Solutions de Problèmes

de

Thermodynamique

à l'usage

des Candidats aux Certificats de Physique générale et de Mécanique physique et expérimentale, à l'Ecole supérieure d'Electricité, à l'Agrégation

et des Ingénieurs

par

A. Tétrel.

Nouvelle édition, remise complètement à jour.

En Vente

chez l'Auteur
58, Boulevard St Marcel, 58.

Librairie Emile Croville
20, Rue de la Sorbonne, 20.

Paris (Ve)

Tous droits réservés.

5367076
T348s

UFRJ
Centro de Ciências Matemáticas e
de Natureza
Biblioteca Central
Nº REGISTRO
014701-x 20/11/81
Desconhecida

Introduction.

1.- Rappel de quelques unités et de certaines constantes.

Le kilog.-force vaut $0,981 \times 10^6$ dynes.

L'unité de force du système légal MTS (mètre, tonne, seconde) est le sthène. C'est la force qui agissant sur la masse d'une tonne lui imprime une accélération de un mètre-seconde-seconde. Le sthène vaut 10^8 dynes, soit approximativement 102 kilogs-force.

Le joule vaut 10^7 ergs.

Le kilogrammètre vaut $9,81 \times 10^7$ ergs ou 9,81 joules.

L'unité légale MTS de travail est le travail d'une force d'un sthène qui déplace son point d'application d'un mètre dans sa direction; elle vaut donc $10^3 \times 10^2 = 10^{10}$ ergs, c.à.d. un kilojoule. L'unité légale de puissance est le kilowatt.

Le cheval-vapeur vaut 75 kilogrammètres par seconde ou 736 watts.

Le poncelet vaut 100 kilogrammètres par seconde, ou 981 watts.

L'unité C.G.S. de pression est la barye.

L'unité MTS de pression est la pièze; c'est la pression d'un sthène par mètre carré, soit 10^4 baryes.

L'unité de pression du système métrique est celle du kilogramme-force par mètre carré.

Dans la mécanique industrielle on emploie souvent la pression du kilogramme-force par centimètre carré. Elle vaut $0,981 \times 10^6$ baryes ou 98,1 pièzes soit sensiblement un hectopièze. Quand on emploie cette unité dans les calculs numériques, il faut prendre garde qu'elle n'appartient pas au système métrique. Elle correspond en effet à 10000 kilogs par mètre carré.

La pression atmosphérique normale vaut $\frac{76 \times 13,596}{1000} = 1,033$ kg/cm^2, soit 1,013 mégabaryes.

La mégabarye est presque rigoureusement égale à la pression de 75 cm. de mercure.

On voit que la pression atmosphérique, la mégabarye, l'hectopièze, le kilog/cm^2 sont des quantités très voisines.

Equivalent mécanique de la calorie $J = 4,185 \times 10^7$ ergs par calorie-gramme, ou 426,6 kilogrammètres par calorie-kilogramme.

Dans le système MTS, l'unité de quantité de chaleur est la thermie qui vaut 10^6 petites calories. Dans ce système, $J = 4,185 \times 10^3$ kilojoules par thermie.

Dans l'industrie du froid, quand on enlève une calorie-kilogramme à la source froide, on dit qu'on lui fournit une frigorie.

Constante universelle des gaz parfaits $R = 8,3156 \times 10^7$ C G S.

On voit que $R = 2J$ sensiblement.

Note sur les gaz parfaits.

Un gaz parfait est un gaz qui suit rigoureusement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, lesquelles sont réunies dans l'équation dite caractéristique des gaz parfaits (1) $\frac{pv}{1+\alpha t} = C^{te} = p_0 v_0$. La constante $p_0 v_0$ est la valeur du produit pv à 0° centigrade. Cela revient à dire que le coefficient de dilatation sous pression constante et le coefficient d'accroissement de pression sous volume constant sont égaux pour tous les gaz parfaits, quelles que soient la pression et la température. Leur valeur commune est $\alpha = \frac{1}{273}$.

En fait, il n'y a pas de gaz parfaits. Leur étude est cependant très importante, car un gaz quelconque, sous une pression de plus en plus faible, arrive à se comporter comme un gaz parfait, quelle que soit la température.

La formule (1) peut s'écrire $pv = p_0 v_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t\right)$ ou (2) $pv = rT$, en posant $r = p_0 v_0 \alpha = \frac{p_0 v_0}{273}$, $T = \frac{1}{\alpha} + t$; T est la température absolue ou température thermodynamique.

Pour calculer la constante r il faut calculer séparément p_0 et v_0; p_0 est une pression absolument quelconque (ce n'est pas nécessairement la pression atmosphérique); v_0 est le volume, sous cette pression p_0 et à la température 0° centigrade, d'une certaine masse de gaz.

On peut d'abord prendre la masse unité, c.à.d. la masse de 1 gramme; v_0 est alors le volume spécifique à 0°. Si la pression p_0 choisie est la pression normale de 76 cm. de mercure, r est alors la constante spécifique, c.à.d. rapportée au gramme-masse. Chaque gaz est caractérisée par une valeur de r. Ainsi, pour l'air, dans le système CGS, on a $v_0 = 1000 : 1,2928$, $p_0 = 1,013 \times 10^6$ bayes, $r = 2,873 \times 10^6$. Pour un gaz de densité d, on a $r = \frac{2873}{d} \times 10^6$.

Dans cet ouvrage, la constante r sera toujours la constante spécifique, c.à.d. rapportée à l'unité de masse.

Supposons maintenant qu'on opère sur la masse m grammes de gaz. En multipliant par m les deux membres de l'équation (2), il vient $mpv = mrT$.

Si v est le volume de l'unité de masse, mv sera le volume V occupé par la masse m sur laquelle nous raisonnons et on aura (3) $pV = mrT$; r est toujours la constante spécifique.

Supposons enfin qu'on opère sur la masse moléculaire M; on aura (4) $pv_m = MrT$, v_m désignant le volume moléculaire. Mais une simplification se produit du fait que v_m est le même pour tous les gaz; c'est 22412 cm³ à 0° et sous la pression atmosphérique normale. La formule (4) montre alors que si p et T sont choisis les mêmes pour différents gaz, il faut que Mr ait la même valeur pour tous les gaz parfaits. On peut donc poser (5) $Mr = R$; R est la constante universelle des gaz parfaits et on a (6) $pv_m = RT$, avec

$R = \frac{1,013 \times 10^6 \times 22412}{273} = 8,316 \times 10^7$ dans le système CGS.

Enfin si le volume V renferme, non pas une, mais n molécules-grammes, on a $pV = nRT$.

3. - Coefficients calorimétriques.

Pour éviter des redites, nous allons établir un certain nombre de formules d'un usage courant dans les problèmes.

Considérons la transformation élémentaire réversible qui amène l'unité de masse du fluide de l'état p, v, T à l'état $p+dp$, $v+dv$, $T+dT$. Suivant le choix des deux variables indépendantes, la quantité de chaleur dQ reçue par le fluide peut prendre l'une des trois formes suivantes:

$$dQ = C\,dT + h\,dp, \quad dQ = c\,dT + l\,dv, \quad dQ = \lambda\,dv + K\,dp.$$

C est la chaleur spécifique à pression constante, h la chaleur latente de compression, c la chaleur spécifique à volume constant, l la chaleur latente de dilatation; λ et K n'ont pas reçu de noms particuliers. Ce sont les six coefficients calorimétriques ou thermiques.

Comme la quantité de chaleur dQ peut être calculée à l'aide de deux seulement de ces coefficients, il est évident qu'il existe entre eux quatre relations. On peut par exemple, connaissant C et c, calculer les quatre autres coefficients. C'est ce que nous allons faire.

Supposons d'abord que l'équation caractéristique du fluide soit donnée sous la forme $p = f(v, T)$. On a $dp = \frac{\partial p}{\partial v}\,dv + \frac{\partial p}{\partial T}\,dT$ et les trois expressions précédentes de dQ deviennent

$$dQ = \left(C + h\frac{\partial p}{\partial T}\right)dT + h\frac{\partial p}{\partial v}\,dv, \quad dQ = c\,dT + l\,dv,$$

$$dQ = K\frac{\partial p}{\partial T}\,dT + \left(\lambda + K\frac{\partial p}{\partial v}\right)dv.$$

En identifiant les coefficients de dT, on a:

$$(1) \quad h = -(C-c) : \frac{\partial p}{\partial T}, \quad K = c : \frac{\partial p}{\partial T}.$$

En identifiant les coefficients de dv, on a:

$$l = h\frac{\partial p}{\partial v} = -(C-c)\frac{\partial p}{\partial v} : \frac{\partial p}{\partial T}, \qquad \lambda = (h-K)\frac{\partial p}{\partial v} = -C\frac{\partial p}{\partial v} : \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Supposons maintenant que l'équation caractéristique soit donnée sous la forme $v = \varphi(p, T)$. On a $dv = \frac{\partial v}{\partial p}\,dp + \frac{\partial v}{\partial T}\,dT$, d'où

$$dQ = C\,dT + h\,dp, \quad dQ = \left(c + l\frac{\partial v}{\partial T}\right)dT + l\frac{\partial v}{\partial p}\,dp,$$

$$dQ = \lambda\frac{\partial v}{\partial T}\,dT + \left(K + \lambda\frac{\partial v}{\partial p}\right)dp.$$

En identifiant d'abord les coefficients de dT, puis ceux de dp, on trouve les quatre nouvelles expressions de l, λ, h et K,

$$(2) \quad l = (C-c) : \frac{\partial v}{\partial T}, \quad \lambda = C : \frac{\partial v}{\partial T}, \quad h = (C-c)\frac{\partial v}{\partial p} : \frac{\partial v}{\partial T},$$

$$K = -c\frac{\partial v}{\partial p} : \frac{\partial v}{\partial T}.$$

Voyons les signes de ces coefficients. Notons d'abord que $\frac{\partial p}{\partial T}$ et $\frac{\partial v}{\partial T}$ sont positifs, du moins pour les gaz, et que $\frac{\partial v}{\partial p}$ est négatif.

L'expérience du briquet à air montre qu'il faudrait enlever de la chaleur pour maintenir la température constante. L'expression

$dQ = C\,dT + h\,dp$ dans laquelle dQ est négatif, dT est nul et dp positif, montre que h est négatif. Dès lors la formule (1) montre que C et c sont différents et que C est plus grand que c. Les autres formules montrent que l, λ et K sont positifs.

Application aux gaz parfaits. — On a $pv = rT$. En tenant compte de la relation de Mayer

(3) $C - c = \frac{r}{J}$, il vient $h = -(C-c)\frac{v}{r} = -\frac{v}{J} = -(C-c)\frac{T}{p}$,

(4) $l = (C-c)\frac{T}{v} = (C-c)\frac{p}{r} = \frac{p}{J}$, $\lambda = \frac{CT}{v} = \frac{Cp}{r}$, $K = \frac{cv}{r} = \frac{cT}{p}$.

Les expressions de dQ prennent alors les formules suivantes:

(5) $dQ = C\,dT - \frac{C-c}{r} v\,dp = C\,dT - \frac{v}{J}\,dp$,

(6) $dQ = C\,dT + \frac{C-c}{r} p\,dv = c\,dT + \frac{p}{J}\,dv$,

(7) $dQ = \frac{1}{r}(Cp\,dv + cv\,dp)$.

La dernière est particulièrement à retenir.

Remarque. — Dans la formule (3) de Mayer, C, c et r sont des constantes spécifiques, c.à.d. rapportées à l'unité de masse. Prenons maintenant une molécule-gramme, de masse M. Introduisons la constante universelle R des gaz parfaits en remplaçant r par $\frac{R}{M}$. On obtient la formule remarquable

$$M(C-c) = \frac{R}{J} = \frac{8{,}3156 \times 10^7}{4{,}185 \times 10^7} = 1{,}987.$$

Ainsi la différence des deux chaleurs spécifiques moléculaires d'un gaz parfait est le quotient de deux constantes universelles; elle est indépendante de la nature du gaz, de sa pression et de sa température; elle est très sensiblement égale à 2.

Notons encore la formule (8) $C - c = \frac{r}{M}$.

---

4. — On mélange m_1, m_2, m_3, ... grammes de différents gaz parfaits pris à la même température T et à la même pression p. Ils ont pour constantes spécifiques r_1, r_2, r_3, ... pour chaleurs spécifiques C_1, c_1, C_2, c_2, C_3, c_3 ..... Calculer, pour le mélange, la constante spécifique r, la différence $C-c$ et le rapport $\gamma = \frac{C}{c}$.

Soient V_1, V_2, V_3, ... les volumes des masses m_1, m_2, m_3, ... à la pression p et à la température T. La formule (3) du n° 2 donne $p V_1 = m_1 r_1 T$, $p V_2 = m_2 r_2 T$, $p V_3 = m_3 r_3 T$, ...

Additionnons ces équations membre à membre, il vient

$$p(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots) = (m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \cdots) T.$$

D'après la loi du mélange des gaz, $V_1 + V_2 + V_3 + \cdots$ représente le volume total V du mélange à la pression p et à la température T. On a donc

(1) $$pV = (m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \cdots) T.$$

Désignons par r la constante spécifique du mélange et par m la masse totale de gaz, on a par définition, (2) $pV = mrT$.

De (1) et (2) on tire

(3) $$r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

Calculons maintenant la différence $C-c$ pour le mélange. On a

évidemment $mC = m_1 C_1 + m_2 C_2 + \cdots$ $\qquad C = \dfrac{m_1 C_1 + m_2 C_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$

$mc = m_1 c_1 + m_2 c_2 + \cdots$ $\qquad c = \dfrac{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$

$$C - c = \Sigma m_i (C_i - c_i) : \Sigma m_i .$$

En appliquant la formule de Mayer $J(C-c) = r$, on a aussi

$$C - c = \frac{1}{J} \times \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} .$$

Calculons enfin le rapport $\frac{C}{c}$ pour le mélange. On a

$$\frac{C}{c} = \gamma = \frac{m_1 C_1 + m_2 C_2 + \cdots}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \cdots}$$

Introduisons les quantités $\gamma_1 = \frac{C_1}{c_1}$, $\gamma_2 = \frac{C_2}{c_2}$, ... On a

$C_1 - c_1 = \frac{r_1}{J}$, $\quad \gamma_1 - 1 = \frac{r_1}{J c_1}$, $\quad c_1 = \frac{r_1}{J(\gamma_1 - 1)}$, $\quad C_1 = \gamma_1 c_1 = \frac{r_1 \gamma_1}{J(\gamma_1 - 1)}$, ...

$$\gamma = \sum \frac{m_i r_i \gamma_i}{\gamma_i - 1} : \sum \frac{m_i r_i}{\gamma_i - 1} .$$

On peut donner une autre expression de γ en introduisant le facteur $f_i = m_i : M_i$ qui représente la fraction de la masse moléculaire de chaque gaz. D'après la formule (5) du n°2 on a $M_i r_i = R$. Par conséquent, $m_i r_i = \frac{m_i}{M_i} R = f_i R$.

En transportant cette valeur dans l'expression γ, la constante universelle R disparaît et il vient

$$(4) \qquad \gamma = \sum \frac{f_i \gamma_i}{\gamma_i - 1} : \sum \frac{f_i}{\gamma_i - 1} .$$

Cette formule est particulièrement commode à employer quand on donne les volumes des gaz et non leurs masses. Les volumes sont alors des fractions connues des volumes moléculaires.

Remarques sur l'application des deux principes. Transformations réversibles et irréversibles. Diagrammes.

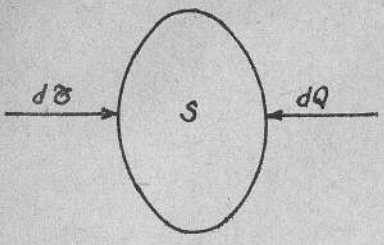
---

5. — Principe de l'équivalence.

Considérons un système matériel quelconque S pouvant échanger avec le milieu extérieur soit de la chaleur soit du travail.

Soit dQ la quantité de chaleur élémentaire, en calories,

absorbée par le système pour une transformation quelconque, c'est-à-dire la quantité de chaleur qui passe de l'extérieur dans le système. En transformant cette chaleur en ergs on obtient $J\,dQ$ ergs. Soit $d\mathcal{E}$ le travail élémentaire, en ergs, absorbé par le système dans la même transformation, c.à.d. effectué par l'extérieur sur le système. L'état du système à un instant quelconque dépend d'un certain nombre de variables $x, y, z, \ldots$ qui sont par exemple la pression, le volume, la température, etc.



