AB et AC jusqu'à la rencontre de l'arc B'C'; puisque A est le pôle de B'C', l'angle A a pour mesure l'arc DE (628); mais on a évidemment

$$DE = B'E + DC' - B'C'.$$

D'ailleurs B'E et DC' sont des quadrants, puisque B' est le

pôle de AC et C' le pôle de AB; on a donc

$$DE = \frac{1}{2} \text{ circ. de grand cercle} - B'C'.$$

On procéderait de la même manière pour les angles B et C.

Fig. 354.

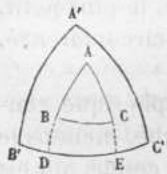


Fig. 355.

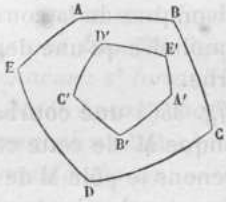
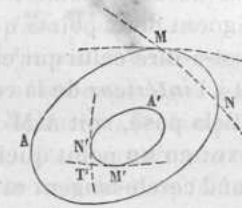


Fig. 356.



Les triangles ABC et A'B'C' résultant l'un de l'autre par la même construction (641), la propriété que nous venons de démontrer pour les angles A, B, C, du premier triangle convient aux angles A', B', C', du second. On prouverait d'ailleurs directement que l'angle A', par exemple, a pour mesure le supplément de BC, en prolongeant BC jusqu'à la rencontre de A'B' et de A'C'.

SCOLIE.

644. Les propriétés des triangles polaires s'étendent aux polygones et aux courbes sphériques.

Soit (*fig.* 355) un polygone sphérique convexe ABCDE; prenons, des deux pôles de l'arc de grand cercle EA, celui A' qui, par rapport à EA, est dans le même hémisphère que le polygone ABCDE; prenons d'une manière analogue les pôles B', C', D', E', des côtés AB, BC, CD, DE. Le polygone A'B'C'D'E' sera le polygone *polaire* du proposé, et l'on démontrera, comme aux nos 641 et 643 : 1° que, *si un polygone sphérique* A'B'C'D'E' *est le polygone polaire d'un polygone donné* ABCDE, *réciproquement* ABCDE *est le polygone polaire de* A'B'C'D'E'; 2° que, *dans deux polygones polaires, tout angle de l'un est le supplément du côté de l'autre dont le sommet de l'angle considéré est le pôle.*

645. On appelle *arc de grand cercle tangent en un point* M

d'une courbe sphérique AMN (*fig.* 356) la limite des positions que prend le grand cercle mené par le point M et un point voisin N, lorsque ce second point N de la courbe tend vers le premier. Une courbe sphérique est *convexe* si le grand cercle tangent en l'un quelconque de ses points laisse la courbe tout entière dans un seul hémisphère (632). Une courbe sphérique convexe ne saurait être rencontrée par un grand cercle en plus de deux points; et, des deux *arcs* de grand cercle qui joignent deux points quelconques de la courbe, le plus petit, c'est-à-dire celui qui est moindre qu'une demi-circonférence, est à l'*intérieur* de la courbe.

Cela posé, soit A'M' (*fig.* 356) une courbe sphérique convexe; en un point quelconque M' de cette courbe, menons le grand cercle tangent et prenons le pôle M de ce cercle, qui est dans le même hémisphère que la courbe A'M'; le lieu des points M est la *courbe polaire* AM de A'M'. Inversement, la courbe A'M' est la courbe polaire de AM; en d'autres termes, le point M' est le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M à la courbe AM; car, si N est le pôle de l'arc de grand cercle N'T' tangent à la courbe A'M' en un point N' voisin de M', le point T' sera le pôle (615) de l'arc sécant MN, et, quand ce dernier arc deviendra tangent en M, le point T' se confondra avec M'. Ainsi, les points M et M' des deux courbes se correspondent deux à deux, de telle sorte que le point M soit le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M' et que le point M' soit le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M.

THÉORÈME.

646. *Dans tout triangle sphérique : 1° la somme des angles est comprise entre deux et six angles droits; 2° le plus petit angle augmenté de deux droits surpasse la somme des deux autres angles.*

La démonstration est la même que pour les angles trièdres (479), et les propriétés énoncées peuvent être elles-mêmes considérées comme une conséquence des propriétés correspondantes des trièdres.

Il résulte de là qu'un triangle sphérique peut avoir un, deux ou trois angles droits. Quand le triangle est *birectangle*, le sommet de l'angle qui n'est pas droit est le pôle du côté opposé, et les côtés qui comprennent cet angle sont des qua-

drants. Dans le triangle sphérique *trirectangle*, tous les côtés sont des quadrants; *le triangle trirectangle est le huitième de la sphère sur laquelle il est tracé :* on le voit immédiatement en prolongeant les arcs de grand cercle qui forment les côtés du triangle.

THÉORÈME.

647. *Deux triangles sphériques tracés sur la même sphère ou sur des sphères égales sont égaux dans toutes leurs parties :* 1° *lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun;* 2° *lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun;* 3° *lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun;* 4° *lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun. — Dans tous les cas, ils sont égaux ou symétriques, suivant que la disposition des éléments donnés est la même ou est inverse.*

Ce théorème est une conséquence immédiate des propriétés analogues (481, 482) des angles trièdres. On peut aussi le démontrer directement.

SCOLIE.

648. Un trièdre, dont le sommet est placé au centre de deux sphères concentriques, détermine évidemment sur ces sphères deux triangles sphériques dont les angles sont respectivement égaux et les côtés proportionnels (231). Deux triangles sphériques de cette nature sont dits *semblables.*

THÉORÈME.

649. *Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère est l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint ces deux points.*

1° Il faut, avant tout, définir *la longueur d'un arc de courbe gauche,* c'est-à-dire dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan. Cette longueur se définit comme celle d'un arc de courbe plane. *C'est la limite du périmètre d'une ligne brisée qui est inscrite dans cet arc et dont les côtés tendent vers zéro.* Nous allons prouver que cette limite existe et qu'elle est unique, c'est-à-dire indépendante de la loi sui-

vant laquelle on fait tendre vers zéro les divers côtés de la ligne brisée (¹).

Soient (*fig.* 357) AB un arc de courbe gauche, *ab* sa projection orthogonale sur un plan quelconque P, M un point quelconque de AB et *m* la projection de ce point. Dans un

Fig. 357.

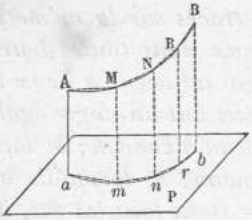
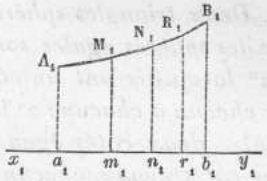


Fig. 358.



plan pris à volonté, menons une droite indéfinie x_1y_1 (*fig.* 358), et prenons sur cette droite, à partir d'un point a_1, une longueur a_1m_1 égale à la longueur de l'arc *am*; puis, au point m_1, élevons sur x_1y_1 la perpendiculaire m_1M_1 égale à la projetante M*m*. A tout point M de la courbe AB répondra ainsi un point M_1, et, lorsque le point M décrira l'arc AB, le point M_1 décrira un arc de courbe plane A_1B_1, dont nous désignerons la longueur par *l*.

Cela posé, soient AMNRB une ligne brisée quelconque inscrite dans l'arc AB, et *amnrb*, $A_1M_1N_1R_1B_1$, les lignes brisées correspondantes inscrites dans la projection *ab* et dans la ligne plane A_1B_1. La valeur du rapport

$$(1) \qquad \frac{AM + MN + NR + RB}{A_1M_1 + M_1N_1 + N_1R_1 + R_1B_1}$$

est comprise entre les valeurs de deux des rapports

$$(2) \qquad \frac{AM}{A_1M_1}, \quad \frac{MN}{M_1N_1}, \quad \frac{NR}{N_1R_1}, \quad \frac{RB}{R_1B_1} \quad \text{(t. I, } \textit{Alg. élém.}\text{, 66)}.$$

Par suite, si l'on peut prouver que chacun de ces rapports a l'unité pour limite, il en sera de même du rapport (1), et, comme le dénominateur de ce rapport a pour limite la quan-

(¹) Nous empruntons textuellement cette importante démonstration au Traité de Géométrie, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6ᵉ édition (1891).

tité bien définie l, quelle que soit la loi suivant laquelle les côtés de la ligne brisée AMNRB tendent vers zéro (221, 222), son numérateur aura aussi l pour limite, quelle que soit cette loi.

Prenons donc l'un quelconque des rapports (2), $\frac{MN}{M_1N_1}$ par exemple. Désignons par δ la différence $Nn - Mm$ ou son égale $N_1n_1 - M_1m_1$. Le carré du rapport considéré aura pour expression

$$\frac{\overline{mn}^2 + \delta^2}{\overline{m_1n_1}^2 + \delta^2}.$$

La valeur de ce carré est donc comprise entre

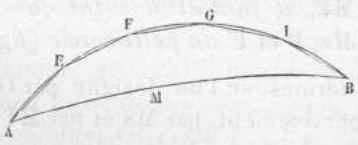
$$\left(\frac{mn}{m_1n_1}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2}{\delta^2} \text{ ou } 1.$$

Mais, m_1n_1 étant égal à l'arc de courbe plane dont mn est la corde, le rapport $\frac{mn}{m_1n_1}$ a l'unité pour limite (226) quand mn tend vers zéro. La limite de $\frac{MN}{M_1N_1}$ est donc égale à 1.

2° *La longueur d'un arc de courbe sphérique est égale à la limite du périmètre d'une ligne brisée sphérique qui est inscrite dans cet arc et dont les côtés tendent vers zéro.*

En effet, soient AGB (*fig.* 359) un arc de courbe quelconque

Fig. 359.



tracé sur la sphère, et AEFGIB une ligne brisée sphérique inscrite dans cet arc, c'est-à-dire une ligne formée de portions d'arcs de grand cercle, ayant ses extrémités en A et en B et ses sommets intermédiaires situés sur l'arc de courbe AGB.

Si les arcs de grand cercle, dont la longueur de la ligne brisée sphérique est la somme, tendent séparément vers zéro, suivant une loi d'ailleurs quelconque, le rapport de chacun de ces arcs à sa corde aura l'unité pour limite (226). Il en sera donc de même du rapport de la longueur de la ligne brisée à la

somme des cordes. Et, comme (1°) la somme des cordes a pour limite la longueur de l'arc de courbe AGB, on voit que la longueur de la ligne brisée sphérique inscrite dans l'arc de courbe quelconque AGB a aussi pour limite la longueur de cet arc.

3° Nous pouvons maintenant trouver le plus court chemin entre deux points A et B sur la surface de la sphère (*fig.* 359).

Soient AMB l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui unit les points A et B, et AGB une courbe sphérique quelconque tracée entre ces deux points. AEFGIB étant une portion de polygone sphérique inscrite dans cette courbe, on aura (636)

$$\text{AMB} < \text{AE} + \text{EF} + \text{FG} + \text{GI} + \text{IB}.$$

Or, si l'on fait tendre vers zéro les côtés du polygone inscrit, le second membre a pour limite (2°) la longueur de l'arc de courbe AGB. Donc, l'arc de grand cercle AMB est moindre que toute autre courbe sphérique allant de A à B; c'est le plus court chemin du point A au point B sur la sphère.

D'après cela, on appelle *distance sphérique* de deux points A et B d'une sphère, la longueur de l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui unit ces deux points.

THÉORÈME.

650. *Pour qu'un grand cercle soit perpendiculaire à un petit cercle* AMB, *il faut et il suffit que le grand cercle passe par les pôles* P *et* P′ *du petit cercle* (*fig.* 342).

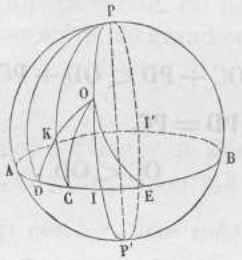
En d'autres termes, si l'on désigne par O le centre de la sphère et, respectivement, par MS et par MT les tangentes au grand cercle et au petit cercle au point commun M, pour que l'angle SMT soit droit, il faut et il suffit que les plans OMS, MPP′, coïncident.

En effet, le plan MPP′ est perpendiculaire à MT, puisqu'il contient deux droites OM et PP′ qui sont à angle droit sur MT. Donc, si l'angle SMT est droit, MS est dans le plan MPP′ qui, par suite, coïncide avec le plan OMS. Inversement, si les plans OMS, MPP′, coïncident, la droite MS contenue dans le plan MPP′ est à angle droit sur la perpendiculaire MT à ce plan.

COROLLAIRE.

651. *Par un point* O *de la sphère, on peut mener un grand cercle perpendiculaire à un cercle donné* AB *et l'on ne peut en mener qu'un :* c'est le grand cercle OPI' P'I qui passe par le point O et par les pôles P et P' du cercle AB (*fig.* 360).

Fig. 360.



Il y aurait toutefois indétermination si le point O coïncidait avec l'un des pôles P et P'.

En laissant de côté ce cas singulier, on voit que, du point O, on peut mener deux *arcs* de grand cercle, OI et OPI', *normaux* à un cercle donné AB.

THÉORÈME.

652. *Si, d'un point* O *d'une sphère, on mène, sur un cercle* AB, *le plus petit,* OI, *des deux arcs de grand cercle normaux et plusieurs arcs de grand cercle obliques* OC, OD, OE (*fig* 360) :

1° *L'arc perpendiculaire* OI *est moindre que tout arc oblique* OC;

2° *Deux arcs obliques,* OC *et* OE, *dont les pieds* C *et* E *sont équidistants du pied* I *de l'arc normal, sont égaux;*

3° *De deux arcs obliques,* OC *et* OD *ou* OE *et* OD, *celui dont le pied s'écarte le plus du pied* I *de l'arc normal est le plus long.*

En effet, le cercle AB divise la sphère en deux calottes dont l'une contient le point O; soit P le pôle de AB qui est situé dans cette calotte. Menons les arcs de grand cercle PC, PD, et désignons par K l'intersection des arcs OD et PC.

1° Dans le triangle sphérique POC, on a

$$PC - PO < OC,$$

c'est-à-dire

$$PI - PO \quad \text{ou} \quad OI < OC.$$

2° Dans les triangles sphériques OIC, OIE, les angles OIC, OIE, sont égaux comme droits, le côté OI est commun et l'on a IC = IE par hypothèse. Ces deux triangles sont donc égaux dans toutes leurs parties (647, 2°) et, par suite, les arcs obliques OC et OE sont eux-mêmes égaux.

3° Les triangles sphériques OKC, PKD, donnent

$$OC < OK + KC, \quad PD < PK + KD,$$

d'où, en ajoutant,

$$OC + PD < OD + PC,$$

et enfin, à cause de PD = PC,

$$OC < OD.$$

COROLLAIRES.

653. Si le point C décrit le cercle AB en partant du point I, l'arc de grand cercle OC, d'abord égal à OI, croît, devient égal à OPI', puis décroît jusqu'à la valeur primitive OI. Parmi les chemins qui conduisent du point O au cercle AB, le plus court est donc le plus petit, OI, des deux arcs normaux qu'on peut mener du point O au cercle AB. Aussi donne-t-on à la longueur de cet arc OI le nom de *distance sphérique* du point O au cercle AB.

Les réciproques des propositions précédentes sont vraies (40).

654. On peut se contenter d'énoncer les théorèmes qui suivent, en se reportant aux théorèmes analogues démontrés précédemment :

Le lieu géométrique des points de la sphère équidistants de deux points de cette surface est le grand cercle perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui unit les deux points (45, 405).

Deux triangles sphériques rectangles sont égaux ou symétriques : 1° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle oblique égal; 2° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal (47).

L'arc de grand cercle bissecteur de l'angle de deux grands cercles est le lieu des points de la sphère équidistants des deux côtés de cet angle (48).

THÉORÈME.

655. *L'arc de grand cercle, tangent à un petit cercle, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon sphérique qui aboutit au point de contact.*

Car le rayon sphérique, étant compté sur un grand cercle passant par le pôle du petit cercle, est perpendiculaire (650) à ce petit cercle et, par suite, au grand cercle tangent.

SCOLIE.

656. Les propositions suivantes se démontrent sans difficulté, en se reportant, s'il est nécessaire, à la Géométrie plane:

Lorsque deux petits cercles d'une sphère se coupent, l'arc de grand cercle qui passe par leurs pôles est perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui passe par leurs deux points d'intersection.

Lorsque deux petits cercles d'une sphère sont tangents, leur point de contact est situé sur le grand cercle qui passe par leurs pôles, et l'arc de grand cercle mené par le point de contact à angle droit sur celui qui unit les pôles est tangent à chacun des deux petits cercles.

657. On dit qu'un *point* de la sphère est *intérieur* ou *extérieur à un petit cercle*, suivant qu'il est situé dans la plus petite ou dans la plus grande des deux calottes que ce cercle détermine sur la sphère. Sa distance sphérique (649) au pôle du petit cercle est, dans le premier cas, inférieure et, dans le second, supérieure au rayon sphérique (616) de ce cercle.

Étant donnés deux petits cercles d'une sphère, on dit : 1° que les deux cercles sont *extérieurs*, lorsque tout point de chacun d'eux est extérieur à l'autre; 2° que le premier est *intérieur* au second, lorsque tout point du premier est intérieur au second; et alors, tout point du second est extérieur au premier.

Cela posé, soient R et r les rayons sphériques de deux petits cercles, et D la distance sphérique de leurs pôles. Le quart d'un grand cercle étant pris pour unité, R et r sont moindres que 1, et D est inférieur à 2 (649).

Si les cercles sont extérieurs, on a

$$D > R + r;$$

Si les cercles sont tangents extérieurement, on a

$$D = R + r;$$

Si les cercles se coupent, on a à la fois

$$R + r > D > R - r;$$

Si le cercle r touche intérieurement le cercle R, on a

$$D = R - r;$$

Enfin, *si le cercle r est intérieur au cercle* R, on a

$$D < R - r.$$

Les réciproques sont vraies (40).

III. — Problèmes graphiques relatifs à la sphère.

PROBLÈME.

658. *Tracer sur la sphère un grand cercle passant par deux points donnés* A *et* B (*fig.* 361).

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé. Or, la distance de ce pôle P à chacun des points A et B est égale à la corde du quadrant (615); on l'obtiendra donc en décrivant successivement deux arcs de cercle, des points A et B comme pôles, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant.

Fig. 361.

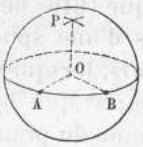
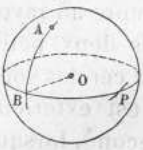


Fig. 362.



PROBLÈME.

659. *Mener par un point donné* A *sur la sphère un arc de grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné* BP (*fig.* 362).

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé.

Or ce pôle P doit se trouver sur le cercle BP (630) et être à une distance du point A égale à la corde du quadrant. On l'obtiendra donc en décrivant, du point A comme pôle, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant, un arc de cercle qui rencontre en P le cercle donné BP.

PROBLÈME.

660. *Mener un arc de grand cercle perpendiculaire sur un arc de grand cercle donné* AB, *en son milieu*, ou *diviser un arc de grand cercle* AB *en deux parties égales* (*fig.* 363).

Il suffit de décrire des points A et B comme pôles, avec la même ouverture de compas, deux arcs qui se coupent en C et D; puis, de faire passer un grand cercle par C et D.

Remarquons que ce grand cercle CD divise aussi en deux parties égales tous les arcs de petit cercle dont les extrémités sont A et B (405).

Fig. 363.

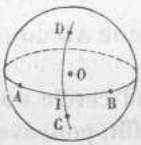
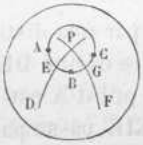


Fig. 364.



PROBLÈME.

661. *Trouver le pôle d'un petit cercle passant par trois points donnés* A, B, C, *sur la sphère* (*fig.* 364).

Ce pôle P, étant équidistant de A, B, C, est à l'intersection des arcs de grand cercle élevés perpendiculairement sur les milieux des arcs de grand cercle AB et BC (660).

Le pôle P une fois connu, on tracera le petit cercle avec une ouverture de compas égale à PA.

PROBLÈME.

662. *Par un point* A *donné sur la sphère, mener un grand cercle faisant un angle donné avec un grand cercle donné* DED' (*fig.* 365).

Soit P celui des deux pôles du grand cercle donné qui se trouve dans le même hémisphère que le point A, et soit α l'arc

de grand cercle qui mesure l'angle donné, lequel peut toujours être supposé aigu.

Le pôle Q du cercle inconnu doit se trouver sur le grand cercle EIE′, dont A est le pôle, puisque le grand cercle demandé passe par A. Le pôle Q doit aussi appartenir au petit cercle décrit du point P comme pôle avec un rayon sphérique égal à α, puisque ce petit cercle est le lieu des pôles des grands cercles qui coupent, sous l'angle donné, le grand cercle DED′ (629).

On décrira donc deux cercles, l'un du point A comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde du quadrant, l'autre du point P comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc α. Tout point commun Q à ces deux cercles sera le pôle d'un grand cercle satisfaisant à la question proposée.

Pour que le problème soit possible, c'est-à-dire pour que les cercles auxiliaires se coupent, il faut et il suffit, puisque l'angle donné est aigu, que l'on ait

$$PQ > PI \quad \text{ou} \quad \alpha > \delta,$$

en désignant par δ la distance sphérique AD du point donné A au grand cercle donné DED′.

Lorsque le point A est sur le grand cercle donné DED′, le grand cercle EIE′ passe par P, et il suffit, pour avoir le point Q, de porter sur le grand cercle EPE′, à partir de P, une ouverture de compas égale à la corde de l'arc α.

Fig. 365.

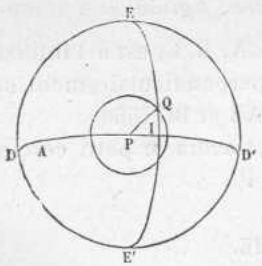
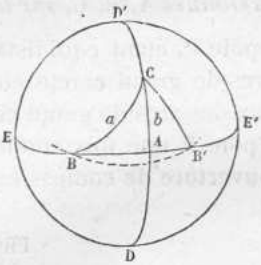


Fig. 366.



PROBLÈME.

663. *Construire un triangle sphérique rectangle, connaissant :* 1° *un côté de l'angle droit et l'hypoténuse;* 2° *un angle et le côté opposé.*

1° Après avoir tracé (*fig.* 366) deux grands cercles perpendiculaires l'un à l'autre, c'est-à-dire deux grands cercles DAD′, EAE′, tels que le pôle de l'un soit sur l'autre, on portera sur l'un d'eux DD′, à partir du point commun A, un arc AC égal au côté donné b; puis, du point C comme pôle, avec un rayon sphérique égal à l'hypoténuse donnée a, on décrira un cercle BB′ qui coupera le grand cercle EE′ en deux points B et B′; en menant les arcs de grand cercle CB, CB′, on aura deux triangles sphériques symétriques BAC, B′AC, qui répondent à la question proposée.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le nombre a qui mesure l'hypoténuse soit compris entre les nombres b et $2 - b$, qui mesurent les distances sphériques minimum et maximum du point C au grand cercle EE′.

2° On commencera par tracer deux grands cercles BAB′, BCB′ (*fig.* 367) faisant entre eux l'angle donné B; soient P le pôle du premier et EPE′ le grand cercle qui est perpendiculaire à la fois sur BAB′ et BCB′. Le problème se réduit à mener un grand cercle perpendiculaire à BAB′, c'est-à-dire passant par P, et tel que la partie CA, interceptée dans le fuseau BEB′D, soit égale au côté donné b. Or PC sera égal alors à $1 - b$. On décrira donc du point P, avec un rayon sphérique égal à $1 - b$, un cercle qui coupera BDB′ en deux points; C étant l'un quelconque de ces points, le triangle BCA satisfera à la question, ainsi que le triangle B′CA.

Fig. 367.

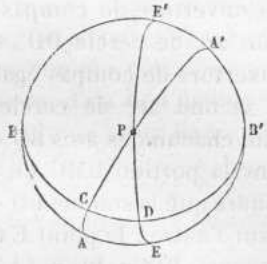
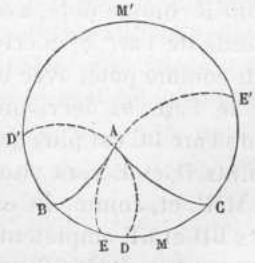


Fig. 368.



La condition de possibilité consiste dans l'inégalité

$$PC > PD \quad \text{ou} \quad 1 - b > 1 - B,$$

c'est-à-dire

$$b < B.$$

Nous avons supposé l'angle B aigu; s'il était obtus, on aurait

$$PC = b - 1, \quad PD = B - 1,$$

et la condition de possibilité serait $b > B$.

TROBLÈME.

664. *Construire un triangle sphérique, connaissant trois quelconques de ses six éléments* (angles ou côtés).

Ce problème offre six cas distincts; on peut donner : 1° les trois côtés ou les trois angles; 2° deux côtés et l'angle compris, ou un côté et les deux angles adjacents; 3° deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, ou deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Dans cette énumération, nous avons réuni chaque fois les deux cas corrélatifs, c'est-à-dire qui se ramènent l'un à l'autre par la considération du triangle polaire. Il n'y a donc que trois cas à traiter directement.

1° *On donne les trois côtés a, b, c.*

Supposons, pour fixer les idées, $a > b > c$.

Pour que le problème soit possible, il faut (636, 640) que l'on ait à la fois

$$a < b + c, \quad a + b + c < 4.$$

Ces conditions sont suffisantes. En effet, sur un grand cercle MM' de la sphère, prenons un arc BMC égal à a (*fig.* 368); du point B comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc c, décrivons un arc de cercle DD', et, du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc b, décrivons un second arc de cercle EE'. Puisque l'arc BC est plus grand que chacun des arcs BD et CE, les points D et E sont situés dans la portion BMC du grand cercle MM', et, comme BC est moindre que la somme BD + CE, les arcs BD et CE empiètent l'un sur l'autre : le point E tombe donc entre B et D. D'ailleurs, la somme BD' + BC + CE' étant moindre qu'une circonférence de grand cercle, le point E' est situé sur l'arc C M' D' entre C et D'. Il résulte de là que le point E et le point E' sont, le premier intérieur, le second extérieur à la calotte qui, déterminée par le cercle DD', a pour pôle B. L'arc EE', qui, par rapport à cette calotte, unit un point inté-

rieur a un point extérieur, doit donc couper la base DD′ de cette calotte en un certain point A, lequel est le troisième sommet du triangle demandé ABC.

Les cercles DD′ et EE′ se coupent en un second point A′, sommet d'un second triangle A′BC, symétrique du premier.

Ainsi, *pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois côtés donnés, il faut et il suffit que le plus grand côté soit moindre que la somme des deux autres et que la somme des côtés soit inférieure à une circonférence de grand cercle.*

Dans les applications, il peut se faire que l'une de ces conditions soit remplie d'elle-même; il ne reste plus alors qu'à considérer l'autre. Par exemple, au n° 657, lorsqu'on cherche les conditions pour que deux petits cercles se coupent, on n'a pas à faire intervenir la relation

$$D + R + r < 4,$$

parce que, d'après la manière dont D, R et r sont définis, cette relation est satisfaite d'elle-même.

Souvent, on ignore l'ordre relatif de grandeur des côtés donnés. Dans ce cas, on exprime que le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres, en écrivant que chaque côté est moindre que la somme des deux autres.

Pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois angles donnés, il faut et il suffit que le plus petit angle augmenté de deux droits soit plus grand que la somme des deux autres et que la somme des trois angles soit supérieure à deux angles droits; car, en prenant les suppléments de ces angles comme côtés, on peut construire le triangle supplémentaire, d'où l'on déduit ensuite le triangle demandé par le tracé indiqué au n° 642.

2° *On donne deux côtés a et b et l'angle compris* C.

Même solution qu'en *Géométrie plane* (117).

3° *On donne deux côtés a et b et l'angle* A *opposé au côté a* (*fig.* 369).

Construisons sur la sphère deux grands cercles formant un angle égal à A (662). Prenons, à partir du sommet, sur l'un des côtés de cet angle, un arc AC égal à b, et du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde

de a, décrivons un arc de cercle; B étant l'intersection de ce cercle avec le second côté de l'angle, le triangle ABC sera le triangle demandé.

La discussion de ce problème exige quelque attention.

Nous commencerons par établir que, *dans tout triangle sphérique rectangle, le nombre des côtés supérieurs à un quadrant est pair* (2 *ou* 0), *et que chaque angle oblique est de même espèce que le côté opposé.*

Fig. 369.

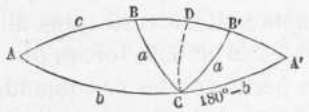
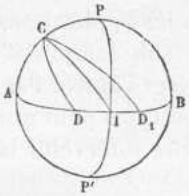


Fig. 370.



Soient, en effet (*fig.* 370), trois grands cercles APB, AIB, PIP', perpendiculaires entre eux deux à deux, de sorte que le point I est le pôle de APB; sur AP, prenons un arc AC moindre qu'un quadrant, et joignons le point C à un point quelconque de l'arc AIB par un arc de grand cercle CD ou CD_1.

Dans le triangle rectangle CAD, le côté AC est aigu, et, tant que le côté AD reste aigu ou moindre que le quadrant AI, CD reste moindre que le quadrant CI. Le triangle proposé a alors ses trois côtés aigus.

Dans le triangle rectangle CAD_1, AD_1 devenant obtus, il en est de même du côté CD_1, et ce triangle a alors un côté aigu et deux obtus.

Si l'on prenait, au contraire, comme point de départ, l'arc BC, plus grand qu'un quadrant, on aurait à considérer les triangles rectangles CBD et CBD_1, qui présentent chacun deux côtés obtus et un aigu.

On voit, en même temps, que, pour les deux premiers triangles, l'angle ACI étant droit, l'angle ACD est aigu, tandis que l'angle ACD_1 est obtus; or, le côté AD est aigu, et le côté AD_1 est obtus. Pour les deux autres triangles, l'angle BCI étant droit, l'angle DCB est obtus, tandis que l'angle D_1CB est aigu; or, le côté DB est obtus, et le côté D_1B est aigu. La démonstration est analogue pour les autres angles. Ainsi, dans un triangle sphérique rectangle, chaque angle oblique et le côté

opposé sont toujous de même espèce, c'est-à-dire ensemble aigus ou obtus.

Cela posé, revenons à la *fig.* 369. Prolongeons les côtes AB et AC du triangle ABC obtenu par la construction indiquée, jusqu'à leur nouvelle rencontre en A'. Les arcs ABA' et ACA' seront des demi-circonférences (611). Du point C, abaissons l'arc CD perpendiculaire sur ABA'.

Dans le triangle sphérique rectangle ADC, l'arc perpendiculaire CD est aigu ou obtus, d'après ce qui précède, suivant que l'angle donné A est lui-même aigu ou obtus. Si l'arc CD est aigu, il est le plus petit de tous les arcs menés du point C aux différents points de l'arc ABA', et ces mêmes arcs obliques augmentent à mesure qu'ils s'éloignent du pied de l'arc perpendiculaire CD. C'est l'inverse si l'arc CD est obtus, c'est-à-dire que cet arc perpendiculaire est un maximum et que les arcs obliques diminuent à mesure qu'ils s'éloignent de son pied (652).

Pour que le triangle à construire soit possible, il faut donc *d'abord que le côté a soit au moins égal à l'arc perpendiculaire* CD *si l'angle* A *est aigu, et plus petit que cet arc si l'angle* A *est obtus.*

Cette première condition de possibilité est évidemment satisfaite, *lorsque* A *et a sont d'espèces différentes*. Dans cette hypothèse, *le problème, s'il est possible, n'admet qu'une solution.*

En effet, supposons, par exemple, A aigu et a obtus : l'arc perpendiculaire CD sera aigu. Si l'on peut alors mener par le point C, jusqu'à l'arc ABA', un arc oblique CB égal au côté a, cet arc tombera nécessairement du même côté de l'arc CD que celui des deux arcs obliques extrêmes, b ou $180^\circ - b$, qui est de même espèce que a. *Pour qu'il y ait une solution*, il faut que a soit moindre que cet arc extrême; cette solution disparaît et *le problème est impossible* si a surpasse ce même arc.

Si l'on suppose A obtus et a aigu, l'arc perpendiculaire CD est obtus, et l'on parvient aux mêmes conclusions en renversant les signes d'inégalité.

Lorsque A *et a sont de même espèce, le problème, s'il est possible, admet une ou deux solutions.*

En effet, supposons, par exemple, A et a aigus : l'arc per-

pendiculaire CD sera aigu. On pourra donc mener du point C, jusqu'à l'arc ABA', un premier arc oblique égal à a, tombant du même côté de l'arc CD que celui des deux arcs obliques extrêmes, b ou $180^\circ - b$, qui est de même espèce que a; mais on pourra aussi, à plus forte raison, mener un second arc oblique égal à a, du côté de celui des deux arcs extrêmes qui est obtus. *Les deux solutions* indiquées *existent*, lorsque a est moindre que le plus petit des deux arcs b et $180^\circ - b$; *elles se réduisent à une seule*, lorsque a devient au moins égal à ce plus petit arc; enfin, *le triangle* à construire *devient impossible* lorsque a est inférieur à l'arc perpendiculaire CD, comme on l'a déjà remarqué.

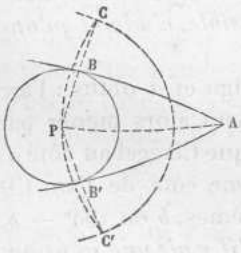
Si l'on suppose A et a obtus, l'arc perpendiculaire CD est lui-même obtus, et l'on parvient aux mêmes conclusions en renversant les signes d'inégalité.

PROBLÈME.

665. *Par un point donné, mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné* (*fig.* 371).

Si le point donné est sur le cercle, il suffit d'élever par ce point un arc de grand cercle perpendiculaire au rayon sphérique correspondant (665).

Fig. 371.



Supposons, en second lieu, que le point donné A soit extérieur au petit cercle donné, c'est-à-dire situé dans la plus grande des deux calottes sphériques séparées par ce petit cercle. Considérons le problème comme résolu; nommons P le pôle du petit cercle donné, B le point de contact de l'arc BA, et prolongeons le rayon sphérique PB d'une quantité BC = PB. Le point C se trouve d'abord sur un cercle décrit du point P comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde d'un arc de grand cercle double du rayon sphérique r du petit cercle. Il se trouve en outre sur un second cercle décrit du point A comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc PA = D, car, BA étant perpendiculaire sur le milieu de PBC, le point A est équidistant de P et de C.

Le point C une fois obtenu à l'aide de ces deux cercles auxiliaires, on mènera l'arc de grand cercle PC qui coupera le petit cercle en B, et, en joignant B et A par un arc de grand cercle, on aura l'arc tangent demandé.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le triangle APC,

dont on a les trois côtés, existe, c'est-à-dire qu'on ait (664, 1°)

$$D < D + 2r, \quad 2r < D + D, \quad D + D + 2r < 4.$$

La première condition est toujours remplie, et les deux autres équivalent à

$$r < D < 2 - r;$$

elles expriment que le point A doit être situé hors de la calotte sphérique PB et hors de la calotte symétrique.

Les cercles auxiliaires se coupent en deux points C et C'; de là, deux solutions AB et AB'.

Observons enfin que, lorsque deux cercles de la sphère ont deux points communs, les symétriques de ces points par rapport au centre de la sphère appartiennent évidemment à la fois aux deux cercles symétriques des premiers. Si les deux points considérés se confondent, c'est-à-dire si les deux cercles proposés se touchent, les deux cercles symétriques se touchent au point symétrique du premier point de contact. Enfin, si l'un des cercles est un grand cercle, comme il est à lui-même son symétrique, on voit que *tout grand cercle tangent à un petit cercle est aussi tangent au petit cercle symétrique du premier par rapport au centre de la sphère*. Ainsi, dans le problème qui nous occupe, les grands cercles trouvés AB et AB' touchent non-seulement le cercle donné PB, mais encore son symétrique.

PROBLÈME.

666. *Décrire un grand cercle tangent à deux petits cercles donnés.*

Soient P et P' les pôles des deux petits cercles, R et R' leurs rayons sphériques, D la distance sphérique des deux pôles P et P'. Nous supposerons, pour fixer les idées, $R > R'$.

Le grand cercle cherché X peut laisser les deux cercles R et R' dans un même hémisphère ou dans des hémisphères opposés.

Dans le premier cas (*fig.* 372), nous prendrons pour inconnue le pôle Q du grand cercle X, qui est dans le même hémisphère que les cercles R et R'. Si A et A' sont les points où le cercle X touche respectivement les cercles R et R', le pôle Q est à la fois sur les grands cercles PA et PA', il est donc le troisième sommet d'un triangle sphérique QPP', dont on connaît deux sommets P et P' et les trois côtés

$$PP' = D, \quad PQ = QA - AP = 1 - R, \quad P'Q = QA' - A'P' = 1 - R'.$$

Les conditions de possibilité sont (636, 640)

$$\begin{aligned} D < 1 - R + 1 - R' \quad &\text{ou} \quad 2 - D > R + R', \\ 1 - R' < D + 1 - R \quad &\text{ou} \quad D > R - R', \\ 1 - R < D + 1 - R' \quad &\text{ou} \quad D > R' - R, \\ D + 1 - R + 1 - R' < 4 \quad &\text{ou} \quad D < 2 + R + R'. \end{aligned}$$

Supprimant les deux dernières relations, qui sont satisfaites d'elles-mêmes, puisque l'on a $D < 2$ et $R' < R$, il ne reste plus que les conditions

$$D > R - R' \quad \text{et} \quad 2 - D > R + R'.$$

La première exprime que la calotte R′ n'est pas contenue dans la calotte R. Quant à la seconde, comme $2 - D$ est la distance sphérique de P au symétrique de P′, elle signifie que la calotte R et la calotte symétrique de la calotte R′ sont extérieures l'une à l'autre.

Fig. 372.

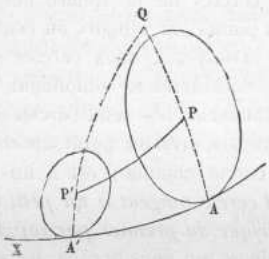
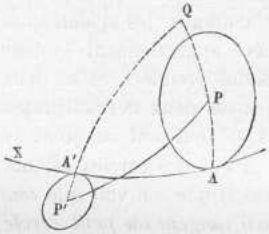


Fig. 373.



Dans le second cas (*fig.* 373), on voit, d'une manière analogue, que le pôle Q du grand cercle X qui se trouve dans le même hémisphère que le cercle R est le troisième sommet d'un triangle sphérique QPP′, dont on a les deux sommets P et P′ et les longueurs D, $1 - R$, $1 + R'$, des trois côtés. Les conditions de possibilité sont

$$D > R + R' \quad \text{et} \quad 2 - D > R - R'.$$

Elles expriment que les calottes R et R′ sont extérieures l'une à l'autre et que la calotte R ne contient pas la calotte symétrique de la calotte R′.

IV. — Aire de la sphère.

THÉORÈME.

667. *Lorsqu'une droite* AB *tourne autour d'un axe xy situé dans son plan, l'aire qu'elle engendre a pour mesure le produit de la projection* CD *de cette droite sur l'axe, par la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire* IO *élevée au milieu* I *de la droite* AB *jusqu'à la rencontre de l'axe xy* (*fig.* 374).

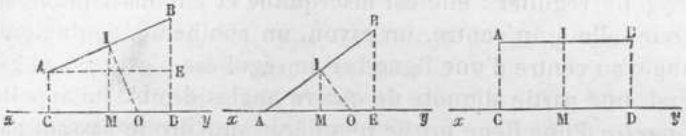
Nous supposerons que la droite AB est située tout entière d'un même côté de l'axe *xy*. Quelles que soient alors les

positions relatives de AB et de xy, l'aire engendrée par AB a pour mesure (597)

(1) $$2\pi.IM.AB,$$

IM étant la perpendiculaire abaissée du point I sur xy.

Fig. 374.



Si la droite AB est parallèle à xy, le théorème proposé est tout démontré; sinon, il faut transformer l'expression (1). A cet effet, menons AE parallèle à xy jusqu'à la rencontre de la projetante BD; les triangles ABE, IMO, sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires, et l'on a

$$\frac{IM}{AE}=\frac{IO}{AB}, \quad \text{d'où} \quad IM.AB=IO.AE.$$

L'expression (1) peut donc être remplacée par

$$2\pi.IO.AE \quad \text{ou} \quad 2\pi.IO.CD,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Dans le cas où le point A est situé sur l'axe xy, le raisonnement subsiste; seulement la droite AE se confond avec l'axe.

COROLLAIRE.

668. Remarquons que, dans les trois positions indiquées sur la *fig.* 374, AB engendre l'aire d'un tronc de cône, d'un cône ou d'un cylindre, dont sa projection sur l'axe xy représente la hauteur.

On peut donc dire que *l'aire d'un quelconque de ces trois corps est égale au produit de sa hauteur par la circonférence ayant pour rayon la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté générateur et prolongée jusqu'à la rencontre de cette même hauteur.*

THÉORÈME.

669. *L'aire engendrée par une ligne brisée régulière qui tourne autour d'un diamètre qui ne la traverse pas a pour*

mesure le produit de la circonférence inscrite dans la ligne brisée par la projection de cette ligne sur l'axe choisi.

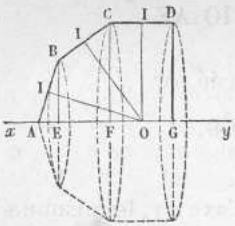
On appelle *ligne brisée régulière* une ligne brisée, plane et convexe, dont les côtés forment des angles égaux et sont égaux.

Une ligne brisée régulière jouit de toutes les propriétés d'un polygone régulier : elle est inscriptible et circonscriptible au cercle, elle a un centre, un rayon, un apothème. Seulement, l'angle au centre d'une ligne brisée régulière n'est pas, en général, une partie aliquote de quatre angles droits. On appelle *diamètre* d'une ligne brisée régulière toute droite passant par son centre.

Pour inscrire une ligne brisée régulière dans un arc de cercle, il suffit de diviser cet arc en parties égales et de joindre les points de division par des cordes.

Cela posé, soient (*fig.* 375) O le centre et OI l'apothème de la ligne brisée régulière ABCD tournant autour du diamètre xy. L'aire engendrée par cette ligne est la somme des aires engendrées par les côtés AB, BC, CD, dont le dernier est parallèle à l'axe. Ces côtés engendrent respectivement les aires convexes d'un cône, d'un tronc de cône et d'un cylindre, pour chacun desquels la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté générateur jusqu'à la rencontre de l'axe n'est autre chose que l'apothème OI de la ligne brisée régulière. On peut donc écrire (668)

Fig. 375.



$$\text{aire AB} = \text{AE} . \text{circ OI},$$

$$\text{aire BC} = \text{EF} . \text{circ OI},$$

$$\text{aire CD} = \text{FG} . \text{circ OI}.$$

Si l'on ajoute les égalités précédentes membre à membre, on a, en mettant circ OI en facteur commun,

$$\text{aire ABCD} = (\text{AE} + \text{EF} + \text{FG}) . \text{circ OI},$$

c'est-à-dire

$$\text{aire ABCD} = \text{AG} . \text{circ OI}.$$

COROLLAIRE.

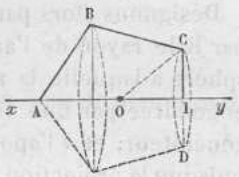
670. Cherchons, comme exercices, les aires engendrées par un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés et par un demi-polygone régulier d'un nombre impair de côtés.

Si l'on désigne par R le rayon du polygone et par r son apothème, on a dans le premier cas, pour l'aire engendrée,

$$S = 2R.2\pi r = 4\pi Rr.$$

Dans le second cas (*fig.* 376), le diamètre xy de la ligne brisée régulière passe par un sommet A et coupe le côté opposé CD en son milieu, c'est-à-dire que AO est le rayon du polygone et OI son apothème. L'aire engendrée par les deux côtés AB et BC a pour expression $(R + r).2\pi r$. Le demi-côté CI engendre un cercle de rayon CI. On a donc, pour la surface cherchée,

Fig. 376.



$$S = (R + r).2\pi r + \pi CI^2.$$

Mais le triangle rectangle OCI donne $CI^2 = R^2 - r^2$. En substituant dans l'égalité précédente et en simplifiant, il vient

$$S = 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi R^2,$$

c'est-à-dire

$$S = \pi(R + r)^2.$$

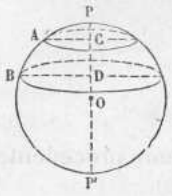
Les deux expressions qu'on vient de calculer conduiraient immédiatement à l'expression de l'aire de la sphère, si l'on supposait les polygones réguliers considérés remplacés par leurs circonférences limites : on devrait, dans cette hypothèse, faire $r = R$, et l'on trouverait $S = 4\pi R^2$.

THÉORÈME.

671. *L'aire d'une zone sphérique a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.*

On appelle *zone* la portion de la surface sphérique comprise entre deux cercles dont les plans sont *parallèles*. Ces cercles sont les *bases* de la zone, et la distance de leurs plans est sa *hauteur*. Ainsi, tandis que la demi-circonférence PABP′ engendre une sphère en tournant autour du diamètre PP′ (*fig.* 377), l'arc AB décrit une zone dont les bases sont les cercles AC et BD décrits par les points A et B, et dont la hauteur est la projection CD de l'arc AB sur l'axe PP′.

Fig. 377.



Si l'un des plans considérés devient tangent à la sphère, le cercle correspondant se réduit à un point, et la zone, qui n'a plus alors qu'une base, devient une *calotte sphérique*. Ainsi, l'arc PA, en tournant autour de PP', engendre une calotte sphérique dont le cercle AC est la base et dont PC est la hauteur.

Cela posé, l'aire d'une zone est, par définition, la limite vers laquelle tend l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur de la zone, lorsque le nombre des côtés de cette ligne brisée croît indéfiniment.

Désignons alors par S l'aire de la zone, par H sa hauteur et par R le rayon de l'arc générateur, c'est-à-dire le rayon de la sphère à laquelle la zone appartient; soient de même s l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur, et a l'apothème de cette ligne brisée. On a (639), puisque la projection de la ligne brisée sur l'axe est aussi égale à H,

$$s = \mathrm{H}.2\pi a.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée, H reste invariable, s tend vers S, et a vers R. On a donc, à la limite,

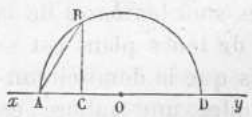
$$\mathrm{S} = \mathrm{H}.2\pi\mathrm{R}.$$

COROLLAIRES.

672. *Dans des sphères égales, deux zones sont entre elles comme leurs hauteurs*, et, par suite, *deux zones de même hauteur sont équivalentes.*

673. Considérons la calotte sphérique engendrée par l'arc AB tournant autour du diamètre AD (*fig.* 378). En vertu du théo-

Fig. 378.



rème précédent, l'aire de cette calotte a pour mesure

$$2\pi.\mathrm{AO}.\mathrm{AC} = \pi.\mathrm{AD}.\mathrm{AC} \quad \text{ou} \quad (167) \quad \pi.\overline{\mathrm{AB}}^2.$$

Donc, *une calotte sphérique quelconque équivaut au cercle*

dont le rayon est égal à la corde de l'arc générateur de la calotte.

THÉORÈME.

674. *L'aire de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.*

Car cette aire peut être considérée comme celle d'une zone dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. D'ailleurs, le raisonnement fait pour la zone s'applique textuellement à ce cas particulier.

COROLLAIRES.

675. S étant l'aire d'une sphère de rayon R ou de diamètre D, on a

$$S = 2R \cdot 2\pi R = 4\pi R^2 = \pi D^2.$$

L'aire de la sphère est donc *égale à quatre grands cercles.* On peut dire encore qu'elle équivaut à l'aire d'un cercle dont le rayon serait égal au diamètre de la sphère.

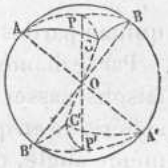
676. *Les aires de deux sphères sont entre elles comme les carrés des rayons ou des diamètres.*

THÉORÈME.

677. *Deux triangles sphériques symétriques* ABC, A'B'C', *sont équivalents* (*fig.* 379).

Prenons le pôle P du petit cercle qui passerait par les points A, B, C, et menons les arcs de grand cercle PA, PB, PC, qui sont égaux entre eux (615). Traçons le diamètre POP' et les arcs de grand cercle P'A', P'B', P'C'. L'égalité des angles POA, P'OA', entraîne celle des arcs PA et P'A'; on voit de même que PB = P'B' et PC = P'C'; par suite, comme PA = PB = PC, il faut qu'on ait P'A' = P'B' = P'C'. D'après cela, les triangles PAB, P'A'B', sont symétriques et isocèles; ils sont donc superposables, comme les angles trièdres correspondants. De même, les triangles PAC, P'A'C', sont égaux entre eux, ainsi que les triangles PBC, P'B'C'. Donc, enfin, le triangle ABC, somme de PAB, PAC et PBC, est équivalent au triangle A'B'C', somme de P'A'B', P'A'C' et P'B'C'.

Fig. 379.



Si le pôle P tombait à l'extérieur du triangle ABC, ce triangle ne serait plus une somme, mais une différence.

THÉORÈME.

678. *Lorsqu'on prend pour unité d'angle l'angle droit et pour unité d'aire l'aire du triangle trirectangle qui est le huitième de la surface sphérique* (646), *un fuseau a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle.*

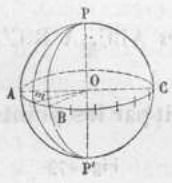
On appelle *fuseau* la portion de surface sphérique comprise entre deux demi-circonférences de grand cercle terminées au même diamètre. L'angle de ces deux demi-circonférences est l'*angle* du fuseau.

Deux fuseaux, situés sur la même sphère ou sur des sphères égales, sont évidemment *égaux*, c'est-à-dire superposables, *lorsque leurs angles sont égaux.*

Le rapport d'un fuseau à la surface sphérique est égal au rapport de l'angle du fuseau à quatre angles droits.

En effet, soit (*fig.* 380) le fuseau APP'B, compris entre les deux demi-circonférences PAP', PBP'. Du point P comme pôle, décrivons la circonférence de grand cercle ABC : l'arc AB est la mesure de l'angle du fuseau (628). Admettons qu'il y ait une commune mesure entre cet arc et la circonférence entière dont il fait partie, qu'on ait, par exemple,

Fig. 380.



$$\frac{AB}{\text{circ}OA} = \frac{2}{15}.$$

Si l'on divise alors la circonférence OA en quinze parties égales, l'arc AB contiendra deux de ses parties.

Par le diamètre PP' et chacun des points de division obtenus, faisons passer des plans. Nous décomposerons ainsi la surface sphérique en quinze fuseaux tous égaux entre eux comme ayant même angle, et le fuseau APP'B contiendra deux de ces fuseaux. Son rapport à la surface sphérique sera donc aussi égal à $\frac{2}{15}$. On pourra écrire, par conséquent,

$$\frac{\text{fus APP'B}}{\text{surf. sph.}} = \frac{AB}{\text{circ}OA} = \frac{AOB}{4^{dr}},$$

et la remarque énoncée est établie.

[Si l'arc AB et la circonférence ABC n'avaient pas de commune mesure, on emploierait le mode de démonstration précédemment indiqué (105).]

Cela posé, *deux fuseaux quelconques d'une même sphère sont entre eux comme leurs angles*, puisque, lorsque deux proportions ont les mêmes conséquents, leurs antécédents forment proportion (t. I, *Arithm.*, 391).

Soient donc F et F′ les nombres qui mesurent les deux fuseaux considérés, et A et A′ les nombres qui mesurent leurs angles, dans le système d'unités adopté. On aura

$$\frac{F}{F'} = \frac{A}{A'}.$$

Si l'on suppose alors $A' = 1$, le fuseau correspondant, ayant son angle droit, sera égal au quart de la sphère ou au double du triangle trirectangle, et l'on aura $F' = 2$. La proportion ci-dessus deviendra donc

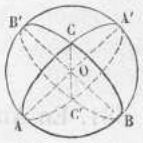
$$\frac{F}{2} = \frac{A}{1}, \quad \text{d'où} \quad F = 2A.$$

THÉORÈME.

679. *Lorsqu'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle trirectangle pour unité d'aire, l'aire d'un triangle sphérique quelconque a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles, diminuée de 2.*

Soit (*fig.* 381) le triangle sphérique ABC. Ce triangle se trouve sur l'hémisphère limité par la circonférence à laquelle appartient le côté AB. Achevons de même les circonférences auxquelles appartiennent les deux autres côtés AC et BC.

Fig. 381.



Le triangle ABC, augmenté du triangle BCA′, forme évidemment le fuseau limité par les deux demi-circonférences ACA′, ABA′, c'est-à-dire le fuseau dont l'angle est l'angle A du triangle proposé.

Le triangle ABC, augmenté du triangle ACB′, forme de même le fuseau dont l'angle est l'angle B du triangle proposé.

Si l'on considère enfin le triangle ABC, augmenté du triangle A′CB′, on voit qu'on peut remplacer le triangle A′CB′

par le triangle symétrique AC'B, qui lui est équivalent (677). Par conséquent, la somme indiquée revient au fuseau limité par les deux demi-circonférences CAC', CBC', c'est-à-dire au fuseau dont l'angle est l'angle C du triangle proposé.

On peut donc écrire les égalités suivantes :

$$ABC + BCA' = \text{fus}\,A,$$
$$ABC + ACB' = \text{fus}\,B,$$
$$ABC + A'CB' = \text{fus}\,C.$$

La somme des premiers membres de ces trois égalites équivaut évidemment à la demi-sphère, plus deux fois le triangle ABC. Comme, dans le système adopté, la demi-sphère est mesurée par le nombre 4, si l'on désigne par S, A, B, C, les nombres qui mesurent l'aire et les angles du triangle ABC, on a finalement, en se reportant à la mesure du fuseau (678),

$$4 + 2S = 2A + 2B + 2C,$$

d'où

$$S = A + B + C - 2. \qquad (1)$$

SCOLIES.

680. Soient R le rayon de la sphère évalué en mètres, σ l'aire du triangle en mètres carrés, et α, β, γ, les angles de ce triangle évalués en degrés; on aura, en observant que le triangle trirectangle est égal au huitième $\frac{1}{2}\pi R^2$ de la sphère,

$$A = \frac{\alpha}{90}, \quad B = \frac{\beta}{90}, \quad C = \frac{\gamma}{90}, \quad S = \frac{\sigma}{\frac{1}{2}\pi R^2},$$

et, par suite, en vertu de la relation (1),

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{180}\pi R^2. \qquad (2)$$

681. En Analyse, on évalue généralement les angles en parties du rayon (232); alors l'angle droit répond à $\frac{\pi}{2}$, et, si l'on désigne par A', B', C', les angles du triangle évalués en parties du rayon, on a

$$A = \frac{A'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2A'}{\pi}, \quad B = \frac{2B'}{\pi}, \quad C = \frac{2C'}{\pi},$$

et, par suite,

$$A + B + C - 2 = \frac{2}{\pi}(A' + B' + C' - \pi).$$

D'ailleurs, le rayon de la sphère étant 1, l'aire du triangle trirectangle est alors mesurée par $\frac{\pi}{2}$, de sorte qu'on a, S' étant le nombre qui mesure l'aire du triangle dans ce nouveau système d'unités,

$$S = \frac{S'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2S'}{\pi}.$$

On a donc enfin (679), à cause de la formule (1),

$$S' = A' + B' + C' - \pi.$$

On donne à ce nombre abstrait $A' + B' + C' - \pi$ le nom d'*excès sphérique* du triangle, et l'on peut dire alors que *l'aire d'un triangle sphérique a pour mesure son excès sphérique.*

THÉORÈME.

682. *Lorsqu'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle trirectangle pour unité d'aire, l'aire d'un polygone sphérique de n côtés a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles, diminuée de* $2(n-2)$.

On arrive à ce résultat en décomposant le polygone en triangles à l'aide d'arcs de grand cercle diagonaux issus d'un même sommet, et en appliquant la formule (1) du n° 679 aux $(n-2)$ triangles ainsi obtenus.

En se reportant au numéro précédent, on voit ce qu'on doit entendre par l'*excès sphérique* du polygone proposé.

L'aire d'un polygone sphérique convexe a pour mesure son excès sphérique.

V. — Volume de la sphère.

THÉORÈME.

683. *Lorsqu'un triangle tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par l'un de ses sommets sans traverser sa surface, il engendre un volume qui a pour mesure le produit*

de l'aire que décrit le côté opposé au sommet fixe, par le tiers de la hauteur relative à ce côté.

Soit le triangle ABC ayant son sommet A sur l'axe xy et AE pour hauteur relative à ce sommet : nous distinguerons trois cas :

Fig. 382.

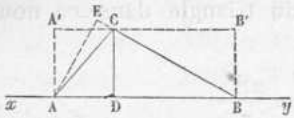
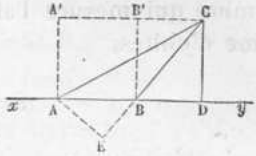


Fig. 383.



1° Supposons l'un des côtés AB du triangle ABC confondu avec l'axe xy. Suivant que la hauteur CD qui correspond au côté AB tombe à l'intérieur (*fig.* 382) ou à l'extérieur (*fig.* 383) du triangle ABC, le volume engendré par ce triangle est la somme ou la différence des cônes engendrés par les triangles rectangles ACD, BCD.

En même temps, le cylindre engendré par la rotation du rectangle ABB'A', qui a même base et même hauteur que le triangle donné ABC, est la somme (*fig.* 382) ou la différence (*fig.* 383) des cylindres engendrés par la rotation des rectangles ADCA', BDCB', dont le rectangle ABB'A' est lui-même la somme ou la différence. D'ailleurs, le cône ACD est le tiers du cylindre ADCA', et le cône BCD, le tiers du cylindre BDCB' (579). Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est le tiers du cylindre ABB'A', et l'on a

$$\text{vol ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{CD}}^2 \text{ AB} \quad \text{ou} \quad \text{vol ABC} = \frac{1}{3}\pi\text{CD}.\text{BC}.\text{AE},$$

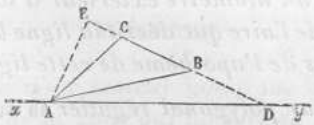
puisque les produits CD.AB et BC.AE représentent tous deux le double de l'aire du triangle donné. Or, π.CD.BC exprime (576) l'aire latérale du cône BCD ou l'aire de la surface engendrée par le côté BC dans la rotation du triangle ABC. Par suite,

$$\text{vol ABC} = \text{aire BC} \cdot \frac{\text{AE}}{3}.$$

2° Supposons (*fig.* 384) que, le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC prolongé vienne rencontrer l'axe au point D.

Le triangle ABC étant la différence des triangles ACD, ABD, le volume qu'il engendre est la différence des volumes engendrés par ces triangles. On a donc (1°)

Fig. 384.



$$\text{vol ABC} = (\text{aire DC} - \text{aire DB})\frac{AE}{3} = \text{aire BC} \cdot \frac{AE}{3}.$$

3° Supposons enfin que, le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC soit parallèle à cet axe.

Le volume engendré par le triangle ABC est la somme (*fig.* 385) ou la différence (*fig.* 386) des volumes engendrés par les triangles ABE, ACE. Or, le volume engendré par le

Fig. 385.

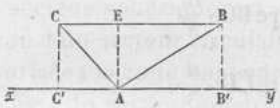
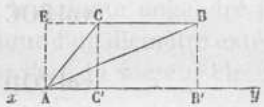


Fig. 386.



triangle ABE est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AB'BE, et le volume engendré par le triangle ACE, les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AC'CE (581). Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle B'C'CB, somme (*fig.* 385) ou différence (*fig.* 386) des rectangles AB'BE, AC'CE, et l'on a encore

$$\text{vol ABC} = \frac{2}{3}\pi\overline{AE}^2 \cdot BC = \text{aire BC} \cdot \frac{AE}{3};$$

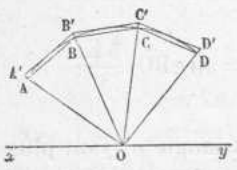
$2\pi . AE . BC$ exprime en effet l'aire latérale du cylindre engendré par le rectangle B'C'CB ou l'aire de la surface décrite par le côté BC de ce rectangle.

THÉORÈME.

684. ***Le volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface a pour mesure le produit de l'aire que décrit la ligne brisée qui lui sert de base, par le tiers de l'apothème de cette ligne brisée.***

On appelle *secteur polygonal régulier* la surface comprise entre une ligne brisée régulière et les rayons qui correspondent à ses extrémités.

Fig. 387.



Soit (*fig.* 387) le secteur polygonal régulier OABCD, tournant autour du diamètre xy. Décomposons ce secteur en triangles, en joignant au centre O les sommets de sa base ABCD, et appelons a l'apothème de cette base. Le volume engendré par le secteur sera la somme des volumes engendrés par les triangles qui le constituent. Or (683)

$$\text{vol AOB} = \text{aire AB} \cdot \frac{a}{3},$$

$$\text{vol BOC} = \text{aire BC} \cdot \frac{a}{3},$$

$$\text{vol COD} = \text{aire CD} \cdot \frac{a}{3}.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\text{vol OABCD} = (\text{aire AB} + \text{aire BC} + \text{aire CD}) \frac{a}{3}$$

ou

$$\text{vol OABCD} = \text{aire ABCD} \cdot \frac{a}{3}.$$

SCOLIE.

685. Si l'on se reporte au n° 670, on voit que les volumes engendrés par les demi-polygones réguliers considérés dans ce numéro ont pour expressions, suivant que le nombre de côtés des polygones est pair ou impair,

$$\frac{4}{3}\pi R r^2 \quad \text{et} \quad \frac{2}{3}\pi r^2 (R + r).$$

Ces deux expressions conduiraient immédiatement à l'expression du

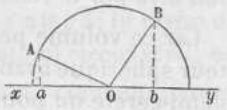
volume de la sphère, si l'on supposait les polygones réguliers considérés remplacés par leurs cercles limites : on devrait, dans cette hypothèse, faire $r = R$, et l'on trouverait, pour le volume de la sphère, $\frac{4}{3}\pi R^3$.

THÉORÈME.

686. *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le produit de l'aire de la zone qui lui sert de base, par le tiers du rayon de la sphère.*

Soient (*fig.* 388) $xABy$ le demi-cercle générateur d'une sphère et, dans ce demi-cercle, le secteur AOB dont la projection de la base AB sur xy est ab. Pendant que la demi-circonférence $xABy$ engendre la surface sphérique, l'arc AB engendre une zone (671), et les rayons OA et OB qui limitent le secteur engendrent les surfaces latérales de deux cônes de révolution ayant pour bases les cercles Aa et Bb. La portion du volume de la sphère comprise entre les surfaces latérales de ces deux cônes et la zone AB est le *secteur sphérique* correspondant au secteur circulaire AOB.

Fig. 388.



Un secteur sphérique est donc le volume engendré par la rotation d'un secteur circulaire autour d'un diamètre extérieur à sa surface; la zone engendrée par l'arc du secteur circulaire est la *base* du secteur sphérique.

Cela posé, le volume d'un secteur sphérique est, par définition, la limite des volumes engendrés par les secteurs polygonaux réguliers inscrits dans le secteur circulaire correspondant, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leurs bases.

D'après cela, soient v le volume engendré par un secteur polygonal régulier inscrit, s l'aire de la surface décrite par sa base, a son apothème; soient de même V le volume du secteur sphérique, S l'aire de la zone qui lui sert de base, R le rayon de la sphère. On a (684)

$$v = s \cdot \frac{a}{3}.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du secteur polygonal, v tend vers V, s vers S et a

vers R. On a donc, à la limite,

$$V = S \cdot \frac{R}{3}.$$

COROLLAIRE.

687. *Dans des sphères égales, deux secteurs sphériques sont entre eux comme les zones qui leur servent de bases,* et, par suite, *deux secteurs sphériques dont les bases ont même hauteur sont équivalents.*

THÉORÈME.

688. *Le volume de la sphère a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon.*

Car ce volume peut être considéré comme celui d'un secteur sphérique ayant pour secteur circulaire correspondant un demi-cercle ou pour base l'aire de la surface sphérique elle-même. D'ailleurs, le raisonnement fait pour le secteur sphérique s'applique textuellement à ce cas particulier.

COROLLAIRES.

689. V étant le volume d'une sphère de rayon R ou de diamètre D, on a

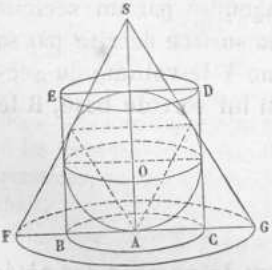
$$V = 4\pi R^2 \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

690. *Les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes des rayons ou des diamètres.*

THÉOREME.

691. *L'aire d'une sphère et les aires totales du cylindre droit et du cône équilatéral circonscrits à cette sphère sont proportionnelles aux nombres* 4, 6 *et* 9; *les volumes de ces trois corps sont proportionnels aux mêmes nombres* (*fig.* 389).

Fig. 389.



Soient le cercle OA, le carré et le triangle équilatéral circonscrits BCDE et SFG. Pendant que le cercle tournant autour de l'axe SA engendrera la sphère, le carré engendrera le cylindre circonscrit et

le triangle équilatéral engendrera le cône équilatéral circonscrit à la sphère.

Si l'on désigne par R le rayon OA, on a

$$\text{aire surf. sph.} = 4\pi R^2.$$

La base du cylindre circonscrit étant égale à un grand cercle de la sphère et sa hauteur étant le diamètre de la sphère, son aire totale est

$$2\pi R.2R + 2\pi R^2.$$

On a donc

$$\text{aire tot. cyl.} = 6\pi R^2.$$

Le côté du cône circonscrit, qui est celui du triangle équilatéral circonscrit au cercle OA, est égal à $2R\sqrt{3}$; le rayon de sa base, moitié du côté du triangle équilatéral circonscrit, est égal à $R\sqrt{3}$. On a donc, pour l'aire totale du cône équilatéral circonscrit,

$$\pi R\sqrt{3}.2R\sqrt{3} + 3\pi R^2,$$

et l'on peut écrire

$$\text{aire tot. cône} = 9\pi R^2.$$

Le théorème est donc vérifié quant aux surfaces.

Le volume de la sphère est égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$, celui du cylindre à $2\pi R^3$. La hauteur du cône, qui est celle du triangle équilatéral circonscrit au cercle OA, est égale à 3R; par suite, son volume a pour expression $3\pi R^3$. Les volumes des trois corps sont donc proportionnels aux nombres $\frac{4}{3}$, 2 et 3, c'est-à-dire aux nombres 4, 6 et 9, comme les aires totales correspondantes.

COROLLAIRE.

692. Si l'on remarque que 6 est la moyenne proportionnelle entre 4 et 9, on peut énoncer les propositions suivantes :

L'aire totale du cylindre droit circonscrit à la sphère est moyenne proportionnelle entre l'aire de la sphère et l'aire totale du cône équilatéral circonscrit; il en est de même du volume du cylindre droit circonscrit par rapport aux volumes des deux autres corps.

Le théorème du n° 691 n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un théorème plus général que nous allons établir.

THÉORÈME.

693. *Les volumes des polyèdres circonscrits à la même sphère ou à des sphères égales sont proportionnels aux aires de ces mêmes polyèdres.*

Un polyèdre est *inscrit* dans une sphère, lorsque tous ses sommets appartiennent à la surface de cette sphère; un polyèdre est *circonscrit* à une sphère, lorsque toutes ses faces sont tangentes à cette sphère. Dans le premier cas, la sphère est *circonscrite* au polyèdre; dans le second cas, elle lui est *inscrite*.

Cela posé, décomposons les polyèdres circonscrits donnés en pyramides, en prenant pour centres de décomposition les centres mêmes des sphères considérées. Chaque polyèdre aura pour mesure de son volume son aire multipliée par le tiers du rayon de la sphère inscrite (566). En désignant par V et v les volumes de deux quelconques des polyèdres, par S et s leurs aires, par R le rayon commun des sphères, on aura donc

$$V = S \cdot \frac{R}{3}, \quad v = s \cdot \frac{R}{3},$$

et, par suite

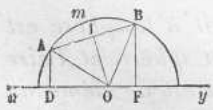
$$\frac{V}{v} = \frac{S}{s}.$$

THÉORÈME.

694. *Le volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface équivaut au sixième du cylindre qui a pour rayon la corde du segment et pour hauteur la projection de cette corde sur l'axe.*

Le segment A*m*B (*fig.* 390) est la différence du secteur circulaire AOB et du triangle isocèle AOB; la portion du volume de la sphère engendrée par la rotation de ce segment sera donc égale à la différence des volumes du secteur sphérique AOB et du triangle tournant AOB.

Fig. 390.



DF étant la projection de AB sur *xy* et OI la hauteur du

triangle AOB, on aura (686, 671, 683, 667)

$$\text{sect. sph. AOB} = \text{zone AB} \cdot \frac{\text{OA}}{3} = \frac{2}{3}\pi \overline{\text{OA}}^2 . \text{DF}.$$

$$\text{vol AOB} = \text{aire AB} \cdot \frac{\text{OI}}{3} = \frac{2}{3}\pi \overline{\text{OI}}^2 . \text{DF}.$$

Par suite,

$$\text{vol A}m\text{B} = \frac{2}{3}\pi\left(\overline{\text{AO}}^2 - \overline{\text{OI}}^2\right) \text{DF}.$$

Le triangle rectangle OIA donnant

$$\overline{\text{OA}}^2 - \overline{\text{OI}}^2 = \overline{\text{AI}}^2 = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{4},$$

il vient, en réduisant,

$$\text{vol A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi \overline{\text{AB}}^2 . \text{DF},$$

ce qui vérifie l'énoncé.

THÉORÈME.

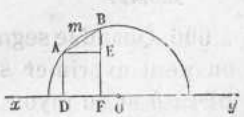
695. *Le volume d'un segment sphérique équivaut au volume d'une sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment, augmenté de la demi-somme des volumes de deux cylindres ayant pour hauteur commune celle du segment et pour bases respectives les bases du segment.*

On appelle *segment sphérique* la portion du volume de la sphère comprise entre deux plans sécants *parallèles*. Les cercles déterminés par ces plans parallèles sont les *bases* du segment sphérique, et leur distance en est la *hauteur*.

Lorsqu'un des plans parallèles devient tangent à la sphère, le cercle correspondant se réduit à un point, et l'on a un segment sphérique à *une base*.

Cela posé, si l'on se reporte à la *fig.* 391, on voit que, tandis que le demi-cercle OA engendre la sphère en tournant autour de son diamètre xy, le trapèze mixtiligne DAmBF, obtenu en abaissant sur l'axe les perpendiculaires AD et BF, engendre un segment sphérique ayant pour bases les cercles DA et FB et pour hauteur DF. Ce segment est donc la somme des volumes engendrés par le segment

Fig. 391.



circulaire AmB et le trapèze rectangulaire DABF. On a d'abord (694)

$$\text{vol A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{DF}.$$

Le trapèze DABF engendrant un tronc de cône de révolution, on a aussi (598)

$$\text{vol DABF} = \frac{1}{3}\pi\text{DF}\left(\overline{\text{BF}}^2 + \overline{\text{AD}}^2 + \text{BF}.\text{AD}\right).$$

Par suite,

$$\text{vol DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\text{DF}\left(\overline{\text{AB}}^2 + 2\overline{\text{BF}}^2 + 2\overline{\text{AD}}^2 + 2\text{BF}.\text{AD}\right).$$

D'ailleurs, la corde AB est liée à la hauteur DF et aux rayons BF et AD des bases du segment sphérique par la relation

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{\text{AE}}^2 + \overline{\text{BE}}^2 = \overline{\text{DF}}^2 + (\text{BF} - \text{AD})^2$$

ou

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{\text{DF}}^2 + \overline{\text{BF}}^2 + \overline{\text{AD}}^2 - 2\text{BF}.\text{AD}.$$

En substituant cette valeur de $\overline{\text{AB}}^2$ et en simplifiant, il vient

$$\text{vol DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\text{DF}\left(\overline{\text{DF}}^2 + 3\overline{\text{BF}}^2 + 3\overline{\text{AD}}^2\right),$$

ce qu'on peut écrire

$$\text{vol DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{DF}}^3 + \frac{1}{2}\left(\pi\overline{\text{BF}}^2.\text{DF} + \pi\overline{\text{AD}}^2.\text{DF}\right),$$

de manière à vérifier l'énoncé (689, 543).

Si le segment considéré n'a qu'une base, c'est-à-dire si (*fig.* 391) le point D vient occuper l'une des extrémités du diamètre xy, on a simplement

$$\text{vol D}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{DF}}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{\text{BF}}^2.\text{DF}.$$

SCOLIE.

696. Quand le segment sphérique n'a qu'une base (*fig.* 391), on peut exprimer son volume V en fonction de sa hauteur $\text{DF} = h$ et du rayon R de la sphère. On a alors, d'après la formule précédente,

$$\text{V} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{\text{BF}}^2.h.$$

D'ailleurs (167),

$$\overline{BF}^2 = h(2R - h),$$

d'où

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h^2 (2R - h)$$

ou, en simplifiant,

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

THÉORÈME.

697. *Le volume d'une pyramide sphérique a pour mesure le produit de sa base par le tiers du rayon de la sphère*

Une *pyramide sphérique* est la portion du volume de la sphère comprise entre les faces d'un angle polyèdre dont le sommet est au centre de la sphère; le polygone sphérique correspondant à cet angle polyèdre est la *base* de la pyramide. Deux pyramides sphériques sont dites *symétriques* lorsqu'elles ont pour bases des polygones sphériques symétriques.