Cela posé, $J\,dQ$ et $d\mathcal{E}$ ne sont pas, en général, des différentielles exactes par rapport aux variables $x, y, z, \ldots$, mais ce qu'il y a de remarquable, c'est que leur somme en est une; c'est la différentielle totale d'une certaine fonction $U(x, y, z)$, appelée énergie potentielle interne du système, et on a:

$$(1) \qquad J\,dQ + d\mathcal{E} = dU.$$

Cela nous aide à comprendre pourquoi il y a une relation intime entre la chaleur et le travail. Quand on additionne ces deux quantités, $J\,dQ$ et $d\mathcal{E}$, qui ne soit ni l'une ni l'autre des différentielles exactes, il se produit une espèce de transformation ou d'assimilation qui fait que leur somme devient une différentielle exacte.

On ne devrait donc pas, à la rigueur, employer les notations dQ et $d\mathcal{E}$ qui sont cependant classiques, car il n'existe pas en général de fonctions Q et $\mathcal{E}$ des variables définissant l'état du système dont dQ et $d\mathcal{E}$ soient les différentielles exactes. On devrait par exemple écrire $\mathcal{E}$ et η au lieu de dQ et $d\mathcal{E}$. En tout cas, on n'écrira pas

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial p}\,dp + \frac{\partial Q}{\partial t}\,dt, \qquad d\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p}\,dp + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\,dt.$$

L'équation (1) n'est pas tout à fait générale. Il peut se faire que pendant la transformation élémentaire considérée le système éprouve un accroissement d'énergie cinétique $dW = d\,\Sigma \frac{1}{2} m V^2$. L'équation complète est alors

$$(2) \qquad J\,dQ + d\mathcal{E} = dU + dW = d(U + W) = dU$$

en posant

$$U = U + W.$$

U est l'énergie totale du système; c'est la somme de l'énergie potentielle interne U et de l'énergie cinétique W. Cela n'infirme en rien les résultats précédents puisque la mécanique nous a appris qu'il y a une relation intime entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle (nous assimilons en effet l'énergie potentielle de la thermodynamique à l'énergie potentielle de la dynamique, bien que la première soit fonction de la température).

Dans la plupart des applications, les vitesses sont négligeables, par conséquent $dW = 0$. Même conclusion si les vitesses sont constantes. On applique alors la formule (1).

Que l'on applique la formule (1) ou la formule (2), si on peut mettre $J\,dQ + d\mathcal{E}$ sous la forme $A\,dx + B\,dy + C\,dz \ldots$, en écrivant que cette dernière expression est une différentielle exacte, on trouvera les relations classiques

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il peut arriver dans certains cas particuliers que dQ et $d\mathcal{E}$ soient séparément des différentielles exactes.

Par exemple si on a un fluide dont le volume demeure constant, $d\mathcal{E} = 0$. Alors $J\,dQ = dU$.

Il en est de même si le système est isolé mécaniquement de l'extérieur; $d\mathcal{E}$ est encore nul.

Si le système est isolé calorifiquement de l'extérieur, c.à.d. s'il ne peut ni recevoir ni céder de chaleur, $dQ = 0$. Alors $d\mathcal{E}$ est une différentielle exacte.

Enfin dans certains cas tout à fait exceptionnels où ni $d\mathcal{E}$, ni dQ ne sont nuls, $d\mathcal{E}$ peut être une différentielle exacte. Il en est alors de même de dQ.

Supposons que le système accomplisse un cycle fermé C, c.à.d. que les variables $x, y, z, \ldots$ ainsi que les vitesses V reprennent à la fin de la transformation leurs valeurs initiales. Dans ce cas,

$$\int_C d\,(W + U) = 0.$$

Par suite $\qquad J \sum_C dQ + \sum_C d\mathcal{E} = 0.$

Nous mettons le signe Σ pour indiquer qu'il s'agit d'additions et non d'intégrations. On peut alors écrire, au signe près,

$$\frac{\sum_C d\mathcal{E}}{\sum_C dQ} = J.$$

Tel est le principe de l'équivalence.

---

6. - Transformations réversibles et irréversibles

1° Une transformation est dite <u>réversible</u> lorsque les conditions d'équilibre mécanique et calorifique sont à chaque instant réalisées, ou à très peu près. Le système doit se transformer avec une lenteur théoriquement infinie. Les vitesses V étant infiniment petites, l'énergie cinétique $W = \frac{1}{2} \Sigma m V^2$ est un infiniment petit du second ordre; elle peut être négligée ainsi que sa différentielle et on peut écrire (1) $\qquad J\,d\mathcal{L} + d\mathcal{E} = dU.$

Supposons pour fixer les idées qu'il s'agisse d'un fluide dont l'état dépende de trois variables p, v, t reliées par l'équation caractéristique (2) $f(p, v, t) = 0$.

On donne à dQ l'une des formes classiques

(3) $\qquad dQ = C\,dt + h\,dp, \quad dQ = c\,dt + l\,dv, \quad dQ = \lambda\,dv + K\,dp.$

D'autre part on a (4) $\qquad d\mathcal{E} = -p\,dv.$

p désignant <u>la pression propre du fluide</u>, c.à.d. telle qu'elle figure dans l'équation (2). On substitue ces valeurs dans (1) et on écrit que le premier membre est une différentielle exacte.

2° Si la transformation est irréversible, on peut encore lui

appliquer le principe de l'équivalence, mais il faut prendre des précautions.

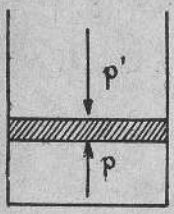
D'abord il faut généralement supposer dW différent de zéro; par suite on doit écrire

$$J\,dQ + d\mathcal{T} = dU + dW.$$

Toutefois dans beaucoup de cas l'énergie cinétique, bien que n'étant pas nulle, reste constamment très petite; dW est négligeable vis à vis des autres termes de l'équation. On le supprime parce qu'il est petit et non parce qu'il est nul.

En second lieu on n'a pas le droit de remplacer dQ par une des expressions (3); autrement dit, on ne connait pas la forme analytique générale dQ.

On n'a pas non plus le droit de poser $d\mathcal{T} = -p\,dv$, p désignant la pression propre du fluide. On doit écrire $d\mathcal{T} = -p'dv$, p' désignant la pression exercée par l'extérieur sur le fluide, laquelle est différente de p, puisque les conditions d'équilibre mécanique ne sont pas remplies dans une transformation irréversible. On ne pourra donc pas pour évaluer $d\mathcal{T}$, se servir de la pression p tirée de l'équation caractéristique.



C'est par exemple le cas d'un piston au-dessous duquel se trouve un fluide à la pression p et sur lequel on laisse tomber un poids; on a alors $p' > p$. Si au contraire le gaz se détend brusquement, on a

$$p > p'.$$

7.- Remarques sur l'application du premier principe aux transformations irréversibles.

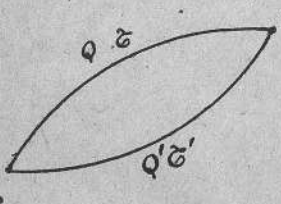
A l'équation (1) $J\,dQ + d\mathcal{T} = dU(x,y,z) + dW$ relative à la transformation irréversible donnée, on adjoint l'une des équations

$$(2)\qquad \left.\begin{array}{l} J(c\,dT + \ell\,dv) \\ J(C\,dT + h\,dp) \\ J(\lambda\,dv + K\,dp) \end{array}\right\} - p\,dv = dU(x,y,z)$$

appliquée à la même transformation, supposée effectuée réversiblement.

La transformation donnée étant irréversible, on ne connait pas, dans (1), la forme analytique de dQ, mais si on connait $d\mathcal{T}$, dU et dW, l'équation (1) donnera dQ.

Si on ne connait pas la variation d'énergie interne dU, on fera le raisonnement suivant. Quand on passe d'un état U_0 à un état U_1 les quantités de chaleur et de travail dépendent essentiellement du chemin suivi, mais ce qui ne change pas c'est la variation d'énergie interne $U_1 - U_0$. Si par exemple on suit deux chemins on a



$$U_1 - U_0 = JQ + \mathcal{T}$$
$$U_1 - U_0 = JQ' + \mathcal{T}'.$$

Dans la pratique, à côté de la transformation

irréversible donnée, on imagine une transformation réversible dite adjointe, partant du même état initial et aboutissant au même état final. Cette transformation adjointe pourra être, selon les cas, isothermique, adiabatique, à pression constante, à volume constant, à travail extérieur nul, etc. Elle nous fournira une équation du type (2). En éliminant dU entre cette équation et l'équation (1) fournie par la transformation irréversible, on aura dQ.

8. Remarques sur le second principe de la Thermodynamique.

Si la transformation est réversible, on a

$$\frac{dQ_r}{T} = dS(x,y,z) \text{ ou (1) } dQ_r = T\,dS(x,y,z),$$

l'indice r signifiant que la quantité de chaleur est absorbée réversiblement.

Si la transformation n'est pas réversible on a

$$(2)\quad dQ = T\,dS(x,y,z) - \eta^2 dt$$

η^2 étant une fonction de $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$.

Si donc la transformation est réversible $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ étant infiniment petits, le terme $\eta^2 dt$ est un infiniment petit du troisième ordre et peut être négligé devant $T\,dS$ qui est du premier ordre. On tombe alors sur l'équation (1).

En toute rigueur l'entropie n'est définie que pour une transformation réversible. Toutefois si la transformation est irréversible, on admet qu'il y a encore une fonction entropie.

Dans (2) remplaçons $T\,dS$ par dQ_r tiré de (1), il vient

$$(3)\qquad dQ = dQ_r - \eta^2 dt,$$

dQ est la quantité de chaleur absorbée par le système dans la transformation irréversible. On voit qu'elle est égale à la quantité de chaleur dQ_r qui serait absorbée dans la même transformation supposée effectuée réversiblement diminuée d'une quantité de chaleur positive $\eta^2 dt$. On a $dQ < dQ_r$. Si au lieu de prendre les quantités de chaleur absorbées on prend les quantités de chaleur dégagées, égales et de signes contraires, il vient

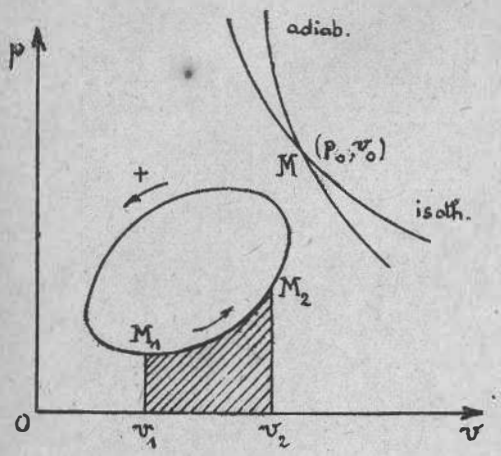
$$-dQ' = -dQ'_r - \eta^2 dt \quad \text{ou} \quad dQ' = dQ'_r + \eta^2 dt.$$

Cette fois, $dQ' > dQ'_r$. La quantité de chaleur dégagée dans une transformation irréversible est toujours supérieure à la quantité de chaleur dégagée dans la même transformation effectuée réversiblement. Le terme $\eta^2 dt$ s'appelle la chaleur non compensée. Il est généralement inconnu ; tout ce que l'on sait, c'est qu'il s'annule en même temps que les vitesses et qu'il doit être attribué aux phénomènes de frottement et de viscosité internes.

Il en résulte que dans les transformations irréversibles on ne pourra guère appliquer que le premier principe, puisque l'expression de la chaleur non compensée fait complètement défaut.

9. Diagramme de Clapeyron ou diagramme dynamique

On porte les volumes v en abscisses et les pressions p en ordonnées.



Par chaque point $M\ (p_0, v_0)$ passe une isotherme $pv = p_0 v_0$ et une adiabatique $p v^\gamma = p_0 v_0^\gamma$, définies par les valeurs de $p_0 v_0$ et de $p_0 v_0^\gamma$ en ce point.

L'adiabatique est la plus inclinée.

En effet l'équation différentielle des isothermes $p\,dv + v\,dp = 0$ montre que la pente de la tangente en M est $\frac{dp}{dv} = -\frac{p_0}{v_0}$. L'équation différentielle des adiabatiques $C p\,dv + c v\,dp = 0$ montre que la pente de la tangente est $\frac{dp}{dv} = -\frac{C}{c}\frac{p_0}{v_0}$, valeur supérieure en valeur absolue à $\frac{p_0}{v_0}$. Donc du côté des volumes croissants, l'adiabatique est au-dessous de l'isotherme et au-dessus, du côté des volumes décroissants.

Les adiabatiques sont en même temps iso-entropiques. Les isobares ($p = C^{te}$) sont des parallèles à Ov; les isovolumétriques ($v = C^{te}$) ou isochores sont des parallèles à Op.

Soit une transformation $M_1 M_2$ dans laquelle le volume varie de v_1 à v_2. Le travail reçu par le gaz est $\mathcal{C} = -\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$. Il est représenté en valeur absolue par l'aire hachurée comprise entre la courbe représentative de la transformation, l'axe des v et deux parallèles à l'axe des p. Il est positif si la courbe est décrite dans le sens des v décroissants, négatif si elle est décrite dans le sens des v croissants (cas de la figure).

Quand le fluide parcourt un cycle fermé, le travail total reçu par le fluide est représenté par l'aire comprise à l'intérieur de la courbe fermée qui représente la transformation, prise avec le signe + si la courbe est parcourue dans le sens de la rotation de Ov vers Op — sens inverse des aiguilles d'une montre — (cas de la figure) et avec le signe — dans le cas contraire.

C'est cette représentation du travail qui fait quelquefois donner au cycle de Clapeyron le nom de diagramme dynamique.

10. Diagramme entropique

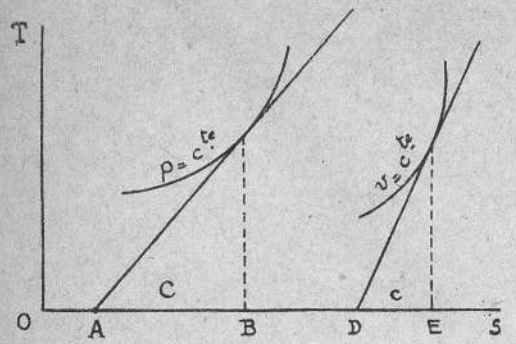
On porte les entropies $S = \int \frac{dQ}{T}$ en abscisses et les températures absolues T en ordonnées.

Les iso-entropiques $S = C^{te}$ sont des droites parallèles à l'axe OT. Ce sont en même temps des adiabatiques.

Les isothermes $T = C^{te}$ sont des droites parallèles à OS.

Cherchons la forme des isobares $p = C^{te}$. On a $dQ = C\,dT$, $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C}{T}\,dT$, $S = C\,\mathrm{Log}.\,T + C^{te}$. Ce sont des courbes

logarithmiques. On voit que $T\frac{dS}{dT} = C$. Autrement dit la sous-tangente AB est constante et égale à la chaleur spécifique C sous pression constante.



De même les isovolumétriques ($v = C^{te}$) ou isochores sont représentées par des courbes logarithmiques $S = c\,\mathrm{Log}\,T + C^{te}$ dont la sous tangente DE est constante et égale à la chaleur spécifique C pous volume constant.

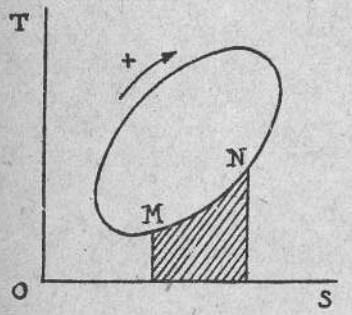
Puisque $C > c$, on conclut que les isochores sont plus inclinées que les isobares.

. Mais il faut bien remarquer que pour que la sous-tangente constante représente la valeur de C (ou de c), il faut non seulement que la transformation porte sur l'unité de masse du fluide, mais encore que l'axe OS soit l'axe du zéro absolu.

Prenons deux isobares quelconques $S = C\,\mathrm{Log}\,T + a$, $S = C\,\mathrm{Log}\,T + b$.

Une isotherme T les coupe en deux points dont la distance $a - b$ est constante. On ferait la même démonstration pour les isochores. Ainsi les isobares forment une famille de courbes parallèles, se déduisant toutes de l'une d'entre elles par une simple translation. Les isochores jouissent de la même propriété.