On appelle *onglet* la portion du volume de la sphère comprise entre deux demi-grands cercles PAP', PBP' (*fig.* 380); le fuseau correspondant est la *base* de l'onglet, et son angle est l'*angle* de l'onglet.

On démontre que :

1° *Deux pyramides sphériques triangulaires symétriques sont équivalentes* (677);

2° *Lorsqu'on prend pour unité d'angle l'angle droit et pour unité de volume la pyramide trirectangle qui est le huitième du volume de la sphère, un onglet a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle* (678);

3° *Dans le même système d'unités, le volume d'une pyramide sphérique triangulaire a pour mesure le nombre* $A + B + C - 2$, *A, B, C, étant les mesures des angles du triangle sphérique qui sert de base à la pyramide* (679).

Il résulte de là que le rapport du volume d'une pyramide spherique triangulaire à l'aire de sa base est égal au rapport de la pyramide sphérique trirectangle au triangle trirectangle; mais ce dernier rapport est égal à celui du volume de la sphère à son aire, c'est-à-dire au tiers du rayon. Donc le volume de la pyramide sphérique triangulaire est égal au produit de

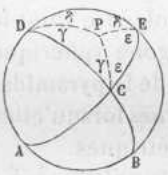
sa base par le tiers du rayon ; et ce théorème s'étend à la pyramide sphérique polygonale, en décomposant sa base en triangles.

VI. — Exercices et questions complémentaires.

THÉORÈME.

698. *Le lieu géométrique des sommets* C *des triangles sphériques* CDE, *ayant une base fixe* DE *et dans lesquels la différence entre l'angle au sommet* C *et la somme* D + E *des angles à la base demeure constante, est un petit cercle passant par les points* D *et* E (*fig.* 392).

Fig. 392.



Soient DCE un des triangles satisfaisant aux conditions de l'énoncé et P le pôle du petit cercle circonscrit à ce triangle ; les trois triangles PCD, PDE, PEC, sont alors isocèles. Il en résulte immédiatement, en se reportant aux notations de la figure,

$$(D + E) - C = 2\delta.$$

Par conséquent, l'angle δ est constant et le triangle isocèle PDE est fixe, de sorte que la distance PC = PD est elle-même constante. Le sommet C, dont on cherche le lieu, est donc toujours sur le petit cercle décrit du point P comme pôle avec le rayon sphérique PD, ce qui justifie l'énoncé.

THÉORÈME.

699. *Le lieu géométrique des sommets* C *des triangles sphériques* ABC, *ayant une base fixe* AB *et une aire constante, est un petit cercle passant par les points* D *et* E, *qui sont diamétralement opposés aux extrémités* B *et* A *de la base* AB (*fig.* 392).

Ce théorème est une conséquence du précédent.

En effet, si l'aire du triangle ABC est constante, la fonction de ses angles A + B + C − 2 est elle-même constante (679). Mais, si l'on achève les demi-circonférences ACE, BCD, en considérant l'hémisphère limité par le grand cercle dont la base AB fait partie, on obtient un triangle CDE dans lequel on a, d'après les fuseaux formés, A = 2 − E, B = 2 − D. Par suite, l'expression A + B + C − 2 revenant à C − (D + E) + 2, l'expression (D + E) − C est elle-même constante, et l'on est précisément ramené à la question du n° 698, puisque, la base AB étant fixe, il en est de même de la base DE.

Le théorème qu'on vient de démontrer est souvent désigné par le nom de son auteur, le géomètre LEXELL.

On peut proposer sur la sphère un grand nombre de problèmes inté-

ressants, où l'Algèbre intervient utilement. Nous allons en résoudre quelques-uns par cette voie.

PROBLÈME.

700. *Inscrire dans une sphère un cône dont l'aire convexe soit équivalente à celle de la calotte sphérique terminée au même cercle* (*fig.* 393).

Désignons par x la hauteur AS du cône et par R le rayon de la sphère. La hauteur AD de la calotte sphérique aura pour expression $2R - x$. L'énoncé du problème exige qu'on ait

$$\pi . AB . SB = 2\pi R(2R - x),$$

d'où

$$AB^2 . SB^2 = 4R^2(2R - x)^2.$$

Mais

$$AB^2 = x(2R - x) \quad \text{et} \quad SB^2 = 2Rx.$$

En substituant, il vient

$$2Rx^2(2R - x) = 4R^2(2R - x)^2,$$

d'où, en supprimant le facteur commun $2R(2R - x)$ et en écartant la solution $x = 2R$, qui convient en ce sens que le cône et la calotte cessent alors en même temps d'exister,

$$x^2 = 2R(2R - x).$$

Cette équation prouve immédiatement que l'inconnue x est le plus grand segment du diamètre divisé en moyenne et extrême raison (190). Deux zones étant proportionnelles à leurs hauteurs, on voit que le plan de la base du cône cherché partage aussi la surface de la sphère en moyenne et extrême raison.

Fig. 393.

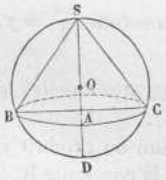


Fig. 394.



PROBLÈME.

701. *Un cône équilatéral étant inscrit dans une sphère, chercher entre quelles limites peut varier la différence des sections déterminées dans ces deux corps par un plan parallèle à la base du cône* (*fig.* 394).

Le cône étant équilatéral, sa hauteur SH est $\frac{3R}{2}$, et le rayon AH de sa base, moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle qui

engendre la sphère, est $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, R désignant le rayon de la sphère donnée.

A une distance $Sh = x$ du sommet S, menons un plan sécant parallèle à la base du cône. La section faite dans la sphère aura pour expression $\pi.\overline{Mh}^2$; celle faite dans le cône aura pour expression $\pi.\overline{ah}^2$. On a d'ailleurs, d'après la figure,

$$\overline{Mh}^2 = x(2R - x) \quad \text{et} \quad \frac{ah}{AH} = \frac{Sh}{SH},$$

c'est-à-dire

$$\frac{ah}{\frac{R}{2}\sqrt{3}} = \frac{x}{\frac{3R}{2}}, \quad \text{d'où} \quad \overline{ah}^2 = \frac{x^2}{3}.$$

La différence des deux sections est donc

$$\pi x(2R - x) - \frac{\pi x^2}{3},$$

et, si on la désigne par D, on a la relation

$$D = 2\pi.x\left(R - \frac{2x}{3}\right).$$

Cette différence s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \frac{3R}{2}$. En effet, dans le premier cas, le plan sécant est tangent à la sphère au point S; dans le second, il se confond avec la base du cône. Entre ces deux valeurs égales à zéro, D doit nécessairement passer par un *maximum*, c'est-à-dire que, le rayon de la section faite dans la sphère croissant d'abord plus rapidement que le rayon de la section faite dans le cône, D commence par croître à partir de zéro, pour diminuer ensuite et revenir à zéro.

Pour trouver le maximum de D, nous poserons $\frac{2x}{3} = y$, d'où $x = \frac{3y}{2}$. En substituant, il vient

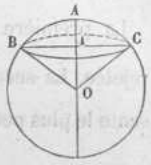
$$D = 3\pi.y(R - y).$$

Le maximum de D ne dépend que de celui du produit $y(R - y)$, et, la somme de ces deux facteurs étant égale à la constante R, leur produit est maximum lorsqu'on a $y = \frac{R}{2}$ (t. I, *Alg. élém.*, 285), c'est-à-dire $x = \frac{3R}{4}$. D est donc maximum lorsque le plan sécant passe par le milieu de la hauteur du cône SAB, et cette valeur maximum de D est égale aux $\frac{3}{4}$ de l'aire d'un grand cercle. Lorsque le plan sécant passe par le centre de la sphère, D est égal aux $\frac{2}{3}$ de l'aire d'un grand cercle.

PROBLÈME.

702. *Couper une sphère par un plan de manière que le segment sphérique déterminé par ce plan et le secteur sphérique ayant pour base la calotte qui termine le segment soient dans un rapport donné* (*fig.* 395).

Fig. 395.



Soient x la hauteur AI du segment, c'est-à-dire la distance du plan sécant au point A, et R le rayon de la sphère. Le volume du secteur a pour expression $\frac{2}{3}\pi R^2 x$; le volume du segment est représenté par $\frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)$. Si le rapport du secteur au segment est désigné par $\frac{p}{q}$, on doit avoir

$$\frac{\frac{2}{3}\pi R^2 x}{\frac{1}{3}\pi x^2(3R - x)} = \frac{p}{q}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2R^2}{x(3R - x)} = \frac{p}{q}.$$

En chassant les dénominateurs, on arrive à l'équation du second degré

$$px^2 - 3pRx + 2qR^2 = 0,$$

et l'on en déduit

$$x = \frac{3pR \pm \sqrt{9p^2R^2 - 8pqR}}{2p}.$$

En divisant ses deux termes par p, on peut mettre cette valeur sous la forme

$$x = \frac{R\left(3 \pm \sqrt{9 - 8\frac{q}{p}}\right)}{2}.$$

Pour que la valeur de x soit réelle, il faut qu'on ait $9 - 8\frac{q}{p} > 0$, c'est-à-dire $\frac{p}{q} > \frac{8}{9}$.

Si l'on suppose $\frac{p}{q} = 1$, il vient

$$x = \frac{R(3 \pm 1)}{2},$$

c'est-à-dire

$$x' = 2R \quad \text{et} \quad x'' = R.$$

Dans le premier cas, le segment et le secteur se confondent avec la sphère; dans le second, avec la moitié de la sphère.

Si l'on suppose $\frac{p}{q} = 2$, c'est-à-dire si le plan sécant divise le secteur sphérique en deux parties équivalentes, on a

$$x = \frac{R(3 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

La première valeur surpasse le diamètre de la sphère et doit être rejetée. La seconde valeur $x = \frac{R(3 - \sqrt{5})}{2}$ est seule admissible et représente le plus petit segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison.

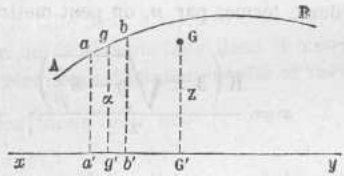
THÉORÈME.

703. *L'aire engendrée par une ligne plane quelconque, tournant autour d'un axe extérieur quelconque situé dans son plan, a pour mesure le produit de sa longueur* (221) *par la circonférence que décrit son centre des moyennes distances.*

Nous avons défini précédemment (86) le *centre des moyennes distances* d'une série de points donnés dans un plan. D'après cette définition, on entend par *centre des moyennes distances d'une ligne plane quelconque* le centre qu'on obtient en considérant les points milieux des *éléments égaux* infiniment petits dans lesquels on peut supposer que cette ligne a été divisée.

Cela posé, soient (*fig.* 396) la courbe plane AB de longueur L et l'axe xy.

Fig. 396.



Divisons cette courbe en éléments égaux tels que ab, et représentons par α l'ordonnée du milieu g de ab par rapport à xy.

ab, étant infiniment petit, peut être regardé comme rectiligne (226); cet élément, en tournant autour de l'axe, engendre ainsi l'aire d'un tronc de cône, et cette aire a pour expression (597)

$$ab.2\pi\alpha.$$

Si l'on désigne par S l'aire totale engendrée par la rotation complète de la courbe AB, on peut donc poser

$$S = \Sigma ab.2\pi\alpha.$$

Mais, les éléments *ab* étant égaux entre eux, on peut faire sortir du signe Σ le facteur $2\pi.ab$ et écrire

$$S = 2\pi.ab\,\Sigma z.$$

D'ailleurs, si n est le nombre des éléments *ab* et si Z est l'ordonnée du centre G des moyennes distances de la courbe AB par rapport à xy, on a, par définition,

$$Z = \frac{\Sigma z}{n} \quad \text{ou} \quad \Sigma z = nZ.$$

Il en résulte

$$S = n.ab.2\pi Z,$$

c'est-à-dire, puisque l'on a à la limite $n.ab = L$,

$$S = L.2\pi Z.$$

Le centre G reçoit souvent le nom de *centre de gravité de la courbe* AB (*voir* la Mécanique).

SCOLIE.

704. Proposons-nous, comme application, de trouver l'*expression de l'aire engendrée par une circonférence de rayon r, tournant autour d'un axe xy qui est situé dans son plan et qui ne la coupe pas.*

Soit d la distance du centre de cette circonférence à l'axe xy. Le centre d'une circonférence est évidemment le centre des moyennes distances de ses éléments égaux ou son centre de gravité, car, dans la recherche du centre des moyennes distances, il est clair qu'on peut remplacer plusieurs points par leur centre particulier, et le centre qui correspond aux extrémités d'un diamètre quelconque est le centre même de la circonférence. L'aire de la surface engendrée, qui est celle d'un *tore*, a donc pour expression

$$2\pi r.2\pi d = 4\pi^2 rd.$$

THÉORÈME.

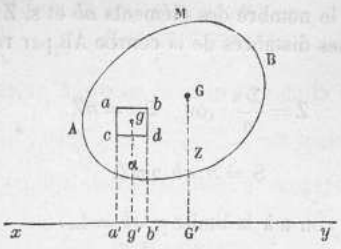
705. *Le volume engendré par une surface plane quelconque tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan a pour mesure le produit de l'aire génératrice par la circonférence que décrit son centre des moyennes distances.*

On entend par *centre des moyennes distances d'une aire plane quelconque* le centre qu'on obtient en considérant les centres des *éléments rectangulaires égaux* infiniment petits dans lesquels on peut supposer que la surface donnée a été divisée par deux séries de droites parallèles, menées à angle droit.

Cela posé, soient (*fig.* 397) la surface AMB, dont l'aire est S, et l'axe xy. Divisons cette surface en éléments rectangulaires égaux tels que *abcd*,

dont les côtés soient les uns parallèles, les autres perpendiculaires à xy, et représentons par α la distance du centre g du rectangle $abcd$ à l'axe xy.

Fig. 397.



$abcd$, en tournant autour de l'axe, engendre un volume qui est la différence des deux cylindres décrits par les rectangles $aba'b'$, $cda'b'$. Ce volume a donc pour expression

$$\pi ab\left(\overline{aa'}^2 - \overline{ca'}^2\right) = 2\pi ab\,\frac{aa' + ca'}{2}(aa' - ca').$$

Mais $aa' - ca' = ac$, et le produit $ab.ac$ exprime l'aire du rectangle $abcd$. De plus, on a évidemment $\frac{aa' + ca'}{2} = gg' = \alpha$.

Le volume élémentaire engendré par $abcd$ est donc égal à

$$abcd.2\pi\alpha.$$

Par suite, V étant le volume engendré par la rotation complète de l'aire totale S, on peut poser

$$V = \Sigma\, abcd.2\pi\alpha.$$

Mais, les éléments $abcd$ étant supposés égaux entre eux, on peut faire sortir du signe Σ le facteur $2\pi.abcd$ et écrire

$$V = 2\pi.abcd\,\Sigma\alpha.$$

D'ailleurs, si n est le nombre des éléments $abcd$ et si Z est l'ordonnée du centre G des moyennes distances de la surface AMB par rapport à xy, on a, par définition,

$$Z = \frac{\Sigma\alpha}{n} \quad \text{ou} \quad \Sigma\alpha = nZ.$$

Il en résulte

$$V = n.abcd.2\pi Z,$$

c'est-à-dire, puisqu'on a à la limite $n.abcd = S$,

$$V = S.2\pi Z.$$

Le centre G reçoit souvent le nom de *centre de gravité de la surface* AMB (*voir* la Mécanique).

SCOLIES.

706. Proposons-nous, comme application, de trouver le volume du *tore*. En conservant les notations du n° 704, on a immédiatement, pour l'expression de ce volume,

$$\pi r^2 . 2\pi d = 4\pi^2 r^2 d.$$

Le volume du tore est donc égal à son aire multipliée par le rayon du cercle générateur.

707. Les deux propositions qui précèdent constituent le *théorème* de GULDIN.

Les anciens les connaissaient déjà, et on les trouve mentionnées dans les *collections* de PAPPUS

CHAPITRE V.

SIMILITUDE ET SYMÉTRIE DANS L'ESPACE.

I. — Des polyèdres semblables.

708. On donne le nom de *polyèdres semblables* aux polyèdres qui ont leurs angles polyèdres égaux et qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune.

L'égalité des angles polyèdres entraîne évidemment l'égalité des angles dièdres homologues.

On appelle *homologues* les éléments (faces, arêtes, dièdres, etc.) qui se correspondent dans deux polyèdres semblables.

709. *Les arêtes homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles.*

Car les faces semblables de ces polyèdres ayant le même rapport de similitude, puisqu'une même arête appartient sur chaque polyèdre à deux faces adjacentes, le rapport de deux arêtes homologues quelconques est constant.

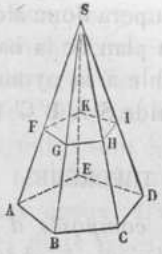
THÉORÈME.

710. *En coupant une pyramide par un plan parallèle à la base, on détermine une seconde pyramide semblable à la première.*

Soit (*fig.* 398) la pyramide SABCDE, dans laquelle un plan parallèle à la base a déterminé la section FGHIK. Les deux pyramides SABCDE, SFGHIK, ont leurs faces semblables, car les polygones ABCDE, FGHIK, sont semblables (556), et les faces latérales SAB et SFG, SBC et SGH, ..., le sont aussi par suite du parallélisme des côtés de ces deux polygones.

Quant aux angles polyèdres, l'angle polyèdre S est commun, et deux angles trièdres homologues, tels que A et F, sont

Fig. 398.



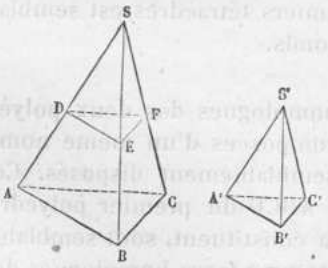
égaux comme ayant un angle dièdre commun compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées, savoir : l'angle dièdre SA commun, la face SAB égale à la face SFG et la face SAE égale à la face SFK.

THÉORÈME.

711. *Deux pyramides triangulaires sont semblables, lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées.*

Soient (*fig.* 399) les pyramides SABC, S'A'B'C', dans lesquelles l'angle dièdre SA est égal à l'angle dièdre S'A', et les

Fig. 399.



faces SAB, SAC, semblables aux faces S'A'B', S'A'C', et semblablement placées.

Portons la seconde pyramide sur la première, de manière qu'elles aient même sommet et que les faces homologues de leurs angles dièdres égaux coïncident. Le triangle S'A'B' étant semblable au triangle SAB et le point A' tombant en D sur SA,

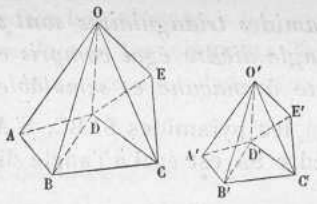
S'B' se confondra avec SB, et le point B' viendra en un point E tel, que DE soit parallèle à AB. De même, le triangle S'A'C' étant semblable au triangle SAC, S'C' se confondra avec SC, et le point C' viendra en un point F tel, que DF soit parallèle à AC. La base A'B'C' occupera donc alors la position DEF, et son plan sera parallèle au plan de la base ABC (420). La pyramide SDEF étant semblable à la pyramide SABC (710), il en est de même de la pyramide S'A'B'C' qu'elle représente.

THÉORÈME.

712. *Deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés sont semblables.*

Soient (*fig.* 400) OABD, OBCD, OCDE, ..., O'A'B'D', O'B'C'D', O'C'D'E', ..., deux séries de tétraèdres respectivement semblables et semblablement disposés; le polyèdre

Fig. 400.



formé par les premiers tétraèdres est semblable au polyèdre formé par les seconds.

En effet :

1° Les faces homologues des deux polyèdres sont semblables comme composées d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés. Considérons, par exemple, la face ABCD du premier polyèdre. Les triangles ABD, BCD, qui la constituent, sont semblables aux triangles A'B'D', B'C'D', comme faces homologues de tétraèdres semblables. De plus, les triangles ABD, BCD, étant dans un même plan, les angles dièdres OBDA, OBDC, des deux tétraèdres OABD, OBCD, sont supplémentaires; il en est donc de même des angles dièdres homologues O'B'D'A', O'B'D'C', des tétraèdres semblables O'A'B'D', O'B'C'D'. Par suite, les deux triangles A'B'D', B'C'D', sont aussi dans un même plan, et

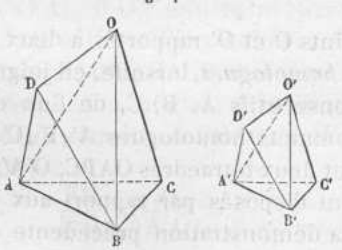
constituent sur le second polyèdre une face A'B'C'D' semblable à la face ABCD.

2° Les angles polyèdres des deux polyèdres sont égaux comme ayant tous leurs éléments égaux et semblablement disposés; car, les faces homologues des deux polyèdres étant semblables et semblablement disposées, leurs angles polyèdres ont d'abord toutes leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées. De plus, les angles dièdres homologues de ces angles polyèdres sont égaux, soit comme dièdres homologues de deux tétraèdres semblables, soit comme somme d'angles dièdres égaux. L'angle dièdre BCDE, par exemple, formé par les deux faces ABCD, CDE, du premier polyèdre, est la somme des deux angles dièdres BCDO, ECDO, qui appartiennent aux deux tétraèdres OBCD, OCDE; et l'angle dièdre B'C'D'E', formé par les deux faces A'B'C'D', C'D'E', du second polyèdre, est la somme des deux angles dièdres homologues B'C'D'O', E'C'D'O', qui appartiennent aux deux tétraèdres semblables O'B'C'D', O'C'D'E'.

713. Réciproquement, *deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés.*

Soit (*fig.* 401) un point O pris dans l'intérieur du premier polyèdre; décomposons-le en tétraèdres en prenant le point O

Fig. 401.



pour centre de décomposition (566), et soit OABC l'un des tétraèdres obtenus. Les points A, B, C, ayant pour homologues sur le second polyèdre les points A', B', C', menons un plan O'A'B' faisant au-dessus de A'B'C' un angle dièdre égal à celui que forme le plan AOB au-dessus de ABC, et, dans ce plan O'A'B', construisons le triangle O'A'B' semblable au

triangle OAB. En prenant le point O' pour centre de décomposition, on décompose donc le second polyèdre en tétraèdres qui correspondent à ceux du premier polyèdre, et il reste seulement à prouver que ces tétraèdres sont semblables deux à deux.

Soit D un quatrième sommet du premier polyèdre, tel que les deux triangles ABC, ABD, aient un côté commun et soient situés sur la même face ou sur deux faces adjacentes. Comparons les deux tétraèdres OABD, O'A'B'D'. Les faces OAB, O'A'B', sont semblables comme faces homologues des deux tétraèdres semblables OABC, O'A'B'C'; les faces ABD, A'B'D', le sont aussi comme triangles homologues de deux faces semblables des polyèdres donnés. De plus, si les deux triangles ABC, ABD, sont dans un même plan, les deux dièdres OABD, O'A'B'D', sont égaux comme suppléments des angles dièdres égaux OABC, O'A'B'C'; si les deux triangles ABC, ABD, ne sont pas dans un même plan, les deux angles dièdres OABD, O'A'B'D', sont encore égaux comme différences des angles dièdres égaux, DABC et OABC d'une part, D'A'B'C' et O'A'B'C' d'autre part. Dans les deux cas, les tétraèdres OABD, O'A'B'D', sont semblables (711).

La même démonstration s'appliquera de proche en proche. La similitude des deux tétraèdres considérés en dernier lieu permettra toujours de vérifier la similitude des deux tétraèdres suivants.

SCOLIE.

714. Deux points O et O' rapportés à deux polyèdres semblables sont dits *homologues*, lorsque, en joignant l'un d'eux O aux sommets consécutifs A, B, C, de l'un des polyèdres et l'autre O' aux sommets homologues A', B', C', de l'autre polyèdre, on obtient deux tétraèdres OABC, O'A'B'C', semblables et semblablement disposés par rapport aux deux polyèdres.

Il résulte de la démonstration précédente que deux points homologues quelconques peuvent être pris pour centres de décomposition de deux polyèdres semblables, en tétraèdres semblables et semblablement disposés.

Si le point O est extérieur au premier polyèdre, son homologue O' est aussi extérieur au second polyèdre; il faut alors considérer les deux polyèdres comme composés de tétraèdres additifs et de tétraèdres soustractifs.

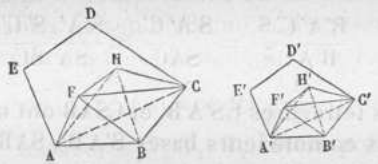
Si le point O coïncide avec l'un des sommets A du premier polyèdre, son homologue O′ coïncide avec le sommet A′ du second polyèdre, et les diagonales homologues des deux polyèdres, relatives aux sommets A et A′, se confondent avec les arêtes latérales de leurs tétraèdres homologues.

715. Deux droites rapportées à deux polyèdres semblables sont dites *homologues*, lorsque leurs extrémités sont deux à deux des points homologues. Telles sont, par exemple, les diagonales relatives à des sommets homologues.

Le rapport de deux droites homologues quelconques est égal au rapport de similitude des faces homologues des deux polyèdres.

Soient (*fig.* 402) ABCDE, A′B′C′D′E′, deux faces homo-

Fig. 402.



logues quelconques des polyèdres donnés, et FH, F′H′, deux droites homologues quelconques. Formons les tétraèdres homologues FABC, F′A′B′C′, HABC, H′A′B′C′. La similitude de ces tétraèdres entraîne celle des tétraèdres FHAC, F′H′A′C′. En effet, les faces FAC, HAC, sont respectivement semblables aux faces F′A′C′, H′A′C′, et l'angle dièdre FACH, différence des angles dièdres FACB, HACB, est égal à l'angle dièdre F′A′C′H′, différence des angles dièdres égaux F′A′C′B′, H′A′C′B′. Les deux tétraèdres FHAC, F′H′A′C′, étant semblables, on a (709)

$$\frac{FH}{F'H'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AC}{A'B'}.$$

THÉORÈME.

716. *Les volumes de deux tétraèdres* SABC, S′A′B′C′, *qui ont un angle trièdre égal* (S = S′), *sont proportionnels aux produits des arêtes qui comprennent les angles trièdres égaux* (*fig* 403).

Les deux tétraèdres proposés ayant un même angle trièdre,

on peut toujours les supposer placés l'un dans l'autre, comme l'indique la figure. Faisons alors passer un plan par les som-

Fig. 403.

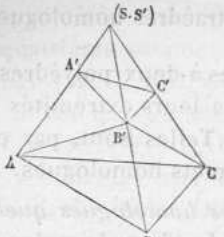
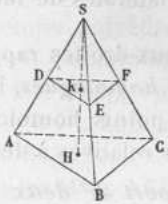


Fig. 404.



mets A, B', C. Les deux tétraèdres B'A'C'S' et B'ACS, ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases S'A'C', SAC, qui ont un angle commun. On peut donc écrire (265)

$$(1) \qquad \frac{B'A'C'S'}{B'ACS} = \frac{S'A'C'}{SAC} = \frac{S'A'.S'C'}{SA.SC}.$$

De même, les tétraèdres CS'AB' et CSAB ont même hauteur et sont entre eux comme leurs bases S'AB', SAB, qui ont encore un angle commun. Il en résulte

$$(2) \qquad \frac{CS'AB'}{CSAB} = \frac{S'AB'}{SAB} = \frac{S'A.S'B'}{SA.SB} = \frac{S'B'}{SB}.$$

Multiplions alors membre à membre les égalités (1) et (2), et simplifions le résultat en remarquant que les deux tétraèdres B'ACS et CS'AB' ne font qu'un. Il vient alors, en changeant simplement l'ordre des lettres dans les termes du premier membre,

$$\frac{S'A'B'C'}{SABC} = \frac{S'A'.S'B'.S'C'}{SA.SB.SC}.$$

THÉORÈME.

717. *Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au cube du rapport de similitude de leurs faces homologues,* ou *deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

Soient d'abord (*fig.* 404) deux tétraèdres semblables SABC, SDEF, qu'on peut toujours supposer placés l'un dans l'autre,

comme l'indique la figure (711), de manière que leurs bases ABC, DEF, soient parallèles.

On a alors à la fois (716, 709)

$$\frac{SABC}{S'A'B'C'} = \frac{SA.SB.SC}{S'A'.S'B'.S'C'} = \frac{SA}{S'A'}\cdot\frac{SB}{S'B'}\cdot\frac{SC}{S'C'}$$

et

$$\frac{SA}{S'A'} = \frac{SB}{S'B'} = \frac{SC}{S'C'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{SABC}{S'A'B'C'} = \frac{\overline{SA}^3}{\overline{S'A'}^3}.$$

Soient maintenant deux polyèdres semblables P et P'. Le rapport de similitude de leurs faces homologues sera (709) celui de deux arêtes homologues quelconques AB et A'B'. Ces deux polyèdres sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés (713), et le rapport de similitude des faces homologues de deux tétraèdres homologues est égal (715) au rapport $\frac{AB}{A'B'}$. Si le polyèdre P est composé des tétraèdres T, T_1, T_2, et le polyèdre P' des tétraèdres homologues T', T'_1, T'_2, on aura donc, d'après ce qui précède,

$$\frac{T}{T'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}, \quad \frac{T_1}{T'_1} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}, \quad \frac{T_2}{T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3},$$

et, par suite, en appliquant un théorème connu,

$$\frac{T + T_1 + T_2}{T' + T'_1 + T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}.$$

SCOLIE.

718. *Les aires de deux polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs arêtes homologues.*

719. De la relation démontrée (717), on déduit réciproquement

$$\frac{AB}{A'B'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

Donc, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polyèdre dans un rapport donné, l'*échelle* à adopter pour amplifier ou

réduire les arêtes de ce polyèdre est égale à la racine cubique du rapport donné. Par exemple, si le volume du nouveau polyèdre doit être la millième partie de celui du polyèdre donné, il faut faire ses arêtes dix fois plus petites que les arêtes homologues du polyèdre donné.

II. — Des figures homothétiques.

THÉORÈME.

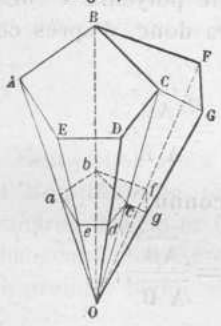
720. *Si l'on joint un point* O *quelconque aux sommets d'un polyèdre* P, *et si l'on prend sur les rayons vecteurs* OA, OB, OC, ..., *des longueurs* O*a*, O*b*, O*c*, ..., *telles qu'on ait*

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob} = \frac{OC}{Oc} = \dots,$$

le polyèdre p, qui a pour sommets les points a, b, c, ..., est semblable au polyèdre P (*fig.* 405).

Considérons la face ABCDE du polyèdre donné et le point *a*.

Fig. 405.



Si l'on menait par le point *a* un plan parallèle au plan ABCDE, ce plan couperait en parties proportionnelles les arêtes latérales de la pyramide OABCDE (556), et passerait, par conséquent, par les sommets *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Ces sommets forment donc, dans le polyèdre *p*, une face *abcde* semblable à la face ABCDE. Les faces correspondantes des deux polyèdres P et *p* sont donc semblables.

Remarquons ensuite que, les arêtes homologues des deux polyèdres étant, d'après ce qu'on vient de dire, parallèles et dirigées dans le même sens, les angles polyèdres homologues des deux polyèdres ont leurs faces égales et leurs angles dièdres égaux chacun à chacun (459); la disposition des parties égales étant d'ailleurs la même dans les deux polyèdres, ces angles polyèdres sont égaux. Les polyèdres P et *p* sont, par suite, semblables.

Le point O est un *centre de similitude directe*.

Si les longueurs O*a*, O*b*, O*c*, ..., sont portées sur les prolongements des rayons vecteurs OA, OB, OC, ..., on obtient

un polyèdre p', dont les faces sont encore semblables aux faces correspondantes du polyèdre P, mais dont les angles polyèdres sont *symétriques* (471) des angles polyèdres du polyèdre P, par suite du parallélisme en sens inverse des arêtes homologues des deux polyèdres. Le point O est, dans ce cas, un *centre de similitude inverse*.

Pour abréger, on donne le nom d'*homothétie* à la similitude de *forme* et de *position* qu'on vient d'examiner. Les deux polyèdres considérés sont dits *homothétiques*, le point O est le *centre d'homothétie directe* ou *inverse*, le rapport constant $\frac{OA}{Oa}$ est le *rapport de similitude* ou d'*homothétie*. En faisant varier ce rapport de o à $\pm\infty$, on obtient tous les polyèdres directement ou inversement semblables à un polyèdre donné (12, 136).

SCOLIES.

721. Ce qu'on vient de dire par rapport aux sommets d'un polyèdre peut évidemment s'appliquer à un système quelconque de points.

Ainsi, d'une manière générale, étant donné un système de points A, B, C, ..., situés d'une manière quelconque dans l'espace, si, sur les rayons SA, SB, SC, ..., issus d'un point S pris à volonté, on prend à partir de ce point des segments SA', SB', SC', ..., tels que

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots = k,$$

k étant un nombre quelconque, on dit que le nouveau système de points A', B', C', .., est *homothétique* au système primitif A, B, C, ... Suivant que le *rapport k d'homothétie* est positif ou négatif, les points homologues tels que A et A' sont situés d'un même côté ou de côtés différents par rapport au *centre* S *d'homothétie*, et les deux systèmes A, B, C, ..., A', B', C', ... sont dits *homothétiques directs* ou *homothétiques inverses*.

La définition de l'homothétie est donc la même pour les figures de l'espace et pour les figures planes (160).

Suivant que le système proposé est formé de points isolés ou se succédant d'une manière continue, le système homothétique du système donné est lui-même formé de points

isolés ou se succédant d'une manière continue. Les propriétés précédentes s'étendent ainsi aux surfaces courbes.

722. Lorsqu'on transporte l'un des deux systèmes homothétiques parallèlement à lui-même, l'homothétie n'est évidemment pas altérée.

Par conséquent, *les extrémités de droites concourantes et les extrémités d'autres droites concourantes respectivement parallèles et proportionnelles aux premières forment deux systèmes homothétiques.*

L'homothétie des deux systèmes est *directe* ou *inverse*, suivant que les droites parallèles sont dirigées dans le même sens ou en sens contraires.

De plus, si A et B sont deux points du premier système, A′ et B′ les deux points homothétiques du second système, les deux droites AB et A′B′ sont parallèles, et leur rapport est égal au rapport d'homothétie des deux systèmes, c'est-à-dire qu'elles sont de même sens ou de sens contraires, suivant que l'homothétie est directe ou inverse.

723. Les propriétés que nous allons énoncer résultent immédiatement de ce qui précède.

La figure homothétique d'une droite est une droite parallèle à la première.

L'angle de deux droites est donc égal à celui de leurs droites homothétiques, et une droite qui passe par le centre d'homothétie est à elle-même son homothétique.

La figure homothétique d'un plan est un plan parallèle au premier; car, si l'on considère dans le plan donné une droite qui tourne autour d'un point A, dans chacune de ses positions cette droite aura pour homothétique une droite parallèle passant par un point fixe A′, homothétique de A. Il résulte de là : 1° qu'*un plan qui passe par le centre d'homothétie est à lui-même son homothétique;* 2° que *l'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs homothétiques.*

Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homothétiques sont parallèles, comme limites de sécantes parallèles.

Deux sphères quelconques sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses (162); les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la ligne des centres

des deux sphères; ces centres sont, en outre, les sommets des deux cônes qu'on peut circonscrire aux deux sphères. Lorsque les deux sphères sont tangentes, leur point de contact est un centre d'homothétie, *directe* si le contact est *intérieur*, *inverse* si le contact est *extérieur*.

Comme un cercle peut toujours être considéré comme l'intersection de deux sphères, *la figure homothétique d'une circonférence par rapport à un point quelconque de l'espace est une circonférence.*

724. *Deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux, et les trois centres d'homothétie sont sur une même ligne droite*, qu'on nomme *axe d'homothétie des trois systèmes* (164).

Trois sphères considérées deux à deux ont trois centres d'homothétie directe et trois centres d'homothétie inverse (165). Elles ont donc quatre axes d'homothétie : un *axe d'homothétie directe*, qui contient les trois centres d'homothétie directe, et trois *axes d'homothétie inverse*, qui renferment chacun deux centres d'homothétie inverse et le centre direct qui répond au troisième centre inverse. Ces *quatre axes d'homothétie* sont ceux des trois cercles (165) que l'on obtient en coupant les trois sphères par le plan qui passe par leurs centres.

THÉORÈME.

725. *Lorsque quatre systèmes* P, P′, P″, P‴, *sont homothétiques deux à deux, leurs six centres d'homothétie sont situés dans un même plan.*

En effet, soient respectivement O_1, O_2, O_3, les centres d'homothétie de P et P′, de P et P″, de P et P‴; le plan $O_1O_2O_3$ est à lui-même son homologue dans les systèmes P et P′, puisqu'il contient leur centre O_1; il est aussi à lui-même son homologue dans les systèmes P et P″, puisqu'il contient leur centre O_2. Donc ce même plan est encore à lui-même son homologue dans les systèmes P′ et P″ (724), et, par suite, il contient leur centre d'homothétie. On prouverait de même que ce plan passe par les centres d'homothétie de P′ et P‴, et de P″ et P‴. Il a reçu le nom de *plan d'homothétie* des quatre systèmes P, P′, P″, P‴.

726. Considérons en particulier le *cas de quatre sphères.*

Comme deux sphères sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses, on aura *douze centres d'homothétie*, dont *six directs* et *six inverses*. Il est aisé de voir qu'il y a *huit plans d'homothétie*. En effet, imaginons le tétraèdre dont les sommets sont les centres des quatre sphères; sur chaque face de ce tétraèdre, il y a six centres d'homothétie, trois directs et trois inverses (724). Considérons l'un O des six centres qui sont sur l'une des faces; ce point O appartient à deux droites A et B, dont chacune passe par deux autres centres de la même face. D'ailleurs, ce même point O est commun à une autre face du tétraèdre, et, par suite, il appartient également à deux autres droites C et D situées sur cette seconde face. En combinant les deux droites A et B de la première face avec les deux droites C et D de la seconde, on obtient quatre plans AOC, AOD, BOC, BOD, dont chacun, passant par cinq centres d'homothétie, renferme nécessairement le sixième centre correspondant. Ainsi, par chaque centre O de la première face passent quatre plans d'homothétie; mais chacun de ces plans est commun à trois centres de cette même face. Donc le nombre total des plans d'homothétie est égal à huit.

727. Deux figures de l'espace sont *semblables* lorsque, par un déplacement convenable, on peut amener la seconde sur l'une des homothétiques *directes* de la première. Or, d'après le n° 724, pour avoir tous les systèmes homothétiques à un système donné, il n'est pas nécessaire de faire varier le centre; il suffit, en prenant un centre arbitraire, de faire varier k de o à ∞. Donc on obtiendra toutes les figures semblables à une figure donnée en construisant, avec un centre pris à volonté, les surfaces homothétiques qui répondent à toutes les valeurs du rapport k, depuis zéro jusqu'à l'infini.

Ainsi, *deux sphères quelconques sont semblables* (722).

La seule figure semblable à une surface conique est cette surface conique elle-même, car, si l'on prend le sommet O pour centre d'homothétie, l'homologue A′ d'un point quelconque A de la surface conique proposée est situé sur la génératrice OA (723).

Enfin, *deux surfaces cylindriques sont homothétiques, lorsque leurs génératrices sont parallèles et leurs directrices deux courbes homothétiques;* car la figure homothétique d'une

droite est une droite parallèle. Par suite, *les sections par un même plan de deux cylindres homothétiques sont deux courbes homothétiques* dont le centre est à la rencontre du plan sécant et de la parallèle aux génératrices menée par le centre d'homothétie des deux cylindres (723).

III. — Des figures symétriques.

728. Deux points A et A′ sont *symétriques par rapport à un centre* O, lorsque ce centre O est le milieu de la droite AA′ (*fig.* 406).

Deux points A et A′ sont symétriques par rapport à un axe *xy* (*fig.* 407) ou à un plan P (*fig.* 408), lorsque cet axe ou ce plan est perpendiculaire au milieu de la droite AA′.

Deux figures sont symétriques par rapport à un centre, à un

Fig. 406.

Fig. 407.

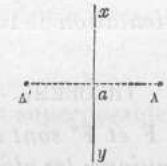
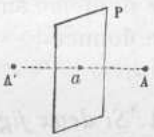


Fig. 408.



axe ou à un plan, lorsque leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à ce centre, à cet axe ou à ce plan. Les points symétriques des deux figures sont dits *homologues*.

Deux figures symétriques par rapport à un axe sont égales, car une rotation de 180° autour de l'axe, imprimée à l'une des deux figures, amène évidemment cette figure sur l'autre.

La symétrie par rapport à un axe n'offre donc rien de particulier. Aussi, dans la suite de ce paragraphe, ne sera-t-il question que de la symétrie relative à un point ou à un plan.

THÉORÈME.

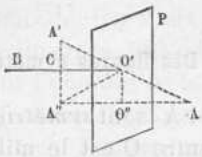
729. *Deux figures* F′ *et* F″, *symétriques d'une même figure* F *par rapport à deux centres différents* O′ *et* O″, *sont égales* (*fig.* 409) [1].

---

(1) Bravais, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

Soient A un point quelconque de la figure F, A′ son homologue dans la figure F′ et A″ son homologue dans la figure F″. O′ étant le milieu de AA′ et O″ le milieu de AA″, la droite A′A″

Fig. 409.



est parallèle à O′O″ et égale à 2O′O″. La figure F″ n'est donc que la figure F′ transportée parallèlement à la direction O′O″, d'une quantité égale à 2O′O″.

COROLLAIRE.

730. La position du centre de symétrie n'influe ni sur la *forme* ni même sur l'*orientation* de la figure symétrique d'une figure donnée.

THÉORÈME.

731. *Si deux figures* F *et* F″ *sont symétriques par rapport à un plan* P, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un centre* O′ *pris à volonté dans ce plan,* et, réciproquement, *si deux figures* F *et* F′ *sont symétriques par rapport à un centre* O′, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un plan quelconque* P *passant par ce centre* (*fig.* 409) [1].

Il suffit de faire tourner la figure F″ dans le premier cas, la figure F′ dans le second, de 180° autour de la perpendiculaire O′CB élevée en O′ au plan P.

En effet, considérons une figure F, un plan P et un point quelconque O′ de ce plan; soient F′ la figure symétrique de F par rapport au point O′, et F″ la figure symétrique de F par rapport au plan P. Le théorème direct et sa réciproque seront démontrés à la fois, si l'on fait voir que les figures F′ et F″ sont symétriques par rapport à la perpendiculaire O′B élevée en O′ au plan P (728). Or, soient A, A′, A″, trois points homo-

[1] BRAVAIS, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

logues des figures F, F', F'', et O'' le point où la droite AA'' rencontre le plan P. O' étant le milieu de AA' et O'' le milieu de AA'', la droite A'A'' est parallèle à O'O'' et, par suite, perpendiculaire sur O'B. D'ailleurs O'B, étant menée parallèlement à AA'' par le milieu de AA', passe par le milieu C de A'A''. Donc, enfin, les points A' et A'' sont symétriques par rapport à la droite O'B.

COROLLAIRES.

732. Deux figures symétriques d'une même figure F, par rapport à deux plans différents P et Q, ne sont autre chose, quant à la *forme*, que la figure symétrique de F par rapport à un centre quelconque (729); elles sont donc superposables. Mais leur *orientation* dans l'espace n'est pas la même, à moins que les plans P et Q ne soient parallèles.

733. En résumé, si l'on fait abstraction de l'orientation pour n'avoir égard qu'à la forme, on voit qu'*une figure* F *n'a qu'une seule figure symétrique*. Toutes les figures obtenues en prenant la figure symétrique de F par rapport à tel centre ou à tel plan qu'on veut sont superposables.

SCOLIE.

734. Telle propriété de deux figures *symétriques* (728) est plus ou moins aisée à démontrer, suivant que l'on considère la symétrie relative à un plan ou à un centre. Le théorème précédent (731) permet de choisir le mode de symétrie qui facilite le plus les raisonnements. C'est généralement la symétrie relative à un centre qui rend les démonstrations plus simples, parce qu'en déplaçant le centre de symétrie, on n'altère pas même l'orientation de la figure symétrique (730).

D'ailleurs, deux figures symétriques par rapport à un centre constituent, relativement à ce centre, deux figures homothétiques inverses dont le rapport d'homothétie ou de similitude est égal à — 1. La proportionnalité se change donc ici en égalité, sauf ce qui peut résulter de l'inversion, et cette remarque permet d'énoncer immédiatement, sans démonstration, les propositions suivantes :

735. (*a*) *La figure symétrique d'une ligne droite est une ligne droite.*

(*b*) *La distance de deux points est égale à celle de leurs symétriques.*

(*c*) *L'angle de deux droites est égal à l'angle de leurs symétriques.*

(*d*) *La figure symétrique d'un plan est un plan.*

(*e*) *La figure symétrique d'un polygone plan est un polygone égal au premier.*

(*f*) *L'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs symétriques.*

(*g*) *Deux polyèdres symétriques ont :* 1° *leurs faces égales chacune à chacune* [d'après *e*]; 2° *leurs angles dièdres homologues égaux* [d'après *f*]; 3° *leurs angles polyèdres homologues symétriques* [d'après le parallélisme en sens contraires des arêtes homologues des deux polyèdres (**471, 720**)].

736. Il importe de se figurer nettement la situation de deux droites symétriques par rapport à un centre ou par rapport à un plan.

Soit AB (*fig.* 410) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un centre donné O'. Prenons d'abord la

Fig. 410.

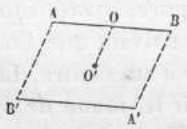
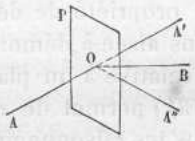


Fig. 411.



droite symétrique de AB par rapport à son milieu O : le point A aura son symétrique en B et le point B son symétrique en A, de sorte que la droite symétrique de AB, par rapport à son milieu O pris pour centre, sera BA. Pour passer ensuite du centre O au centre O', il suffira (729) de faire décrire, aux points A et B, des droites BA' et AB' parallèles à OO' et doubles de OO'. On trouve ainsi, pour symétrique de AB, la droite A'B' *parallèle à* AB, *de sens contraire, et située à la même distance du centre* O' *de symétrie.*

Soit OA (*fig.* 411) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un plan P qu'elle rencontre en O. En prenant d'abord la droite symétrique de OA par rapport au point O,

on trouve son prolongement OA′, et il suffit (731) de faire tourner OA′ de 180° autour de la perpendiculaire OB au plan P pour avoir la droite OA″ demandée. On voit que *les deux droites* OA *et* OA″, *symétriques par rapport au plan* P, *sont également inclinées de part et d'autre de ce plan, qu'elles rencontrent d'ailleurs au même point* O.

737. Deux plans symétriques par rapport à un centre sont évidemment parallèles et équidistants de ce centre.

Deux plans symétriques par rapport à un plan sont également inclinés de part et d'autre de ce plan, qu'ils coupent d'ailleurs suivant la même droite.

THÉORÈME.

738. *Deux polyèdres symétriques* P *et* P′ *sont équivalents.*

Si l'on décompose le polyèdre P en tétraèdres, à chacun de ces tétraèdres répond un tétraèdre symétrique, et l'ensemble de ces tétraèdres symétriques forme le polyèdre P′. Deux polyèdres symétriques P et P′ étant d'après cela composés d'un même nombre de tétraèdres symétriques deux à deux, il suffit de démontrer que deux tétraèdres symétriques sont équivalents.

Or, soit (*fig.* 412) SABC un tétraèdre quelconque. Formons

Fig. 412.

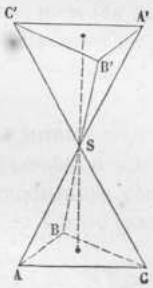
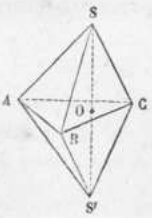


Fig. 413.



son symétrique SA′B′C′ par rapport au point S. Les triangles ABC, A′B′C′, sont égaux (735), et leurs plans sont équidistants du point S (737). Par suite, les deux tétraèdres SABC, SA′B′C′, ayant des bases et des hauteurs égales, sont équivalents.

La symétrie relative à un plan fournirait dans ce cas une

démonstration tout aussi simple; car, comme la propriété dont il s'agit concerne la *grandeur* et non la *situation*, on peut prendre à volonté le plan de symétrie (732). Or, en construisant (*fig.* 413) la figure S'ABC symétrique de SABC par rapport au plan ABC, on voit que les deux tétraèdres SABC, S'ABC, ont même base ABC et des hauteurs égales SO et S'O; d'où résulte leur équivalence.

SCOLIE.

739. Les deux prismes dans lesquels un parallélipipède est décomposé par un plan diagonal sont évidemment symétriques par rapport au centre O du parallélipipède (*fig.* 288). C'est pourquoi ils ont même volume (521), bien qu'ils ne soient pas en général superposables. On ne peut les faire coïncider que lorsqu'ils sont droits.

CHAPITRE VI.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES POLYÈDRES.

I. — Des polyèdres convexes quelconques.

THÉORÈME.

740. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des arêtes augmenté de 2 est égal au nombre des faces augmenté de celui des sommets.*

Soient A le nombre des arêtes, F celui des faces et S celui des sommets du polyèdre proposé; il faut démontrer l'égalité

$$A + 2 = F + S. \tag{1}$$

Considérons d'abord une surface polyédrale convexe *ouverte*, terminée à une ligne brisée plane ou gauche. Si l'on conserve les notations précédentes, les éléments analogues de cette surface satisferont à la relation

$$A + 1 = F + S.$$

En effet, cette formule est vraie dans le cas d'une seule face; car, pour un polygone, le nombre des arêtes est égal à celui des sommets. D'après un mode de démonstration connu, il suffit donc de prouver que, la formule étant vérifiée dans le cas de F faces, elle l'est encore dans le cas de $F + 1$ faces.

Pour cela, modifions la ligne brisée qui termine la surface polyédrale en ajoutant à cette surface un polygone ayant m côtés et m sommets. Cette nouvelle face laissant toujours la surface ouverte, son contour ne pourra coïncider entièrement avec celui de la ligne terminale primitive; et, si elle a avec cette ligne p arêtes communes, elle aura avec elle $p + 1$ sommets communs. En désignant par F', A', S', les nombres de faces, d'arêtes et de sommets de la nouvelle surface polyédrale, on aura donc

$$F' = F + 1, \quad A' = A + m - p, \quad S' = S + m - (p + 1).$$

Ces valeurs satisfaisant encore à la relation $A + 1 = F + S$, la généralité de cette relation est établie.

Cela posé, revenons au cas d'un polyèdre convexe et à l'égalité (1). Pour passer de ce polyèdre à une surface polyédrale ouverte, il suffit d'en enlever une face. Les nombres d'arêtes et de sommets ne seront pas modifiés et resteront A et S; mais le nombre des faces, diminué d'une unité, deviendra $F - 1$. En appliquant la relation trouvée à ces valeurs, on aura donc

$$A + 1 = (F - 1) + S,$$

c'est-à-dire

$$A + 2 = F + S.$$

Le remarquable théorème exprimé par cette égalité a été découvert par Euler. La démonstration qui précède appartient à Cauchy.

COROLLAIRES.

741. Soient, dans le polyèdre proposé, t le nombre des faces triangulaires, q le nombre des faces quadrangulaires, p celui des faces pentagonales, h, h', o, ..., ceux des faces hexagonales, heptagonales, octogonales, ... Chaque arête étant commune à deux faces, on aura évidemment

$$F = t + q + p + h + h' + o + \dots, \tag{2}$$

$$2A = 3t + 4q + 5p + 6h + 7h' + 8o + \dots. \tag{3}$$

Soient T, Q, P, H, H', O, ..., les nombres d'angles trièdres, tétraèdres, pentaèdres, hexaèdres, ..., du polyèdre proposé; chaque arête unissant deux sommets, on aura de même

$$S = T + Q + H + H' + O + \dots, \tag{4}$$

$$2A = 3T + 4Q + 5P + 6H + 7H' + 8O + \dots. \tag{5}$$

D'après l'égalité (3), *le nombre des faces dont le nombre des côtés est impair* (c'est-à-dire le nombre $t + p + h' + \dots$) *est toujours pair;* d'après l'égalité (5), *le nombre des angles polyèdres ou des sommets dont le nombre des arêtes est impair* (c'est-à-dire le nombre $T + P + H' + \dots$) *est toujours pair.*

742. On peut exprimer F en fonction de T, Q, P, H, H', O, ...; il suffit d'éliminer S et A entre les relations (1), (4) et (5). On trouve

$$2F = 4 + T + 2Q + 3P + 4H + 5H' + 6O + \dots. \tag{6}$$

De même, on peut exprimer S en fonction de t, q, p, h, h', o, ...; il suffit d'éliminer F et A entre les relations (1), (2) et (3). On trouve

$$2S = 4 + t + 2q + 3p + 4h + 5h' + 6o + \dots. \tag{7}$$

SCOLIE.

743. *Si l'on conçoit la surface d'un polyèdre convexe décomposé en plusieurs portions, chaque portion étant une face seule ou le système de plusieurs faces voisines, le théorème d'Euler a encore lieu entre le nombre des portions dont il s'agit, le nombre des arêtes qui servent de limites à ces mêmes portions, et le nombre des sommets compris entre ces arêtes.*

En effet, que les droites qui terminent chaque portion soient ou non dans un même plan, les nombres considérés ne varient pas. Or, dans la première hypothèse, sans rien changer à ces mêmes nombres, on pourrait former un nouveau polyèdre en substituant à chaque portion une face plane terminée au même contour, et le théorème d'Euler serait applicable à ce polyèdre.

Toutes les formules que nous venons d'établir subsistent dans ce cas, seulement, t est alors le nombre des portions de la surface terminées par un contour triangulaire, $q, p, \ldots$, les nombres des portions dont le contour est quadrangulaire, pentagonal, etc.

THÉORÈME.

744. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des faces triangulaires augmenté de celui des angles trièdres, est au moins égal à huit.*

En effet, si dans la relation (1), qu'on peut écrire

$$4F + 4S = 4A + 8,$$

on remplace F par la valeur (2), S par la valeur (4), et 4A par la somme des valeurs (3) et (5), on trouve

$$t + T = 8 + (p + P) + 2(h + H) + 3(h' + H') + 4(o + O) + \ldots.$$

D'après cela, *il n'existe aucun polyèdre convexe qui ne renferme ni face triangulaire, ni angle trièdre.*

THÉORÈME.

745. 1° *Il n'existe aucun polyèdre convexe dont toutes les faces aient plus de cinq côtés;* 2° *il n'existe aucun polyèdre convexe dont tous les angles polyèdres aient plus de cinq arêtes.*

En effet :

1° Si dans l'inégalité $2A > 3S$, qui résulte de la comparaison des relations (4) et (5), on remplace A et S par les valeurs (3) et (7), on trouve la formule

$$3t + 2q + p > 12 + (h + 2o + \ldots),$$

qui prouve que t, q et p ne peuvent être nuls à la fois.

2° Si dans l'inégalité $2A > 3F$, qui résulte de la comparaison des

relations (2) et (3), on remplace A et F par les valeurs (5) et (6), on trouve la formule

$$3T + 2Q + P > 12 + (H' + 2O + \dots),$$

qui prouve que T, Q et P ne peuvent être nuls à la fois.

SCOLIE.

746. La symétrie de la formule d'Euler par rapport aux nombres F et S et la similitude des équations (2) et (4), (3) et (5), imposent aux relations qu'on peut en déduire une corrélation remarquable.

THÉORÈME.

747. *Il ne peut exister que cinq espèces de polyèdres convexes dont toutes les faces aient le même nombre n de côtés et dont tous les angles polyèdres aient le même nombre m d'arêtes.*

En effet, chaque arête appartenant à deux faces et joignant deux sommets, on a alors

$$2A = nF = mS.$$

L'élimination de A et de S entre ces équations et la formule d'Euler donne

$$F = \frac{4m}{2(m+n) - mn},$$

Pour $n = 3$, cette relation devient

$$F = \frac{4m}{6 - m},$$

et l'on ne peut donner alors à m que les valeurs 3, 4 et 5, auxquelles répondent respectivement les valeurs $F = 4$, $F = 8$, $F = 20$.

Pour $n = 4$ ou $n = 5$, on a

$$F = \frac{2m}{4 - m} \quad \text{ou} \quad F = \frac{4m}{10 - 3m}.$$

On ne peut donner dans les deux cas à m que la valeur 3, et il en résulte $F = 6$ ou $F = 12$.

Pour $n = 6$, on a

$$F = \frac{m}{3 - m},$$

et l'on ne peut donner à m aucune valeur. Il en est de même *a fortiori* pour $n > 6$; ce résultat était d'avance indiqué par le théorème du n° 745.

Il n'y a donc que cinq espèces de polyèdres convexes dont toutes les faces aient le même nombre de côtés et tous les angles polyèdres le même

nombre d'arêtes : ce sont le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre à faces triangles; l'hexaèdre à faces quadrilatères; le dodécaèdre à faces pentagones.

THÉORÈME.

748. *L'angle droit étant pris pour unité, la somme des angles de toutes les faces d'un polyèdre convexe est égale à quatre fois le nombre des sommets diminué de* 2.

L'angle droit étant l'unité d'angle, on sait que, pour une face quelconque de n côtés, la somme des angles est $2n - 4$. En désignant par n, n', n'', ..., les nombres de côtés des différentes faces, on aura donc pour toutes les faces

$$(2n - 4) + (2n' - 4) + (2n'' - 4) + \dots.$$

Cette suite contiendra d'ailleurs F termes. La somme cherchée a donc pour expression

$$2(n + n' + n'' + \dots) - 4F.$$

Chaque côté appartenant à deux faces, la parenthèse est égale à 2A, et l'on obtient la formule

$$4(A - F) \quad \text{ou} \quad 4(S - 2),$$

d'après le théorème d'Euler.

SCOLIE.

749. On démontre que *deux polyèdres convexes, compris sous un même nombre de faces égales, sont égaux ou symétriques, suivant que les faces égales sont ou non semblablement placées.*

On démontre de même que *deux polyèdres convexes, compris sous un même nombre de faces semblables, sont semblables ou que le second est semblable à un troisième polyèdre symétrique du premier,* suivant que les faces semblables sont ou non semblablement placées.

Nous renverrons, pour le développement de ces propositions, au *Traité de Géométrie* par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, et nous terminerons ce paragraphe par la résolution du problème suivant, d'après LEGENDRE.

PROBLÈME.

750. *Chercher le nombre de conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre convexe.*

1° Le polyèdre est d'une nature déterminée, c'est-à-dire que l'on connaît pour ce polyèdre les nombres A, F, S, t, q, p, h, h', ...

Prenons pour base une des faces du polyèdre. Si elle a n côtés, il faut $2n - 3$ conditions pour la déterminer. Il y a hors de cette base $S - n$ sommets. Pour déterminer un point dans l'espace, il faut trois conditions.

On aurait donc en tout $2n - 3 + 3(S - n)$ ou $3S - n - 3$ conditions. Mais les sommets qui répondent à une même face sont dans un même plan, et trois points suffisent pour déterminer un plan. Par conséquent, pour tous les sommets d'une même face, en sus des trois premiers, il ne faut réellement que deux conditions. On doit donc diminuer $3(S - n)$ de la somme $(n' - 3) + (n'' - 3) + (n''' - 3) + \ldots$, en désignant par n', n'', n''', ..., les nombres de côtés des $F - 1$ faces qui restent en dehors de la base choisie. Le nombre de conditions demandé est donc finalement

$$3(F + S - 2) - (n + n' + n'' + n''' + \ldots);$$

mais (740, 741)

$$n + n' + n'' + n''' + \ldots = 2A \quad \text{et} \quad S + F - 2 = A.$$

Le nombre cherché se réduit donc à A. Ainsi, *le nombre des données nécessaires pour déterminer un polyèdre*, dans les conditions indiquées, *est égal au nombre de ses arêtes*.

« Remarquez cependant que les données dont il s'agit ne doivent pas » être prises au hasard parmi les lignes et les angles qui constituent les » éléments du polyèdre; car, quoiqu'on eût autant d'équations que d'in- » connues, il pourrait se faire que certaines relations entre les quantités » connues rendissent le problème indéterminé. Ainsi, il semblerait, d'après » le théorème qu'on vient de trouver, que la connaissance des arêtes » seules suffit en général pour déterminer un polyèdre; mais il y a des » cas où cette connaissance n'est pas suffisante. Par exemple, étant donné » un prisme non triangulaire quelconque, on pourra former une infinité » d'autres prismes qui auront des arêtes égales et placées de la même ma- » nière. Car, dès que la base a plus de trois côtés, on peut, en conser- » vant les côtés, changer les angles et donner ainsi à cette base une infi- » nité de formes différentes; on peut aussi changer la position de l'arête » longitudinale du prisme par rapport au plan de la base; enfin, on peut » combiner ces deux changements l'un avec l'autre, et il en résultera » toujours un prisme dont les arêtes ou côtés n'auront pas changé. D'où » l'on voit que les arêtes seules ne suffisent pas dans ce cas pour déter- » miner le polyèdre. Les données qu'il convient de prendre sont celles » qui ne laissent aucune indétermination (1). »

2° La nature du polyèdre n'est pas déterminée, et l'on connaît seulement le nombre de ses sommets.

Prenons trois de ces sommets à volonté, en construisant un triangle où il entre trois des éléments donnés. Si l'on considère ce triangle comme base, il y a $S - 3$ sommets hors de cette base, et la détermination de chacun d'eux exige trois conditions. Le nombre cherché est donc ici $3 + 3(S - 3)$ ou $3S - 6$.

---

(1) LEGENDRE, *Éléments de Géométrie*, 14e édition, Note VIII.

SCOLIE.

751. Si un côté et $A - 1$ angles déterminent un polyèdre de nature donnée, un autre côté pris à volonté et les mêmes angles déterminent un polyèdre semblable au premier. Donc, *pour que deux polyèdres de même nature soient semblables, il faut* $A - 1$ *conditions*.

Si les deux polyèdres ne sont pas de nature déterminée, et s'ils ont seulement le même nombre S d'angles polyèdres, il faut $3S - 7$ conditions pour qu'ils soient semblables.

II. — Des polyèdres réguliers convexes.

752. Un *polyèdre régulier* est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les angles polyèdres sont égaux entre eux.

THÉORÈME.

753. *Il ne peut exister que cinq polyèdres réguliers convexes.*

Cette proposition n'est qu'un cas particulier de celle du n° 747. On peut d'ailleurs la démontrer directement en quelques mots.

La somme des faces d'un angle polyèdre convexe devant être inférieure à quatre angles droits (474), si les faces sont des triangles équilatéraux, on ne peut assembler autour d'un même point, pour former un angle polyèdre, que *trois* ou *quatre* ou *cinq* de ces triangles. On construit ainsi : le *tétraèdre* régulier, compris sous quatre triangles équilatéraux ; l'*octaèdre* régulier, compris sous huit triangles équilatéraux ; l'*icosaèdre* régulier, compris sous vingt triangles équilatéraux. Au delà, *six* triangles équilatéraux assemblés autour d'un même point donnent six angles plans dont la somme est égale à quatre angles droits ; il n'y a plus d'angle polyèdre : les six triangles se trouvent développés dans un même plan.

On ne peut employer les carrés et les pentagones réguliers qu'en les assemblant par *trois*, puisque l'angle d'un carré est droit et que celui d'un pentagone régulier est égal à $\frac{6}{5}$ d'angle droit. On a ainsi l'*hexaèdre* régulier ou cube, compris sous six carrés égaux, et le *dodécaèdre* régulier, compris sous douze pentagones réguliers.

Aucun autre polyèdre régulier convexe n'est possible, puisque, l'angle d'un hexagone régulier étant égal à $\frac{4}{3}$ d'angle droit, trois angles d'hexagone régulier font en somme quatre angles droits.

Nous prouverons l'existence des cinq polyèdres réguliers énoncés, en montrant comment on peut effectuer leur construction.

PROBLÈME.

754. *Construire un polyèdre régulier, connaissant son arête.*

La construction du tétraèdre régulier (*fig.* 414) et celle du cube (*fig.* 415) ne peuvent offrir aucune difficulté, d'après ce qui a été dit aux

n^os 532 et 498. Nous ne nous occupons donc que de l'octaèdre, du dodécaèdre et de l'icosaèdre.

Fig. 414.

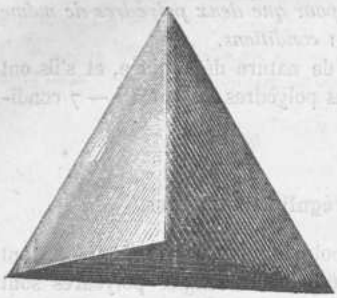
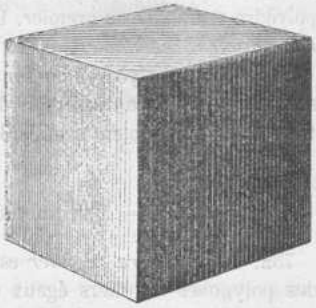


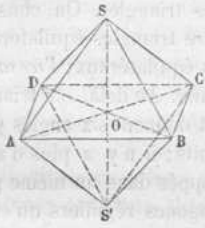
Fig. 415.

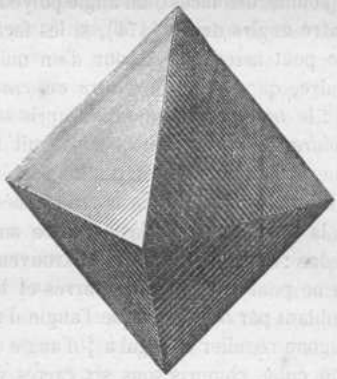


Octaèdre régulier.

Prenons (*fig.* 416) un carré ABCD de côté a. Élevons en son centre O une perpendiculaire indéfinie, et portons de part et d'autre du point O, sur

Fig. 416.





cette perpendiculaire, une longueur égale au rayon du carré ABCD, c'est-à-dire à $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. En joignant les points S et S' ainsi obtenus aux sommets A, B, C, D, on forme un octaèdre régulier SABCDS'. En effet, les huit arêtes SA, SB, ..., S'D, sont égales entre elles et à

$$\sqrt{\overline{OS}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = a.$$

Les huit faces du polyèdre construit sont donc des triangles équilatéraux égaux. De plus, les six angles polyèdres sont égaux entre eux; car les angles S et B, par exemple, sont les angles au sommet de deux pyramides

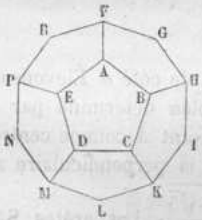
quadrangulaires régulières SABCD, BASCS′, évidemment superposables comme ayant même base et même hauteur.

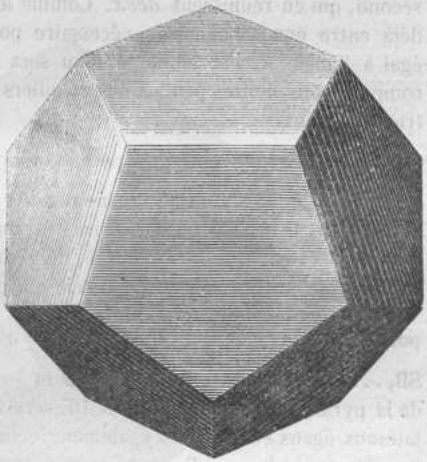
On peut résumer la construction de l'octaèdre régulier en remarquant que trois droites égales et perpendiculaires entre elles en leur milieu, telles que AC, BD, SS′, ont pour extrémités les six sommets d'un pareil polyèdre.

Dodécaèdre régulier.

Soit (*fig.* 417) un pentagone régulier ABCDE de côté a. Prenons d'autres pentagones réguliers de côté a. Avec deux de ces pentagones joints au pentagone ABCDE, formons en A un angle trièdre qui, ayant ses faces égales, aura aussi ses angles dièdres égaux. Les trois côtés BA, BC, BH,

Fig. 417.





déterminent alors un angle trièdre B, égal à l'angle trièdre A, comme ayant un angle dièdre égal compris entre deux faces égales entre elles et chacune à chacune. On peut donc former à tous les sommets du pentagone ABCDE des angles trièdres égaux à A, en employant des pentagones réguliers égaux à ce pentagone et disposés comme l'indique la figure. Le pentagone ABCDE est commun à tous les angles trièdres : le deuxième, le troisième et le quatrième trièdre nécessitent l'addition d'un nouveau pentagone; le dernier angle trièdre en E se trouve tout construit.

On obtient ainsi un assemblage de six pentagones réguliers égaux et également inclinés. Cet assemblage constitue une surface polyédrale ouverte, moitié du dodécaèdre, et les sommets du décagone *gauche* (1)

(1) Ce décagone est *gauche;* car si les quatre points R, F, G, H, étaient dans un même plan, ce plan contenant aussi le point A, il n'y aurait plus d'angle trièdre en A.

FGHIKLMNPR qui la termine, correspondent successivement à *un* et à *deux* pentagones. D'ailleurs, les angles de ce décagone sont égaux entre eux; en effet, les deux angles trièdres en A et en F sont égaux, comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales entre elles et chacune à chacune. L'angle RFG est donc égal à l'angle EAB et, par suite, à l'angle FGH. On peut alors faire tourner le polygone FGHIKLMNPR sur lui-même, en faisant passer le sommet F en G, le sommet G en H, etc., sans qu'il cesse de coïncider avec sa première position.

Si l'on construit de la même manière la seconde moitié du dodécaèdre et si on la retourne pour l'opposer à la première moitié, on pourra, d'après cela, rapprocher les deux calottes polyédrales et appliquer l'un sur l'autre les décagones qui les terminent, en établissant la coïncidence des sommets du premier, où il n'y a qu'*un* pentagone, et des sommets du second, qui en réunissent *deux*. Comme les plans de ces pentagones ont déjà entre eux l'inclinaison nécessaire pour composer un angle trièdre égal à l'angle A, l'ensemble obtenu sera bien un dodécaèdre régulier compris sous douze pentagones réguliers égaux formant vingt angles trièdres égaux.

Icosaèdre régulier.

Prenons (*fig.* 418) un pentagone régulier ABCDE de côté a. Élevons en son centre O une perpendiculaire, et, dans le plan déterminé par le rayon OA et cette perpendiculaire, décrivons du point A comme centre, avec a pour rayon, un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire au point S; car a est plus grand que $OA = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. Les arêtes SA, SB, ..., SE, seront égales entre elles et à a. Par suite, la surface latérale de la pyramide pentagonale SABCDE sera formée de cinq triangles équilatéraux égaux entre eux et également inclinés, puisque les angles trièdres isocèles en A, B, ..., E, sont égaux entre eux, comme ayant leurs trois faces égales chacune à chacune.

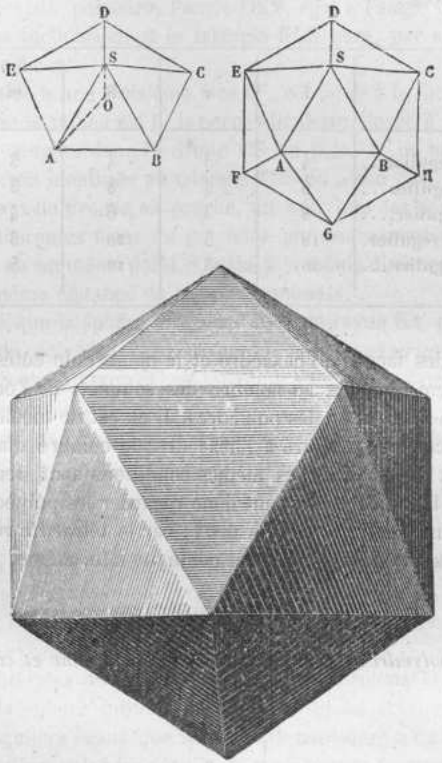
Cela posé, en chacun des sommets A et B du triangle SAB, plaçons (comme l'indique la seconde figure) le sommet d'une pyramide identique à la première SABCDE, de manière que les deux nouvelles pyramides ABSEFG, BASCHG, aient respectivement avec la première les faces communes ASB et ASE, BAS et BSC, et entre elles les faces communes ASB et ABG. Nous aurons ainsi un assemblage de dix triangles équilatéraux égaux et également inclinés.

Cet assemblage forme une surface polyédrale ouverte, moitié de l'icosaèdre, et les sommets de l'hexagone *gauche* (1) CDEFGH qui la termine,

(1) Le contour CDEFGH est gauche; car, si les quatre points C, D, E, F, étaient dans un même plan, les deux pentagones ABCDE, BSEFG, qui ont déjà dans le plan CDE les sommets B et E communs, seraient tous deux dans ce même plan, qui contiendrait le point A en même temps que les points B, E, F; ce qui est impossible, d'après ce qui précède.

réunissent successivement *deux* et *trois* triangles. D'ailleurs, les angles de cet hexagone sont égaux : l'angle DEF, par exemple, est égal à l'angle EFG, car tous deux sont évidemment égaux à l'angle EAG. On peut donc faire tourner le polygone CDEFGH sur lui-même, en faisant passer le

Fig. 418.



sommet C en H, le sommet H en G, etc., sans qu'il cesse de coïncider avec sa première position.