Un des principaux avantages du diagramme entropique est la représentation commode de la chaleur évoluée. Soit une transformation représentée par l'arc MN. La quantité de chaleur évoluée $Q = \int T\,dS$ est égale à l'aire hachurée comprise entre l'arc MN, l'axe du zéro absolu OS et deux parallèles à l'axe OT. Quand le fluide parcourt un <u>cycle fermé</u> la chaleur totale <u>reçue</u> par le fluide est représentée par l'aire comprise à l'intérieur de la courbe fermée qui représente la transformation prise avec le signe + si la courbe est parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre (cas de la figure) et avec le signe — dans le cas contraire.



Thermométrie. Calorimétrie. Loi de refroidissement de Newton.

11. - Sachant que le coefficient de dilatation apparente du mercure dans le verre est donné par la formule $\delta = a - bt + ct^2$, où a, b, c sont des coefficients positifs, calculer la température normale t (donnée par un thermomètre à gaz) qui correspond à la température θ indiquée par le thermomètre à mercure. (Proposé à la Sorbonne, Physique Générale).

La température θ est définie par l'équation

$$(1) \qquad \frac{\theta}{100} = \frac{v_\theta - v_0}{v_{100} - v_0},$$

les v étant les volumes apparents du mercure. Le mercure a le volume v_θ, lorsqu'il est à la température t. On a donc

$$v_\theta = v_t = v_0 (1 + \delta t) = v_0 (1 + at - bt^2 + ct^3).$$

$$v_{100} = v_0 (1 + 100\,a - 100^2 b + 100^3 c).$$

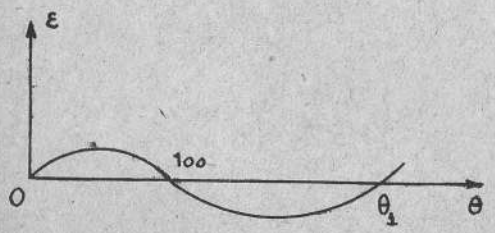
Portons ces valeurs dans (1) et multiplions les deux membres par 100, il vient

$$(2) \qquad \theta = \frac{at - bt^2 + ct^3}{a - 100b + 100^2 c}.$$

Telle est la relation résolue par rapport à θ, qui existe entre θ et t. Elle n'est pas utilisable pratiquement sous cette forme. Ce qu'il faut connaître, en effet, c'est t en fonction de θ. Nous allons poser $t = \theta - \varepsilon$ et calculer ε en fonction de θ. Comme ε est évidemment une quantité très petite, nous pourrons négliger ε^2 ε^3, ... Sous cette réserve, on a $\theta(a - 100b + 100^2 c) = a\theta - a\varepsilon - b\theta^2 + 2b\theta\varepsilon + c\theta^3 - 3c\theta^2\varepsilon$.

$$(3) \qquad \varepsilon = \frac{\theta(100^2 c - c\theta^2 - 100b + b\theta)}{-a + 2b\theta - 3c\theta^2} = \frac{\theta(100 - \theta)[c(\theta + 100) - b]}{-a + 2b\theta - 3c\theta^2}.$$

On trouve ainsi que ε est déjà nul pour $\theta = 0$ et pour $\theta = 100°$, ce qui était à prévoir puisque le thermomètre normal et le thermomètre à mercure sont en concordance aux températures 0 et 100° de l'échelle centigrade. Mais l'expression (3) montre qu'il y a une 3ème température $\theta_1 = \frac{b}{c} - 100$ pour laquelle il y a encore concordance. Avec les thermomètres à mercure de précision, on a toujours $\frac{b}{c} > 200$; par suite $\theta_1 > 100°$ (θ_1 est de l'ordre de 140° à 150°). On peut écrire (3) sous la forme



$$(4) \qquad \varepsilon = \frac{c\theta(100 - \theta)(\theta_1 - \theta)}{a - 2b\theta + 3c\theta^2}.$$

L'étude complète de la variation de ε en fonction de θ serait assez longue. En fait, le dénominateur qui dépend de θ est positif et la courbe a l'allure ci-dessus. De 0 à 100°, ε est positif ; le thermomètre à mercure avance sur le thermomètre

normal ; de 100° à θ_1 il retarde.

Nous allons chercher aussi la variation de ε en fonction de la température normale t, bien que cette étude n'ait pas d'objet pratique. Cela revient en effet à chercher quelle serait la température θ marquée par le thermomètre à mercure quand la température est t, ce qui évidemment ne présente pas d'intérêt (ce que l'on veut connaître en effet, c'est t quand on observe θ). En remplaçant dans (2) θ par $t+\varepsilon$, on trouve

$$\varepsilon = \frac{t(ct^2 - bt + 100b - \overline{100}^2 c)}{a - 100b + 100^2 c} = \frac{t(t-100)[c(t+100) - b]}{a - 100b + \overline{100}^2 c}.$$

Cette fois le dénominateur de ε est constant, ce qui rend la discussion immédiate. En désignant le dénominateur par D et en posant $\frac{b}{c} - 100 = t_1$, on a

$$(5) \qquad \varepsilon = \frac{ct(100-t)(t_1 - t)}{D}.$$

Naturellement $t_1 = \theta_1$, puisqu'à cette température, il y a coïncidence entre les deux thermomètres. La courbe a la même allure que la précédente.

---

12. — Un thermomètre à mercure concorde exactement avec le thermomètre normal à 0°, à 100° et à 150°. Son écart maximum relativement à l'échelle normale, entre 0 et 100°, est de 1/10 de degré. Calculer, en utilisant la théorie du n° 11, la température à laquelle se produit cet écart maximum. Quel est l'écart maximum entre 100° et 150° et pour quelle température se produit-il?

On demande en outre l'erreur commise dans l'expérience de Joule, pour la détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur, en supposant qu'on ait employé un tel thermomètre, la température du calorimètre étant de 15°. (Proposé à la Sorbonne : Physique Générale).

L'avance ε de l'indication θ du thermomètre à mercure sur la température t donnée par le thermomètre normal est donnée par la formule (5) du n° 11.

$$(1) \qquad \varepsilon = At(100-t)(150-t).$$

Annulons la dérivée, il vient

$$\frac{1}{A}\frac{d\varepsilon}{dt} = (100-t)(150-t) - t(150-t) - t(100-t) = 0,$$

$$3t^2 - 500t + 15000 = 0.$$

Cette équation a deux racines : $t' = 39°,2$; $t'' = 127°,4$ qui sont les deux températures normales pour lesquelles l'écart est maximum.

En faisant $\varepsilon = \frac{1}{10}$ et $t = t'$ dans l'équation (1) on a

$$A = \frac{1}{10 \times 39,2 \times 60,8 \times 110,8}.$$

L'écart maximum α, pour la température t'' est alors donné par la formule $\alpha = At''(100-t'')(150-t'') = -0°,03$.

Calculons maintenant l'erreur commise dans l'expérience de Joule. Soit M la masse en eau du calorimètre, ΔW le travail, $\Delta\theta$ l'élévation de température mesurée avec le thermomètre à mercure, J l'équivalent mécanique calculé avec $\Delta\theta$, on a $J = \frac{\Delta W}{M\Delta\theta}$.

Le thermomètre normal donnerait la vraie élévation de tempéra

ture Δt à laquelle correspondrait la vraie valeur J' de l'équivalent mécanique $J' = \frac{\Delta W}{M \Delta t}$.

Passons à la notation différentielle, ce qui est d'autant plus permis que $\Delta\theta$ et Δt sont très petits (il faut en effet recommencer un grand nombre de fois les opérations pour obtenir un échauffement appréciable).

L'erreur absolue est $J' - J = \frac{dW}{M}\left(\frac{1}{dt} - \frac{1}{d\theta}\right)$.

L'erreur relative est $\frac{J'-J}{J'} = 1 - \frac{dt}{d\theta}$.

D'ailleurs, $\theta = t + \varepsilon = t + At(100 - t)(150 - t)$,

$\frac{d\theta}{dt} = 1 + A(3t^2 - 500t + 15000) = 1 + \eta$.

L'erreur relative est donc $1 - \frac{1}{1+\eta} = \eta$ sensiblement, soit $A(3t^2 - 500t + 15000)$.

On ne dit pas si 15° est la température initiale ou la température finale du calorimètre. Cela n'a aucune importance puisque l'échauffement est très faible. En faisant $t = 15°$, on trouve $\eta = 0{,}003$. Comme Joule a trouvé $J = 425$ kilogrammètres, l'erreur relative est de l'ordre de 1, 2 kilogrammètre. J n'est donc connu qu'à une unité près.

---

13. — On a calculé l'équivalent mécanique J de la calorie en employant la formule de Clapeyron $L = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dT}{dt}$ en utilisant les résultats d'expériences faites sur un certain liquide à 50°, d'une part, et à 100° d'autre part. Dans ces diverses déterminations on a employé un thermomètre à mercure dont l'échelle présente, par rapport à celle du thermomètre normal, un écart maximum, par excès, de + 0,2 degré, lequel a lieu à 50°. On demande quelle correction il faut faire subir aux valeurs de J ainsi obtenues sachant que la valeur latente de vaporisation L a été déterminée par la méthode des mélanges et que la température finale du calorimètre était voisine de 15°. On négligera l'influence du terme relatif à la chaleur spécifique du liquide dans l'équation calorimétrique et on supposera qu'on a pris pour capacité calorifique du calorimètre le nombre correct. (Proposé à la Sorbonne).

L'erreur relative commise sur J a pour expression

$$(1) \qquad \frac{\Delta J}{J} = -\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta T}{T} + \Delta\frac{\Delta T'}{\Delta t} : \frac{\Delta T'}{\Delta t}.$$

Nous laissons en effet de côté, dans la différentiation, les termes relatifs à u et à u' puisque, d'après l'énoncé, on demande simplement l'erreur provenant des lectures faites sur le thermomètre à mercure.

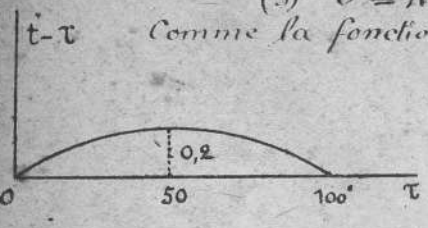
L'équation calorimétrique bien connue qui a servi à déterminer L est $mL + m(\Theta - \theta)c = P(\theta - t)$, Θ est la température d'ébullition du liquide, t la température initiale du calorimètre, θ sa température finale. D'après l'énoncé, nous négligeons le terme $m(\Theta - \theta)c$, d'où $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta(\theta - t)}{\theta - t}$.

Soit τ la température normale correspondant à la température t du thermomètre à mercure. Par hypothèse, les deux thermomètres sont d'accord aux températures zéro et 100° et présentent un écart maximum pour $\tau = 50°$. Posons (2) $t - \tau = a\tau + b\tau^2$.

Le second membre qui s'annule pour $\tau = 0$, doit également

s'annuler pour $\tau = 100°$ ce qui donne la condition

(3) $\quad 0 = 100\,a + 10000\,b$.



Comme la fonction (2) représente une parabole à axe vertical rencontrant l'axe des températures aux points d'abscisses zéro et 100, on est bien certain que l'écart maximum a lieu pour $\tau = 50°$ qui est l'abscisse du sommet de la parabole. En écrivant que cet écart maximum est égal à 0,2, on a la relation

(4) $\quad 0{,}2 = 50\,a + 2500\,b$.

Des deux équations (3) et (4) on tire $a = 8.10^{-3}$, $b = -8.10^{-5}$ et la relation (2) devient

(5) $\quad t - \tau = 8.10^{-3}\,\tau - 8.10^{-5}\,\tau^2$.

Nous avons à calculer $\frac{\Delta(\theta - t)}{\theta - t}$ 15°, c'est à dire l'erreur par degré dans le voisinage de 15°. Ce n'est pas autre chose que la dérivée de la fonction (5) dans laquelle on fait $\tau = 15$, ce qui donne :

$$\frac{\Delta(\theta - t)}{\theta - t}\ 5{,}6 = 8.10^{-3} - 16.10^{-5} \times 15 = 5{,}6 \times 10^{-3}.$$

Cette erreur de 5,6 millièmes est considérable.

(Remarquons en passant que cette erreur constitue la grosse erreur des expériences de Joule sur la détermination de J. Joule, en effet, s'est servi d'un thermomètre à mercure et il n'a pas songé un seul instant à comparer ses indications avec celles d'un chronomètre à gaz. Comme il a trouvé $J = 425$ kilogrammètres, on voit que l'erreur est supérieure à 2 kilogrammètres en supposant qu'il n'y ait pas d'autres causes d'erreur).

Revenons à notre problème et calculons les deux derniers termes de l'expression (1).

A 50°, le terme $\frac{\Delta T}{T}$ est égal à $\frac{0{,}2}{273+50} = \frac{0{,}62}{1000}$.

A 100°, le terme $\frac{\Delta T}{T}$ est nul par hypothèse.

Reste $\Delta \frac{\Delta F}{\Delta t} : \frac{\Delta F}{\Delta t}$. On suppose qu'on a déterminé correctement ΔF. Nous n'avons donc à nous occuper que de l'erreur due à la température, qui a pour expression $-\frac{\Delta\,\Delta t}{\Delta t}$. En raisonnant comme plus haut, on voit que nous avons à évaluer l'erreur par degré dans le voisinage de 50° ou de 100°. Elle est égale à la dérivée, changée de signe, de la fonction (5) ; elle est donc nulle à 50° et égale à 8.10^{-3} pour 100°.

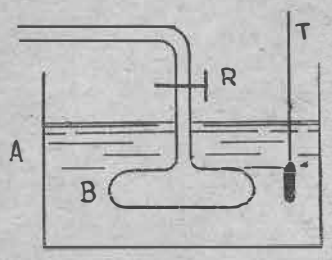
En définitive, l'erreur relative totale demandée est

$\frac{0{,}62 - 5{,}6}{1000} = -\frac{5}{1000}$ à 50° et $\frac{-5{,}6 + 8}{1000} = \frac{2{,}4}{1000}$ à 100°.

Si donc on a trouvé $J = 4{,}18$ calories, l'erreur absolue est $-0{,}021$ calorie à 50° et 0,01 calorie à 100°. Autrement dit, il faut prendre 4,16 calories pour l'expérience faite à 50° et 4,19 calories pour celle faite à 100°.

---

14. – Dans un calorimètre A contenant de l'eau se trouve un petit vase en laiton B renfermant une masse m d'un liquide de chaleur spécifique c. La température initiale du système est t_1. On met le vase B en communication par un robinet R avec un grand espace vide. On laisse le liquide contenu dans le vase B se vaporiser complètement et lentement (pour que la transformation soit reversible) et on note la température finale t_2 quand toute l'eau du vase est vaporisée. On refait une seconde expérience avec la même masse m de liquide, la température initiale du système étant θ_1 et la température étant θ_2 au moment où la vaporisation s'achève. La chaleur de vaporisation du liquide étant supposée être de la forme $\lambda = a - bt$, déterminer a et b au moyen des résultats précédents. On désignera par M la masse réduite en eau du calorimètre, de l'eau qu'il renferme, du vase B et du thermomètre T plongé dans le liquide.



(Proposé à la Sorbonne, Physique Gén^{le}).