Si l'on construit de la même manière la seconde moitié de l'icosaèdre et si on la retourne pour l'opposer à la première moitié, on pourra donc rapprocher les deux calottes polyédrales et appliquer l'un sur l'autre les hexagones qui les limitent, en faisant correspondre les sommets de l'un, qui réunissent *trois* triangles, aux sommets de l'autre, qui en réunissent *deux*. Comme les plans de ces triangles ont déjà entre eux l'inclinaison nécessaire pour constituer alors en chaque sommet un angle polyèdre égal à l'angle S, l'ensemble obtenu sera bien un icosaèdre régulier compris sous vingt triangles équilatéraux égaux, formant douze angles pentaèdres égaux.

SCOLIE.

755. En ayant recours aux formules $S = \frac{nF}{m}$ et $A = \frac{nF}{2}$ du n° 747, on forme facilement le Tableau suivant, qui renferme les nombres des éléments des cinq polyèdres réguliers convexes, dont nous connaissons les nombres de faces :

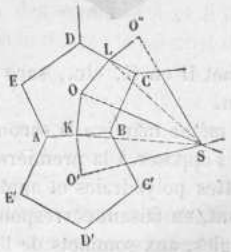
	F	n	S	m	A
Tétraèdre régulier...	4	3	4	3	6
Hexaèdre régulier...	6	4	8	3	12
Octaèdre régulier....	8	3	6	4	12
Dodécaèdre régulier.	12	5	20	3	30
Icosaèdre régulier...	20	3	12	5	30

Le nombre des faces de l'hexaèdre et le nombre de côtés de ses faces sont respectivement égaux au nombre des sommets de l'octaèdre et au nombre d'arêtes de ses angles polyèdres. Il en est de même réciproquement pour l'octaèdre comparé à l'hexaèdre; le nombre d'arêtes reste le même de part et d'autre. Les mêmes conditions sont remplies par le dodécaèdre et l'icosaèdre. On peut donc regarder les polyèdres réguliers convexes comme *conjugués* deux à deux; car le tétraèdre régulier, ayant autant de faces que de sommets, est conjugué à lui-même.

THÉORÈME.

756. *Tout polyèdre régulier convexe est inscriptible et circonscriptible à la sphère.*

Fig. 419.



Soient (*fig.* 419), dans le polyèdre régulier considéré, deux faces adjacentes ABCDE, ABC'D'E', dont O et O' sont les centres.

Les perpendiculaires OK et O'K au côté commun AB se couperont en un même point K; les perpendiculaires OS et O'S aux deux faces ABCDE,

ABC'D'E', lieux respectifs des points à égale distance de leurs sommets, se couperont en un point S, car elles sont situées dans le plan OKO', perpendiculaire à AB au point K. Les deux triangles rectangles KOS, KO'S, seront d'ailleurs égaux entre eux, puisqu'ils ont l'hypoténuse KS commune et le côté KO égal au côté KO' comme apothèmes de deux polygones réguliers égaux. L'angle OKO' mesurant l'inclinaison constante de deux faces adjacentes du polyèdre, l'angle OKS, égal à l'angle O'KS, sera la moitié de cette inclinaison, et le triangle KOS sera, par suite, constant pour toutes les faces.

Si l'on considère une troisième face O'', contiguë à la face ABCDE par le côté CD, dont le milieu est L, la perpendiculaire élevée à cette face par son centre O'' coupera donc la droite OS au point S, de manière que le triangle LO''S soit identique au triangle KOS ou à son égal OLS.

En continuant de proche en proche, on voit que les perpendiculaires élevées aux différentes faces du polyèdre par leurs centres se coupent mutuellement en un même point S, situé à la même distance de toutes les faces et à la même distance de tous les sommets.

Il en résulte que la sphère de centre S et de rayon SA passe par tous les sommets du polyèdre régulier ou lui est *circonscrite;* la sphère de même centre S et de rayon SO est tangente à toutes les faces du polyèdre en leurs centres ou lui est *inscrite.*

Le point S est le *centre* du polyèdre régulier; SA est son *rayon*, SO son *apothème.*

COROLLAIRES.

757. Si l'on décompose un polyèdre régulier en pyramides en prenant pour centre de décomposition le centre même du polyèdre, les pyramides obtenues sont régulières : *tout polyèdre régulier peut donc être partagé en autant de pyramides régulières qu'il a de faces.*

Les faces latérales de ces pyramides, étant prolongées, décomposent évidemment la sphère inscrite ou circonscrite en autant de polygones sphériques réguliers égaux que le polyèdre considéré a de faces.

Le volume d'un polyèdre régulier a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon de la sphère inscrite (566).

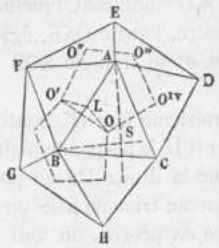
Deux polyèdres réguliers de même ordre étant nécessairement semblables, *le rapport des côtés*, *des aires* ou *des volumes de ces polyèdres est* aussi *celui des rayons*, *des carrés* ou *des cubes des rayons des sphères inscrites* ou *circonscrites.*

758. *Les centres des faces d'un polyèdre régulier sont les sommets d'un autre polyèdre régulier conjugué du premier* (*fig.* 420).

Soient A l'un des sommets du polyèdre donné et S le centre commun des sphères inscrite et circonscrite à ce polyèdre. Désignons par O, O', O'', ..., les centres des faces réunies autour du point A. Ces points, étant également distants des points S et A, sont situés dans un même

plan perpendiculaire à SA en un point qui est le centre du cercle circonscrit au polygone OO'O'' .... De plus, L étant le milieu du côté AB, le triangle OLO' est constant, et le polygone inscrit OO'O'' ... ayant ses

Fig. 420.



côtés égaux, est régulier. Le polyèdre formé en joignant les centres des faces du polyèdre proposé a donc déjà pour faces des polygones réguliers égaux, et le nombre de ces polygones est égal à celui des sommets du polyèdre donné. Il reste seulement à prouver que ces polygones sont également inclinés. Or, si l'on considère les deux faces du nouveau polyèdre qui s'appuient sur le côté OO', l'angle dièdre qu'elles comprennent est le supplément de l'angle constant ASB des deux perpendiculaires SA et SB à ces deux faces.

La réciproque de ce théorème est évidente.

On voit qu'en appliquant la construction indiquée sous l'une ou sous l'autre forme, le tétraèdre régulier conduit à un nouveau tétraèdre; l'hexaèdre régulier à un octaèdre régulier, et, réciproquement, le dodécaèdre régulier à un icosaèdre régulier, et réciproquement : ce qui justifie la dénomination de *conjugués* donnée à ces polyèdres (755).

PROBLÈME.

759. *Un polyèdre régulier convexe étant donné, trouver* : 1° *l'inclinaison de deux faces adjacentes*; 2° *les rayons des sphères inscrite et circonscrite* (1).

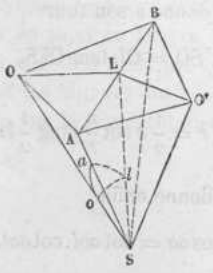
1° Soient (*fig.* 421) S le centre de la sphère inscrite ou circonscrite, AB le côté commun aux deux faces adjacentes dont les centres sont O et O', L son milieu : l'angle OLO' mesure l'inclinaison cherchée I.

AB étant perpendiculaire au plan OLO', les plans OLO' et ASB sont

(1) La résolution de cette question exige la connaissance de formules de *Trigonométrie sphérique*, qu'on trouvera démontrées plus loin dans ce même volume. Mais nous avons cru devoir, à cause des résultats numériques que ce problème fournit et qui complètent la théorie des polyèdres réguliers, le maintenir à cette place.

perpendiculaires. Par suite, si du point S comme centre nous décrivons une sphère, sa rencontre avec l'angle trièdre SAOL déterminera un triangle sphérique *aol*, rectangle en *l*.

Fig. 421.



Soient, dans le polyèdre considéré, n le nombre de côtés de chaque face, m le nombre d'arêtes de chaque angle polyèdre. On aura évidemment

$$\text{angle}\,aol = \text{angle}\,\text{AOL} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

et

$$\text{angle}\,oal = \text{angle}\,\text{OAL} = \frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}.$$

Le triangle sphérique rectangle *aol* donne d'ailleurs

$$\cos oal = \cos ol . \sin aol.$$

Mais

$$\cos ol = \cos \text{OSL} = \sin \text{OLS} = \sin \frac{1}{2} \text{I}.$$

On a donc la formule générale

$$\sin \frac{1}{2} \text{I} = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

En l'appliquant aux différents polyèdres réguliers convexes, on trouve pour l'inclinaison I les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier.....	70°31′43″,6
Hexaèdre régulier.....	90°
Octaèdre régulier.....	109°28′16″,4
Dodécaèdre régulier.....	116°35′54″,2
Icosaèdre régulier.....	138°11′22″,75

Les valeurs indiquées sont exactes pour l'hexaèdre et l'icosaèdre, approchées pour les trois autres polyèdres. Les inclinaisons des faces du tétraèdre et de l'octaèdre régulier sont supplémentaires l'une de l'autre.

2° Soient a le côté du polygone donné, r son apothème, R son rayon. Le triangle OLA donne

$$\mathrm{OL} = \mathrm{AL}\cot\mathrm{AOL} = \frac{1}{2}a\cot\frac{\pi}{n}.$$

Le triangle rectangle SOL donne à son tour

$$\mathrm{SO} = \mathrm{OL}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{OLS},$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{1}{2}a\cot\frac{\pi}{n}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\mathrm{I}. \qquad (1)$$

Le triangle sphérique aol donne enfin

$$\cos oa = \cot aol.\cot oal.$$

Or

$$\cos oa = \cos\mathrm{OSA} = \frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{SA}}.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SO}} = \mathrm{tang}\,aol.\,\mathrm{tang}\,oal$$

ou

$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \mathrm{tang}\frac{\pi}{n}\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{m}.$$

On en déduit

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2}a\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{m}\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{I}. \qquad (2)$$

En appliquant les formules (1) et (2) aux différents polyèdres réguliers convexes, on obtient les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier..... $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$, $\mathrm{R} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Hexaèdre régulier..... $r = \dfrac{a}{2}$, $\mathrm{R} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Octaèdre régulier..... $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$, $\mathrm{R} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dodécaèdre régulier..... $r = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{25-11\sqrt{5}}{10}}$, $\mathrm{R} = \dfrac{a\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)}{4}$.

Isocaèdre régulier..... $r = \dfrac{a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$, $\mathrm{R} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

SCOLIE.

760. Pour deux polyèdres *conjugués*, les nombres n et m ne faisant que s'échanger (755), le rapport $\dfrac{\mathrm{R}}{r}$ demeure constant. Donc, si R est le même

pour ces deux polyèdres, r est aussi le même. En d'autres termes, si les deux polyèdres conjugués sont inscrits à une même sphère, ils sont aussi circonscrits à une même sphère, et réciproquement.

761. Il nous resterait à parler des polyèdres réguliers d'espèce supérieure, c'est-à-dire des *polyèdres réguliers étoilés* découverts par POINSOT; mais nous renverrons sur ce sujet au TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, où il est présenté avec tous les développements désirables, et où les auteurs ont généralisé la *formule d'Euler* et donné pour la première fois la représentation graphique des nouveaux polyèdres.

LIVRE SIXIÈME.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DE QUELQUES COURBES USUELLES.

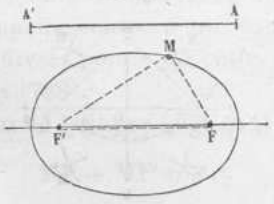
I. — Propriétés fondamentales de l'ellipse.

762. L'*ellipse* est une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 422), les deux points fixes étant F et F′ et la longueur donnée étant représentée par la droite AA′, on a pour tout point M de l'ellipse

$$MF + MF' = AA'.$$

D'après cela, pour décrire une ellipse d'*un mouvement continu*, on plante sur la feuille de dessin, en F et en F′, deux

Fig. 422.



épingles qu'on entoure d'un fil sans fin (c'est-à-dire dont les deux bouts sont réunis), auquel on donne la longueur totale FF′ + AA′. On tend constamment ce fil à l'aide d'un crayon que l'on fait mouvoir sur le papier jusqu'à ce qu'on soit ramené au point de départ. La pointe du crayon trace évidemment l'ellipse demandée; car, pour une position quelconque

M de cette pointe, on a

$$FF' + MF + MF' = FF' + AA' \quad \text{ou} \quad MF + MF' = AA'.$$

Le procédé qu'on vient d'indiquer est surtout applicable sur le terrain : on remplace alors les épingles par des piquets, le fil par une corde et le crayon par un jalon. Nous mentionnerons plus loin d'autres tracés bien préférables au point de vue de l'exécution des épures.

763. Les points F et F' sont les *foyers* de l'ellipse, les droites MF et MF' sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur constante AA' est ordinairement représentée par $2a$.

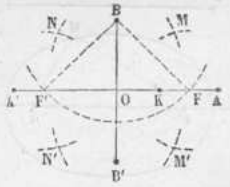
La distance FF' ou *distance focale* est représentée par $2c$. L'existence du triangle MFF' entraîne alors la condition $2c < 2a$ ou $c < a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'ellipse. Cette excentricité peut varier de 0 à 1. Pour $c = 0$, elle est nulle, les foyers se confondent et l'ellipse devient un cercle de rayon a. Pour $c = a$, l'excentricité est égale à 1, et l'ellipse se réduit à la portion de droite $FF' = 2a$. Entre ces deux limites, l'ellipse se rapproche d'autant plus de la droite FF' que son excentricité est plus grande.

764. On peut aussi tracer l'ellipse par points.

En effet, marquons (*fig.* 423) le milieu O de la distance focale

Fig. 423.



FF', et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$; puis, un point quelconque K sur AA'. Si, des points F et F' comme centres, avec des rayons respectivement égaux à AK et A'K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs points d'intersection M et M' appartiendront à l'ellipse, puisqu'on aura

$$MF + MF' = M'F + M'F' = AK + A'K = 2a.$$

La distance des centres FF′ étant toujours moindre que la somme $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, que cette distance soit plus grande que la différence des rayons, c'est-à-dire qu'on ait

$$FF' > A'K - AK \quad \text{ou} \quad 2c > 2a - 2AK.$$

La condition cherchée est donc $AK > a - c$ ou $AK > AF$.

D'ailleurs, on peut échanger les centres F et F′ sans modifier les rayons employés, de manière à obtenir pour chaque point K quatre points M et M′, N et N′, de l'ellipse. Les limites des positions du point K sont alors l'un des foyers F et le point O. Tout cela résulte immédiatement de la symétrie de l'équation de condition $MF + MF' = 2a$ par rapport aux deux rayons vecteurs d'un même point.

Si le point K est en O, les points correspondants de l'ellipse sont en B et en B′ sur la perpendiculaire élevée à la droite FF′ par son milieu. Si le point K est en F, les deux points correspondants de l'ellipse sont en A et en A′. Le rayon vecteur minimum est AF ou $a - c$, le rayon vecteur maximum est A′F ou $a + c$.

THÉORÈME.

765. *L'ellipse a :* 1° *pour axes, la droite* AA′ *qui passe par ses deux foyers et la droite* BB′ *perpendiculaire au milieu de la première;* 2° *pour centre, l'intersection de ces deux droites.*

On appelle *axe* d'une courbe toute droite par rapport à laquelle les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux; on appelle *centre* d'une courbe tout point par rapport auquel les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux (728).

1° Soit M un point de l'ellipse (*fig.* 424); on aura

$$MF + MF' = 2a.$$

Supposons alors que le plan de la figure fasse une demi-révolution autour de AA′. Dans ce mouvement, les foyers restent fixes, le point M vient dans la position symétrique M_1, et, comme le triangle MFF′ ne se déforme pas, on a

$$M_1F + M_1F' = 2a,$$

c'est-à-dire que le point M_1 appartient à l'ellipse. Donc, à tout

point M de l'ellipse correspond un point M_1, symétrique de M par rapport à AA'.

Si le plan de la figure fait de même une demi-révolution autour de BB', les foyers ne font que s'échanger, le point M vient dans la position symétrique M_2, et, comme le triangle MFF' ne se déforme pas, on a encore

$$M_2F + M_2F' = 2a,$$

ce qui montre qu'à tout point M de l'ellipse correspond un autre point M_2 de la courbe, symétrique de M par rapport à BB'.

2° L'autre partie de la proposition n'est qu'un cas particu-

Fig. 424.

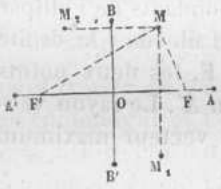


Fig. 425.

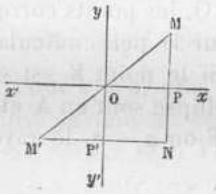
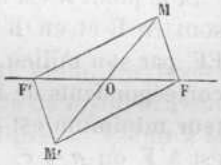


Fig. 426.



lier de ce théorème plus général : *Quand une courbe possède deux axes rectangulaires xx' et yy', leur intersection* O *est un centre de la courbe* (*fig.* 425).

Soient M un point de la courbe, M' son symétrique par rapport au point O, et N l'intersection des parallèles menées respectivement aux deux axes par les points M et M'. L'égalité des triangles rectangles MOP, OM'P', donne

$$MP = OP' = PN \quad \text{et} \quad M'P' = OP = P'N.$$

Le point N est donc à la fois symétrique de M par rapport à xx' et symétrique de M' par rapport à yy'. Or, le point N étant sur la courbe comme symétrique de M, le point M' en fait aussi partie comme symétrique de N. Donc, à tout point M de la courbe correspond un point M', symétrique de M par rapport à O.

Il résulte de là que le milieu O de la distance focale FF' est un centre de l'ellipse.

On peut d'ailleurs le démontrer directement comme il suit (*fig.* 426).

Soient M un point de l'ellipse et M′ son symétrique par rapport à O; menons les rayons vecteurs de ces points. Les diagonales MM′ et FF′ se coupant mutuellement en parties égales, le quadrilatère MFM′F′ est un parallélogramme, et le point M′ appartient à l'ellipse en vertu de l'égalité des deux contours FMF′ et FM′F′.

COROLLAIRES.

766. On appelle *longueurs* des axes de l'ellipse les longueurs AA′ et BB′ interceptées sur ces axes par la courbe (*fig.* 423). La longueur du premier axe AA′ est donc (764) égale à $2a$, la longueur du second BB′ est représentée par $2b$.

La perpendiculaire BO (*fig.* 423) étant moindre que l'oblique $BF = a$, on a

$$b < a.$$

AA′ est dit alors le *grand axe* et BB′ le *petit axe* de l'ellipse.

Les extrémités A et A′, B et B′, des deux axes sont appelées les *sommets* de la courbe.

Le triangle rectangle BOF (*fig.* 423) donne $a^2 = b^2 + c^2$, relation qui permet de déterminer l'une des trois quantités a, b, c, lorsqu'on connaît les deux autres.

767. Quand on donne les longueurs a et b, il est facile de déterminer graphiquement les foyers : on n'a qu'à décrire de l'extrémité B du petit axe comme centre (*fig.* 423), avec un rayon égal à a, un arc de cercle qui coupe le grand axe aux deux foyers F et F′.

THÉORÈME.

768. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est plus petite ou plus grande que* $2a$.

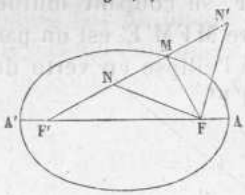
Soit d'abord (*fig.* 427) un point N intérieur à l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers, prolongeons F′N jusqu'à la rencontre de la courbe en M, et menons MF. Un théorème connu donne immédiatement

$$NF + NF' < MF + MF' \quad \text{ou} \quad NF + NF' < 2a.$$

Soit de même un point N′ extérieur à l'ellipse. Joignons ce

point aux deux foyers; N'F' coupant la courbe au point M,

Fig. 427.



menons MF. En s'appuyant sur le même théorème, on aura ici

$$N'F + N'F' > MF + MF' \quad \text{ou} \quad N'F + N'F' > 2a.$$

COROLLAIRE.

769. Le théorème précédent, rapproché de la définition de l'ellipse, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque du plan de la courbe, par rapport à cette courbe supposée non tracée. *Suivant que la somme des distances d'un point aux deux foyers est supérieure, égale ou inférieure à 2a, ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.*

THÉORÈME.

770. *La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact, extérieurement à leur angle.*

Prenons sur l'ellipse (*fig.* 428) deux points voisins M et M'; menons la sécante MM'S et les rayons vecteurs des deux points M et M'. Portons sur F'M une longueur F'D = F'M' et sur FM une longueur FC = FM'. Le segment MD représente alors l'augmentation que subit le rayon vecteur mené du foyer F' quand on passe du point M au point M', et MC la diminution que subit le rayon vecteur mené du foyer F quand on passe du même point M au même point M'; comme la somme des rayons vecteurs d'un point de l'ellipse reste constante, MD est égal à MC.

Cela posé, d'un point quelconque G de la sécante MM'S, menons aux droites M'D et M'C des parallèles GI et GH jusqu'à la rencontre des rayons vecteurs du point M. Le quadrilatère GHMI étant semblable au quadrilatère M'CMD (153), l'égalité de MD et de MC entraîne celle de MI et de MH.

Les droites GH et GI, étant parallèles aux bases M'C et M'D des triangles isocèles CFM', DF'M', sont perpendiculaires aux bissectrices de leurs angles au sommet. Mais, à mesure que le point mobile M' se rapproche du point fixe M, la sécante MM'S se rapproche de la tangente au point M. Les bissectrices des angles CFM', DF'M', ayant alors pour limites les rayons vecteurs FM, F'M, du point M, les droites GH et GI ont elles-mêmes pour limites les perpendiculaires abaissées du point G sur ces rayons vecteurs. D'ailleurs, pendant ce mouvement, MH varie en restant toujours égal à MI.

Fig. 428

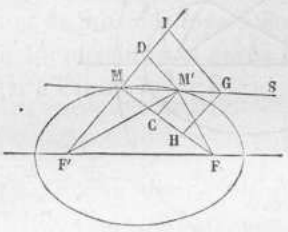
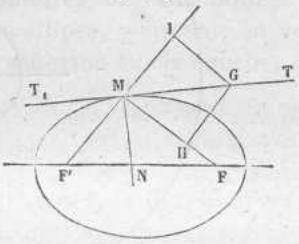


Fig. 429.



La tangente MT au point M (*fig.* 429) doit donc être telle, que si, d'un point quelconque G de cette droite, on abaisse des perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs MF et MF' du point M, on ait MH = MI. Les triangles rectangles MGH, MGI, sont alors égaux, et il en est de même des angles GMH, GMI. *La tangente à l'ellipse est donc bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

L'angle F'MT$_1$ étant l'opposé par le sommet de l'angle GMI, les deux angles GMH ou FMT et F'MT$_1$ sont égaux, ce qui vérifie le premier énoncé du théorème.

COROLLAIRES.

771. *La tangente à l'ellipse n'a qu'un point commun avec la courbe.*

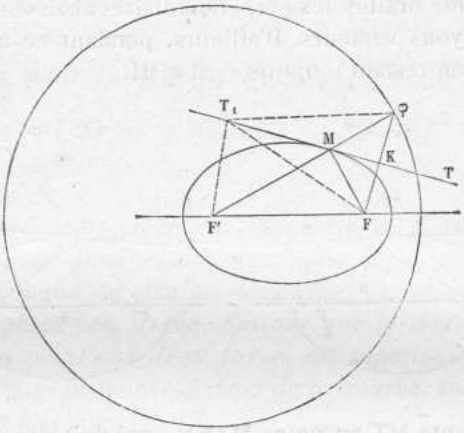
Abaissons du foyer F (*fig.* 430), sur la tangente MT au point M, une perpendiculaire FK qui vient rencontrer en φ le prolongement de F'M. La tangente étant bissectrice de l'angle FMφ, l'égalité des triangles rectangles FMK, φMK, donne FK = φK, c'est-à-dire que le point φ est le symétrique du

foyer F par rapport à la tangente MT. L'égalité des mêmes triangles donne $MF = M\varphi$, et, par suite,

$$F'\varphi = MF + MF' = 2a.$$

D'ailleurs, la tangente étant perpendiculaire sur le milieu

Fig. 430.



de $F\varphi$, un point quelconque T_1 de cette droite est équidistant de F et de φ. On a donc, d'après le triangle $F'T_1\varphi$,

$$T_1F + T_1F' = T_1\varphi + T_1F' \quad \text{ou} \quad T_1F + T_1F' > F'\varphi = 2a.$$

Tous les points de la tangente MT, sauf le point M, sont donc extérieurs à l'ellipse (769).

772. La tangente en un point d'une courbe peut couper la courbe en d'autres points; mais elle a nécessairement (96) avec la courbe au moins un point commun de moins que les droites qui en ont le plus. De ce qu'on vient de démontrer, il résulte donc qu'une droite ne peut rencontrer l'ellipse en plus de deux points, c'est-à-dire que *l'ellipse est une courbe convexe.*

773. Si l'on mène au point M (*fig.* 429) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, F'MN, sont égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale à l'ellipse est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact.*

La normale en un sommet de l'ellipse se confond avec l'axe correspondant, et la tangente est perpendiculaire à cet axe, de sorte que la courbe est *inscrite* dans le rectangle construit sur ses axes.

Les rayons vecteurs d'un point de l'ellipse, la normale et la tangente en ce point déterminent sur une sécante quelconque quatre points conjugués deux à deux (143).

SCOLIE.

774. Les propriétés précédentes justifient la dénomination de *foyer*. L'angle d'incidence et l'angle de réflexion étant égaux, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F d'une ellipse, viennent, en vertu d'une loi physique et après leur réflexion sur la courbe, converger à l'autre foyer F'.

THÉORÈME.

775. *Le lieu des points symétriques* φ *de l'un des foyers* F *de l'ellipse par rapport aux tangentes est un cercle décrit de l'autre foyer* F' *comme centre, avec la longueur* $2a$ *du grand axe pour rayon* (*fig.* 430).

Le premier alinéa du n° 771 renferme la démonstration de ce théorème.

On donne au cercle $F'\varphi$ le nom de *cercle directeur relatif au foyer* F'. L'ellipse a deux cercles directeurs correspondant à ses deux foyers.

SCOLIE.

776. *Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre* F' *et d'un point* F *intérieur à ce cercle est une ellipse dont les points* F *et* F' *sont les foyers et qui a pour cercle directeur relatif au foyer* F' *le cercle donné* (*fig.* 430).

En effet, soit M un point du lieu. En le joignant aux deux points F et F' et en prolongeant F'M jusqu'à sa rencontre φ avec la circonférence donnée, on a par hypothèse

$$M\varphi = MF, \quad \text{d'où} \quad MF + MF' = F'\varphi.$$

Pour construire le lieu, il suffit évidemment de joindre le point F à un point quelconque φ de la circonférence donnée et d'élever une perpendiculaire TT_1 sur le milieu K de la

droite Fφ; cette perpendiculaire coupe le rayon F′φ en un point M du lieu, et elle est la tangente en ce point (770).

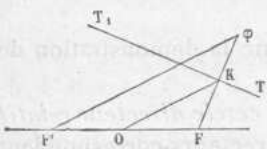
Le cercle directeur d'une ellipse peut donc servir à tracer la courbe par points lorsqu'on connaît son foyer et son grand axe. Ce nouveau procédé est plus long que celui indiqué au n° 764, mais il a le grand avantage de donner en même temps la tangente en chaque point déterminé. On peut résumer cette construction comme il suit : *Si, d'un point* F *pris à l'intérieur d'un cercle* F′φ, *on mène des droites aux divers points de sa circonférence, les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux touchent ou enveloppent une ellipse, qui a pour foyers les points* F *et* F′ *et pour grand axe le rayon* F′φ.

THÉORÈME.

777. *Le lieu des projections des foyers d'une ellipse sur ses tangentes est la circonférence de cercle décrite sur le grand axe comme diamètre.*

Soient (*fig.* 431) F et F′ les deux foyers, K la projection du foyer F sur une tangente quelconque TT_1, et φ le symétrique de F par rapport à cette tangente. Le côté F′φ du triangle FF′φ étant égal à $2a$ (771), la droite OK qui joint les milieux des deux autres côtés est égale à a. Le point K appartient donc à la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.

Fig. 431.



Réciproquement, tout point K de cette circonférence est la projection de l'un des foyers F sur une tangente; car, si l'on prolonge FK d'une quantité Kφ = FK, on a évidemment

$$F'\varphi = 2OK = 2a.$$

Par suite, le point φ appartient au cercle directeur relatif au foyer F′, et la perpendiculaire élevée sur Fφ par son milieu K est (776) une tangente à l'ellipse.

Le cercle OK est dit le *cercle principal* de l'ellipse.

SCOLIE.

778. *Si le sommet d'une équerre décrit le cercle principal d'une ellipse, pendant que l'un de ses côtés passe constamment par un foyer de la courbe, l'autre côté de l'équerre lui*

reste toujours tangent. C'est là un nouveau moyen (776) d'obtenir l'ellipse comme enveloppe de ses tangentes.

PROBLÈME.

779. *Mener une tangente à l'ellipse par un point donné.*

1° *Si le point donné* M *est sur la courbe,* on le joint aux deux foyers (*fig.* 429), et l'on mène la bissectrice de l'angle FMI formé par l'un des rayons vecteurs MF et le prolongement MI de l'autre rayon MF′ (770).

2° *Si le point donné* P *est extérieur à l'ellipse* (*fig.* 432), on remarque que la question serait résolue si l'on connaissait le symétrique φ de l'un des foyers F par rapport à la tangente cherchée, car on aurait dès lors cette tangente en abaissant de P une perpendiculaire TT_1 sur Fφ; la droite TT_1

Fig. 432.

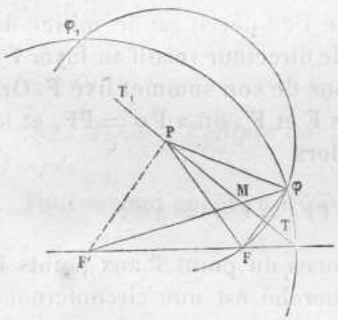
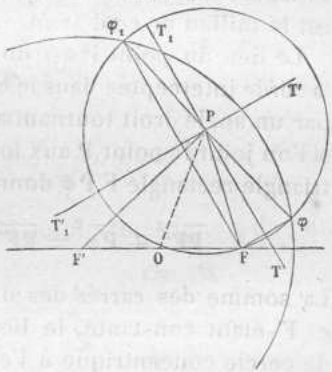


Fig. 433.



couperait d'ailleurs F′φ au point de contact M (776). Or, le point φ se trouve à la fois sur le cercle directeur relatif au foyer F′ (775) et sur le cercle de centre P et de rayon PF.

Ces deux cercles se coupent toujours quand le point P est extérieur à l'ellipse. En effet, PF′ étant la distance des centres, PF et $2a$ les deux rayons, le triangle PFF′ donne

$$PF' < PF + FF' \quad \text{et, } a\,fortiori, \quad PF' < PF + 2a.$$

Le point P étant extérieur à la courbe, on peut avoir PF plus grand ou plus petit que $2a$. Si PF est moindre que $2a$, on a

$$PF + PF' > 2a, \quad \text{d'où} \quad PF' > 2a - PF.$$

Si PF est plus grand que $2a$, le triangle PFF′ permet de poser

$$PF' > PF - FF' \quad \text{et, } a \textit{ fortiori}, \quad PF' > PF - 2a.$$

Ainsi, la construction précédente réussit toujours quand le point P est extérieur à la courbe; et, comme les circonférences tracées se coupent en deux points φ et φ_1, il y a deux solutions.

COROLLAIRES.

780. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à l'ellipse soient à angle droit.

Si les deux tangentes TT_1, $T'T'_1$, menées du point P, sont à angle droit (*fig.* 433), comme elles sont respectivement perpendiculaires sur le milieu des droites $F\varphi$, $F\varphi_1$, l'angle $\varphi F \varphi_1$ de ces deux droites doit être lui-même un angle droit. Cet angle étant inscrit dans la circonférence PF, dont le centre est P, la droite $\varphi\varphi_1$ est un diamètre de cette circonférence, et P est le milieu de ce diamètre.

Le lieu du point P est donc le lieu décrit par le milieu de la corde interceptée dans le cercle directeur relatif au foyer F′, par un angle droit tournant autour de son sommet fixe F. Or, si l'on joint le point P aux foyers F et F′, on a $P\varphi = PF$, et le triangle rectangle $F'P\varphi$ donne alors

$$\overline{PF'}^2 + \overline{P\varphi}^2 = \overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{F'\varphi}^2 = 4a^2.$$

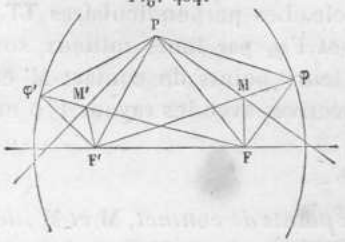
La somme des carrés des distances du point P aux points F et F′ étant constante, le lieu cherché est une circonférence de cercle concentrique à l'ellipse et qui a pour rayon la médiane OP du triangle PFF′ (174). Comme les sommets du rectangle construit sur les axes et circonscrit à l'ellipse (773) font nécessairement partie du lieu, le rayon OP est égal à la demi-diagonale de ce rectangle, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2+b^2}$.

781. *Les tangentes* PM, PM′, *menées à l'ellipse par un point extérieur* P, *font des angles égaux avec les droites qui vont du point* P *aux deux foyers; la droite qui va du point* P *à l'un des foyers est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact* M *et* M′ (*fig.* 434).

Menons les deux cercles directeurs de l'ellipse. φ étant le

symétrique de F par rapport à la tangente PM et φ' le symétrique de F′ par rapport à la tangente PM′, les deux triangles $PF\varphi'$ et $PF'\varphi$ sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux

Fig. 434.



chacun à chacun. Les angles $FP\varphi'$ et $F'P\varphi$ sont donc égaux. Si l'on enlève la partie commune FPF′, les restes $FP\varphi$, $F'P\varphi'$, sont égaux, ainsi que leurs moitiés MPF, M′PF′.

En second lieu, l'égalité des triangles $PF\varphi'$, $PF'\varphi$, entraîne celle des angles $PF\varphi'$, $P\varphi F'$. Mais, les deux triangles $PM\varphi$, PMF, étant égaux, l'angle $P\varphi F'$ est aussi égal à l'angle PFM, et la droite PF est la bissectrice de l'angle MFM′.

PROBLÈME.

782. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point symétrique φ de l'un

Fig. 435.

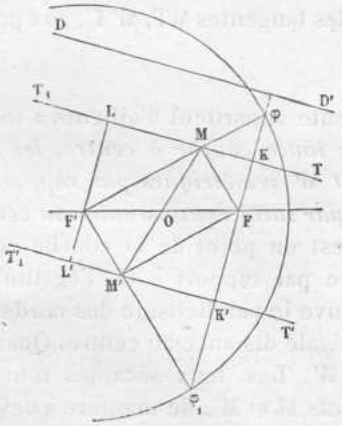
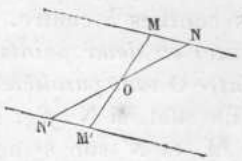


Fig. 436



des foyers F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point

est à l'intersection du cercle directeur relatif au foyer F' (775) et de la perpendiculaire menée du foyer F sur la droite donnée DD' (*fig.* 435). Cette perpendiculaire coupe toujours le cercle F' en deux points φ et φ_1, puisque le point F est intérieur à ce cercle. Les perpendiculaires TT_1 et $T'T'_1$ élevées aux droites $F\varphi$ et $F\varphi_1$ par leurs milieux sont les tangentes demandées, et leurs points de contact M et M' sont à leurs rencontres respectives avec les rayons $F'\varphi$ et $F'\varphi_1$ (776).

COROLLAIRES.

783. *Les deux points de contact,* M *et* M', *des deux tangentes parallèles* TT_1, $T'T'_1$, *sont symétriques par rapport au centre* O *de l'ellipse.*

En effet, les triangles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$, $\varphi F'\varphi_1$, sont des triangles isocèles ayant tous un angle égal à la base; ils sont donc semblables et ont leurs côtés parallèles. La figure MFM'F' étant un parallélogramme, la diagonale MM' passe par le milieu O de la diagonale FF' et y est divisée en deux parties égales.

Inversement, *les tangentes menées à l'ellipse en deux points symétriques par rapport au centre sont parallèles,* car le quadrilatère MFM'F' étant dans ce cas un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en parties égales, les angles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$ ont leurs côtés parallèles et sont égaux. Il en est donc de même de leurs moitiés (770) FMT, $\varphi_1 M'T'$, ce qui entraîne le parallélisme des tangentes MT, M'T', aux points M et M'.