Soit x la masse de liquide qui reste dans le vase B à un moment donné ; soit dx la masse de liquide vaporisée correspondant à l'abaissement de température dt du système. On a

$$\lambda\, dx = (M + cx)\, dt, \quad (1) \quad \frac{dx}{M+cx} = \frac{dt}{a-bt},$$

$$\frac{1}{c} \operatorname{Log}(M+cx) = -\frac{1}{b} \operatorname{Log}(a-bt) + K.$$

Au début de l'expérience, on a

$$\frac{1}{c} \operatorname{Log}(M+cm) = -\frac{1}{b} \operatorname{Log}(a-bt_1) + K.$$

Quand tout le liquide est vaporisé, on a

$$\frac{1}{c} \operatorname{Log} M = -\frac{1}{b} \operatorname{Log}(a-bt_2) + K.$$

En retranchant ces deux équations membre à membre, il vient

$$(2) \quad \frac{1}{c} \operatorname{Log} \frac{M+cm}{M} = -\frac{1}{b} \operatorname{Log} \frac{a-bt_1}{a-bt_2}.$$

La seconde expérience donne une équation analogue

$$(3) \quad \frac{1}{c} \operatorname{Log} \frac{M+cm}{M} = -\frac{1}{b} \operatorname{Log} \frac{a-b\theta_1}{a-b\theta_2}.$$

Les relations (2) et (3) constituent deux équations à deux inconnues a et b. Nous allons calculer d'abord le rapport $\frac{a}{b}$. On tire immédiatement

$$(4) \quad \frac{a-bt_1}{a-bt_2} = \frac{a-b\theta_1}{a-b\theta_2} = \frac{t_1-\theta_1}{t_2-\theta_2} = \left(\frac{a}{b} - t_1\right) : \left(\frac{a}{b} - t_2\right);$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\theta_1 t_2 - t_1 \theta_2}{t_2 - \theta_2 - t_1 + \theta_1}.$$

Le rapport $\frac{a}{b}$ étant connu, il suffit de calculer b. L'équation (2), par exemple, peut s'écrire, en tenant compte de (4),

$$\frac{1}{c} \operatorname{Log} \frac{M+cm}{M} = -\frac{1}{b} \operatorname{Log} \frac{t_1-\theta_1}{t_2-\theta_2} \quad \text{d'où} \quad b = -c \operatorname{Log} \frac{t_1-\theta_1}{t_2-\theta_2} : \operatorname{Log} \frac{M+mc}{M}$$

Ce calcul serait en défaut si $b = 0$, c'est-à-dire si λ est constant. Mais alors l'équation (1) s'écrit $\frac{dx}{M+cx} = \frac{dt}{a}$, et la détermination de a est immédiate.

15. — Un kilogramme d'eau à 100° est placé dans un vase imperméable à la chaleur. Il s'y vaporise très lentement et la vapeur d'eau formée est enlevée par un moyen quelconque au fur et à mesure de sa formation. Quel est le poids d'eau qui reste dans le calorimètre lorsque cette eau est entièrement congelée ? La chaleur de fusion de la glace est de 80 calories et la chaleur latente de vaporisation est donnée par la formule de Regnault $\lambda = 606{,}5 - 0{,}695\,t$, t désignant la température en degrés centigrades (Proposé à la Sorbonne. Physique générale)

Soit m la quantité d'eau qui reste à un moment donné dans le calorimètre, t la température à cet instant. Quand une quantité d'eau dm se vaporise, la température s'abaisse de dt. Pour vaporiser la quantité dm d'eau, il faut fournir $\lambda\,dm$ calories qui sont évidemment empruntées à la masse m d'eau. On a donc $\lambda\,dm = m\,dt$, c'est à dire en posant $\lambda = a - bt$, (1) $\dfrac{dm}{m} = \dfrac{dt}{a-bt}$

Nous allons d'abord calculer la quantité x d'eau qui reste dans le calorimètre quand la température est tombée à 0°, mais avant qu'aucune parcelle d'eau ne soit congelée. Désignons par m_0 la masse initiale d'eau ; on a, en intégrant l'équation (1),

$$\operatorname{Log}\frac{x}{m_0} = -\frac{1}{b}\Big|\operatorname{Log}(a-bt)\Big|_{100}^{0} = -\frac{1}{b}\operatorname{Log}\frac{a}{a-100b}.$$

D'ailleurs $m_0 = 1\,kg$, $a = 606{,}5$, $b = 0{,}695$.

$$\operatorname{Log} x = -\frac{1}{0.695}\operatorname{Log}\frac{606{,}5}{537}, \qquad x = \left(\frac{537}{606{,}5}\right)^{\frac{1}{0.695}} = 0^{kg},839.$$

L'eau continue à se vaporiser ; la température reste constante et égale à 0° ; par suite $\lambda = 606{,}5$. Une partie de l'eau se congèle pour dégager la quantité de chaleur nécessitée par la vaporisation. Soit dm la quantité de vapeur dégagée correspondant à la quantité dm' de glace formée. On a (2) $\lambda\,dm = 80\,dm'$.

Soit y la quantité d'eau qui reste finalement dans le calorimètre à l'état de glace. La quantité d'eau vaporisée dans cette seconde phase de l'expérience est $x - y$; en intégrant l'équation (2) il vient

$$606{,}5\,(x-y) = 80\,y, \qquad y = \frac{606{,}5 \times 0{,}839}{686{,}5} = 0^{kg},741.$$

---

16. — <u>Loi de refroidissement de Newton.</u> — Quand un corps à température θ se trouve placé dans une enceinte à température $\tau < \theta$, il se refroidit. La température θ est une fonction du temps t. Pendant le temps dt, le corps se refroidit de $d\theta$. La loi de Newton consiste à admettre que $d\theta$ est proportionnel à dt et à l'excès de température $\theta - \tau$.

$$(1) \qquad d\theta = K\,(\theta - \tau)\,dt$$

A ce propos faisons une remarque souvent applicable à des questions de physique ; $d\theta$ est un <u>abaissement</u> de température, alors que dt est un <u>accroissement</u> de temps. Or, en analyse, dans la notion de dérivée $\dfrac{dy}{dx}$, dy et dx sont des <u>accroissements</u>

Nous ne pouvons donc conserver l'équation (1), car il faudrait changer les dérivées de signe et nous écrirons

$$(2) \qquad -d\theta = K(\theta - \tau)\,dt.$$

Cette fois $d\theta$ est un accroissement. Le coefficient K dépend de la forme du corps qui se refroidit, de la nature de sa surface, de la nature et de la pression du gaz ambiant.

Le refroidissement se produit : 1° par <u>rayonnement</u> ; la chaleur se transmet à <u>distance</u>, par l'éther, sans transport de matière, sans échauffer les corps qu'elle traverse, jusqu'à ce qu'elle rencontre un corps qui l'absorbe et dont elle élève alors la température ; 2° par <u>conductibilité</u> du gaz ambiant, ce qui est particulièrement sensible quand ce gaz est de l'hydrogène. Dans la conductibilité, la chaleur chemine par contact des particules chaudes aux particules froides, sans que des particules bougent ; 3° par <u>convection</u> ; les molécules chauffées se meuvent emportant de la chaleur avec elles et créent des mouvements circulatoires dans le fluide ambiant.

En raréfiant le fluide ambiant, on diminue la convection, mais la conductibilité est sensiblement indépendante de la pression sauf aux très basses températures. On ne devrait donc appliquer la loi de Newton qu'au phénomène de rayonnement pur. Toutefois, dans les conditions ordinaires de la pratique, cette loi est admissible tant que l'écart de température $\theta - \tau$ ne dépasse pas 4 à 5° (certains auteurs vont jusqu'à admettre un écart d'une vingtaine de degrés) De l'équation (2) on tire :

$$\frac{d\theta}{\theta - \tau} = -K\,dt \quad , \quad -\operatorname{Log}\frac{\theta - \tau}{\theta_0 - \tau} = -Kt,$$

$$(3) \qquad \theta - \tau = (\theta_0 - \tau)\,e^{-Kt},$$

en désignant par θ_0 la température initiale du corps qui se refroidit. On voit que le corps n'atteint la température ambiante qu'au bout d'un temps infini. Les écarts de température décroissent en progression géométrique quand les temps croissent en progression arithmétique.

Faisons maintenant intervenir la calorimétrie. Soit m la masse en grammes du corps qui se refroidit, c sa chaleur spécifique. La quantité de chaleur perdue par le corps qui rayonne est $dq = mc\,d\theta$. D'après la loi de Newton, dq est proportionnel à dt et à $\theta - \tau$. On a donc $dq = A(\theta - \tau)\,dt$

Pour tenir compte de ce que dq est une perte de chaleur, on écrira $\qquad -mc\,d\theta = A(\theta - \tau)\,dt.$

On en tire immédiatement (4) $\theta - \tau = (\theta_0 - \tau)\,e^{-At : mc}$

La comparaison des formules (3) et (4) donne la relation entre les deux coefficients K et A, soit (5) $K = \frac{A}{mc}$.

Faisons refroidir un second corps, on aura

$$(6) \qquad \theta' - \tau = (\theta'_0 - \tau)\,e^{-A't : m'c'}.$$

Supposons que $\theta_0 = \theta'_0$ et qu'on laisse refroidir le second corps jusqu'à la température $\theta' = \theta$; la comparaison des formules (4) et (6)

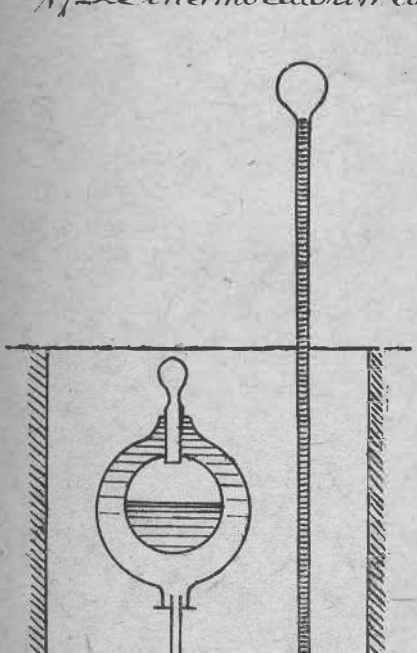
montre que $\frac{At}{mc} = \frac{A't'}{m'c'}$.

Si de plus on s'arrange pour que le rayonnement soit le même dans les deux expériences, on aura $A = A'$ et par suite, $\frac{t}{mc} = \frac{t'}{m'c'}$

Cette formule permet de calculer c', connaissant c. C'est le principe du thermocalorimètre de Regnault dont nous allons donner une application dans le numéro suivant.

---

17 – Le thermocalorimètre de Regnault est, comme l'on sait, constitué par un thermomètre à alcool dont le réservoir creux, fermé par un bouchon à l'émeri, peut recevoir la substance sur laquelle on veut expérimenter et dont la tige recourbée, et terminée par un réservoir plus petit porte un certain nombre de divisions équidistantes. L'appareil est placé dans une enceinte entourée de glace et dont les parois intérieures sont recouvertes de noir de fumée. Le réservoir étant vide, on note les valeurs simultanées de la température et du temps. On recommence un grand nombre de fois les mesures et on en prend les moyennes.



On fait une seconde série d'expériences en introduisant dans le réservoir 28 grammes d'acétone, puis une troisième série d'expériences en introduisant dans le réservoir 33,6 grammes d'eau. Les moyennes de toutes les mesures sont indiquées dans le tableau suivant

Températures	Temps		
	Réservoir vide	Acétone	Eau
8°,5	0	0	0
8°	1' 22"	2' 2"	3'
7°,5	2' 45",3	4' 8"	6' 4"
7°	4' 15",5	6' 24"	9' 22"
6°,5	5' 54"	8' 50"	13'
6°	7' 40"	11' 30"	16' 52"

La loi de refroidissement de Newton peut-elle être considérée comme exacte dans l'intervalle de température considéré?

Quelle est la chaleur spécifique moyenne de l'acétone entre 6° et 8°,5, celle de l'eau entre les mêmes limites étant prise pour unité?

Quelle est la masse en eau du calorimètre et le coefficient de rayonnement de l'appareil?

(Proposé à la Sorbonne. Physique Générale)

Pour voir si la loi de refroidissement de Newton est applicable dans l'intervalle de température considéré nous employons la formule (3) du numéro précédent. En remarquant que $t=0$, on a

$$\theta=\theta_0 e^{-Kt}, \quad (1)\quad K=\frac{1}{t}\,\mathrm{Log}\,\frac{\theta_0}{\theta}.$$

Si la loi est applicable, K doit être constant pour chaque groupe d'expériences (bien entendu, il doit varier d'un groupe d'expériences à l'autre).

Au lieu de prendre des échelons variant uniformément de un demi degré, il vaut mieux considérer des écarts de température allant progressivement en croissant, autrement dit considérer la première et la deuxième expérience, puis la première et la troisième expérience, puis la première et la quatrième expérience et ainsi de suite.

D'autre part, comme il s'agit simplement de vérifier la constance de K, il est inutile de nous astreindre à prendre des logarithmes népériens, comme l'exigerait la formule (1). Nous prendrons des logarithmes vulgaires, en nous souvenant qu'on n'obtient ainsi que des valeurs proportionnelles à K.

Prenons d'abord le cas où le calorimètre est vide. En procédant comme nous venons de dire, on trouve

$$K=\frac{1}{82}\log\frac{8,5}{8}=3,210\times10^{-4},\qquad K=\frac{1}{165,3}\log\frac{8,5}{7,5}=3,288\times10^{-4},$$

$$K=\frac{1}{255,5}\log\frac{8,5}{7}=3,300\times10^{-4},\qquad K=\frac{1}{354}\log\frac{8,5}{6,5}=3,291\times10^{-4},$$

$$K=\frac{1}{460}\log\frac{8,5}{6}=3,289\times10^{-4}.$$

Le premier résultat s'écarte beaucoup des autres; cela tient à ce qu'au début il y a un trouble dû aux mouvements de convection. En éliminant la première expérience, on voit que K est sensiblement constant et que par conséquent la loi de Newton est pratiquement applicable dans le cas actuel. En prenant la moyenne des 4 dernières expériences on trouve $K=3,292\times10^{-4}$.

Faisons des calculs analogues pour les expériences où le calorimètre renferme de l'acétone; on trouve les 5 valeurs suivantes, au facteur 10^{-4} près.

2,158 2,192 2,196 2,198 2,193.

D'où, en éliminant la première expérience $K'=2,195\times10^{-4}$.

Enfin quand le calorimètre renferme de l'eau, on a

1,463 1,493 1,500 1,493 1,494.

soit $K''=1,495\times10^{-4}$.

Soit M la masse en eau du calorimètre lorsque son réservoir est vide, m la masse en grammes de l'acétone, x, sa chaleur spécifique, m' la masse de l'eau en grammes introduite dans le réservoir dans la troisième expérience. En appliquant la formule (5) du n° précédent on a $K = \frac{A}{M}$, $K' = \frac{A}{M+mx}$, $K'' = \frac{A}{M+m'}$ c.à.d. trois équations à trois inconnues x, M, A. On trouve immédiatement, en éliminant A, $x = \frac{m'K''(K-K')}{mK'(K-K'')}$, $M = \frac{m'K''}{K-K''}$.

Les quantités K, K', K'' ne figurent dans ces expressions que par leurs rapports ; on peut donc utiliser les valeurs données plus haut qui leur sont proportionnelles, ce qui donne $x = 0,499$ soit $0,5$; $M = 27,95$ soit 28 grammes.

Pour calculer A, on emploiera $A = KM$; mais cette fois nous devrons prendre la vraie valeur de K, c.à.d. $3,292 \times 10^{-4}$ log. e. On trouve ainsi $A = 2,118 \times 10^{-2}$.

Compression des fluides.

18.— On comprime adiabatiquement de l'eau liquide depuis la pression normale P_0 jusqu'à $P_0 + \Delta P$. Calculer la variation Δt de température que cette compression provoque. Bien indiquer s'il y a échauffement ou refroidissement. Application numérique (Expérience de Joule) $\Delta P = 26^{kg},19$ par cm^2. Calculer Δt pour les 3 valeurs suivantes de la température initiale : 0°, 4°, 18° centigrades. Δt et ΔP sont assez faibles pour que les valeurs du quotient $\frac{\Delta t}{\Delta P}$ et de la dérivée $\frac{\partial t}{\partial P}$ soient égales. On regardera la chaleur spécifique de l'eau comme égale à l'unité de 0° à 18°. Equivalent mécanique $J = 4,18 \times 10^7$ ergs. On admettra sans démonstration la formule $dQ = C dt + h dP$ et la deuxième formule de Clapeyron qui donne $\frac{h}{T}$. On indiquera avec précision la signification des lettres et des dérivées.

Données numériques servant au calcul de la dérivée $\frac{\partial v}{\partial t}$.

Températures centigrades	Volume de 1 gr d'eau en millimètres cubes sous la pression normale.
0°	1000,127
0°,1	1000,120
3°,9 4° 4°,1	1000,
18°	1001,374
18°,1	1001,393

La compression considérée réduit le volume de 1 gr d'eau de 1,25 mm^3 environ à 0° et de 1,20 mm^3 environ à 18°. (Physique générale. Lille).

La compression étant supposée adiabatique, nous égalons à zéro l'expression donnée de dQ

$$(1) \qquad dQ = C\,dT + h\,dp = 0,$$

C est la chaleur spécifique de l'eau à pression constante, h est la chaleur latente de compression. Nous admettons sans démonstration la seconde formule de Clapeyron $h = -\frac{T}{J}\frac{dv}{dT}$. En portant cette valeur dans (1) et en remplaçant les différentielles par des accroissements finis il vient

$$\Delta T = -\frac{h}{C}\Delta p = \frac{T}{JC}\frac{dv}{dT}\Delta p.$$

Si $\frac{dv}{dT}$ est positif, ce qui est le cas général, ΔT et ΔP sont de même signe ; une augmentation de pression élève la température. Cette augmentation de pression amène au contraire un refroidissement si $\frac{dv}{dT}$ est négatif.

L'eau présente à cette particularité qu'une augmentation de pression peut donner lieu soit à un échauffement, soit à un refroidissement selon la température à laquelle on opère. Joule l'a vérifié en 1859.

Calculons la quantité ΔT à 0°. Dans le voisinage de cette température, le volume de l'eau diminue quand la température augmente; la diminution de volume de 1 gramme d'eau est, d'après le tableau de l'énoncé, de 0,007 mm^3 pour 0°1. (Il est indifférent pour calculer cette diminution, de prendre les volumes de 1 gramme d'eau sous la pression normale P_0 ou sous la pression $P_0 + \Delta P$). On a donc en C.G.S. $\frac{dv}{dt} = -7\times10^{-5}$ et par suite $\Delta T = -\frac{273}{4,18\times10^7}\times 7\times10^{-5}\times 26,19\times 981000 = -0°,0117$.

Il y a refroidissement.

A 4°, $\frac{dv}{dT} = 0$ et par suite $\Delta T = 0$; il n'y a ni échauffement ni refroidissement.

A 18° $\frac{dv}{dT} = 19\times10^{-5}$ C.G.S. et par suite

$$\Delta T = \frac{291}{4,18\times10^7}\times 19\times10^{-5}\times 26,19\times 981.000 = +0°,0339.$$

Cette fois, il y a échauffement. Ces chiffres sont très voisins de ceux trouvés par l'expérience.

---

19. — Un fluide étant défini par une relation de la forme

$$(1) \qquad f(p, v, t) = 0,$$

1° Calculer la quantité $A = \frac{dp}{dv}\times\frac{dv}{dt}\times\frac{dt}{dp}$;

2° Établir une relation entre le coefficient de compressibilité $\mu = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp}$, le coefficient de dilatation sous pression constante $\alpha = \frac{1}{v}\frac{dv}{dt}$ et le coefficient de variation de pression sous volume constant $\beta = \frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$.

3° Calculer l'accroissement de pression que subit une masse donnée de mercure lorsqu'on la chauffe à volume constant de 0° à 1°. On admettra que le coefficient de pression $\frac{dp}{dt}$ peut être regardé comme indépendant de la pression dans les limites de l'expérience. On prendra $\alpha = 18\times10^{-5}$, $\mu = 3\times10^{-6}$. On notera que la valeur donnée pour μ se rapporte à des atmosphères et non à des baryes.

4° (Démontrer que la température du maximum de densité de l'eau sous une pression donnée est celle pour laquelle le coefficient de pression $\frac{\partial p}{\partial t}$ s'annule.

5° Sachant que l'on a pour une fluide quelconque la relation $C - c = \frac{T}{J} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t}$, où T désigne la température absolue, J l'équivalent mécanique de la calorie, calculer la chaleur spécifique c_0 et $c_{4°}$ de l'eau sous volume constant sachant que l'on a pour ce fluide : $C_0 = 1,00874$; $C_{4°} = 1,00546$; densité à 0°, $d = 0,99988676$; $d_{0°,1} = 0,99988744$; $\mu_0 = 53 \times 10^{-6}$; $J = 4,185 \times 10^7$ ergs.
(Proposé à la Sorbonne, Physique générale).

1° L'équation caractéristique (1) définit l'une quelconque des trois variables comme fonction implicite des deux autres.

Supposons d'abord que p est la fonction et dérivons la fonction (1) par rapport à v :

$$\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial v} = 0, \text{ d'où (2)} \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial v} : \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Supposons maintenant que v est la fonction et dérivons (1) par rapport à t ; il vient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \text{d'où (3)} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial t} : \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Supposons enfin que t est la fonction et dérivons (1) par rapport à p ; il vient $\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial p} = 0$, d'où (4) $\frac{\partial t}{\partial p} = -\frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial t}$.

En multipliant membre à membre les relations (2), (3) et (4) on a

$$(5) \quad A = \frac{\partial p}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial p} = -1.$$

2° Remarquons d'abord que l'on a (6) $\frac{\partial p}{\partial v} = 1 : \frac{\partial v}{\partial p}$. Cette égalité qui est évidente avec des dérivées ordinaires ne l'est pas avec des dérivées partielles. Pour la démontrer, supposons que v soit la fonction et dérivons (1) par rapport à p. Il vient

$$\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial p} = 0, \quad \text{d'où (7)} \quad \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial v}.$$

En comparant (2) et (7) on trouve bien (6).

On a de même $\frac{\partial p}{\partial t} = 1 : \frac{\partial t}{\partial p}$.

Dans ces conditions, en tenant compte des valeurs de définition de α, β et μ, la relation (5) s'écrit

$$-\frac{1}{\mu v} \times \alpha v \times \frac{1}{\beta p} = -1 \text{ ou (8)} \quad \alpha = \beta \mu p.$$

Telle est la relation remarquable cherchée. Elle est indépendante de la forme de la fonction caractéristique f.

3° Puisque $p\beta = \frac{\partial p}{\partial t}$, la relation (8) s'écrit (9) $\alpha = \mu \frac{\partial p}{\partial t}$. Pour une transformation finie, quand on chauffe le mercure de 0° à 1° sous volume constant, on a $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\mu} = \frac{18 \times 10^{-5}}{3 \times 10^{-6}} = 60$. Comme $\Delta t = 1°$, on voit que l'augmentation énorme de pression que subit le mercure est $\Delta p = 60$ atmosphères.

4° A la température du maximum de densité de l'eau, le volume spécifique est minimum sous pression constante ; $\frac{\partial v}{\partial t}$ et

par suite α sont nuls. Il en résulte d'après (9) que l'on a bien $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, car μ n'est pas nul. Donc pour chaque pression, la température du maximum de densité de l'eau sera celle pour laquelle $\frac{\partial p}{\partial t}$ s'annule. Pour la pression atmosphérique c'est 4° ; pour 200 atmosphères c'est 0°. Ainsi un accroissement de pression de 50 atmosphères abaisse de 1° environ la température du maximum de densité de l'eau.

5° A la température de 4°, sous la pression atmosphérique, on a $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$; par conséquent le second membre de la relation

(10) $C - c = \frac{T}{J} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t}$ est nul et on a $c_{4°} = C_{4°} = 1,00546$, $\gamma_{4°} = C_{4°} : c_{4°} = 1$

Pour 0°, calculons le second membre de (10). Les valeurs données pour C et c étant relatives à l'unité de masse, v est le volume spécifique. On a $v = \frac{1}{d}$, $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{d^2} \frac{\partial d}{\partial t} = -\frac{1}{d^2} \frac{d_{0,1} - d_0}{0,1}$.

Au lieu de d^2 on met d_0^2 ; $\frac{\partial v}{\partial t}$ est donc connu. De (9) on tire

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\alpha}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Par suite, $C - c = \frac{T}{J} \frac{1}{\mu} \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = \frac{T}{J} \frac{1}{\mu v} \frac{1}{d_{3,4}} \left(\frac{d_{0,1} - d_0}{0,1}\right)^2$.

Pour μ on prend μ_0 ; pour v on prend $v_0 = \frac{1}{d_0}$, ce qui donne

$$C_0 - c_0 = \frac{T}{J} \frac{1}{\mu_0 d_0^3} \left(\frac{d_{0,1} - d_0}{0,1}\right)^2.$$

Il faut transformer cette expression en unités C.G.S. D'après l'énoncé, la valeur donnée pour μ_0 suppose qu'on évalue les pressions en atmosphères. Comme $\mu = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial p}$ et que 1 atmosphère vaut $1,013 \times 10^6$ baryes, on doit prendre $\mu_0 = \frac{53}{1,013} \times 10^{-12}$.

On trouve en effectuant les calculs

$C_0 - c_0 = 0,00058$, $c_0 = 1,00816$, $\gamma_0 = \frac{C_0}{c_0} = 1,00058$.

Théorie cinétique des gaz.

---

20. — Un gaz diatomique parfait, contenu dans un réservoir s'échappe adiabatiquement dans l'atmosphère par un orifice en mince paroi. On demande : 1° quelle doit être la pression p_1 dans le réservoir pour que la vitesse d'écoulement soit égale à la vitesse moyenne d'agitation moléculaire ; 2° quelle est cette vitesse pour l'oxygène à 27° centigrades ; 3° à quelle température peut arriver le gaz ? — On donne $R = 832 \times 10^5$ C.G.S pour une molécule-gramme.

(Proposé à la Sorbonne. Physique Générale.)

1° Appliquons le principe de l'équivalence. Comme il y a variation d'énergie cinétique du système, nous prenons l'équation (2) du n° 51

(1) $\qquad J \Delta Q + \Delta T = \Delta U + \Delta W$

ΔQ et $\Delta \mathcal{T}$ sont respectivement la chaleur et le travail reçus par le système ; ΔU est l'accroissement d'énergie interne, ΔW l'accroissement d'énergie cinétique.

Raisonnons sur l'unité de masse du gaz occupant le volume spécifique v_1 dans le réservoir à la pression p_1 et à la température absolue T_1. Après écoulement dans l'atmosphère, elle y occupe le volume spécifique v_2, à la pression p_2 et à la température T_2. L'écoulement étant adiabatique on a $\Delta Q = 0$. Pour chasser du réservoir le volume v_1 à la pression p_1, les forces extérieures ont effectué le travail $p_1 v_1$; mais le gaz a effectué contre l'atmosphère le travail $p_2 v_2$. On a donc $\Delta \mathcal{T} = p_1 v_1 - p_2 v_2$.

Comme le gaz est parfait, son énergie interne ne dépend que de la température dont elle est une fonction linéaire et on a la formule connue $\Delta U = Jc(T_2 - T_1)$.

Enfin comme on raisonne sur l'unité de masse, on a $\Delta W = \frac{1}{2} u^2$, u désignant la vitesse d'écoulement. On suppose négligeable la vitesse du gaz dans le réservoir. En portant ces valeurs dans (1) il vient $p_1 v_1 - p_2 v_2 = Jc(T_2 - T_1) + \frac{1}{2} u^2$.

Puisque le gaz est parfait, on a

$$p_1 v_1 = r T_1 \qquad p_2 v_2 = r T_2,$$

r étant la constante spécifique du gaz (n° 2).

En tenant compte de la formule de Meyer $r = J(C - c)$, on a

$$r(T_1 - T_2) - Jc(T_2 - T_1) = \frac{u^2}{2},$$

$$u^2 = 2Jc(T_1 - T_2) \tag{2}$$

Nous voulons que la vitesse u soit égale à la vitesse moyenne d'agitation moléculaire laquelle, d'après la théorie cinétique des gaz, est donnée par la formule $pv = \frac{1}{3} u^2$, si on considère l'unité de masse. On en déduit par exemple,

$$u^2 = 3 p_1 v_1 = 3 r T_1. \tag{3}$$

En portant dans (2), il vient $3 r T_1 = 2Jc(T_1 - T_2)$,

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{3r}{2Jc} = 1 - \frac{3(C-c)}{2C} = \frac{3-\gamma}{2\gamma}. \tag{4}$$

On sait d'ailleurs (formule 3 du n° 23) que $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1):\gamma}$.

On a donc en renversant les termes,

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{2\gamma}{3-\gamma}\right)^{\gamma:(\gamma-1)}$$

Pour un gaz diatomique, $\gamma = \frac{7}{5}$; d'autre part $p_2 = 1$ atmosphère. On a donc

$$p_1 = \left(\frac{7}{4}\right)^{3,5} = 7,09 \text{ atmosphères.}$$

2° Pour calculer u dans le cas de l'oxygène, nous prenons la formule (3). Nous y faisons $T_1 = 27 + 273 = 300$. La constante spécifique r de l'oxygène se déduit de la constante universelle R par la formule $r = R : M$, dans laquelle nous faisons $M = 32$, masse de la molécule d'oxygène. On a donc

$$u = \sqrt{\frac{3 \times 382 \times 10^5 \times 300}{32}} = 48373 \text{ cm par seconde soit } 483,73 \text{ m. par seconde.}$$

3° De (4) on tire $T_2 = \frac{3-\gamma}{2\gamma} T_1 = \frac{4T_2}{7} = 171°,4$ absolus soit $-101°,6$ centigrades.

---

21. - V désignant la vitesse du son dans les gaz, u la vitesse moyenne du mouvement d'agitation des molécules de ce gaz d'après la théorie cinétique, on demande: 1° de démontrer que le rapport $\frac{V}{u}$ est, pour un même gaz indépendant de la température et de la pression; 2° de calculer numériquement ce rapport dans le cas d'un gaz monoatomique. (Physique Générale, Paris)

1° La vitesse du son dans un gaz est représentée par la formule de Newton (1) $V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, E désignant le coefficient d'élasticité et ρ la masse spécifique du fluide.

Rappelons la définition de l'élasticité. Soit v le volume (spécifique) d'un fluide. Comprimons-le de dv en augmentant la pression de dp. La compression est $-\frac{dv}{v}$ et on a

$$E = dp : \left(-\frac{dv}{v}\right) = -\frac{v\,dp}{dv}.$$

Les compressions et les dilatations dont la succession produit le son se succèdent tellement rapidement qu'on peut supposer le phénomène adiabatique. Comme d'autre part le gaz est supposé parfait on a, d'après la formule (7) du n° 3,

$$(2) \qquad C_p dv + c_v dp = 0, \qquad -\frac{v\,dp}{dv} = \frac{C}{c} p = \gamma p = E.$$

Comme $\rho = \frac{1}{v}$, la formule (1) devient (3) $V = \sqrt{\gamma p v}$.

Mais d'après la théorie cinétique des gaz, v désignant le volume spécifique, on a (4) $pv = \frac{u^2}{3}$.

En portant cette valeur dans (3), il vient (5) $\frac{V}{u} = \sqrt{\frac{\gamma}{3}}$. Le rapport $\frac{V}{u}$ est donc bien indépendant pour un même gaz, de la température et de la pression.

Il ne dépend que de γ.

2° Dans le cas d'un gaz monoatomique, la différentielle de la force vive développée par l'agitation moléculaire peut se représenter entièrement par $d(u^2)$, pour l'unité de masse. Si l'on considère une variation infiniment petite de volume dv due à une détente, l'application du théorème des forces vives donne

$$(6) \qquad -p\,dv = \frac{1}{2} d(u^2).$$

En différentiant (3), il vient, en tenant compte de (6),

$$p\,dv + v\,dp = \frac{1}{3} d(u^2) = -\frac{2}{3} p\,dv, \qquad (7) \quad \frac{5}{3} p\,dv + v\,dp = 0$$

En comparant (2) avec (7) on voit que $\frac{C}{c} = \gamma = \frac{5}{3}$

Par conséquent la formule (5) donne

$$\frac{V}{u} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,7453.$$

---

22. - Le sifflet d'une locomotive a la forme d'un tuyau sonore fermé de 10 centimètres de longueur. La vapeur qui le fait parler est à la pression de 9 atmosphères et à la température de 180°. On demande quel est le nombre de vibrations du son fondamental rendu et de ses trois premiers harmoniques. Densité de la vapeur d'eau: 0,623. (Physique générale. Paris).

La vitesse V du son dans le fluide est donnée par la formule (3) du n° précédent.

$$V = \sqrt{\gamma p v} = \sqrt{\gamma r T}.$$

Nous avons vu (n° 2) que, pour l'air, en prenant pour v_0 le volume spécifique, c. à. d. le volume de la masse de 1 gramme, la constante spécifique étant égale à $2,873 \times 10^6$. Pour la vapeur d'eau, de densité d, cette constante est $r = \frac{2,873 \times 10^6}{d} = \frac{2,873 \times 10^6}{0,623}$. En remarquant que $T = 180 + 273 = 453$, on aura, dans le système C.G.S,

$$V = \sqrt{\frac{1,41 \times 2,873 \times 10^6 \times 453}{0,623}} = 542 \text{ mètres par seconde.}$$

Comme il s'agit d'un tuyau fermé de longueur L, la hauteur N du son fondamental rendu est donnée par la formule

$$N = \frac{V}{4L} = \frac{542}{0,40} = 1355 \text{ vibrations complètes par seconde.}$$

Les nombres de vibrations complètes des trois premiers harmoniques sont $3N = 4065$, $5N = 6775$, $7N = 9485$.