784. La propriété précédente appartient d'ailleurs à toutes les courbes à centre. *Dans toute courbe à centre, les tangentes en deux points* M *et* M' *symétriques par rapport au centre* O *sont parallèles, et par suite équidistantes du centre.*

En effet, si N (*fig.* 436) est un point de la courbe voisin de M, et N' son symétrique par rapport à O, l'égalité des triangles MON, M'ON', prouve le parallélisme des cordes ou sécantes MN, M'N', et leur égale distance au centre. Quand N tend vers M, N' tend vers M'. Les deux sécantes tournent donc à la fois autour des points M et M', de manière à devenir ensemble tangentes, en restant toujours parallèles et équidistantes du centre.

785. Les points K et K′ (*fig.* 435) appartiennent au cercle principal de l'ellipse (777). Les deux segments FK, FK′, étant alors ceux d'une corde quelconque de ce cercle passant par le foyer F, leur produit est constant. On peut donc dire que *le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles est constant.* Si l'on mène par le foyer F′ la corde LL′ du cercle principal qui est parallèle à KK′, on a évidemment FK′ = F′L. On peut donc dire aussi que *le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant.* Si l'on veut connaître cette constante, il suffit de considérer la tangente à l'une des extrémités du petit axe, et l'on obtient immédiatement le carré du demi-petit axe ou b^2 pour sa valeur.

SCOLIE.

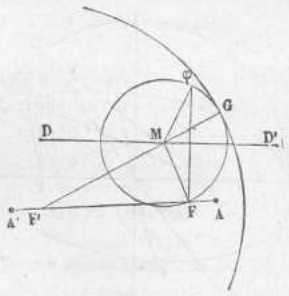
786. Les constructions des nos 779 et 782 n'exigent pas que la courbe soit tracée; il faut seulement qu'elle soit définie par ses deux foyers et la longueur du grand axe.

PROBLÈME.

787. *Étant donnés les foyers* F *et* F′ *et le grand axe* AA′ *d'une ellipse, déterminer ses points de rencontre avec une droite* DD′ (*fig.* 437).

Supposons le problème résolu, et déterminons le symé-

Fig. 437.



trique φ du foyer F par rapport à DD′. M étant l'un des points de rencontre de la droite DD′ avec l'ellipse, on aura Mφ = MF. Prolongeons F′M d'une longueur MG = MF; F′G sera égal à AA′, et le point G appartiendra au cercle directeur relatif au foyer F′. Le cercle décrit du point M comme centre avec MF

pour rayon passe donc par les deux points F et φ et est tangent au cercle directeur F′G. La question est ainsi ramenée à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points donnés F et φ et tangent à un cercle donné F′G. Nous avons résolu ce problème (196, 2°).

Comme le foyer F est intérieur au cercle directeur relatif au foyer F′, il y aura évidemment deux solutions, une seule ou zéro, suivant que le point φ sera lui-même intérieur, commun ou extérieur au cercle directeur F′G. La droite DD′ sera donc *sécante*, *tangente* ou *extérieure* à l'ellipse, suivant les mêmes conditions.

COROLLAIRE.

788. *Une droite ne pouvant rencontrer une ellipse en plus de deux points, l'ellipse est une courbe convexe* (772).

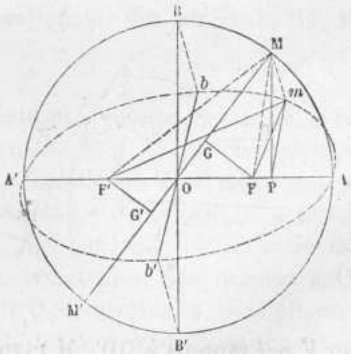
II. — De l'ellipse, considérée comme projection orthogonale du cercle.

THÉORÈME.

789. *La projection orthogonale d'une circonférence de cercle sur un plan est une ellipse.*

Quel que soit le plan de projection, on peut toujours supposer qu'il

Fig. 438.



passe par le centre du cercle, puisque les projections d'une même figure sur deux plans parallèles sont égales (548).

Soit donc AA′ (*fig.* 438) le diamètre suivant lequel le plan de projec-

tion coupe le cercle donné. Le diamètre BB' perpendiculaire à AA' a pour projection la droite bb', et cette droite, d'après un théorème connu (407), est elle-même perpendiculaire sur AA'. D'ailleurs, des droites parallèles ayant sur un même plan des projections parallèles et la projection du milieu d'une droite étant le milieu de sa projection, la courbe projection du cercle a nécessairement pour axes les droites AA' et bb'. Par suite, si cette projection est une ellipse, son grand axe sera AA' et la distance de son centre O à l'un des foyers sera égale à Bb (766). Portons donc sur AA', de part et d'autre du point O, des longueurs

$$OF = OF' = Bb.$$

Il reste à démontrer que la somme des rayons vecteurs mF et mF' d'un point quelconque m de la projection obtenue est constante.

Le point m étant la projection du point M dont l'ordonnée par rapport aux axes AA' et BB' est MP, la droite mP sera aussi perpendiculaire sur AA'. Abaissons des points F et F', sur le diamètre MM' qui répond au point M, les perpendiculaires FG et F'G'. L'égalité des triangles rectangles FOG, F'OG', donne à la fois GF = G'F' et OG = OG'; par suite, MG' = GM'.

Cela posé, la similitude des triangles rectangles FOG, MOP, d'une part, MPm, BOb, d'autre part, donne

$$\frac{FG}{OF \text{ ou } Bb} = \frac{MP}{OM \text{ ou } OB} = \frac{M\,m}{B\,b},$$

et il en résulte Mm = FG. Les triangles rectangles MmF, MGF, sont alors égaux, et mF = MG.

Comme GF = G'F', les triangles rectangles MmF', MG'F', sont aussi égaux, et l'on a

$$mF' = MG' = GM'.$$

La somme mF + mF', égale à la somme MG + GM', est donc bien égale au diamètre AA'; ce qui démontre le théorème.

On voit que le grand axe de l'ellipse obtenue est toujours égal au diamètre du cercle donné. On a de plus, dans le triangle rectangle BbO (*voir* la *Trigonométrie*),

$$Ob = OB \cos BOb$$

Si l'on désigne par $2a$ et $2b$ les axes AA' et bb' de l'ellipse projection du cercle, et par V l'angle de leurs plans, on aura donc

$$b = a \cos V \quad \text{et} \quad \cos V = \frac{b}{a}.$$

COROLLAIRES.

790. L'ordonnée MP du cercle (*fig.* 438) étant représentée par Y et l'ordonnée correspondante mP de l'ellipse par y, le triangle rectangle

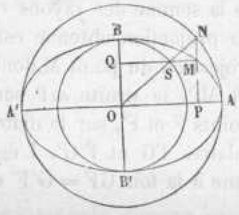
MmP donne

$$y = Y\cos V, \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \frac{b}{a}Y.$$

On passe donc du cercle principal d'une ellipse (777) à cette ellipse, en diminuant toutes les ordonnées du cercle dans le rapport du petit axe au grand axe. Cette remarque fournit un nouveau procédé pour décrire l'ellipse par points.

On trace un cercle sur chacun des axes de l'ellipse comme diamètre (*fig.* 439); un rayon quelconque coupe ces cercles aux points N et

Fig. 439.



S. Si l'on mène alors l'ordonnée NP du point N et la parallèle SM au grand axe, l'intersection M de ces deux droites est un point de l'ellipse. On a, en effet,

$$MP = \frac{OS}{ON}NP, \quad \text{c'est-à-dire} \quad MP = \frac{b}{a}NP.$$

791. On peut déduire de là la réciproque du théorème précédent. *La projection orthogonale d'une ellipse dont les axes sont* $2a$ *et* $2b$, *sur un plan passant par son petit axe et faisant avec le plan de l'ellipse un angle* V *tel que* $\cos V = \frac{b}{a}$, *est un cercle de diamètre* $2b$. Car, si l'on considère sur l'ellipse et sur le cercle $2b$ (*fig.* 439) deux points M et S ayant la même ordonnée OQ, leurs abscisses x et X sont liées par la relation

$$\frac{x}{X} = \frac{ON}{OS}, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{b}{a}x.$$

Pour passer de l'ellipse au cercle, il faut donc diminuer les abscisses de l'ellipse dans le rapport de b à a ou les multiplier par cos V; c'est-à-dire que, pour que le cercle $2b$ devienne la projection orthogonale de l'ellipse proposée sur son plan primitif, il suffit de faire tourner cette ellipse de l'angle V autour de l'axe BB'.

L'ellipse peut donc être regardée comme provenant de la contraction ou de la dilatation des cercles qui ont ses axes pour diamètres.

Cette manière de considérer la courbe conduit à des solutions simples pour un grand nombre de problèmes.

792. Si l'on ne suppose plus que le plan de projection passe par le centre du cercle donné, le grand axe de sa projection elliptique, toujours égal à son diamètre, est la projection du diamètre du cercle qui est parallèle au plan de projection. Cette remarque est utile dans les applications.

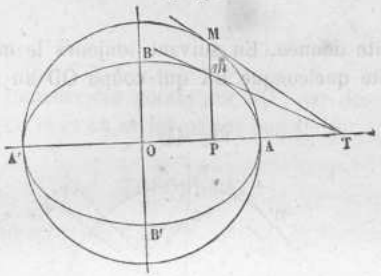
PROBLÈME.

793. *Mener à l'ellipse une tangente par un point donné.*

1° *Soit d'abord le point donné m situé sur la courbe.*

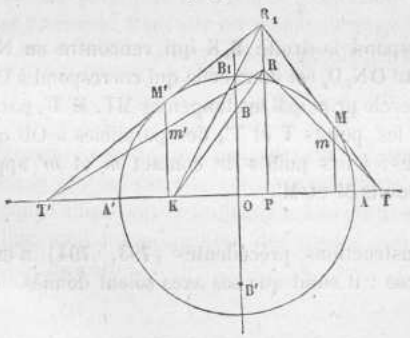
Supposons le problème résolu (*fig.* 440), et soit mT la tangente

Fig. 440.



demandée. Dilatons toute la figure, perpendiculairement à AA', dans le rapport de OB à OA. L'ellipse deviendra le cercle AA', le point m deviendra le point M, le point T ne changera pas, et la droite MT sera la tan-

Fig. 441.



gente au cercle principal. On déterminera donc réciproquement le point T en construisant la tangente en M au cercle principal, et, en traçant mT, on aura la tangente à l'ellipse au point m.

2° *Soit maintenant le point donné* R *extérieur à l'ellipse* (*fig.* 441).

Supposons de même le problème résolu, et soient RmT, Rm'T', les tangentes qui répondent à la question. Dilatons la figure, comme dans

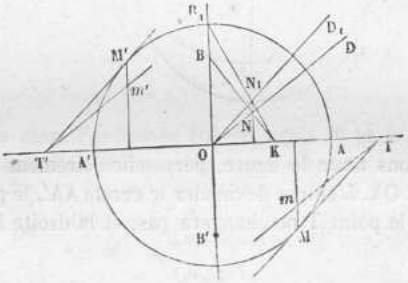
le premier cas. L'ellipse deviendra le cercle AA', la droite RBK deviendra la droite B_1K, et le point R_1 correspondant au point R, devant se trouver à la fois sur l'ordonnée PR et sur la droite B_1K, sera déterminé. On en déduira les tangentes R_1MT, $R_1M'T'$, au cercle principal, et par suite les tangentes RmT, $Rm'T'$, à l'ellipse, dont les points de contact m et m' se trouveront d'ailleurs sur les ordonnées des points M et M'.

PROBLÈME.

794. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 442).

Soit OD la droite donnée. En suivant toujours le même procédé, on considère la droite quelconque BK qui coupe OD au point N; à cette

Fig. 442.



droite BK correspond la droite B_1K qui rencontre en N_1 l'ordonnée du point N. La droite ON_1D_1 est donc celle qui correspond à OD. On n'a alors qu'à mener au cercle principal les tangentes MT, M'T', parallèles à ON_1D_1, et à tracer, par les points T et T', des parallèles à OD qui sont les tangentes demandées; leurs points de contact m et m' appartiennent aux ordonnées des points M et M'.

795. Les constructions précédentes (793, 794) n'exigent pas que l'ellipse soit tracée : il suffit que ses axes soient donnés.

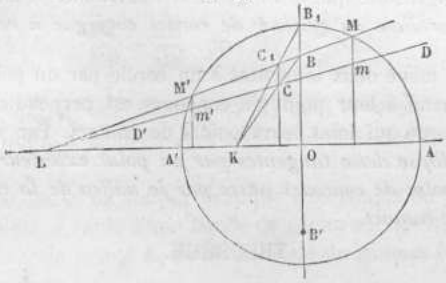
PROBLÈME.

796. *Connaissant les axes d'une ellipse, construire ses points d'intersection avec une droite donnée* (*fig.* 443).

Soit DD' la droite donnée; son point L ne changera pas dans la dilatation de l'ellipse. La droite quelconque BK rencontrant DD' au point C et devenant B_1K, le point C devient C_1. La droite LC_1 correspond donc à la

droite DD', et, comme elle coupe le cercle principal aux points M et M',

Fig. 413.



on n'a plus qu'à ramener ces points sur DD', par des perpendiculaires à AA', pour avoir en m et en m' les points demandés.

THÉORÈME.

797. *Tous les diamètres de l'ellipse sont des lignes droites passant par son centre.*

On entend par *diamètre* d'une courbe le lieu des milieux des cordes de cette courbe parallèles à une direction donnée. Dans le cercle, tout diamètre est une droite perpendiculaire au système de cordes qu'il divise en deux parties égales (93) ou qui lui est *conjugué*.

Cela posé, tout système de cordes parallèles du cercle a pour projection un système de cordes parallèles de l'ellipse projection du cercle. Les milieux des cordes du cercle étant sur un même diamètre, les projections de ces milieux ou les milieux des cordes correspondantes de l'ellipse sont sur une même droite, projection du diamètre du cercle, c'est-à-dire passant par le centre de l'ellipse. Le théorème est donc démontré.

798. Réciproquement, *toute droite passant par le centre de l'ellipse est un diamètre de la courbe*, car elle est la projection d'un certain diamètre du cercle dont l'ellipse est la projection. Les cordes conjuguées au diamètre de l'ellipse sont les projections des cordes conjuguées au diamètre correspondant du cercle.

COROLLAIRES.

799. Deux diamètres sont dits *conjugués* quand chacun d'eux fait partie du système de cordes conjugué à l'autre. Dans le cercle, deux diamètres conjugués sont perpendiculaires entre eux. Pour avoir des diamètres conjugués de l'ellipse projection du cercle, il faut donc projeter deux diamètres rectangulaires du cercle; chacun des diamètres obtenus en projection divisera alors en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

Les diamètres conjugués de l'ellipse jouissent d'importantes propriétés.

800. La tangente à l'extrémité du diamètre du cercle, étant perpendiculaire à ce diamètre, est parallèle au système de cordes qui lui est conjugué. Il en résulte que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre de l'ellipse est parallèle au système de cordes conjugué à ce diamètre.*

801. Si l'on mène deux tangentes à un cercle par un point extérieur, le diamètre mené à leur point de concours est perpendiculaire sur le milieu de la corde qui joint leurs points de contact. Par suite, *si l'on mène à une ellipse deux tangentes par un point extérieur, le diamètre mené à leur point de concours passe par le milieu de la corde qui unit leurs points de contact.*

THÉORÈME.

802. *L'aire de l'ellipse est la moyenne proportionnelle des aires des cercles construits sur ses deux axes comme diamètres.*

L'ellipse donnée, dont les axes sont $2a$ et $2b$, peut être regardée comme la projection orthogonale d'un cercle de diamètre $2a$, dont le plan fait avec celui de l'ellipse un angle V, tel que $\cos V = \frac{b}{a}$ (789). D'après un théorème connu (*voir* la *Trigonométrie*), on obtiendra alors l'aire de l'ellipse en multipliant l'aire du cercle par $\cos V$. On trouve ainsi, pour l'expression de cette aire,

$$\pi ab, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt{\pi a^2 . \pi b^2}.$$

THÉORÈME.

803. *Lorsque les extrémités d'une droite* AB *de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires* Ox *et* Oy, *un point quelconque* M *de cette droite décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant* Ox *et* Oy, *et ont pour demi-longueurs* a *et* b *les distances* MA *et* MB *du point* M *aux extrémités de la droite* AB (*fig.* 444).

Fig. 444.

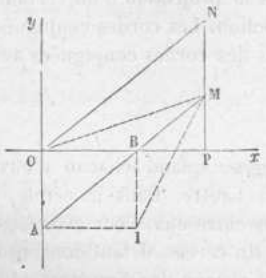
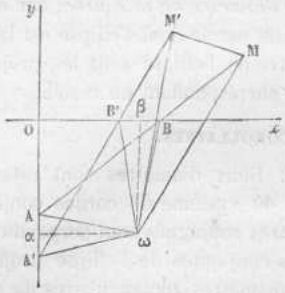


Fig. 445.



Prenons pour axes coordonnés (t. I, *Alg. élém.*, 312) les deux droites Ox et Oy; les coordonnées du point M seront MP et OP. Par le point O, menons ON parallèle à ABM, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée MP. La

figure OAMN étant un parallélogramme, ON sera égale à la longueur constante AM ou a. Les triangles rectangles semblables BPM, OPN, donnent d'ailleurs

$$\frac{MP}{NP} = \frac{BM}{ON} \quad \text{ou} \quad MP = \frac{b}{a} NP.$$

Le point M décrit donc l'ellipse (790) dont le cercle ON est le cercle principal, et qui a pour demi-axes a et b, c'est-à-dire les distances MA et MB.

Ce théorème donne un moyen pratique très simple de construire une ellipse par points, à l'aide d'une bande de papier sur les bords de laquelle on marque les trois points A, B, M. Il existe un *compas elliptique* fondé sur ce même principe.

COROLLAIRES.

804. Considérons (*fig.* 445) la droite donnée dans les deux positions voisines ABM, A'B'M'. Sur les milieux de AA' et de BB', élevons les perpendiculaires $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ qui se coupent en ω. La perpendiculaire élevée sur le milieu de MM' passera par le point ω. En effet, les deux triangles $A\omega B$, $A'\omega B'$, étant égaux, les angles $AB\omega$, $A'B'\omega$, sont égaux. Les angles ωBM, $\omega B'M'$, le sont alors eux-mêmes comme suppléments d'angles égaux. Il en résulte l'égalité des triangles ωBM, $\omega B'M'$, et, par suite, celle des distances ωM, $\omega M'$.

Si l'on suppose maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M considéré comme fixe sur l'ellipse qu'il décrit, MM' tendra vers la tangente à la courbe en M, et la perpendiculaire élevée sur le milieu de MM' vers la normale au même point. D'ailleurs, $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ ont pour limites les perpendiculaires élevées en A et en B aux axes Oy et Ox. En joignant le point I d'intersection de ces perpendiculaires au point M (*fig.* 444), on aura donc la normale en M à l'ellipse tracée.

805. Il est utile de remarquer que *la longueur* MI, *comptée sur la normale en* M (*fig.* 444), *est égale à la longueur du demi-diamètre qui est conjugué au diamètre* OM.

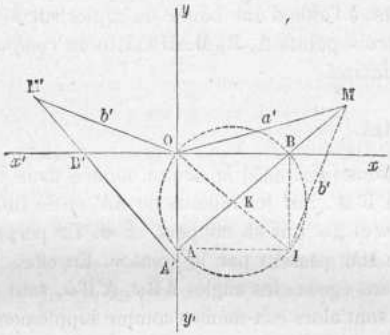
Soit, en effet (*fig.* 446), OM' le diamètre conjugué au diamètre OM; ce diamètre conjugué est parallèle à la tangente en M (800), c'est-à-dire que la normale MI lui est perpendiculaire. De plus, le rayon du cercle principal qui correspond à OM est parallèle à la position de la droite AB qui donne le point M de l'ellipse (803), et le rayon de ce cercle qui correspond à OM' est de même parallèle à A'B'M'. Les diamètres conjugués de l'ellipse répondant à des diamètres rectangulaires du cercle principal (799), on en conclut que ABM est perpendiculaire à A'B'M'. Comme BI, d'ailleurs, est perpendiculaire à OB', les deux triangles MBI, M'B'O, qui ont le côté MB égal au côté M'B', ont leurs angles égaux et sont égaux, par suite, MI = OM'.

PROBLÈME.

806. *Étant donnés deux diamètres conjugués de l'ellipse en grandeur et en direction, construire les axes de la courbe* (1).

Soient (*fig.* 446) OM et OM' les demi-diamètres conjugués donnés, dont les longueurs sont a' et b'. En menant par le point M une perpendiculaire à OM' et en prenant sur cette perpendiculaire $MI = b'$,

Fig. 446.



nous aurons le sommet I du rectangle inconnu IAOB (803). Les sommets B et A de ce rectangle se trouvent à la fois sur le cercle circonscrit dont le diamètre est IO et sur la droite qui unit le point M au centre K de ce cercle : ils sont donc déterminés. En joignant ces points B et A au point O, on a les axes de l'ellipse en direction ; de plus, MA et MB représentent leurs demi-longueurs (803, 804).

THÉORÈME.

807. *Quand les extrémités d'une droite* AB *de longueur constante glissent sur deux droites fixes quelconques* Ox *et* Oy, *un point quelconque* M, *lié invariablement à* AB *dans le plan* AOB, *décrit une ellipse* (*fig.* 447).

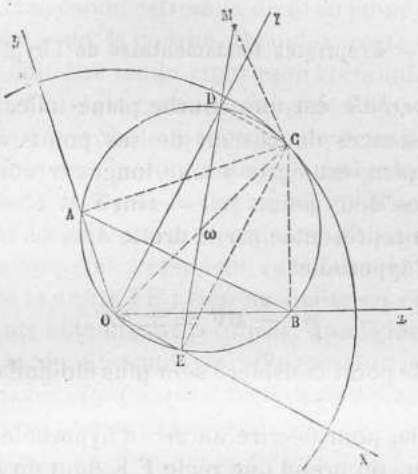
Considérons une position quelconque de la droite AB et faisons passer un cercle par les trois points A, B, O. Si l'on suppose ce cercle lié à la droite AB et entraîné dans son mouvement, il passera toujours par le point O; car l'angle AOB, ayant pour mesure la moitié de l'arc invariable AB compris entre ses côtés, ne peut pas cesser d'être inscrit. Le diamètre OC de ce cercle, dans la position actuelle de la droite AB, s'obtient en élevant en A et en B, aux axes Oy et Ox, des perpendiculaires qui se coupent au point C.

---

(1) *Voir* Traité de Géométrie, par Eugène Rouché et Ch. de Comberousse, 6e édition, 1891.

Le cercle OC changeant de position en même temps que la droite AB, l'arc AD qui sépare le point A d'un point quelconque D de sa circonférence reste constant; par suite, l'angle AOD restant lui-même constant et ayant son côté OA fixe, tout point D du cercle OC décrit une droite OY.

Fig. 447.



Si l'on trace le diamètre du cercle OC qui passe par le point donné M, les extrémités D et E de ce diamètre décrivent donc pendant le mouvement de AB les deux droites fixes ODY et OEX. Ces droites étant à angle droit, il résulte du théorème précédent (803) que le point M décrit une ellipse ayant pour demi-longueurs de ses axes, dirigés suivant OY et OX, les distances MD et ME.

Les perpendiculaires variables élevées en D et en E aux droites OY et OX se coupant au point mobile C, on obtiendra la normale en M à cette ellipse en menant la droite MC (804).

SCOLIE.

808. La position du point C est indépendante de celle du point donné M. Donc, si le point M varie, toutes les normales aux points correspondants des différentes ellipses obtenues viendront, pour une même position de la droite AB, se couper au point C.

D'ailleurs, le lieu du point C est la circonférence décrite du point O comme centre avec la longueur constante OC pour rayon, et le cercle ωC, variable de position, reste constamment tangent au cercle OC, dont le rayon est double du sien.

On peut donc se figurer le mouvement du triangle ABM en le supposant entraîné dans le mouvement du cercle ωC, qui roule sans glisser à l'intérieur du cercle fixe OC de rayon double.

On sait que, dans un pareil mouvement, *tout point du cercle mobile décrit un diamètre du cercle fixe* (théorème de la Hire), résultat qui coïncide avec la remarque sur laquelle la démonstration précédente est fondée. De plus, d'après ce qu'on vient de voir, *tout point* M *lié invariablement au cercle mobile et situé en dehors ou en dedans de ce cercle, décrit une ellipse :* c'est un autre énoncé de la proposition du n° 807.

III. — Propriétés fondamentales de l'hyperbole.

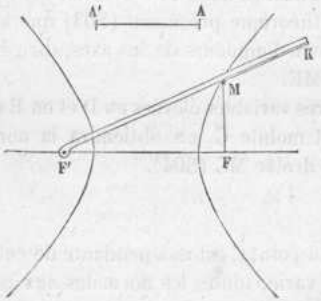
809. L'*hyperbole* est une courbe plane telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 448), les deux points fixes étant F et F′ et la longueur donnée étant représentée par la droite AA′, on aura pour tout point M de l'hyperbole

$$MF - MF' = \pm AA',$$

suivant que le point considéré sera plus éloigné du point F ou du point F′.

D'après cela, pour décrire un arc d'hyperbole d'un *mouvement continu*, on prend une règle F′K dont on fixe l'une des extrémités au point F′ (*fig.* 448), de manière qu'elle puisse

Fig. 448.



seulement tourner autour de ce point. Un fil, dont la longueur est moindre que celle de la règle de la constante AA′, est fixé par l'une de ses extrémités au point F et par l'autre au point K. Si l'on tend alors constamment ce fil le long de la règle à l'aide d'un crayon, en faisant tourner la règle autour de F′, la pointe du crayon trace un arc de l'hyperbole demandée; car, pour

une position quelconque M de cette pointe, on a (dans le cas de la figure)

$$MF' - MF = (MF' + MK) - (MF + MK) = AA'.$$

En prenant pour centre de rotation de la règle le point F et en attachant la seconde extrémité du fil au point F', on obtient la seconde partie de la courbe. Quand la règle est au-dessus de FF', le fil doit être tendu contre son arête inférieure; c'est l'inverse quand la règle est au-dessous de FF'.

On voit que l'hyperbole est formée de deux parties qui ne peuvent avoir aucun point commun, puisqu'on a toujours, pour la partie de droite de la figure, $MF' > MF$, et pour celle de gauche, $MF > MF'$. Chaque partie est d'ailleurs composée de deux branches qui s'étendent indéfiniment au-dessus et au-dessous de la droite FF'; rien ne limite en effet l'éloignement des points obtenus sur la courbe, que la longueur même de la règle et du fil employés. L'hyperbole est donc une courbe à *branches infinies*, aussi bien dans la direction FF' que dans la direction perpendiculaire.

810. Les points F et F' sont les *foyers* de l'hyperbole; les droites MF et MF' sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur AA' est ordinairement représentée par $2a$. La distance FF' se nomme *distance focale*, et on la représente par $2c$. L'existence du triangle MFF' entraîne la condition $2c > 2a$ ou $c > a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'hyperbole. Cette excentricité peut varier de 1 à ∞. Pour $c = a$, elle est égale à 1, et l'hyperbole se réduit aux deux portions de la droite FF' qui sont séparées par la distance FF'; pour $a = 0$, elle est infinie, et l'hyperbole se réduit à la perpendiculaire élevée sur le milieu de FF'. Entre ces deux limites, l'hyperbole se rapproche d'autant plus de la droite FF' que l'excentricité est plus petite.

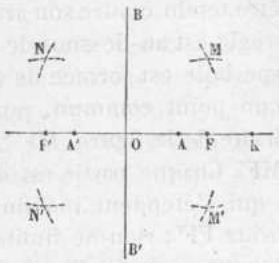
811. On peut aussi tracer l'hyperbole *par points* (*fig.* 449). En effet, marquons le milieu O de la distance focale FF', et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$, puis un point K quelconque sur le prolongement de OA. Si des points F et F' comme centres, avec des rayons respectivement égaux à AK et à A'K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs

points d'intersection M et M′ appartiendront à l'hyperbole, car on aura

$$MF' - MF = M'F' - M'F = A'K - AK = 2a.$$

La distance des centres FF′ étant toujours plus grande que

Fig. 449.



la différence $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, que cette distance soit moindre que la somme des rayons, c'est-à-dire qu'on ait

$$FF' < AK + A'K \quad \text{ou} \quad 2c < 2AK + 2a.$$

La condition cherchée est donc

$$AK > c - a \quad \text{ou} \quad AK > AF.$$

Comme on peut échanger les centres sans modifier les rayons, chaque point K permet d'obtenir quatre points M et M′, N et N′, de l'hyperbole. Le point K doit seulement être au delà du point F, sans que rien limite sa position à droite de ce point. Ce que nous venons de dire résulte d'ailleurs de la symétrie de l'équation de condition $MF' - MF = \pm 2a$, par rapport aux deux rayons vecteurs.

Si le point K est en F, les points correspondants de l'hyperbole sont les points A et A′. Le rayon vecteur minimum est $c - a$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, puisque les rayons vecteurs d'un point de la courbe peuvent croître jusqu'à l'infini.

THÉORÈME.

812. *L'hyperbole a :* 1° *pour axes, la droite* AA′ *qui passe par ses deux foyers et la droite* BB′ *perpendiculaire au milieu*

de la première; 2° pour centre, l'intersection O *de ces deux droites* (*fig.* 449).

Même démonstration que pour l'ellipse (765), en considérant la différence des rayons vecteurs au lieu de leur somme.

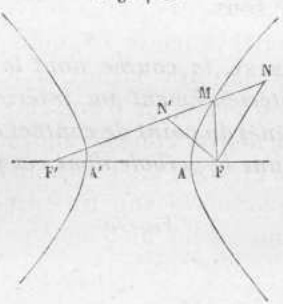
COROLLAIRE.

813. Des deux axes AA′ et BB′, le premier seul rencontre la courbe. L'axe AA′ est dit l'axe *transverse* de l'hyperbole, l'axe BB′ est dit son axe *non transverse*. Les extrémités A et A′ de l'axe transverse sont les *sommets* de la courbe.

THÉORÈME.

814. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers est plus grande ou plus petite que* $2a$ (*fig.* 450).

Fig. 450.



Le point N étant intérieur, joignons-le aux deux foyers. NF′ coupant au point M la branche de courbe qui correspond au foyer F, on a

$$NF < MN + MF, \quad \text{d'où} \quad NF' - NF > NF' - MN - MF,$$

c'est-à-dire

$$NF' - NF > MF' - MF \quad \text{ou} \quad 2a.$$

Le point N′ étant extérieur, joignons-le aux deux foyers. F′N′ prolongé coupant au point M la branche de courbe qui correspond au foyer F, on a

$$N'F + MN' > MF, \quad \text{d'où} \quad MF' - N'F - MN' < MF' - MF,$$

c'est-à-dire

$$N'F' - N'F < 2a.$$

COROLLAIRE.

815. Ce théorème, rapproché de la définition de la courbe, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque de son plan par rapport à l'hyperbole supposée non tracée. *Suivant que la différence des distances du point considéré aux deux foyers est inférieure, égale ou supérieure à* $2a$, *ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.*

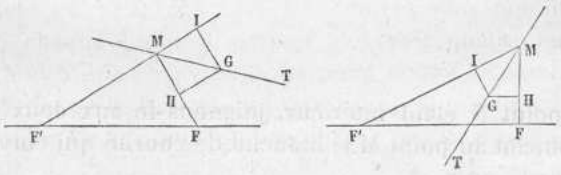
THÉORÈME.

816. *La tangente à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact* (*fig.* 451, 452).

Même démonstration que pour l'ellipse (770), en remarquant que dans l'ellipse les rayons vecteurs d'un même point varient en sens contraires, tandis que dans l'hyperbole ils varient dans le même sens.

817. Réciproquement, *la courbe dont la tangente fait des angles égaux, extérieurement ou intérieurement, avec les rayons vecteurs menés du point de contact à deux points fixes, est une ellipse ou une hyperbole dont ces points fixes sont les foyers.*

Fig. 451.



En effet, si l'on abaisse d'un point G de la tangente MT (*fig.* 451) des perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs du point M, les triangles rectangles ainsi formés seront égaux, puisque la tangente est par hypothèse la bissectrice de l'angle HMI; on aura donc MH = MI.

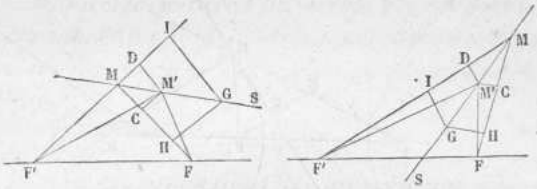
Considérons maintenant la sécante MM'S (*fig.* 452) qui coupe la courbe en M et en M', et portons les rayons vecteurs du point M' sur ceux du point M en FC et en F'D. Si l'on mène alors d'un point G quelconque de la sécante les parallèles GH

et GI à M'C et à M'D, les quadrilatères M'CMD, GHMI, seront semblables, et l'on aura constamment

$$\frac{MC}{MD} = \frac{MH}{MI}.$$

Mais à la limite, quand le point M' vient en M, la sécante

Fig. 452.



MM'S est remplacée par la tangente MT, et l'on a MH = MI. Donc, la limite du rapport $\frac{MC}{MD}$ est aussi l'unité.

Or, si les deux rayons vecteurs varient en sens contraires, MD étant la diminution du premier, MC est l'augmentation égale du second, et la courbe est une ellipse, puisque la somme des rayons vecteurs d'un même point demeure constante. Si les deux rayons vecteurs varient dans le même sens, MD étant l'augmentation de l'un, MC est l'augmentation égale de l'autre, et la courbe est une hyperbole, puisque la différence des rayons vecteurs d'un même point demeure constante.

COROLLAIRES.

818. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point* M, *sont extérieurs à l'hyperbole, qui est, par suite, une courbe convexe.*

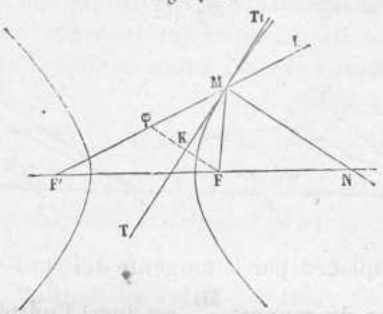
Même démonstration que pour l'ellipse (771), en remplaçant la somme des rayons vecteurs par leur différence.

819. Si l'on mène au point M (*fig.* 453) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les angles FMN, LMN, sont égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

La normale en un sommet de l'hyperbole se confond avec l'axe transverse, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

La tangente, la normale et les rayons vecteurs menés en un même point de la courbe rencontrent une sécante quelconque en quatre points conjugués deux à deux (143).

Fig. 453.



Si une ellipse et une hyperbole ont les mêmes foyers ou sont *homofocales*, elles se coupent à angle droit, car, en l'un quelconque des points d'intersection, la tangente de l'une est la normale de l'autre (770, 773).

820. Dans le cas de l'hyperbole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F, s'éloignent de plus en plus de l'autre foyer F′ après leur réflexion sur la courbe; mais toutes leurs directions prolongées viennent y converger.

THÉORÈME.

821. *Le lieu des points symétriques* φ *de l'un des foyers* F *par rapport aux tangentes est un cercle* (*directeur*) *décrit de l'autre foyer* F′ *comme centre avec la longueur* $2a$ *de l'axe transverse pour rayon* (*fig.* 453).

Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre F′ *et d'un point* F *extérieur à ce cercle est une hyperbole dont les foyers sont les points* F *et* F′, *et dont le cercle directeur relatif au foyer* F′ *est le cercle donné.*

Même démonstration que pour l'ellipse (775, 776), en remplaçant toujours la somme des rayons vecteurs par leur différence. L'hyperbole a, comme l'ellipse, deux cercles directeurs.

COROLLAIRE.

822. Ce théorème fournit une nouvelle construction par points (811) de l'hyperbole, qu'on peut résumer comme il suit : *Si d'un point* F, *pris à l'extérieur d'un cercle* F', *on mène des droites aux divers points de sa circonférence, les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux enveloppent une hyperbole qui a pour foyers les points* F *et* F' *et pour axe transverse le rayon du cercle* F'; *les points de contact de ces tangentes sont à leurs rencontres avec les prolongements des rayons du cercle* F' *qui correspondent aux points considérés.*

THÉORÈME.

823. *Le lieu des projections des foyers d'une hyperbole sur ses tangentes est la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre* (*fig.* 454).

Même démonstration que pour l'ellipse (777). Le cercle obtenu est dit le cercle *principal* de l'hyperbole.

COROLLAIRES.

824. Soient (*fig.* 454) la tangente MT, les rayons vecteurs MF, MF', de son point de contact, φ le symétrique du foyer F par rapport à la tangente MT, K la projection de ce foyer sur la tangente. Les rayons OK et F'φ du cercle principal et du

Fig. 454.