Gaz parfaits et gaz réels. Détentes et compressions adiabatiques et isothermes.

Nous allons établir relativement aux gaz parfaits un certain nombre de relations dont nous ferons par la suite un usage constant.

23. — Transformations adiabatiques. — L'équation des lignes adiabatiques est $pv^\gamma = C^{te}$, avec $\gamma = \frac{C}{c}$.

Remplaçons d'abord v par $\frac{rT}{p}$, puis p par $\frac{rT}{v}$, on obtient les deux autres relations

$$(1) \quad \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = C^{te}, \quad (2) \quad T v^{\gamma-1} = C^{te}.$$

Si donc le gaz parfait passe de l'état initial (p_0, v_0, T_0) à l'état final (p_1, v_1, T_1), on a

$$(3) \quad \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (4) \quad \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1}.$$

En utilisant la relation de Mayer $r = J(C - c)$, on a

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{r}{JC}}, \quad \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\frac{r}{Jc}}.$$

Si le gaz subit une détente adiabatique $(p_0 > p_1, v_0 < v_1)$, on voit que $T_1 < T_0$; le gaz se refroidit.

Dans le cas d'une compression, $T_1 > T_0$; le gaz s'échauffe.

Evaluons le travail dans une transformation adiabatique. Etudions d'abord le cas de la détente ($p_0 > p_1$, $v_0 < v_1$). On a $pv^\gamma = p_0 v_0^\gamma = p_1 v_1^\gamma$. Le travail fourni par le gaz est

$$\mathcal{T} = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv = \frac{p_0 v_0^\gamma}{\gamma - 1}\left[\frac{1}{v_0^{\gamma-1}} - \frac{1}{v_1^{\gamma-1}}\right].$$

L'expression de ce travail peut prendre les formes suivantes:

(5) $\mathcal{T} = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1}\right]$, (6) $\mathcal{T} = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$,

(7) $\mathcal{T} = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{T_1}{T_0}\right]$ $\qquad$ $\mathcal{T} = \frac{p_0 v_0 - p_1 v_1}{\gamma - 1}$.

Ces formules sont générales, que v_0 soit ou non le volume spécifique. Pour l'unité de masse du gaz, on fait intervenir la constante spécifique r et on a

(8) $\mathcal{T} = \frac{r}{\gamma - 1}(T_0 - T_1) = \frac{rc}{C - c}(T_0 - T_1) = Jc\,(T_0 - T_1)$.

Cette dernière relation montre que le travail fourni est proportionnel à l'abaissement de température. Il est égal et de signe contraire à la variation d'énergie du gaz $U_1 - U_0 = Jc(T_1 - T_0)$ laquelle est négative.

Dans le cas de la compression adiabatique le travail reçu par le gaz est

$$\mathcal{T} = -\int_{v_0}^{v_1} p\,dv = \frac{p_0 v_0^\gamma}{\gamma - 1}\left[\frac{1}{v_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{v_0^{\gamma-1}}\right],$$

(9) $\mathcal{T} = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$, (10) $\mathcal{T} = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$,

$$\mathcal{T} = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[\frac{T_1}{T_0} - 1\right], \quad \mathcal{T} = \frac{p_1 v_1 - p_0 v_0}{\gamma - 1},$$

et en particulier pour l'unité de masse,

(11) $\mathcal{T} = \frac{r}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = \frac{rc}{C - c}(T_1 - T_0) = Jc\,(T_1 - T_0)$.

Tout ce travail est employé à augmenter l'énergie du gaz.

---

24 - Transformations isothermes. — Soit d'abord une détente isotherme effectuée à la température T et dans laquelle le volume augmente de v_0 à v_1 et la pression diminue de p_0 à p_1. On a $pv = p_0 v_0 = p_1 v_1$.

Le travail fourni par le gaz est

$$\mathcal{T} = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv = p_0 v_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0}$$

En fonction des pressions, on a (1) $\mathcal{T} = p_0 v_0 \operatorname{Log} \frac{p_0}{p_1}$.

Ces formules sont valables pour un volume et une masse quelconque de gaz. En introduisant la constante spécifique r, on a le travail fourni par l'unité de masse du gaz

(2) $\mathcal{T} = rT \operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0} = rT \operatorname{Log} \frac{p_0}{p_1}$.

La quantité de chaleur reçue par l'unité de masse de gaz est $Q = \int_{v_0}^{v_1} l\,dv$, c.à.d. en tenant compte de la formule (4) du n°3,

$$Q = \frac{C-c}{r}\int_{v_0}^{v_1} p\,dv = \frac{C-c}{r}\,p_0 v_0 \operatorname{Log}\frac{v_1}{v_0} = (C-c)\,T \operatorname{Log}\frac{v_1}{v_0}.$$

ou en fonction des pressions, $Q = (C-c)\,T \operatorname{Log}\frac{p_0}{p_1}$.

ou encore (3) $$Q = \frac{rT}{J}\operatorname{Log}\frac{v_1}{v_0} = \frac{rT}{J}\operatorname{Log}\frac{p_0}{p_1}.$$

En tenant compte de la formule (5) du n°2, et de ce que $R = 2J$ sensiblement, on a, M désignant la masse moléculaire,

$$Q = \frac{2T}{M}\operatorname{Log}\frac{v_1}{v_0} = \frac{2T}{M}\operatorname{Log}\frac{p_0}{p_1}.$$

Si le volume v_0 renferme, non plus l'unité de masse du gaz, mais une masse quelconque, on a

$$Q = \frac{p_0 v_0}{J}\operatorname{Log}\frac{v_1}{v_0} = \frac{p_0 v_0}{J}\operatorname{Log}\frac{p_0}{p_1}.$$

En comparant (2) et (3), on voit que $\mathcal{C}$ et Q sont des quantités <u>équivalentes</u>. Ainsi quand un gaz parfait subit une transformation isotherme, son énergie reste constante, il reçoit du milieu extérieur une quantité de chaleur équivalente au travail qu'il fournit.

Dans le cas d'une <u>compression</u> isotherme, effectuée à la température T et dans laquelle le volume diminue de v_0 à v_1, le travail <u>reçu</u> par le gaz est

$$\mathcal{C} = p_0 v_0 \operatorname{Log}\frac{v_0}{v_1} = p_0 v_0 \operatorname{Log}\frac{p_1}{p_0},$$

et en particulier pour l'unité de masse,

$$\mathcal{C} = rT \operatorname{Log}\frac{v_0}{v_1} = rT \operatorname{Log}\frac{p_1}{p_0}.$$

On voit que, théoriquement du moins, il n'en coûte pas plus de comprimer un gaz de 100 à 1000 atmosphères, que de le faire passer de 1 à 10 atmosphères.

La quantité de chaleur <u>fournie</u> par l'unité de masse de gaz est

$$Q = (C-c)\,T \operatorname{Log}\frac{v_0}{v_1} = (C-c)\,T \operatorname{Log}\frac{p_1}{p_0},$$

$$Q = \frac{rT}{J}\operatorname{Log}\frac{v_0}{v_1} = \frac{rT}{J}\operatorname{Log}\frac{p_1}{p_0},$$

$$Q = \frac{2T}{M}\operatorname{Log}\frac{v_0}{v_1} = \frac{2T}{M}\operatorname{Log}\frac{p_1}{p_0}.$$

Pour une masse quelconque, on a:

$$Q = \frac{p_0 v_0}{J}\operatorname{Log}\frac{v_0}{v_1} = \frac{p_0 v_0}{J}\operatorname{Log}\frac{p_1}{p_0}.$$

---

25. - Un ballon de trois litres de capacité est rempli d'air sec à zéro degré et à la pression atmosphérique normale supposée invariable pendant la durée de l'expérience. On plonge le ballon pendant une heure dans un bain à la température de 20°; puis, on ouvre et on referme rapidement le robinet comme dans l'expérience de Clément et Desormes. On demande de calculer la diminution de poids du ballon en supposant que l'air est assimilable à un gaz parfait. On donne $\gamma = \frac{C}{c} = 1,404$. (Proposé à la Sorbonne, Physique Générale).

Les conditions initiales de la masse d'air sont :

$V_0 = 3$ litres ; $p_0 = 1$ atm. ; $T_0 = 273$;

masse $m_0 = 3 \times 1,293 = 3,879$ g.

Quand la température passe de 0 à 20°, c.à.d. de $T_0 = 273$ à $T_1 = 293$, on peut négliger la dilatation du ballon. La pression prend une valeur p_1 telle que (1) $\frac{p_1}{p_0} = \frac{T_1}{T_0}$.

Quand on ouvre et referme brusquement le robinet, une certaine quantité d'air s'échappe à l'extérieur, ce qui produit une détente qu'on peut considérer comme adiabatique parce que très rapide. Pour faciliter le raisonnement, on peut supposer que le ballon est prolongé, au delà du robinet, par une tubulure cylindrique dans laquelle glisse un piston sans frottement et que le gaz passe brusquement du volume V_0 au volume V_1. Désignons par v_0 et v_1 les volumes spécifiques correspondants. Le gaz repasse adiabatiquement de la pression p_1 à la pression initiale p_0. Comme p_1 correspond à v_0 et p_0 à v_1, on a

$$p_1 v_0^\gamma = p_0 v_1^\gamma, \quad (2) \quad \frac{v_1}{v_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Soit m_1 la masse d'air restée dans le ballon. On a volume du ballon $= m_1 v_1 = m_0 v_0$ et, en tenant compte des relations (1) et (2)

$$\frac{m_0}{m_1} = \frac{v_1}{v_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\log m_1 = \log m_0 - \frac{1}{\gamma}(\log T_1 - \log T_0),$$

$$\log m_1 = \log 3,879 - \frac{1}{1,404}(\log 293 - \log 273).$$

On trouve $m_1 = 3,639$ g. La diminution du poids du ballon est donc de 190 mmg.

---

26. — Un récipient contient une masse M d'un gaz parfait à la pression P. On fait détendre ce gaz adiabatiquement en mettant le récipient en communication avec un espace indéfini où règne la pression P', inférieure à P. On demande quelle fraction $\frac{M'}{M}$ de la masse gazeuse initiale est restée dans le récipient.

Application : P = 760 mm ; P' = 700 mm ; $\frac{c}{c_v} = 1,4$.

Le récipient ayant été fermé aussitôt après la détente, on laisse le gaz inclus revenir à la température initiale T. Trouver la formule qui donne la quantité de chaleur Q qu'il absorbe. Montrer que, lorsqu'on fait varier P', Q passe par un maximum ; déterminer la valeur numérique de $\frac{P}{P'}$ pour laquelle a lieu ce maximum.

(Physique Générale. Marseille)

La détente étant adiabatique, la température absolue T' à la fin de cette détente est donnée par la formule (3) du n°23,

$$(1) \quad \frac{T'}{T} = \left(\frac{P'}{P}\right)^{(\gamma-1):\gamma}.$$

La masse M' du gaz restant dans le récipient ayant le même volume que la masse initiale M, on a : $\frac{M'}{M} = \frac{P'}{P} \times \frac{T}{T'}$.

Or de (1) on tire $\frac{T}{T'} = \left(\frac{P'}{P}\right)^{-(\gamma-1):\gamma}$. Par suite (2) $\frac{M'}{M} = \left(\frac{P'}{P}\right)^{1:\gamma} = \left(\frac{700}{760}\right)^{1:1,4} = 0,943$.

La quantité de chaleur Q absorbée par la masse M' de gaz pour revenir de la température T' à la température T, à volume constant, est $Q = M'c\,(T - T')$, c étant la chaleur spécifique de l'air à volume constant. En tenant compte des relations (1) et (2), on trouve

$$Q = McT\left(\frac{P'}{P}\right)^{1:\gamma} \times \left[1 - \left(\frac{P'}{P}\right)^{(\gamma-1):\gamma}\right]$$

Posons $\frac{P'}{P} = x$. Comme McT est constant, Q varie comme la fonction

$$y = x^{\frac{1}{\gamma}}\left[1 - x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = \left(x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left[1 - x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right].$$

Le second membre renferme deux facteurs $x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ et $1-x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ dont la somme est constante et égale à 1. La fonction y, et par suite Q, sera donc maximum quand ces facteurs seront proportionnels à leurs exposants, c'est à dire quand on aura

$$(\gamma-1)\,x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

$$x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{\gamma}, \quad x = \frac{P'}{P} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{P}{P'} = \gamma^{\gamma:(\gamma-1)} = (1,4)^{3,5} = 3,246.$$

---

27. – Un poids P d'air est enfermé dans un cylindre vertical clos par un piston – qui s'y meut sans frottement. Le poids de ce piston maintient l'air à une pression p_0, à la température centigrade t_0, égale à la température de l'air extérieur. On charge le piston de façon à multiplier par n son poids et la surcharge se fait assez lentement pour que l'air conserve sa température initiale en cédant des calories à l'air extérieur. On demande quelle est la totalité Q des calories ainsi abandonnées à l'air extérieur par l'air intérieur au cours de sa compression lente.

Si l'on avait comprimé brusquement l'air en plaçant la même surcharge, il n'y aurait eu aucun échange avec l'air extérieur et pour ramener l'air à la température initiale, il faudrait lui ôter sous pression constante un total R des calories que l'on calculera et que l'on comparera à Q.

On fera les calculs en supposant P = 200 grammes, t_0 = 15 degrés et n = 10. On adoptera pour valeurs des coefficients de chaleurs spécifiques de l'air : C = 0,24 et c = 0,17.

(Mécanique Physique et Expérimentale. Paris)

La première compression étant isotherme, la chaleur abandonnée à l'air extérieur est équivalente au travail accompli par le piston sur l'air intérieur (n° 24). On a donc $JQ = -\int p\,dv$.

De $pv = p_0 v_0$ on tire $p\,dv = -v\,dp$. D'autre part, nous admettons que lorsque le piston devient n fois plus lourd, la pression passe de p_0 à np_0. Ce n'est pas tout à fait exact, car nous ne tenons pas compte ainsi de la pression atmosphérique qui s'exerce sur le piston. Mais nous sommes bien forcés de raisonner ainsi, puisqu'on ne donne ni p_0 ni

le poids du piston. On a donc

$$JQ = \int v\,dp = p_0 v_0 \int_{p_0}^{np_0} \frac{dp}{p}, \quad (1) \quad Q = \frac{p_0 v_0}{J} \operatorname{Log} n.$$

Utilisons le système C.G.S.. Si p_0 est exprimé en atmosphères, on doit écrire $1,013 \times 10^6\, p_0$ baryes. Le volume initial v_0, à 15°, de 200 g. d'air est donné par la formule $200 = v_0 \times 0,001293 \times p_0 \times \frac{273}{288}$. En portant ces valeurs dans (1), il vient

$$Q = \frac{1,013 \times 10^6 \times 200 \times 288}{4,185 \times 10^7 \times 0,001293 \times 273} \operatorname{Log} 10 = 9095 \text{ cal. gr.}$$

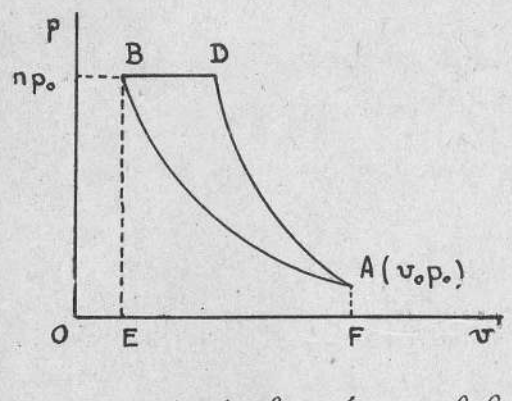
On voit que p_0 a disparu ; c'est pourquoi l'énoncé ne le donne pas.

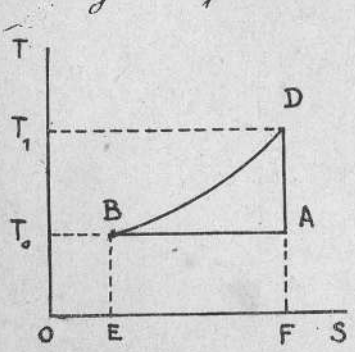
Dans la seconde compression, qui est adiabatique, la température augmente de T_0 à une valeur T_1 donnée par la formule (3) du N° 23, dans laquelle on fait $\frac{p_1}{p_0} = n = 10$ et $\gamma = \frac{24}{17}$, d'où $T_1 = T_0\, n^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 288 \times 10^{\frac{7}{24}} = 563°$ absolus.

Pour ramener l'air à la température initiale T_0, sous la pression constante np_0, il faut lui ôter une quantité de chaleur

$$R = PC\,(T_1 - T_0) = 200 \times 0,24 \times 275 = 13200 \text{ cal. gr.}$$

On voit que R est très notablement supérieur à Q. On peut expliquer facilement ce résultat. Par le point A figuratif de l'état initial (p_0, v_0) traçons l'isotherme AB et l'adiabatique AD. (On sait que du côté des volumes décroissants, l'adiabatique est au-dessus de l'isotherme). La première opération (compression isotherme) est représentée par l'arc AB. La seconde opération comprend la compression adiabatique AD et le refroidissement à pression constante figuré par l'horizontale DB. Dans les deux cas, on a le même état initial A et le même état final. La température ayant la même valeur T_0 en A et en B, l'énergie interne du gaz, qui ne dépend que de la température, n'a pas changé. Il faut donc que dans chaque opération le travail effectué soit équivalent à la chaleur évoluée. Or dans la première opération, le travail $\mathcal{E}_1$ est mesuré par l'aire EBAFE ; dans la seconde, le travail $\mathcal{E}_2$ est mesuré par l'aire EBDAFE. L'inégalité évidente $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$ entraîne $Q < R$.





Le diagramme entropique conduit plus facilement encore à la même conclusion. La compression isotherme est représentée par l'horizontale AB

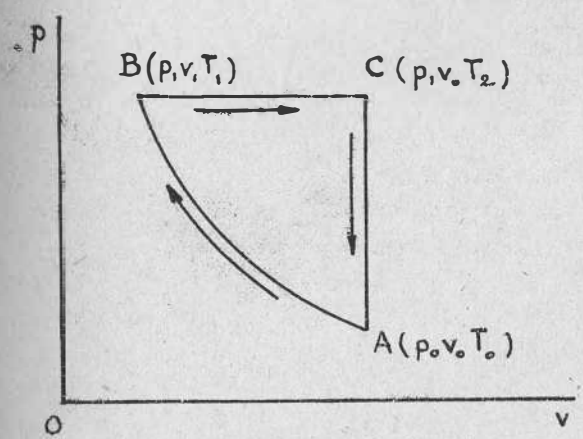
d'ordonnée T_0 et la chaleur cédée est égale à l'aire du rectangle ABEF. Dans la seconde opération, la composition adiabatique est figurée par la verticale AD, l'ordonnée du point D étant égale à T_1. Le refroidissement à pression constante est figuré par l'arc de courbe logarithmique DB et la chaleur cédée est représentée par l'aire DBEFD, manifestement supérieure à celle du rectangle ABEF.

---

28. - Une masse d'air occupe à la température de 0° centigrade un volume de vingt litres. On la comprime adiabatiquement de la pression de une atmosphère, où elle était d'abord, jusqu'à la pression de 4 atmosphères. On demande quels sont alors son volume et sa température. On fournit ensuite Q calories à cet air, sous pression constante, de façon à lui faire reprendre son volume primitif de vingt litres. Calculer Q. Enfin, on refroidit, sous volume constant, cet air de façon à le ramener à son état initial. Calculer le nombre Q' de calories qu'il aura fallu lui ôter pour cela. On calculera le travail accompli ou absorbé au cours des diverses phases de ce cycle, ainsi que le rendement thermique de celui-ci

Chaleur spécifique de l'air sous pression constante 0,24.
Chaleur spécifique de l'air sous volume constant 0,17.
(Mécanique physique et expérimentale Paris)

Etablissons un diagramme en (p, v). La compression initiale est représentée par la portion de courbe adiabatique AB.



Soient p_0, v_0, T_0, la pression, le volume, la température absolue au point A ; p_1, v_1, T_1 les mêmes variables au point B. De l'équation $p_1 v_1^\gamma = p_0 v_0^\gamma$, on tire

$$v_1 = v_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$v_1 = 20 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{17}{24}} = 7{,}492 \text{ litres.}$$

La température T_1 est donnée par la formule (3) du n° 23.

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 273 \times 4^{7:24} = 409° \text{ abs ou } 136° \text{ C}$$

D'après la formule (10) du n° 23, le travail T <u>absorbé</u> par le gaz pendant la compression adiabatique AB est

$$T = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right].$$

Opérons d'abord dans le système C.G.S. On a

$p_0 = 1{,}013 \times 10^6$ baryes, $v_0 = 20.000$, d'où

$$\mathcal{T} = \frac{17}{7} \times 1,013 \times 10^6 \times 20000 \left[4^{7:24} - 1\right] = 2,4375 \times 10^{10} \text{ ergs.}$$

Dans le système métrique, la pression doit être évaluée en Kgs/mètre carré, et le volume en m^3, d'où

$$\mathcal{T} = \frac{17}{7} \times 1,033 \times 10^4 \times 0,02 \left[4^{7:24} - 1\right] = 248,5 \text{ Kgmètres}$$

L'air est ensuite ramené au volume primitif v_0 sous la pression constante p_1. Cette seconde phase de la transformation est représentée par l'horizontale BC. Soit T_2 la température absolue au point C. En désignant par m la masse du gaz, la quantité de chaleur Q à fournir au gaz est

$$Q = m\,C\,(T_2 - T_1).$$ Cconst. ms intervalle (T_2, T_1)

Calculons m et T_2. On a

$$m = 20 \times 1^{gr},293 \; ; \qquad T_2 = \frac{p_1 v_0}{R} = \frac{p_1 v_0}{p_0 v_0 \alpha} = \frac{p_1}{p_0 \alpha},$$

$$T_2 = 4 \times 273 = 1092^\circ, \quad T_2 - T_1 = 683^\circ,$$

$$Q = 20 \times 1,293 \times 0,24 \times 683 = 4239 \text{ calories-gramme.}$$

Le travail accompli par le gaz dans cette transformation à pression constante est $\mathcal{T}' = p_1 (v_0 - v_1)$,

$$\mathcal{T}' = 4 \times 1,033 \times 10^4 \left[0,02 - 0,007492\right] = 517 \text{ Kgmètres.}$$

Refroidissons, sous le volume constant v_0, la masse d'air de façon à la ramener à son état initial. Cette dernière partie du cycle est représentée par la verticale CA. Dans cette phase isovolumétrique, le travail est évidemment nul. Le nombre de calories Q' qu'il faut ôter au gaz est

$$Q' = m\,c\,(T_2 - T_0) = 20 \times 1,293 \times 0,17 \times 819 = 3600 \text{ calories-gr.}$$

Le rendement thermique du cycle est

$$\frac{Q - Q'}{Q} = \frac{629}{4239} = 0,148.$$

---

29. – 1° Un briquet à air permet de faire varier le volume d'une masse d'air de façon à le réduire au centième de sa valeur. On suppose l'opération assez rapide pour que la paroi n'ait pas le temps de s'échauffer. L'air étant initialement à la température de 12° centigrades, on demande quelles seront sa température et sa pression après la compression. On prendra 1,4 pour valeur du rapport des deux chaleurs spécifiques de l'air

(Mécanique physique et expérimentale. Paris).

2° Même question en admettant qu'aux hautes températures le rapport γ au lieu d'être constant puisse être représenté par $\gamma = \gamma_0 - aT$, avec $\gamma_0 = 1,4$, $a = 6.10^{-5}$.

1° L'air passe adiabatiquement de l'état $(p_0\, v_0\, T_0)$ à l'état $(p_1\, v_1\, T_1)$. D'après la formule (4) du n° 23, on a

$$T_1 = T_0 \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma - 1} = 285 \times 100^{0,4} = 1798^\circ \text{ abs. soit } 1525^\circ \text{ C.}$$

Des relations $p_0 v_0 = rT_0$; $p_1 v_1 = rT_1$ on tire

$$\frac{p_0 v_0}{T_0} = \frac{p_1 v_1}{T_1}, \quad p_1 = p_0 \frac{v_0}{v_1} \frac{T_1}{T_0} = 630\, p_0.$$

2° La compression étant adiabatique, on a $dQ = cdT + ldv$. Nous appliquons encore les formules des gaz parfaits $Jl = p$, $J(C-c) = r$. Ce n'est pas rigoureusement exact puisque γ n'est plus constant. On a donc $JcdT + p\,dv = 0$, $\frac{dT}{dv} = -\frac{p}{Jc}$. Mais $p = \frac{rT}{v} = J(C-c)\frac{T}{v}$. Donc

$$\frac{dT}{dv} = -(\gamma - 1)\frac{T}{v}, \quad \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T(\gamma_0 - 1 - aT)} = -\int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = \text{Log}\, \frac{v_0}{v_1}.$$

Mais $\frac{1}{T(\gamma_0 - 1 - aT)} = \frac{1}{\gamma_0 - 1}\left[\frac{1}{T} + \frac{1}{\gamma_0 - 1 - aT}\right]$, d'où

$$\frac{1}{\gamma_0 - 1}\,\text{Log}\,\frac{T_1(\gamma_0 - 1 - aT_0)}{T_0(\gamma_0 - 1 - aT_1)} = \text{Log}\,\frac{v_0}{v_1}\ ; \quad \frac{T_1}{T_0} \times \frac{\gamma_0 - 1 - aT_0}{\gamma_0 - 1 - aT_1} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma_0 - 1},$$

$$T_1 = \frac{T_0(\gamma_0 - 1)(v_0 : v_1)^{\gamma_0 - 1}}{\gamma_0 - 1 - aT_0 + aT_0(v_0 : v_1)^{\gamma_0 - 1}}.$$ En faisant $T_0 = 285°$, $\frac{v_0}{v_1} = 100$, on trouve T_1 1465° abs soit 1192° C, puis $p_1 = p_0 \frac{v_0}{v_1} \frac{T_1}{T_0} = 514\, p_0$. Ces chiffres sont très notablement inférieurs à ceux de la première partie.

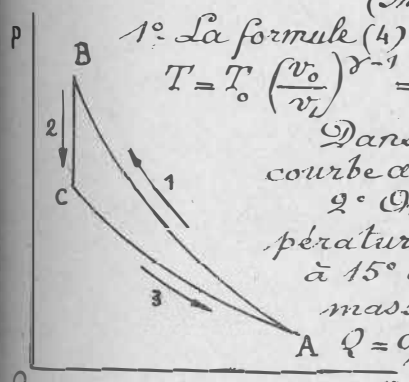
---

30. — 1° On comprime adiabatiquement une masse d'air à 15° centigrades de manière à réduire son volume à 1/32 de sa valeur. Trouver la température centigrade t de l'air quand la compression se termine. On admettra la valeur 7/5 pour le rapport des deux chaleurs spécifiques.

2° Combien de calories faut-il ôter sous volume constant à cet air pour ramener sa température centigrade à 15°? On suppose que la masse d'air ait un poids de 1 gramme, et l'on prendra le coefficient de chaleur spécifique de l'air sous volume constant égal à $c = 0{,}168$.

3° Enfin on amène cet air à son état primitif en lui restituant des calories que l'on demande d'évaluer.

(Mécanique physique et expérimentale. Paris).



1° La formule (4) du n° 23 donne

$$T = T_0 \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma - 1} = 288 \times 32^{0,4} = 1152° \text{ abs, soit } 879° \text{ C.}$$

Dans le diagramme en (p, v) la portion de courbe adiabatique correspondante est AB.

2° On ramène sous volume constant la température de 1 gramme d'air de 879° centigrades à 15° centigrades. Il faut donc ôter à cette masse d'air

$Q = 0{,}168 \times 864 = 145{,}152$ calories-gramme.

Cette seconde phase de la transformation est représentée par la verticale BC, limitée

en C par l'isotherme de température 15°, qui passe nécessairement par A. Remarquons que BC est dirigée vers le bas et non vers le haut, car l'isotherme CA doit être au-dessous de l'adiabatique BA. On sait en effet (n°9) que du côté des volumes décroissants, l'adiabatique est au-dessous de l'isotherme.

3° Pour ramener le gramme d'air à son état primitif, il ne reste plus qu'à opérer une détente isothermique, suivant la courbe CA, à la température constante de 15°, en portant son volume de $\frac{v_0}{32}$ à v_0. Il faut donc lui fournir une quantité de chaleur Q', précisément équivalente au travail effectué par le gaz pendant cette détente isothermique. On a donc, en remarquant que $pv = p_0 v_0$,

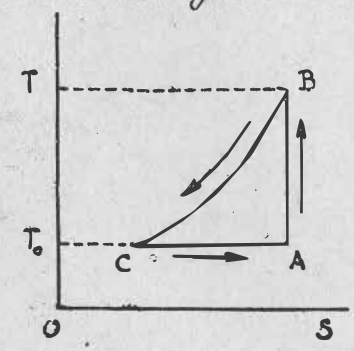
$$(1) \qquad JQ' = \int p\,dv = p_0 v_0 \int_{v_0:32}^{v_0} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \operatorname{Log} 32.$$

Utilisons le système C.G.S. Si p_0 est exprimé en atmosphères, on doit écrire $1{,}013\, p_0 \times 10^6$ baryes. Le volume initial v_0, à 15°, du gramme d'air est tel que $1 = v_0 \times 0{,}001293 \times p_0 \times \frac{273}{288}$. En portant ces valeurs dans (1), il vient

$$Q' = \frac{1.013 \times 10^6 \times 288}{4{,}185 \times 10^7 \times 0{,}001293 \times 273} \operatorname{Log} 32 = 68{,}445 \text{ calories}$$

Ainsi la chaleur fournie Q' est inférieure à la chaleur enlevée Q. Il doit bien en être ainsi. Le cycle ABCA étant en effet parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on sait (n°9) que le travail reçu par le gaz est positif. La chaleur reçue doit donc être négative; autrement dit, il faut enlever au gaz plus de calories qu'on ne lui en fournit.

Le diagramme entropique conduit à la même conclusion



La compression adiabatique est représentée par la verticale AB, le refroidissement sous volume constant par l'arc BC de courbe logarithmique, la détente isotherme par l'horizontale CA. Le cycle ABCA étant parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on sait (n°10) que la chaleur reçue par le gaz est négative.

31.— Dans un cylindre fermé par un piston mobile est incluse une masse d'air dans un état initial A_0 où sa température est $t_0 = 15°$, son volume $V_0 = 5$ litres, sa pression $p_0 = 760$ m/m. Par compression adiabatique, on amène cet air dans un état A_1 où son volume est $V_1 = 1$ litre. Calculer dans cet état sa température t_1, sa pression p_1 et le travail T absorbé par la compression.

On enlève ensuite, sous le volume constant V_1, Q calories au gaz de façon à le ramener à un état A_2 où sa pression serait

$p_2 = 760$ m/m. Calculer en cet état sa température t_2 ainsi que la quantité de chaleur Q. On prendra $c = 0,17$ et $C = 0,25$.

(Mécanique Physique et Expérimentale. Paris).

L'air passe adiabatiquement de l'état $(p_0\ V_0\ T_0)$ à l'état $(p_1\ V_1\ T_1)$. La formule (4) du n° 23 donne

$$T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 288 \times 5^{0,47} = 614° \text{ abs, soit } t_1 = 341° C.$$

D'autre part $p_1 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma} = 760 \times 5^{1,47} = 8096$ mm.

Le travail absorbé par la compression est donné par la formule (9) du n° 23,

$$\mathcal{C} = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right].$$ En unités C.G.S. on a $p_0 = 76 \times 9,81 \times 136$ bayes, $V_0 = 5000$. On trouve $\mathcal{C} = 1219,7 \times 10^7$ ergs, soit $\frac{1219,7}{9,81} = 124,33$ Kgm.

Nous passons maintenant de l'état $(p_1\ V_1\ T_1)$ à l'état $(p_2\ V_2\ T_2)$, c.à.d. sous le volume constant V_1. Les températures absolues sont alors proportionnelles aux pressions et on a

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 614 \times \frac{760}{8096} = 57° \text{ abs, soit } t_2 = -216° C.$$

Le nombre de calories qu'il faut enlever à l'air dont la masse est m, pour le refroidir de t_1 à t_2 sous volume constant, est $Q = mc(t_1 - t_2) = 5 \times 1,293 \times \frac{273}{288} \times 0,17 \times 557 = 580$ calories-gr.