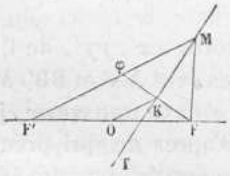
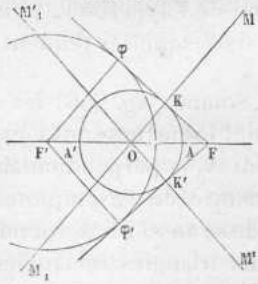


Fig. 455



cercle directeur relatif au foyer F' restent toujours parallèles entre eux pendant que, le point φ parcourant le cercle directeur, la droite Fφ tourne autour du foyer F (822, 823). Au moment où cette droite devient tangente au cercle directeur, elle le devient donc aussi au cercle principal (163); soient φ et K ses points de contact avec ces deux cercles (*fig.* 455). La

tangente à l'hyperbole qui passe par le point K, étant perpendiculaire à F φ, n'est alors autre chose que le prolongement du rayon OK et devient parallèle au rayon F'φ, de sorte que son point de contact M s'éloigne à l'infini (822). La droite OKM ainsi obtenue, qui touche la branche supérieure de la demi-hyperbole de droite à l'infini, est appelée *asymptote* de l'hyperbole.

La seconde tangente commune menée au cercle principal et au cercle directeur F' par le foyer F correspond à une seconde asymptote OK'M', qui touche à l'infini la branche inférieure de la demi-hyperbole de droite.

Les droites OKM, OK'M', étant également inclinées de part et d'autre de l'axe transverse, si l'on fait faire à l'hyperbole une demi-révolution autour de son axe non transverse, les foyers ne font que s'échanger, ainsi que les deux demi-hyperboles, de sorte que le prolongement OM_1 de la droite OKM est asymptote à la branche inférieure de la demi-hyperbole de gauche, tandis que le prolongement OM'_1 de la droite OK'M' est asymptote à la branche supérieure de cette demi-hyperbole.

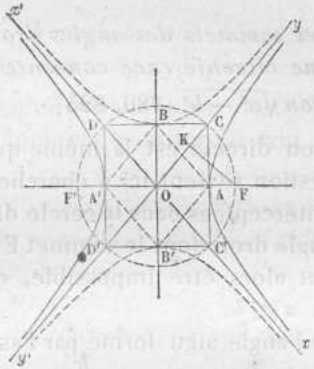
En résumé, *l'hyperbole a pour asymptotes les deux droites indéfinies tracées par son centre, parallèlement aux rayons du cercle directeur* F' *qui correspondent aux tangentes communes menées du foyer* F *au cercle* F' *et au cercle principal de la courbe.* Ces droites sont d'un grand secours pour la construction de l'hyperbole, puisqu'elles font connaître les directions vers lesquelles tendent ses branches infinies.

825. Soient (*fig.* 456) les asymptotes xx', yy', de l'hyperbole dont les foyers sont F et F' et les axes AA' et BB'. Menons au point A la perpendiculaire AC à l'axe transverse, jusqu'à la rencontre de l'asymptote yy'. D'après ce qui précède, si l'on abaisse aussi FK perpendiculaire sur yy', on aura $OK = a$. Les deux triangles rectangles OAC, OKF, sont donc égaux, et $OC = OF = c$. On voit que, a et c étant donnés, on en déduit AC; de même, a et AC étant connus, on en déduit c.

Achevons le rectangle CC'D'D. Par analogie avec l'ellipse (766), la longueur $BB' = 2AC$ ainsi déterminée est appelée la *longueur de l'axe non transverse* de l'hyperbole, et on la représente par $2b$. Remarquons que le parallélogramme ABA'B' a ses côtés parallèles aux asymptotes.

Les trois longueurs a, b, c, sont liées entre elles par la relation $c^2 = a^2 + b^2$. Elles sont liées dans l'ellipse par la relation $c^2 = a^2 - b^2$, qui ne diffère de la précédente que par le changement de b^2 en $-b^2$. Par suite, *les propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole qui ne dépendent que des longueurs de leurs axes se déduisent les unes des autres par le simple changement de b^2 en $-b^2$.*

Fig. 456.



826. Lorsqu'on donne les longueurs des axes de l'hyperbole, il est facile de déterminer graphiquement les foyers. On n'a qu'à élever à l'extrémité A de l'axe transverse une perpendiculaire $AC = b$ (*fig.* 456) et à décrire du point O comme centre, avec OC pour rayon, une circonférence qui coupe l'axe transverse aux deux foyers F et F'. On trouve en même temps l'asymptote OC et sa symétrique OC'.

827. On appelle *hyperbole équilatère* une hyperbole dont les deux axes ont la même longueur. Le rectangle CC'D'D (*fig.* 456) devenant alors un carré, on voit que *les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont à angle droit l'une sur l'autre.*

828. On entend par *hyperboles conjuguées* deux hyperboles qui ayant les mêmes axes, et par suite le même centre, la même distance focale et les mêmes asymptotes, sont situées par rapport à ces asymptotes dans des angles différents, c'est-à-dire que l'axe transverse de l'une est l'axe non transverse de l'autre, et réciproquement (*fig.* 456).

Deux hyperboles conjuguées ne sont identiques et ne peuvent

se substituer l'une à l'autre par un quart de révolution, que lorsqu'elles sont équilatères (827).

PROBLÈME.

829. *Mener une tangente à l'hyperbole par un point donné.*

Mêmes procédés que pour l'ellipse (779).

COROLLAIRES.

830. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole est une circonférence concentrique à la courbe et ayant pour rayon* $\sqrt{a^2 - b^2}$ (780, 825).

La démonstration directe est la même que pour l'ellipse. Seulement, la question revient ici à chercher le lieu des milieux des cordes interceptées dans le cercle directeur relatif au foyer F', par un angle droit dont le sommet F lui est extérieur. Le problème peut alors être impossible, et le lieu cesser d'exister, si l'on a $a < b$.

La tangente de l'angle aigu formé par l'asymptote Oy avec l'axe transverse étant représentée par $\frac{b}{a}$ (*voir* la *Trigonométrie*), le problème est impossible quand cet angle est supérieur à 45 degrés ou quand l'angle yOx des deux asymptotes (*fig.* 456) est obtus; il est possible, au contraire, quand cet angle est aigu.

En effet, l'angle des deux asymptotes est précisément (824) le supplément de celui des deux tangentes qu'on peut mener au cercle directeur F' par le foyer F. Or, ce n'est que lorsque l'angle de ces deux tangentes est obtus que les deux côtés de l'angle droit dont le sommet est en F peuvent rencontrer à la fois le cercle F'.

Lorsque l'angle des asymptotes est droit, celui des deux tangentes menées du foyer F au cercle directeur F' est aussi droit, et il n'y a pas d'autre angle droit circonscrit à l'hyperbole que celui de ses asymptotes. Ce résultat limite est d'ailleurs évident, car, la courbe étant alors équilatère (827), on a $a = b$, et le lieu se réduit au centre de l'hyperbole.

En général, le problème n'est possible que pour l'une des deux hyperboles conjuguées (828) déterminées par les axes a et b.

831. *Les tangentes* PM, PM', *menées à l'hyperbole par un*

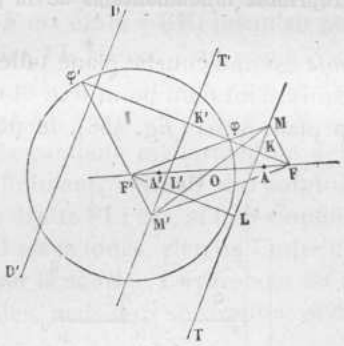
point extérieur P, *font des angles égaux avec les droites qui vont du point* P *aux deux foyers; la droite qui va du point* P *à l'un des foyers est bissectrice de l'angle intérieur ou extérieur des rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact* M *et* M', *suivant que les deux tangentes touchent l'hyperbole dans la même région ou dans deux régions différentes.*

PROBLÈME.

832. *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 457).

Même procédé que pour l'ellipse (782). Seulement, le problème n'est pas toujours possible. Il faut que, si l'on mène

Fig. 457.



par le centre de la courbe une parallèle à la droite donnée, elle ne tombe pas dans les angles des asymptotes qui renferment l'hyperbole. En effet, pour que la perpendiculaire menée du foyer F à la droite donnée rencontre le cercle directeur F', il est nécessaire qu'elle tombe au-dessous de la droite FK, perpendiculaire à la fois à l'asymptote O*y* (*fig.* 456) et tangente à ce cercle directeur. Le problème n'est donc en général possible que pour l'une des deux hyperboles conjuguées déterminées par les axes *a* et *b*.

COROLLAIRES.

833. *Les deux tangentes parallèles à une droite donnée ont leurs points de contact symétriques par rapport au centre* (783).

834. *Le produit des distances d'un foyer à deux tangentes*

parallèles ou le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant (785).

SCOLIE.

835. Les constructions des nos 829 et 832 n'exigent pas que l'hyperbole soit tracée (786).

PROBLÈME.

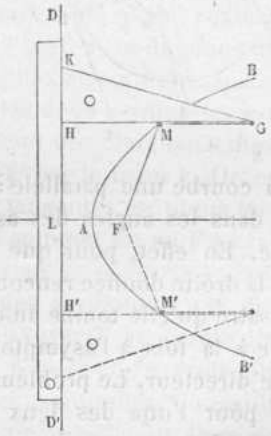
836. *Connaissant les foyers* F *et* F′ *et l'axe transverse d'une hyperbole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée.*

Même procédé que pour l'ellipse (787).

IV. — Propriétés fondamentales de la parabole.

837. La *parabole* est une courbe plane telle, que chacun de ses points est équidistant d'un point fixe et d'une droite fixe donnés dans son plan. Ainsi (*fig.* 458), le point fixe étant F

Fig. 458.



et la droite fixe DD′, on aura, pour tout point M de la parabole, en abaissant MH perpendiculaire sur DD′, MF = MH. Par sa définition même, la parabole est nécessairement située tout entière du même côté que le point fixe par rapport à la droite fixe.

D'après ce qu'on vient de dire, pour décrire un arc de parabole d'*un mouvement continu*, on fait coïncider l'arête d'une règle avec la droite DD', et l'on applique contre cette règle le petit côté KH d'une équerre KHG. Un fil, égal en longueur au grand côté HG de cette équerre, est fixé par ses deux extrémités, d'une part au point F et de l'autre à l'extrémité G du côté HG. Si l'on tend alors constamment ce fil contre le grand côté de l'équerre à l'aide d'un crayon, et si l'on fait en même temps glisser l'équerre le long de la règle, la pointe du crayon décrit un arc de parabole. En effet, pour une position quelconque M de cette pointe, on a

$$GM + MF = GM + MH, \quad \text{d'où} \quad MF = MH.$$

En opérant de cette manière, on trace d'un mouvement continu l'arc BA, qui va du point B de la courbe, dont la distance au point F est égale à GH, jusqu'au point A, milieu de la perpendiculaire FL abaissée du point F sur la droite DD'. Il faut ensuite retourner l'équerre, comme l'indique la figure, pour décrire l'arc AB'.

On voit que la parabole est formée de deux branches qui s'étendent indéfiniment, à partir du point A, au-dessus et au-dessous de la droite FL; car, si l'on emploie une règle, une équerre et un fil assez longs, rien ne limite l'éloignement des points obtenus sur la courbe. La parabole est donc une courbe à branches infinies, mais sans séparation, et d'un seul côté de la droite fixe.

838. Le point F est le *foyer* de la parabole; la droite DD' est sa *directrice*. La droite MF est le *rayon vecteur* du point M. La distance FL du foyer à la directrice se nomme le *paramètre* de la courbe, et on la représente par p.

839. On peut aussi tracer la parabole *par points*.

En effet, prenons (*fig.* 459) un point P quelconque sur la perpendiculaire FL abaissée du foyer sur la directrice. Par le point P, menons une perpendiculaire à FL ou une parallèle à la directrice, et du foyer F comme centre, avec PL pour rayon, décrivons une circonférence qui coupera cette parallèle en deux points M et M' appartenant à la parabole, comme équidistants du foyer et de la directrice.

Pour que les points d'intersection M et M' existent, il suffit

que le point P soit à l'intérieur du cercle décrit du foyer F comme centre avec PL pour rayon, c'est-à-dire qu'on ait $FP < PL$. Cette condition sera toujours remplie lorsque le point P sera à droite du foyer F (dans le cas de la figure); mais elle exige, si le point P est à gauche de F, qu'il reste à droite du point A, milieu de FL. Si l'on a dans ce cas, comme condition limite, $FP = PL$, le point P se confond avec le point A, et les deux points M et M′ se réunissent en ce point. Le rayon vecteur minimum est donc AF ou $\frac{p}{2}$: il n'y a pas de rayon vecteur maximum, rien ne limitant l'éloignement du point P à droite du foyer F.

THÉORÈME.

840. *La parabole a pour axe la perpendiculaire menée du foyer sur la directrice* (*fig.* 459).

Même démonstration que pour l'ellipse (765, 1°).

Fig. 459.

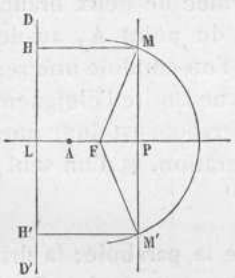
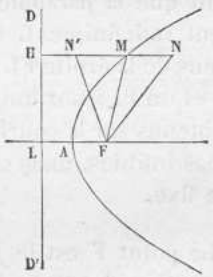


Fig. 460.



Le point A, commun à la parabole et à son axe, est le *sommet* de la courbe.

THÉORÈME.

841. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à la parabole, sa distance au foyer est moindre ou plus grande que sa distance à la directrice* (*fig.* 460).

Soit d'abord un point N intérieur à la courbe. Menons la droite NF et la perpendiculaire NH à la directrice, laquelle coupera la parabole au point M (837). Le triangle NFM donne alors

$NF < NM + MF$ ou $NF < NH$, puisque $MF = MH$.

Soit de même un point N′ extérieur à la courbe. Si le point N′ et le foyer sont de côtés différents par rapport à la directrice, la proposition est évidente. Sinon, menons la droite N′F et la perpendiculaire N′H à la directrice, laquelle, prolongée, coupera la parabole au point M. Le triangle N′FM donne alors

$$N'F > MF - MN' \quad \text{ou} \quad N'F > N'H, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

COROLLAIRE.

842. Ce théorème, rapproché de la définition de la courbe, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque de son plan par rapport à la parabole supposée non tracée. *Suivant que la distance du point considéré au foyer est égale, supérieure ou inférieure à sa distance à la directrice, ce point est à la courbe, il lui est extérieur ou intérieur.*

THÉORÈME.

843. *La tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point.*

Prenons sur la parabole (*fig.* 461) deux points voisins M et M′; menons la sécante MM′S; abaissons des deux points considérés les perpendiculaires Mφ, M′φ′, sur la directrice DD′, et traçons leurs rayons vecteurs. Portons sur FM une lon-

Fig. 461.

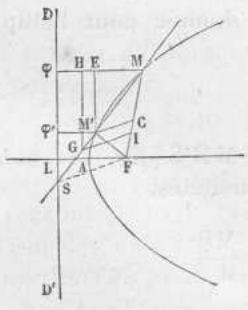
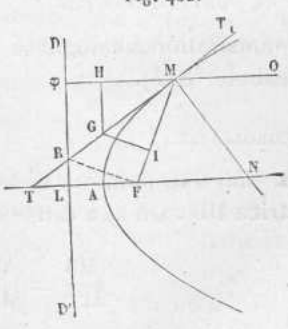


Fig. 462.



gueur FC = FM′ et, sur φM, une longueur φE = φ′M′. D'après la définition de la parabole, MC est égal à ME.

D'un point G quelconque de la sécante MM'S, menons à M'C et à M'E, jusqu'à la rencontre de FM et de φM, les parallèles GI et GH. Les deux quadrilatères CM'EM, IGHM, sont semblables (153), et l'égalité de MC et de ME entraîne celle de MI et de MH.

A mesure que le point M' se rapproche du point M, GH reste, comme M'E, perpendiculaire à Mφ, tandis que GI, perpendiculaire à la bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle M'FC, tend à le devenir au rayon vecteur FM. On a de plus constamment MI = MH. La tangente à la parabole (*fig.* 462) doit donc être telle que, si, d'un point quelconque G pris sur cette droite, on abaisse des perpendiculaires GI et GH sur le rayon vecteur du point de contact M et sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, on ait MI = MH. Les triangles rectangles MGI, MGH, sont donc égaux, ainsi que les angles GMI, GMH. *La tangente à la parabole est donc bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice.*

Mais, l'angle GMH étant l'opposé par le sommet de l'angle T_1MO, les deux angles GMI ou TMF et T_1MO sont égaux; ce qui conduit à l'énoncé adopté.

844. Réciproquement, *la courbe dont la tangente est bissectrice de l'angle formé par les droites menées d'un point de la courbe à un point fixe et perpendiculairement à une droite fixe, est une parabole ayant le point et la droite fixes pour foyer et pour directrice.*

Démonstration analogue à celle donnée pour l'ellipse et l'hyperbole (817).

COROLLAIRE.

845. Soit S le point où la sécante MM'S (*fig.* 461) coupe la directrice DD'. On a, à cause des parallèles,

$$\frac{MS}{M'S} = \frac{M\varphi}{M'\varphi'} = \frac{MF}{M'F};$$

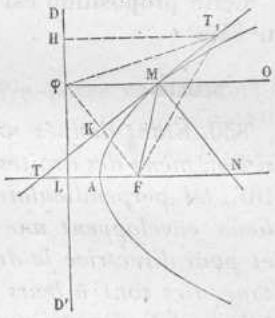
la droite SF est donc la bissectrice de l'angle extérieur en F du triangle MFM' (143). *La droite qui joint le foyer d'une parabole au point de rencontre d'une sécante quelconque avec*

la directrice est donc *bissectrice de l'angle extérieur des rayons vecteurs des points d'intersection de la sécante avec la courbe.*

A la limite, quand la sécante devient tangente, c'est-à-dire quand l'angle MFM' devient nul, la droite SF est remplacée (*fig.* 462) par la droite RF, bissectrice de l'angle supplémentaire de cet angle nul. Par suite, *la droite qui joint le foyer d'une parabole au point où une tangente quelconque rencontre la directrice, est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact.*

846. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point de contact* M, *sont extérieurs à la parabole*, qui, par suite (772), est une courbe convexe (*fig.* 463).

Fig. 463.



En effet, le triangle FMφ étant isocèle et la tangente étant la bissectrice de son angle au sommet (843), elle est perpendiculaire sur le milieu K de Fφ. Pour un point T_1 quelconque de la tangente, on a donc, T_1H étant la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, $T_1H < T_1\varphi$ ou $T_1H < T_1F$. Le point T_1 est donc extérieur à la courbe (842).

847. Si l'on mène au point M (*fig.* 463) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, OMN, sont égaux comme compléments d'angles égaux (843). Donc, *la normale à la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la parallèle menée à l'axe par ce point.*

Au sommet de la parabole, la normale se confond avec l'axe et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

Soient T et N (*fig.* 463) les points où la tangente et la normale rencontrent l'axe. Les triangles TMF, NMF, étant évidemment isocèles, on a MF = FT = FN. *Le foyer* F *est* donc *à une distance, soit du pied de la tangente, soit du pied de la normale sur l'axe, égale au rayon vecteur du point de contact.*

848. Dans le cas de la parabole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent du foyer, deviennent tous

parallèles à l'axe après leur réflexion sur la courbe. C'est pourquoi l'on emploie des réflecteurs paraboliques lorsqu'on veut projeter au loin un faisceau de rayons lumineux parallèles (lanternes de voitures, phares). Réciproquement, tout rayon qui vient rencontrer la parabole parallèlement à son axe se réfléchit au foyer de la courbe. De là, par exemple, l'usage des réflecteurs paraboliques dans les télescopes, pour concentrer au foyer les rayons lumineux venant de l'astre observé.

THÉORÈME.

849. *Le lieu des points symétriques* φ *du foyer* F *par rapport aux tangentes à la parabole est la directrice* (*fig.* 463).

Cette proposition est évidente d'après ce qui a été dit au n° 846.

SCOLIE.

850. *Étant donnés un point* F *et une droite* DD' (*fig.* 463), *si l'on mène des droites* Fφ *aux différents points de la droite* DD', *les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux enveloppent une parabole qui a pour foyer le point* F *et pour directrice la droite* DD'; *les points de contact de ces tangentes sont à leurs rencontres avec les perpendiculaires menées à la directrice par les points* φ.

C'est là un nouveau procédé pour décrire la parabole par points (839). En le suivant, on n'obtient qu'un point à la fois; mais on a en même temps la tangente en ce point.

851. On voit que *les parallèles à l'axe de la parabole ne rencontrent la courbe qu'en un seul point.* Il serait donc faux de dire qu'une droite qui n'a qu'un point commun avec une courbe, même convexe, lui est tangente. Une droite tangente à une courbe convexe n'a qu'un point commun avec elle (772); mais la réciproque n'est pas vraie.

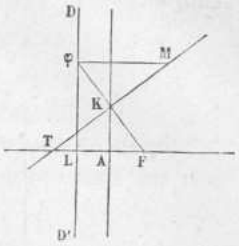
THÉORÈME.

852. *Le lieu des projections du foyer de la parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet.*

MT étant la tangente à la courbe au point M (*fig.* 464), et φ le symétrique du foyer F par rapport à cette tangente, le

point K où Fφ coupe la tangente est le milieu de Fφ. D'ailleurs, le sommet A est le milieu de FL. Donc, dans le triangle FLφ, AK est parallèle à la directrice ou se confond avec la tangente au sommet (847). La projection K du foyer sur une tangente se trouve, par suite, sur la tangente au sommet.

Fig. 464.



Réciproquement, K étant un point de la tangente au sommet, si l'on mène la droite FKφ, le point φ sera le symétrique du foyer F par rapport à la tangente qui passe par le point K (850); le point K sera donc la projection du foyer F sur cette tangente.

COROLLAIRE.

853. Si l'un des côtés d'une équerre passe constamment par le foyer F, tandis que son sommet parcourt la tangente AK au sommet de la courbe, l'autre côté de l'équerre reste constamment tangent à la parabole.

THÉORÈME.

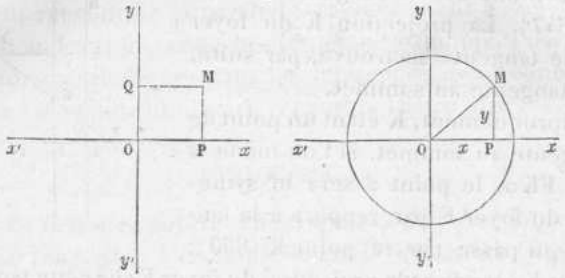
854. *Dans toute courbe rapportée à des axes rectangulaires, l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre la sous-tangente et la sous-normale.*

Pour indiquer la position d'un point M dans un plan, on peut donner ses distances MP et MQ à deux axes rectangulaires indéfinis xOx', yOy' (*fig.* 465), tracés dans ce plan. Le nombre qui mesure la distance $MQ = OP$ du point M à l'axe yOy', s'appelle l'*abscisse* de ce point; son *ordonnée* est le nombre qui mesure sa distance $MP = OQ$ à l'axe xOx'. L'abscisse est d'ailleurs positive ou négative, suivant que P tombe sur Ox ou sur Ox'; l'ordonnée est positive ou négative, suivant que Q tombe sur Oy ou sur Oy'. L'abscisse et l'ordonnée d'un point M constituent ses deux *coordonnées*. Les axes xOx' et yOy' sont les *axes des coordonnées*, et leur intersection O en est l'*origine* (*voir* les indications déjà données à ce sujet, t. I, *Alg. élém.*, 312).

Quand un point appartient à une courbe donnée, son ordonnée y dépend de son abscisse x, et elle est déterminée

par le choix de cette abscisse. Par exemple, l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point quelconque d'une circonférence de

Fig. 465.



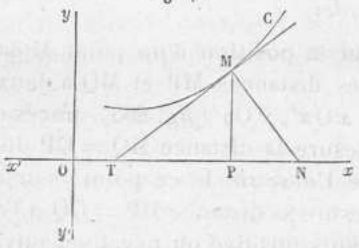
rayon R, rapportée à deux axes rectangulaires passant par son centre (*fig.* 465), sont évidemment liées par la relation

$$y^2 + x^2 = R^2, \quad \text{d'où} \quad y^2 = R^2 - x^2.$$

Le choix des axes coordonnés est arbitraire. On adopte de préférence les droites les plus remarquables du plan relativement à la courbe, telles que ses axes, ses tangentes aux sommets, etc. Dans la parabole, on choisit l'axe et la tangente au sommet.

Cela posé, soit (*fig.* 466) une courbe C rapportée à deux

Fig. 466.



axes de coordonnées rectangulaires xOx', yOy'. Menons en un point quelconque M la tangente MT, la normale MN et l'ordonnée MP. La projection TP sur l'axe Ox de la portion de tangente MT comprise entre son point de contact M et son pied T sur cet axe, s'appelle *sous-tangente;* de même, PN est la *sous-normale*. Le triangle TMN étant rectangle en M, et MP étant perpendiculaire sur l'hypoténuse TN, le théorème énoncé est démontré (167).

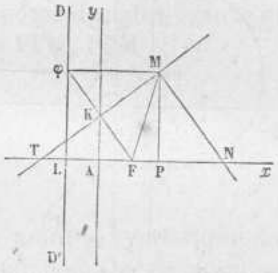
Au lieu d'axes rectangulaires, on peut employer des axes obliques. Les coordonnées d'un point sont encore ses distances aux deux axes, mais comptées parallèlement à ces axes. Les projections ne sont plus alors orthogonales, mais obliques, et le théorème précédent cesse d'être vrai.

THÉORÈME.

855. *Dans la parabole : 1° la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact ; 2° la sous-normale est constante et égale au paramètre* (*fig.* 467).

1° Soit la tangente en M à la parabole. Si l'on prend pour axes coordonnés l'axe Ax de la courbe et la tangente au sommet Ay, le point M aura MP pour ordonnée et AP pour abscisse. Le triangle TFM étant isocèle (843), la projection K du foyer F sur la tangente MT est le milieu de MT. La tangente au sommet, AKy, étant parallèle à l'ordonnée MP, le sommet A est donc le milieu de la sous-tangente TP, et TP = 2AP.

Fig. 467.



2° Soit la normale MN. Elle est perpendiculaire à la tangente MT comme la droite Fφ. La figure MφFN est donc un parallélogramme, et φF = MN. Les deux triangles rectangles MPN, φLF, sont alors égaux, et l'on a PN = LF = p.

COROLLAIRE.

856. *Le carré de l'ordonnée d'un point de la parabole est proportionnel à l'abscisse de ce point* (*fig.* 467).

Soient y et x les coordonnées MP et AP d'un point quelconque M de la parabole. On a (854, 855)

$$y^2 = \text{TP}.\text{PN} = 2x.p \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px.$$

PROBLÈME.

857. *Mener une tangente à la parabole par un point donné.*

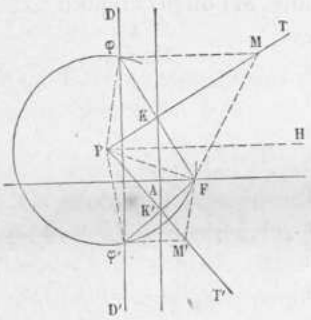
1° *Si le point donné* M *est sur la courbe* (*fig.* 467), on mène le rayon vecteur MF et la perpendiculaire Mφ sur la directrice ;

puis, la bissectrice de l'angle FMφ, qui est la tangente demandée (843).

Il vaut mieux prendre sur l'axe, du côté du sommet, une longueur FT égale à MF; en joignant le point T ainsi obtenu au point donné M, on a (843) la tangente demandée.

2° *Si le point donné* P *est extérieur à la parabole*, on remarque que la question serait résolue si l'on connaissait le symétrique φ du foyer F par rapport à la tangente cherchée; car on aurait alors cette tangente en abaissant du point P une perpendiculaire TP sur Fφ (*fig.* 468). La droite TP couperait d'ailleurs la parallèle menée à l'axe par le point φ, au point de contact M. Or, le point φ se trouve à la fois sur la directrice DD' (849) et sur le cercle décrit du point P comme centre avec PF comme rayon.

Fig. 468.



Ce cercle et la directrice se coupent toujours, quand le point P est extérieur à la courbe; car il est alors plus près de la directrice que du foyer (841), et il y a deux solutions, qui se réduisent à une seule quand le point P est sur la parabole, ou disparaissent lorsqu'il est intérieur à la courbe.

COROLLAIRES.

858. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à la parabole soient à angle droit.

Ces tangentes étant supposées à angle droit, comme elles sont respectivement perpendiculaires aux milieux des droites Fφ et Fφ', l'angle φFφ' est aussi droit; par suite, $\varphi\varphi'$ est un diamètre de la circonférence PF, et le point P est sur la directrice. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est donc la directrice.*

Dans ce cas, l'angle PFM est droit ainsi que l'angle PFM' (845); la corde des contacts MM' passe donc alors par le foyer et est perpendiculaire à PF.

859. *Les tangentes* PM, PM', *menées d'un point extérieur* P *à la parabole, font des angles égaux avec la droite*

qui joint ce point au foyer et avec la parallèle menée à l'axe par ce point; la droite qui va du foyer au point P *est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs des points de contact* M *et* M'.

Reportons-nous à la *fig.* 468, et soit PH la parallèle menée à l'axe par le point P. La tangente PMT étant perpendiculaire sur le milieu de $F\varphi$, comme la tangente PM'T' sur le milieu de $F\varphi'$, les deux angles MPH, $F\varphi\varphi'$, ont leurs côtés respectivement perpendiculaires et sont égaux; la droite PM' est la bissectrice de l'angle $\varphi'PF$, et l'angle au centre M'PF, égal alors à l'angle inscrit $F\varphi\varphi'$, l'est aussi à l'angle MPH. De plus, les angles PFM, PFM', sont respectivement égaux aux angles $P\varphi M$, $P\varphi'M'$. Or, le triangle $\varphi P\varphi'$ étant isocèle, les angles $P\varphi M$, $P\varphi'M'$, sont égaux comme composés d'angles égaux; et leur égalité démontre celle des angles PFM, PFM'.

PROBLÈME.

860. *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point φ, symétrique du foyer F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point se trouve à l'intersection de la directrice et de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la droite donnée. Il y a toujours une solution, et une seule.

SCOLIE.

861. Les constructions des n^os^ 857 et 860 n'exigent pas que la courbe soit tracée : il suffit d'en connaître le foyer et la directrice.

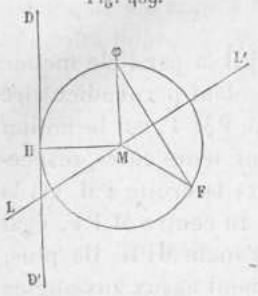
PROBLÈME.

862. *Connaissant le foyer* F *et la directrice* DD' *d'une parabole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée* LL'.

Supposons le problème résolu, et prenons (*fig.* 469) le symétrique φ du foyer F par rapport à LL'. Si M est l'un des points de rencontre de la droite LL' avec la courbe, on a $M\varphi = MF = MH$, MH étant la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice. Le cercle décrit du point M comme

centre, avec MF pour rayon, passe donc par les points F et φ et est tangent à la directrice. La question est ainsi ramenée à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points donnés F et φ et tangent à une droite donnée DD'. Nous avons résolu ce problème (196, 1°).

Fig. 469.



Comme il n'est possible que lorsque les deux points F et φ sont situés d'un même côté de la droite DD', la droite LL' coupera la parabole, lui sera tangente ou ne la rencontrera pas, suivant que le point φ sera du même côté que le foyer par rapport à la directrice, sur cette directrice, ou de l'autre côté de cette droite par rapport au foyer.

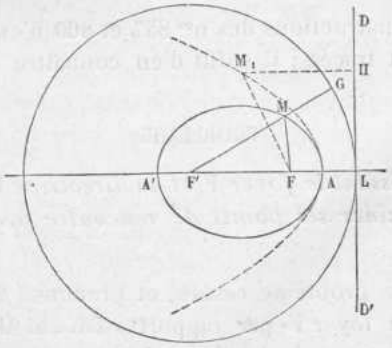
COROLLAIRE.

863. La parabole, ne pouvant être coupée par une droite en plus de deux points, est une courbe convexe (846).

V. — De la parabole, considérée comme limite de l'ellipse.

864. *La limite d'une ellipse (ou d'une hyperbole) dont un sommet et le foyer voisin restent fixes, tandis que l'autre foyer s'en éloigne indéfiniment dans la direction du grand axe (ou de l'axe transverse), est une parabole qui a pour sommet et pour foyer le sommet et le foyer fixes (fig. 470).*

Fig. 470.



En effet, le cercle directeur relatif au foyer mobile F' coupe toujours le grand axe à droite du foyer fixe F, en un même point L déterminé par la

condition évidente AL = AF. A mesure que le centre F' de ce cercle s'éloigne dans la direction AA', son rayon croît indéfiniment, de sorte qu'il a pour limite la perpendiculaire DD' menée par le point L au grand axe AA'. D'ailleurs, tout point M de l'ellipse étant également distant du foyer F et du cercle directeur F' (776), on a constamment MF = MG, c'est-à-dire à la limite, quand l'ellipse se déformant le point M vient en M_1, $M_1F = M_1H$, en désignant par M_1H la perpendiculaire abaissée du point M_1 sur la droite DD', limite du cercle F'. Le lieu des positions limites des points de l'ellipse donnée est donc une parabole ayant pour foyer et pour sommet les points F et A, et, par suite, la droite DD' pour directrice.

La même démonstration s'applique à l'hyperbole (821). Dans ce cas, la parabole est la limite de la demi-hyperbole de droite à laquelle appartiennent le sommet A et le foyer F; l'autre demi-hyperbole de gauche disparaît à l'infini.

COROLLAIRE.

865. Le théorème précédent permet de prévoir et de démontrer les propriétés de la parabole, en les déduisant par voie de transformation des propriétés correspondantes de l'ellipse.

Par exemple, pour démontrer que *la tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point* (843), il suffit de remarquer que, lorsque l'un des foyers de l'ellipse s'éloigne à l'infini, le rayon vecteur relatif à ce foyer tend à devenir parallèle au grand axe.

De même, pour établir que *le lieu des projections du foyer de la parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet* (852), on n'a qu'à observer que le cercle principal de l'ellipse tend vers la tangente au sommet fixe du grand axe, lorsque l'autre sommet se transporte à l'infini.

Si les propriétés considérées dépendent explicitement des axes a et b de l'ellipse et de sa distance focale c, on substitue à a et à b leurs valeurs en fonction de c et du paramètre $p = 2(a - c)$ de la parabole limite; puis, en supposant c infini dans les formules obtenues, on passe des propriétés de l'ellipse représentées par ces formules aux propriétés correspondantes de la parabole exprimées en fonction du paramètre p.

THÉORÈME.

866. *Tous les diamètres de la parabole sont des droites parallèles à l'axe.*

On démontre immédiatement cette proposition en regardant la parabole comme la limite d'une ellipse (864) dont l'un des foyers et le sommet voisin coïncident avec le foyer et le sommet de la parabole, mais dont l'autre foyer et, par suite, le centre se transportent à l'infini sur le grand axe de la courbe.

Les propriétés de l'ellipse démontrées aux nos 800 et 801 appartiennent

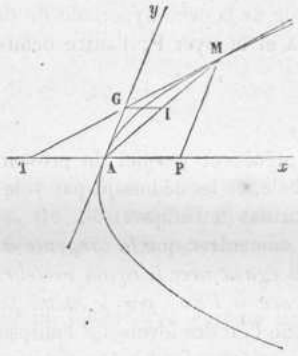
aussi à la parabole limite. Ces propriétés vont nous permettre d'établir la proposition suivante.

THÉORÈME.

867. *La parabole étant rapportée au système d'axes obliques formé par un diamètre et la tangente à son extrémité, dans ce nouveau système d'axes, la sous-tangente est encore double de l'abscisse du point de contact* (835).

En effet, soient (*fig.* 471) la tangente Ay et le diamètre Ax pris pour

Fig. 471.



axes coordonnés; menons la tangente MT en un point quelconque M de la parabole. Si, par le point d'intersection G des tangentes Ay et MT, on mène une parallèle à Ax, cette parallèle coupera la corde AM en son milieu (801) : le point G est donc le milieu de TM. AGy étant parallèle à l'ordonnée MP, le point A est alors le milieu de la sous-tangente TP.

THÉORÈME.

868. *L'aire d'un segment parabolique est les deux tiers du parallélogramme qui a pour côtés la corde et la flèche du segment, cette flèche étant mesurée sur le diamètre conjugué à la corde du segment.*

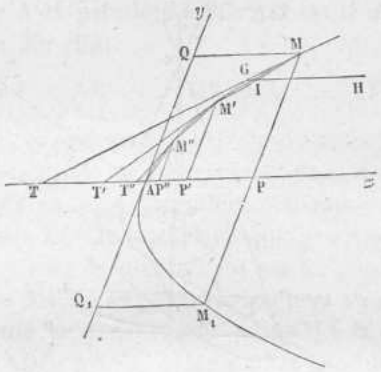
Soit (*fig.* 472) le segment parabolique MAM_1 déterminé par la corde MM_1. Prenons pour axes coordonnés le diamètre Ax conjugué à cette corde et la tangente parallèle Ay. Évaluons d'abord l'aire de la portion MAP.

Inscrivons dans l'arc AM une ligne brisée MM'M''... A, et, par les sommets de cette ligne brisée, menons à la courbe les tangentes MT, M'T', ..., jusqu'à la rencontre du diamètre Ax; menons aussi les ordonnées MP, M'P', ... des sommets de la ligne brisée.

Comparons le trapèze MM'P'P au triangle correspondant GTT'. Si l'on

mène par le sommet G du triangle une parallèle GH à Ax, elle passera par le milieu I de la corde MM′ (866). La perpendiculaire abaissée du milieu du côté MM′ sur le côté PP′ du trapèze MM′P′P est donc égale à la hauteur du triangle GTT′. Pour avoir le rapport de leurs aires, il suffit

Fig. 472.



alors de comparer le côté PP′ du trapèze à la base TT′ du triangle; car, en menant par le point I une parallèle à PP′ jusqu'à la rencontre de MP et de M′P′, on transforme le trapèze en un parallélogramme équivalent. Or (867) AT = AP et AT′ = AP′, d'où TT′ = PP′. Le triangle est donc la moitié du trapèze. Et, comme on peut répéter le même raisonnement pour chaque trapèze et pour le triangle correspondant, la somme des trapèzes reste toujours égale au double de la somme des triangles. La limite de la première somme étant l'aire MAP et la limite de la seconde l'aire MAT, l'aire MAP est les deux tiers du triangle total MTP ou du parallélogramme équivalent APMQ.

L'aire M_1AP étant de même les deux tiers du parallélogramme APM_1Q_1, l'aire cherchée MAM_1 est enfin les deux tiers du parallélogramme MQQ_1M_1, qui a pour côtés la corde MM_1 du segment ou le double de l'ordonnée MP, et la flèche de ce segment ou l'abscisse AP.

VI. — Ellipse, hyperbole et parabole, considérées comme sections planes du cône de révolution.

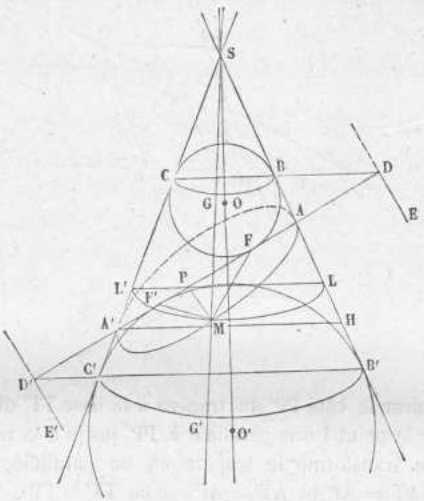
THÉORÈME.

869. *La section d'un cône circulaire droit par un plan est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

1° Supposons que *le plan sécant rencontre toutes les génératrices du cône sur une même nappe* (*fig.* 473).

Menons le plan méridien (570) du cône, qui est perpendiculaire au plan sécant AMA′; il coupera le cône suivant les deux génératrices SA et SA′, qui font entre elles l'*angle au sommet* de la surface, et le plan sécant suivant la droite AA′.

Fig. 473.



Dans le plan méridien ainsi considéré, construisons les circonférences O et O′ qui, situées de part et d'autre de AA′, sont à la fois tangentes aux génératrices SA et SA′ et à la droite AA′, qu'elles touchent aux points F et F′. Si l'on fait tourner le plan méridien autour de l'axe SO, ces deux circonférences engendreront deux sphères tangentes à la surface conique suivant les *parallèles* (622) BC et B′C′, et tangentes au plan sécant en F et en F′.

Cela posé, prenons un point M quelconque sur la courbe d'intersection; menons les droites MF, MF′, et la génératrice SM qui coupera en G et en G′ les parallèles BC, B′C′. La droite MF étant tangente à la sphère O, on a (622) MF = MG. On a de même, par rapport à la sphère O′, MF′ = MG′. Par suite,

$$MF + MF' = MG + MG' = GG' = BB' = \text{const.}$$

D'ailleurs, en vertu des propriétés rappelées, on a

$$BB' = AB + AB' = AF + AF'$$

et

$$BB' = CC' = CA' + A'C' = A'F + A'F'.$$

Il en résulte évidemment

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad BB' = AA'.$$

La courbe obtenue est donc *une ellipse ayant* AA' *pour grand axe et les points* F *et* F' *pour foyers.*

Si l'on trace A'H parallèle à BC, AH est la *distance focale* de cette ellipse. En effet,

$$AF' = AB' \quad \text{et} \quad HB' = A'C' = AF.$$

Les plans des *parallèles* BC, B'C', prolongés jusqu'à la rencontre du plan sécant, le coupent suivant deux droites DE, D'E', perpendiculaires au plan méridien considéré (763). Si l'on mène le parallèle LL' de la surface qui passe par le point M, son intersection avec le plan sécant est de même dirigée suivant l'ordonnée MP de ce point par rapport au grand axe AA', et PD représente la distance du point M à la droite DE. Les triangles APL, ADB, AA'H, évidemment semblables, donnent alors

$$\frac{BL \text{ ou } MF}{PD} = \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AA'} = \text{const.}$$

Ainsi, les distances de chaque point de l'ellipse trouvée au foyer F et à la droite DE sont entre elles dans un rapport égal à l'excentricité (763) de la courbe. La même démonstration s'applique au foyer F' et à la droite D'E'. Les droites DE, D'E', sont appelées les *directrices* de la section; elles sont *extérieures* à la courbe.

2° Supposons que *le plan sécant rencontre les deux nappes du cône* (*fig.* 474).

On a alors

$$MF' - MF = MG' - MG = GG' = BB' = \text{const.};$$

d'ailleurs,

$$BB' = AB' - AB = AF' - AF$$

et

$$BB' = CC' = A'C - A'C' = A'F - A'F'.$$

Il en résulte évidemment

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad BB' = AA'.$$

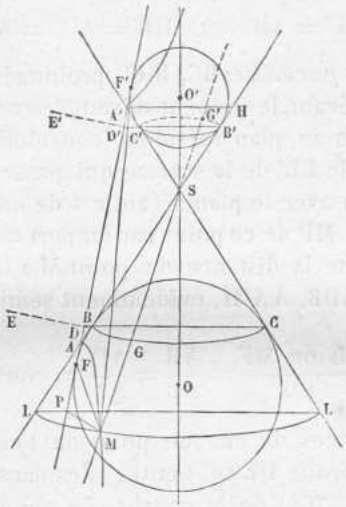
La courbe obtenue est donc *une hyperbole, ayant* AA' *pour axe transverse et les points* F *et* F' *pour foyers.*

Si l'on trace A′H parallèle à B′C′, AH est la *distance focale* de cette hyperbole. En effet,

$$AB' = AF' \quad \text{et} \quad B'H = C'A' = A'F'.$$

Les droites DE et D′E′, intersections des parallèles BC, B′C′,

Fig. 474.



avec le plan sécant, sont les *directrices* de l'hyperbole; elles sont *intérieures* à la courbe. Le rapport des distances du point M au foyer F et à la droite DE est égal à l'excentricité de la courbe. C'est ce que les triangles semblables APL, ADB, AA′H, montrent immédiatement.

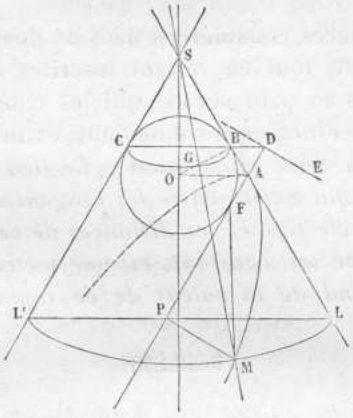
3° Supposons le *plan sécant parallèle à l'une des génératrices du cône* (*fig.* 475).

Ayant mené le plan méridien LSL′ perpendiculaire au plan sécant, ce dernier se trouve parallèle à la génératrice SL′ et est alors coupé par le plan méridien suivant une droite AP parallèle à cette génératrice. Dans le plan méridien, construisons la circonférence O, tangente aux génératrices principales en B et en C, et à la droite AP au point F. Si l'on fait tourner la figure autour de l'axe SO, la sphère engendrée par la circonférence O est tangente au cône suivant le parallèle BC et touche en F le plan sécant.

Cela posé, prenons un point quelconque M sur la courbe

d'intersection; menons la droite MF et la génératrice SM qui coupe en G le parallèle BC de la surface; menons également le parallèle LL′ de la surface qui passe par le point M et qui

Fig. 475.



rencontre le plan sécant suivant l'ordonnée MP de ce point par rapport à AP. On aura toujours

$$MF = MG = BL.$$

D'ailleurs, l'intersection du plan secant et du parallèle BC est une droite DE perpendiculaire au plan méridien, et PD représente la distance du point M à la droite DE. Les deux triangles APL, ABD, étant isocèles, puisqu'ils sont tous deux semblables au triangle SLL′, on a

$$PD = BL, \quad \text{c'est-à-dire} \quad MF = PD.$$

La courbe obtenue est donc *une parabole ayant le point* F *pour foyer et la droite* DE *pour directrice.*

COROLLAIRES.

870. Ce théorème permet de réunir les trois courbes étudiées précédemment sous la dénomination de *sections coniques.*

Les propriétés de ces courbes, relativement à leurs foyers et à leurs directrices, conduisent à la définition générale suivante : *Le lieu des points dont le rapport des distances à un*

point fixe (*foyer*) *et à une droite fixe* (*directrice*) *est constant, est une section conique.*

Suivant que le rapport donné est inférieur, supérieur ou égal à l'unité, la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

871. Les sphères considérées dans la démonstration précédente peuvent, tout en restant inscrites au cône, cesser d'être tangentes au plan sécant, qui les coupe alors suivant deux cercles. Les mêmes raisonnements étant applicables à ce cas, on arrive à cette proposition : *Le lieu des points tels que le rapport qui existe entre les tangentes menées de ces points à un cercle fixe et les distances de ces mêmes points à une droite fixe soit constant, est une section conique dont la nature dépend de la valeur de ce rapport comparée à l'unité* (870).

PROBLÈME.

872. *Placer une ellipse, une hyperbole ou une parabole donnée sur un cône de révolution donné.*

1° Si l'on se reporte à la *fig.* 473, on voit qu'on connaît dans le triangle AA'H le grand axe AA' de l'ellipse donnée et sa distance focale AH, ainsi que l'angle AHA', complément du demi-angle au sommet du cône donné. La question revient donc à construire un triangle avec deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. Comme l'angle donné est opposé au plus grand des deux côtés donnés, ce triangle est complètement déterminé (120). Quand il sera construit, on élèvera une perpendiculaire sur le milieu de A'H, et la surface conique engendrée par AH en tournant autour de cette perpendiculaire sera coupée suivant l'ellipse donnée par un plan mené suivant AA' perpendiculairement au plan du triangle AA'H. *On peut donc toujours placer une ellipse donnée sur un cône donné.*

2° Si l'on se reporte à la *fig.* 474, on voit qu'on connaît dans le triangle AA'H l'axe transverse AA' et la distance focale AH de l'hyperbole donnée, ainsi que l'angle AHA', complément du demi-angle au sommet du cône donné. Comme cet angle est opposé ici au plus petit des deux côtés donnés, le problème peut avoir deux solutions ou n'en avoir aucune (120). Pour qu'il soit possible, il faut que AA' surpasse la perpendiculaire abaissée du point A sur HA', c'est-à-dire

qu'on ait, en appelant 2β l'angle au sommet du cône et en posant (810) $AA' = 2a$, $AH = 2c$,

$$2a > 2c\cos\beta \quad \text{ou} \quad \cos\beta < \frac{a}{c}.$$

Mais, si l'on appelle 2θ l'angle des deux asymptotes de l'hyperbole proposée, on a évidemment (825)

$$\frac{a}{c} = \cos\theta.$$

La condition cherchée est donc

$$\cos\beta < \cos\theta,$$

ou, puisqu'il s'agit d'angles inférieurs à un droit (*voir* la *Trigonométrie*),

$$\beta > \theta \quad \text{ou} \quad 2\beta > 2\theta.$$

Donc, *pour pouvoir placer une hyperbole donnée sur un cône de révolution donné, il faut que l'angle au sommet du cône surpasse celui des deux angles des asymptotes de l'hyperbole qui comprend la courbe.*

3° Si l'on se reporte à la *fig.* 475, on voit que la droite OA est perpendiculaire à l'axe SO, d'après la détermination du point O et le parallélisme des droites SL' et AP. Dans le triangle rectangle OBA, on connaît par suite le côté

$$AB = AD = \frac{FD}{2},$$

demi-paramètre de la parabole donnée (838), et l'angle BAO, complément du demi-angle au sommet du cône donné. Ce triangle est donc complètement déterminé (30). L'ayant construit, on élèvera OS perpendiculaire sur OA, et la surface conique engendrée par la rotation de AB autour de SO sera coupée suivant la parabole donnée par un plan mené perpendiculairement à celui du triangle OBA et passant par la droite AP, tracée de manière que AO soit la bissectrice de l'angle SAP. *On peut* donc *toujours placer une parabole donnée sur un cône donné.*

SCOLIE.

873. Le sommet d'un cône de révolution s'éloignant à l'infini dans la direction de l'axe, ce cône dégénère en cylindre

de révolution. *Un cylindre circulaire droit est* donc *coupe suivant une ellipse par un plan sécant quelconque* (869, 1°).

C'est ce qu'on démontrera, du reste, directement en adoptant la même marche que précédemment. Cette marche permettra de déterminer le grand axe, le foyer et les directrices de la section proposée. On en déduira facilement que *toutes les ellipses trouvées en coupant par un plan quelconque un cylindre de révolution ont pour petit axe le diamètre de ce cylindre.*

On peut toujours placer une ellipse donnée sur un cylindre de révolution donnée (872, 1°), *lorsque le petit axe de l'ellipse est égal au diamètre du cylindre.*

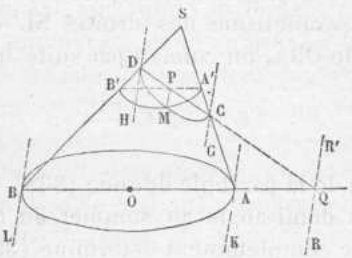
VII. — Section anti-parallèle du cône oblique à base circulaire.

THÉORÈME.

874. *Dans un cône oblique à base circulaire, toute section anti-parallèle à la base est un cercle.*

Soit S le sommet d'un cône oblique ayant pour base le cercle O (*fig.* 476). On nomme *plan principal* de ce cône le

Fig. 476.



plan SAB mené par la droite qui joint le sommet S au centre O de la base, perpendiculairement au plan de cette base, et l'on dit qu'un plan CMD est *anti-parallèle à la base* lorsqu'il est perpendiculaire sur le plan principal SAB et que sa trace CD sur ce plan principal est anti-parallèle à AB par rapport à l'angle ASB. Il s'agit de prouver que la section CMD est un cercle.

Par un point quelconque M de la section, menons un plan parallèle à la base; ce plan coupera évidemment le cône suivant un cercle A'MB' décrit sur A'B' comme diamètre, et le plan CMD suivant une droite MP perpendiculaire au plan prin-

cipal (466). Dans ce cercle A'MB', on a (167)

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB'.$$

D'ailleurs, les triangles PCA', PDB', semblables comme ayant leurs angles égaux, donnent

$$\frac{PA'}{PD} = \frac{PC}{PB'}.$$

Il en résulte

$$PA'.PB' = PC.PD \quad \text{et} \quad \overline{MP}^2 = PC.PD.$$

Par suite, le point M appartient à un cercle décrit sur CD comme diamètre.

La propriété qu'on vient de démontrer subsiste pour le cylindre oblique à base circulaire.

Réciproquement, *toute section circulaire non parallèle à la base lui est anti-parallèle* (*fig.* 476).

En effet, soit la section circulaire CMD non parallèle à la base du cône oblique, et dont la trace sur le plan de cette base est la droite RR'. Abaissons du centre O la perpendiculaire OQ sur RR' et, aux points A et B où cette perpendiculaire rencontre la circonférence de base, menons les tangentes AK et BL, nécessairement parallèles à RR'. Les plans SAK, SBL, évidemment tangents au cône (570), couperont le plan CMD suivant deux droites CG et DH, tangentes à la section circulaire CMD et parallèles à RR' (412). CD est donc un diamètre de la section CMD comme AB est un diamètre de la base. Si l'on fait alors passer, par le point M de la section CMD, la section A'MB' parallèle à la base, leur intersection MP sera parallèle à RR' (414) ou perpendiculaire à la fois à A'B' et à CD, c'est-à-dire au plan ASB (399). Le plan ASB, perpendiculaire à la base du cône et au plan CMD (463), est le *plan principal*, et l'on a en même temps

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB' = PC.PD \quad \text{ou} \quad \frac{PA'}{PD} = \frac{PC}{PB'}.$$

Les deux triangles PA'C, PDB', sont donc semblables, et CD est anti-parallèle à A'B' ou à AB.

COROLLAIRES.

875. *Deux sections, l'une* A_1B_1 *parallèle, l'autre* CD *anti-*

parallèle à la base d'un cône oblique à base circulaire, sont toujours situées sur une même sphère (*fig.* 477).

En effet, les deux sections circulaires A_1B_1 et CD sont perpendiculaires à un même plan SAB passant par leurs centres, et le quadrilatère A_1B_1CD situé dans ce plan est inscriptible, puisque ses angles opposés sont supplémentaires (114). Les deux sections considérées appartiennent donc à la sphère qui a pour *grand cercle* le cercle A_1B_1DC.

876. Dans un cône oblique à base circulaire, les centres des sections parallèles à la base sont distribués sur la droite SO; les centres des sections anti-parallèles à la base se trouvent aussi évidemment sur une même droite, que nous nous proposons de construire.

Soit (*fig.* 478) SAB le plan principal du cône oblique dont

Fig. 477.

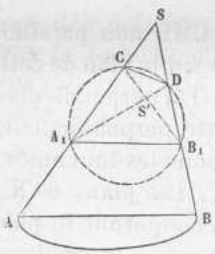
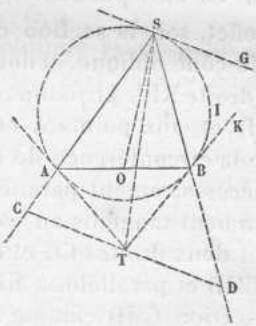


Fig. 478.



la base est le cercle décrit sur AB comme diamètre. Le cercle circonscrit au triangle ASB est un grand cercle de la sphère déterminée par le cercle AB et le sommet S du cône (625). La tangente SG au grand cercle SAB est la trace sur le plan de la figure du plan tangent à cette sphère en S, et ce plan tangent est perpendiculaire au plan SAB (621, 619). D'ailleurs, la droite SG est anti-parallèle à AB, à cause de l'égalité des angles BAS, BSG. Le plan tangent SG est donc parallèle aux plans des sections anti-parallèles à la base AB, et la question est ramenée à marquer le centre d'une section *quelconque* parallèle à ce plan tangent.

Nous choisirons celle qui passe par le point de concours T des tangentes en A et en B au cercle ASB, c'est-à-dire par le sommet T du cône qui est circonscrit à la sphère considérée

suivant le cercle AB. En menant par le point T la parallèle CTD à SG, on aura le diamètre de cette section, et il est facile de voir que T en est précisément le centre. En effet, l'angle TBD, égal à SBK, a pour mesure la moitié de l'arc SIB ; l'angle TDB, alterne interne de BSG, a cette même mesure. Le triangle TBD est donc isocèle, et l'on a TD = TB. On verra de même que TC = TA. Par suite, comme TA = TB, TD = TC, et le point T est le milieu du diamètre CD ou le centre de la section correspondante.

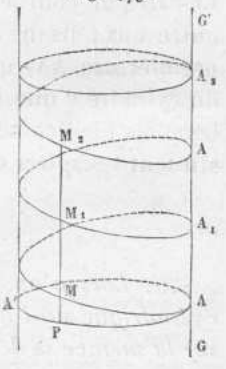
Ainsi, *le lieu des centres des sections anti-parallèles à la base* AB *est la droite* ST *qui joint le sommet* S *au sommet* T *du cône auxiliaire circonscrit, suivant la base* AB, *à la sphère déterminée par cette base et par le sommet* S *du cône donné.*

VIII. — Propriétés fondamentales de l'hélice.

877. Soit un cylindre droit à base quelconque, mais fermée. On peut déterminer un point quelconque de la surface de ce cylindre à l'aide de coordonnées définies de la manière suivante.

Considérons une section droite AA′ (*fig.* 479) qui coupe au point A la génératrice GG′, et prenons ce point A pour *origine* des arcs comptés sur le périmètre de cette section droite. Ces arcs seront positifs dans un sens, négatifs en sens opposé.

Fig. 479.



Cela posé, soient M un point quelconque de la surface cylindrique, et MP la génératrice qui passe par ce point et qui rencontre en P la section AA′ : la longueur MP est l'*ordonnée y du point* M, et l'arc AP est *son abscisse curviligne x*.

Comme le point M peut appartenir à une courbe qui décrit plusieurs circonvolutions autour du cylindre, son abscisse peut dépasser le périmètre de la section AA′ et comprendre ce périmètre un nombre quelconque de fois.

En suivant la courbe proposée à partir de son premier point de rencontre avec la génératrice GG′ et en comptant combien de fois elle coupe cette génératrice avant qu'on parvienne au

point M, on devra ajouter le périmètre de AA' ce même nombre de fois à l'arc qui sépare le point A du pied de l'ordonnée du point M, pour avoir l'abscisse curviligne de ce point.

878. Parmi toutes les courbes qu'on peut ainsi tracer sur la surface d'un cylindre droit, l'*hélice* est définie par cette condition que *l'ordonnée d'un point est proportionnelle à son abscisse curviligne.*

L'équation de l'hélice, dans le système de coordonnées adopté (877), est donc

$$y = kx.$$

Désignons par C le périmètre de la section droite AA' (*fig.* 479). x variant de o à C, on a un premier arc d'hélice qui part du point A et qui, après avoir coupé toutes les génératrices du cylindre, vient rencontrer de nouveau en A_1 la génératrice GG'. x variant de C à 2C, de 2C à 3C, etc., on a de nouveaux arcs de courbe allant de A_1 à A_2, de A_2 à A_3, etc. Les valeurs extrêmes de y sont, en même temps, o, kC, 2kC, 3kC, ... Les distances AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., qui séparent les points où l'hélice vient rencontrer une même génératrice GG', sont donc égales. Cette distance, constante quelle que soit la génératrice considérée, est ce qu'on appelle le *pas* de l'hélice. Les arcs de courbe AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., sont de même égaux entre eux; ils ne sont évidemment que la reproduction du premier arc AA_1 qu'on ferait glisser successivement le long du cylindre d'une hauteur égale au pas. Ces arcs égaux, dans lesquels l'hélice se trouve ainsi naturellement partagée, constituent les *spires* de la courbe.

THÉORÈME.

879. *Lorsqu'on effectue le développement d'une surface cylindrique sur l'un de ses plans tangents, toute hélice tracée sur la surface se développe suivant une ligne droite* (*fig.* 480).

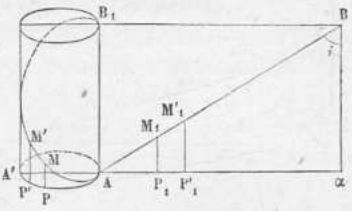
Soit l'hélice AMB_1; pour deux points quelconques M et M' de cette courbe, on a la relation

$$\frac{MP}{AP} = \frac{M'P'}{AP'}.$$

Si l'on suppose qu'on développe la surface du cylindre dans

le plan tangent suivant la génératrice AB_1 (536, 542), la circonférence de la section droite en A s'appliquera sur la droite $A\alpha$ menée perpendiculairement à AB_1 dans ce plan, et les arcs

Fig. 480.



AP et AP′ seront rectifiés en AP_1 et AP'_1. Les points M et M′ viendront d'ailleurs se placer en M_1 et en M'_1 sur les perpendiculaires élevées à $A\alpha$ en P_1 et en P'_1, et l'on aura

$$M_1P_1 = MP, \quad M'_1P'_1 = M'P'.$$

Puisque par hypothèse $\frac{MP}{AP} = \frac{M'P'}{AP'}$, on aura aussi

$$\frac{M_1P_1}{AP_1} = \frac{M'_1P'_1}{AP'_1},$$

et les points A, M_1, M'_1, seront en ligne droite. Si l'on développe une seule spire, $A\alpha$ représente le périmètre de la section AA′ et αB le pas de l'hélice.

THÉORÈME.

880. *La sous-tangente en un point de l'hélice est égale à l'abscisse curviligne de ce point* (*fig.* 481).

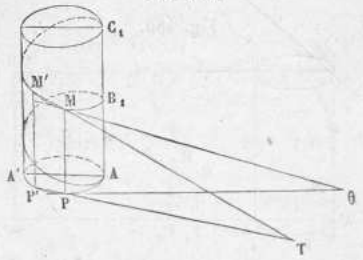
La *sous-tangente* en un point de l'hélice est la projection, sur le plan de la section droite prise pour base, de la portion de tangente en ce point comprise entre son point de contact et sa trace sur le plan de la base.

Considérons sur la courbe les deux points voisins M et M′, dont les ordonnées sont MP et M′P′ et les abscisses curvilignes AA′AP et AA′AP′. On a (878)

$$(1) \qquad \frac{MP}{AA'AP} = \frac{M'P'}{AA'AP'}.$$

Prolongeons la corde MM′ jusqu'au point T où elle rencontre forcément le plan de la base, puisque l'on a M′P′ > MP. Ce

Fig. 481.



point T appartiendra au prolongement de la corde PP′ de la base. Les deux triangles semblables MTP, M′TP′, donnent alors

$$\frac{MP}{TP} = \frac{M'P'}{TP'}.$$

Par suite, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{TP}{AA'AP} = \frac{TP'}{AA'AP'}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{TP' - TP}{AP' - AP} = \frac{TP'}{AA'AP'}.$$

On peut écrire cette dernière égalité sous la forme

$$\frac{TP'}{AA'AP'} = \frac{\text{corde } PP'}{\text{arc } PP'}.$$

Lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M, regardé comme fixe, le point P′ se rapproche indéfiniment du point P. La sécante M′MT devient la tangente Mθ à l'hélice au point M; la sécante P′PT devient à la fois la tangente en P à la base et la sous-tangente Pθ au point M. La limite du rapport $\frac{\text{corde } PP'}{\text{arc } PP'}$ étant l'unité (226), on a finalement

$$\lim. \frac{TP'}{AA'AP'} = \frac{P\theta}{AA'AP} = 1;$$

ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRES.

881. Le rapport $\frac{y}{x}$ étant constant (878), *le rapport de l'ordonnée d'un point à la sous-tangente de ce point est aussi*

constant. Le triangle MPθ étant alors toujours semblable à lui-même, *la tangente à l'hélice fait un angle constant, aussi bien avec les génératrices du cylindre qu'avec le plan d'une section droite*. Ces deux angles sont complémentaires.

Si l'on désigne par h le pas de l'hélice et par C le périmètre de la base, on a (879)

$$\frac{r}{x} = \frac{h}{C};$$

si l'on désigne par i (*fig.* 480) l'angle suivant lequel les génératrices du cylindre sont coupées par l'hélice, on a (*voir* la *Trigonométrie*)

$$\operatorname{tang} i = \frac{C}{h}.$$

Pour construire la tangente en un point M de l'hélice, il suffit donc de mener, dans le plan tangent au cylindre en ce point, une droite faisant l'angle i avec la génératrice qui passe par ce point.

On peut aussi prendre, à partir du point P, pied de l'ordonnée du point M, sur la tangente à la base, une longueur Pθ égale à l'arc AA'AP rectifié, et joindre le point θ au point M.

882. Si l'on enroule un fil sur une courbe quelconque, une de ses extrémités étant fixée en un point de la courbe, puis qu'on le déroule en le tendant constamment dans la direction des tangentes à la courbe, son extrémité libre décrit une *développante* de la courbe proposée, qui, à son tour, est la *développée* de la courbe obtenue.

On voit que le lieu des points θ ou des traces des tangentes à l'hélice sur le plan de la base est une *développante* de cette base. La surface formée par les tangentes elles-mêmes est connue sous le nom d'*hélicoïde développable*.

SCOLIE.

883. L'hélice que l'on considère le plus souvent dans les applications est tracée sur un cylindre de révolution. Dans ce cas, le périmètre C de la base doit être remplacé par $2\pi r$, et, alors, il est commode d'introduire dans les formules précédentes, au lieu de h, la quantité $\frac{h}{2\pi}$, qu'on désigne par h' et qu'on nomme *pas réduit*.

IX. — Exercices et questions complémentaires.

884. On peut proposer un très grand nombre de problèmes sur la détermination graphique des sections coniques, d'après un nombre suffisant de conditions. Nous nous contenterons ici d'appeler l'attention du lecteur sur l'intérêt de ces questions par les exemples suivants.

PROBLÈME.

885. *Construire une ellipse ou une hyperbole dont on connaît l'excentricité* $\frac{c}{a}$, *l'un des foyers, et deux points ou deux tangentes, ou une tangente et son point de contact.*

Nous résolvons ce problème pour montrer de quelle utilité peut être la considération des directrices.

1° Soient F le foyer donné, M et N les deux points donnés; déterminons les longueurs r et r' par les conditions

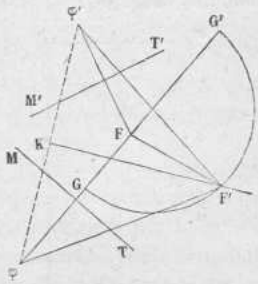
$$\frac{MF}{r} = \frac{c}{a}, \quad \frac{NF}{r'} = \frac{c}{a},$$

puis décrivons deux circonférences des points M et N comme centres avec les rayons r et r'. La directrice correspondant au foyer F sera une tangente commune aux circonférences décrites. En abaissant sur cette tangente DE une perpendiculaire FD et en marquant sur cette perpendiculaire les deux points A et A' qui la divisent dans le rapport $\frac{c}{a}$, on aura l'axe focal AA' de la section conique; sa distance focale FF' s'obtiendra en prenant dans le sens convenable, suivant la valeur de $\frac{c}{a}$, $A'F' = AF$. La question sera alors ramenée à construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant ses axes.

2° Soient F le foyer donné, MT, M'T', les deux tangentes données (*fig.* 482). Déterminons les points φ et φ' symétriques du foyer par rapport à ces tangentes. La perpendiculaire indéfinie KF' élevée à $\varphi\varphi'$ par son milieu K est un lieu du second foyer F' (775, 821). Ce second foyer fait également partie du lieu dont le rapport des distances aux deux points fixes F et φ est égal à $\frac{c}{a}$. Nous déterminerons donc les points G et G' qui divisent Fφ dans ce même rapport, et sur GG' comme diamètre nous décrirons (144) une circonférence qui coupera KF' au point cherché. Il ne restera plus qu'à construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant la distance focale FF' et l'axe focal F'φ de la courbe.

3° Soient F le foyer donné et MT la tangente donnée qui doit toucher la conique au point donné M. Déterminons le symétrique φ du foyer par rapport à MT; en joignant φM, nous aurons un lieu du second foyer F'

Fig. 482.

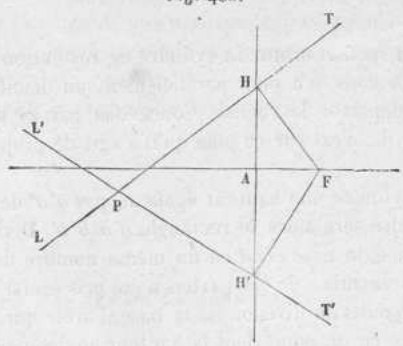


(776, 822). Divisons comme précédemment (2°) Fφ, aux points G et G', dans le rapport donné $\frac{c}{a}$. La circonférence décrite sur GG' comme diamètre viendra couper en F' la droite φM prolongée, et le problème sera résolu. (Pour ce 3e cas, le lecteur est prié de faire la figure.)

PROBLÈME.

886. *Construire une parabole dont on connaît le foyer* F *et deux tangentes* LT, L'T' (*fig.* 483).

Fig. 483.

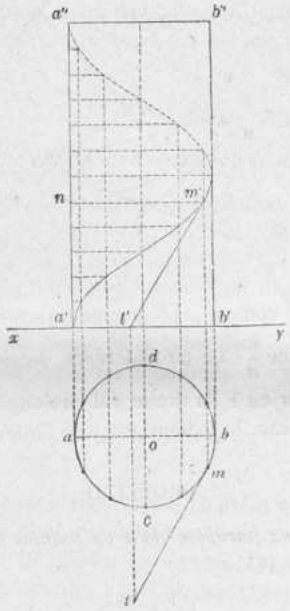


Du foyer F, abaissons les perpendiculaires FH, FH', sur les tangentes données. La droite HH' représentera alors la tangente au sommet de la courbe (852). En abaissant du foyer F une perpendiculaire sur cette dernière tangente, on obtiendra le sommet A de la parabole, et la distance FA achèvera de la déterminer complètement (838).

PROBLÈME.

887. *Construire la projection de l'hélice et de la tangente en un point de la courbe sur un plan perpendiculaire à la base du cylindre* (*fig.* 484).

Fig. 484.



Soient *abcd* la section droite du cylindre de révolution considéré, et *xy* une droite tracée dans son plan parallèlement au diamètre *ab* qui passe par le point de départ *a* de l'hélice. Concevons par *xy* un plan parallèle à l'axe du cylindre; c'est sur ce plan qu'il s'agit de projeter une spire de l'hélice.

Donnons au cylindre une hauteur égale au pas $a'a''$ de l'hélice; la projection du cylindre sera alors le rectangle $a'a''b''b'$. Divisons l'arête $a'a''$ et la circonférence de base *abcd* en un même nombre de parties égales; sur la *fig.* 484, le nombre de ces parties a été pris égal à 12. *m* étant l'un quelconque des points de division de la base, l'arête qui a son pied en *m* rencontre l'hélice en un point dont la hauteur au-dessus du plan *abcd* est au pas $a'a''$ de l'hélice comme l'arc *acm* est à la circonférence *acbd* (878); Ici, l'arc *acm* étant les $\frac{5}{12}$ de la circonférence, la hauteur du point considéré est les $\frac{5}{12}$ de $a'a''$. On obtiendra donc la projection m' de ce point en menant par le point *n*, extrémité de la cinquième division de $a'a''$, une parallèle

à xy jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire à xy [illegible] m. En opérant de même pour tous les points de division de la base, on obtiendra une série de points tels que m', qu'il suffira de joindre par un trait continu pour avoir la projection de l'hélice.

Pour avoir la projection de la tangente au point considéré, on prendra, sur la tangente mt au cercle de base, une longueur mt égale à l'arc acm, c'est-à-dire ici aux $\frac{5}{12}$ de la circonférence $abcd$; t sera la trace de la tangente sur le plan de la base (880). Ce point se projette au point t' que l'on obtient en abaissant la perpendiculaire tt' sur xy. Par suite, la droite $t'm'$ est la projection de la tangente.

On reconnaît facilement d'après cela que la courbe obtenue touche l'arête $a'a''$ en a' et en a'', l'arête $b'b''$ en son milieu, et qu'elle est symétrique par rapport à la parallèle à xy menée par le milieu de $b'b''$. Cette courbe est connue sous le nom de *sinusoïde*. Nous l'étudierons bientôt, en établissant les premiers principes de la *Trigonométrie*.

REMARQUE.

888. En exposant l'ensemble des propriétés fondamentales qui constituent la *Géométrie*, nous avons, par cela même, indiqué chemin faisant la plupart des Méthodes employées d'une manière générale pour résoudre les *Problèmes de Géométrie*.

Il nous resterait à préciser davantage et à compléter ces notions éparses, en les condensant dans un Appendice spécial et en les accompagnant d'exemples choisis. C'est ce que nous avions fait dans la première édition du Tome II de ce *Cours*, sous le titre de *Complément de Géométrie*. Mais notre plan s'est étendu, et nous comptons consacrer à cette étude, avec tous les détails nécessaires, un volume entier où nous pourrons faire appel, non seulement aux ressources propres à la Géométrie proprement dite, mais encore à celles que l'*Algèbre supérieure* (t. III et IV) et la *Géométrie analytique* (t. V et VI) peuvent offrir à ce point de vue.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
33881 Quai des Grands Augustins, 55.