---

32. — Une masse d'air occupe un volume V_0 sous la pression p_0 et à la température centigrade t_0 ; on appelle A cet état initial. Calculer d'abord le poids en grammes X de cette masse d'air. On amène adiabatiquement par compression cet air de l'état A à un état B où son volume primitif est réduit à V. On calculera sa pression p_1 et sa température centigrade t_1 en cet état B. On fournit ensuite à l'air Q_1 calories de façon à l'amener sous pression constante à un état C où son volume est V_1. Connaissant V_1, on demande de calculer Q_1 et la température centigrade t_1 de l'air dans l'état C. On laisse ensuite se détendre adiabatiquement l'air de manière qu'il reprenne sa pression initiale p_0. On demande de calculer le volume V_2 et la température t_2 dans cet état D. Enfin on enlève à l'air Q_0 calories de façon à le ramener sous pression constante à son état initial A. Calculer Q_0. Quel est le rendement de ce cycle et quel est le travail, exprimé en kilogrammètres, que l'air a accompli ? On effectuera le calcul pour les données suivantes :

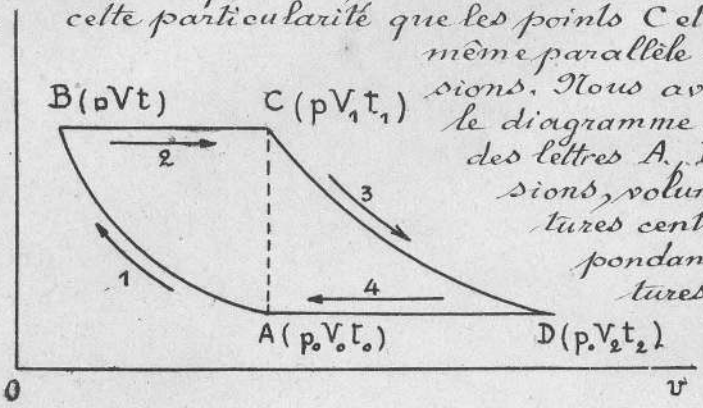
$V_0 = 20$ litres ; $V = 2$ litres ; $V_1 = 20$ litres ; $p_0 = 1$ kilog ; $t_0 = 15°$. Les pressions sont exprimées en kilogrammes par centimètre carré. On rappelle que le poids d'un litre d'air à 0° et sous la pression de 1 kilog. par cm² est en grammes, 1,275 ; de plus le rapport γ des chaleurs spécifiques est 1,4 et la chaleur spécifique de l'air sous pression constante est 0,25.

(Mécanique physique et expérimentale. Paris)

Puisque 1 litre d'air à 0° et sous la pression de 1 kg par cm² pèse 1gr,275, le poids de 20 litres sous la même pression et à la

température de 15° sera $X = 20 \times 1{,}275 \times \frac{273}{288} = 24{,}172$ grammes.

Utilisons un diagramme en (p, v). L'air décrit, dans le sens indiqué par les flèches, le cycle ABCDA formé de deux adiabatiques AB, CD et de deux isobares BC, DA, avec cette particularité que les points C et A sont sur une même parallèle à l'axe des pressions. Nous avons indiqué sur le diagramme à côté de chacune des lettres A, B, C, D, les pressions, volumes et températures centigrades correspondants. Les températures absolues sont T_0, T, T_1, T_2. La relation $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$ donne



$$(1)\quad p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma = 1 \times 10 = 25{,}12 \text{ kgs/cm}^2.$$

La formule (4) du n° 23 donne

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} = 288 \times 10^{0,4} = 723°,4 \text{ abs ou } t = 450°,4\ C.$$

La quantité de chaleur Q_1 à fournir à l'air pour l'amener sous pression constante de l'état B à l'état C est, en désignant par C la chaleur spécifique de l'air sous pression constante

$$Q_1 = XC\,(T_1 - T).$$

Calculons T_1. A pression constante, la température absolue d'un gaz parfait est proportionnelle à son volume. On a donc $T_1 = T\frac{V_1}{V} = 723{,}4 \times 10 = 7234°$ abs. ou $t_1 = 6961°$ C,

$$Q = 24{,}172 \times 0{,}25 \times 6510{,}6 = 39344 \text{ cal.-gr.}$$

Le long de l'adiabatique CD, on a $pV^\gamma = p_0 V_2^\gamma$, $V_2 = V_1 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ ou, en tenant compte de (1), $V_2 = V_1 \times \frac{V_0}{V} = 28 \times 10 = 200$ litres.

La température T_2 est donnée par la formule (4) du n° 23

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 7234 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{0,4} = 2880° \text{ abs. ou } t_2 = 2607°\,C.$$

La quantité de chaleur Q_0 qu'il faut enlever à l'air pour le ramener sous pression constante de l'état D à l'état A est

$$Q_0 = XC\,(t_2 - t_0) = 24{,}172 \times 0{,}25 \times 2592 = 15663 \text{ cal. gr.}$$

Le rendement du cycle est $\rho = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = 0{,}60$.

Le travail accompli par l'air est

$$\mathcal{C} = \frac{1}{1000} J\,(Q_1 - Q_0) = 426{,}6 \times 23{,}681 = 10102 \text{ Kg-mètres.}$$

A titre de vérification, on peut calculer les différents travaux correspondant aux phases successives du cycle.

Utilisons le système métrique. Les pressions s'expriment en kilogs par mètre carré et les volumes en mètres cubes. On a donc $p_0 = 10000$, $V_0 = 0{,}02$. D'après la formule (9) du n° 23, le travail reçu par l'air dans la compression adiabatique AB est

$$\mathcal{C}_{AB} = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = \frac{200}{0{,}4}\left(10^{0,4} - 1\right) = 756 \text{ Kgm.}$$

Dans la détente BC sous pression constante, le travail accompli par l'air est $\mathcal{T}_{BC} = p(V_1 - V) = 251200 \times 0{,}018 = 4522$ Kgm.

D'après la formule (5) du n°23, le travail accompli par l'air dans la détente adiabatique CD est

$$\mathcal{T}_{CD} = \frac{pV_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{251200 \times 0{,}02}{0{,}4}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{0{,}4}\right] = 7560 \text{ Kgm.}$$

Enfin dans la compression DA sous pression constante, le travail reçu par l'air est

$$\mathcal{T}_{DA} = p_0(V_2 - V_0) = -10000 \times 0{,}18 = -1800 \text{ Kgm.}$$

Donc $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{BC} + \mathcal{T}_{CD} - \mathcal{T}_{AB} - \mathcal{T}_{DA} = 9526$ Kgm.

Ce chiffre diffère notablement de celui trouvé par la première méthode. Cela tient à ce que la valeur 0,25 donnée pour C est trop forte et que par suite la valeur de J qui résulterait des données n'est pas égale à 426,6 Kgm, chiffre que nous avons admis. La formule de Mayer donne en effet (1) $J = r : (C - c)$. Or la constante r relative à l'unité de masse est $r = \frac{p_0 v_0}{T_0} = \frac{p_0}{T_0}\frac{V_0}{X}$. Employons le système métrique. On a: $p_0 = 10000$, $V_0 = 0{,}02$, $X = 0{,}024172$, $T_0 = 288$. On trouve $r = 28{,}73$. D'autre part, $C - c = \frac{\gamma - 1}{\gamma} C = \frac{0{,}4}{1{,}4} \times 0{,}25 = 0{,}0714$. En portant ces valeurs dans (1), on trouve $J = 402$ Kgm, chiffre évidemment trop faible. Pour que les deux méthodes donnent des résultats concordants, il faudrait faire $C = 0{,}236$, nombre voisin de celui de Regnault.

---

33. — Un gaz quasi-parfait diatomique est enfermé dans un grand ballon à 15° sous la pression p_0. On ouvre et on ferme brusquement le robinet de manière à détendre rapidement le gaz jusqu'à la pression atmosphérique p. Supposant la détente adiabatique et négligeant les oscillations, on demande de calculer 1° la température minima atteinte par le gaz à la fin de la détente; 2° la pression p' qu'il prendra en revenant à la température initiale; 3° l'erreur maxima commise sur γ, calculé au moyen de cette expérience, pouvant résulter de ce que les pressions p_0, $p_0 - p$, $p' - p$ ne sont connues qu'à $\frac{5}{100}$ de millimètre de mercure près; 4° l'erreur que l'on commettrait en calculant γ au moyen de la formule élémentaire au lieu de la formule logarithmique.

On donne: pression initiale $p_0 = 86$ cm de mercure; pression atmosphérique $p = 76$ cm., supposée constante pendant la durée de l'expérience. (Physique générale. Proposé à la Sorbonne).

1° Le gaz passe diabatiquement de l'état (p_0, v_0, T_0) à l'état (p, v, T). On a donc, d'après la formule (3) du n°23

$$(1) \qquad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

D'après la théorie cinétique des gaz, on a, pour un gaz diatomique, $\gamma = \frac{7}{5} = 1{,}40$. En faisant $T_0 = 15 + 273 = 288$ on trouve $T = 278°$ abs soit 5°C. Il y a eu abaissement de température de 10°

2° En revenant à la température initiale à volume constant, le gaz passe de l'état (p, v, T) à l'état (p', v, T_0). On a donc

$$(2)\quad p' = p\frac{T_0}{T} = 76 \times \frac{288}{278} = 78,73\text{ cm}.$$

3° Si au lieu d'admettre pour le rapport γ la valeur déduite du fait que le gaz est diatomique, nous le calculons au moyen des données de l'expérience précédente, il est bien évident que nous retrouverons la même valeur 1,40 puisque nous utiliserons les mêmes équations. La valeur expérimentale de p' n'étant pas donnée, nous sommes obligés de prendre la valeur calculée plus haut; nous changerons simplement d'inconnue, γ au lieu de p'; mais nous allons nous rendre compte de l'erreur maximum commise. Comme nous aurons à utiliser des développements en série dans la dernière partie du problème, nous allons prendre les logarithmes néperiens de l'expression (1) mise au préalable sous la forme $\frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Il vient successivement en tenant compte de (2)

$$\text{Log}\frac{p'}{p} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\text{Log}\frac{p_0}{p}$$

$$\text{Log}\frac{p_0}{p} = \gamma\left[\text{Log}\frac{p_0}{p} - \text{Log}\frac{p'}{p}\right] = \gamma\,\text{Log}\frac{p_0}{p'}$$

$$(3)\quad \gamma = \text{Log}\frac{p_0}{p} : \text{Log}\frac{p_0}{p'}.$$

Prenons les différentielles logarithmiques des deux membres

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \left(d\,\text{Log}\frac{p_0}{p}\right) : \text{Log}\frac{p_0}{p} - \left(d\,\text{Log}\frac{p_0}{p'}\right) : \text{Log}\frac{p_0}{p'}.$$

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \left(\frac{dp_0}{p_0} - \frac{dp}{p}\right) : \text{Log}\frac{p_0}{p} - \left(\frac{dp_0}{p_0} - \frac{dp'}{p'}\right) : \text{Log}\frac{p_0}{p'},$$

ou, en tenant compte de (3),

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \left[\frac{dp_0}{p_0} - \frac{dp}{p} - \gamma\left(\frac{dp_0}{p_0} - \frac{dp'}{p'}\right)\right] : \text{Log}\frac{p_0}{p}.$$

Prenons les notations employées dans l'expérience de Clément et Désormes en posant

$$(4)\quad p_0 - p = h, \qquad p' - p = h'.$$

Remplaçons les différentielles par des accroissements finis. D'après l'énoncé, les quantités

$$\Delta p, \quad \Delta(p_0 - p) = \Delta h, \quad \Delta(p' - p) = \Delta h'$$

sont égales au plus à 5/100 de m/m de mercure. On a pour l'erreur relative commise sur γ

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \left[\frac{\Delta p + \Delta h}{p+h} - \frac{\Delta p}{p} - \gamma\left(\frac{\Delta p + \Delta h}{p+h} - \frac{\Delta p + \Delta h'}{p+h'}\right)\right] : \text{Log}\frac{p_0}{p},$$

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \left[\left(\frac{1-\gamma}{p+h} - \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{p+h'}\right)\Delta p + \frac{1-\gamma}{p+h}\Delta h + \frac{\gamma}{p+h'}\Delta h'\right] : \text{Log}\frac{p_0}{p}.$$

Comme le coefficient de Δh est négatif et que nous voulons une limite supérieure de l'erreur nous changeons son signe. Nous modifions également le coefficient de Δp de façon qu'il soit positif et de plus grande valeur absolue. En opérant ainsi, on a certainement

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} < \left[\left(\frac{\gamma-1}{p+h} + \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{p+h'}\right)\Delta p + \frac{\gamma-1}{p+h}\Delta h + \frac{\gamma}{p+h'}\Delta h'\right] : \text{Log}\frac{p_0}{p}.$$

On a $\text{Log}\frac{p_0}{p} = \text{Log}\frac{86}{76} = 0,1236$. D'après (4) $p+h = p_0$, $p+h' = p' = 78,73$.

En faisant $\Delta p = \Delta h = \Delta h' = 0{,}005$ on trouve que l'erreur relative maxima est $\frac{\Delta\gamma}{\gamma} < \frac{25}{10000}$.

4° La formule élémentaire dont veut parler l'énoncé est celle que l'on trouve dans tous les traités de Thermodynamique à propos de l'expérience de Clément et Désormes

$$(5)\quad \gamma = \frac{h}{h-h'}$$

(Généralement p_0 et p' sont inférieurs à la pression atmosphérique p. Quand on ouvre le robinet, le gaz du ballon est comprimé et non détendu. Ce sont les différences $p - p_0$ et $p - p'$ qu'on désigne par h et h'. Mais on peut parfaitement réaliser l'expérience de Clément et Desormes en partant, comme dans notre problème, d'une pression p_0 supérieure à p. La même formule (5) convient aux deux cas).

A titre d'exercice de calcul, nous allons déduire la formule élémentaire (5) de la formule logarithmique (3) mise au préalable sous la forme (6) $\gamma = \log\left(1+\frac{h}{p}\right) : \log\left(1+\frac{h-h'}{p}\right)$ qui tient compte des notations (4) Comme $\frac{h}{p}$ et $\frac{h-h'}{p}$ sont inférieurs à l'unité, on peut développer les logarithmes en séries. En ne prenant que le premier terme de chaque développement, il vient $\gamma = \frac{h}{p} : \frac{h-h'}{p}$

Si p et p' sont suffisamment voisins l'un de l'autre pour qu'on puisse les supposer égaux, on retrouve la formule élémentaire (5). L'application numérique donne

$$\gamma = \frac{10}{10 - 2{,}73} = 1{,}375.$$

Cette dernière valeur est entachée de deux erreurs. La première ε_1 provient de ce qu'on emploie la formule élémentaire (5) au lieu de la formule logarithmique (6) (6). On a $\varepsilon_1 = \frac{1{,}40 - 1{,}375}{1{,}40} < \frac{18}{1000}$.

La deuxième erreur ε_2 provient de ce que, dans la formule (5), les quantités h et h' ne sont connues qu'avec une certaine approximation. Prenons les différentielles logarithmiques

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dh}{h} - \frac{d(h-h')}{h-h'} = \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h-h'}\right)dh + \frac{dh'}{h-h'}$$

Le coefficient de dh étant négatif, nous changeons son signe pour que les deux termes soient additifs. On a donc

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} < \left(\frac{1}{h-h'} - \frac{1}{h}\right)\Delta h + \frac{\Delta h'}{h-h'} \quad \text{ou, en faisant } \Delta h = \Delta h'$$

$$\varepsilon_2 < \frac{\Delta h}{h-h'}\left(\frac{h'}{h} + 1\right) = \frac{\gamma\,\Delta h}{h}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + 1\right)$$

$$\varepsilon_2 < \frac{\Delta h}{h}(2\gamma - 1) < \frac{1}{1000}.$$

On a donc pour l'erreur totale $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{2}{100}$.

---

34. — Une masse d'air égale à 1 Kg est prise à la température de 20° C et sous la pression de 1 kg : cm². On lui fait décrire le cycle suivant : 1° Compression adiabatique de $p_2 = 1$ à $p_1 = 20$ kg : cm²,

2° Echauffement à pression constante pendant lequel on lui fournit réversiblement 200 grandes calories. 3° Détente adiabatique jusqu'au volume initial. 4° Refroidissement à volume constant jusqu'à la pression initiale.

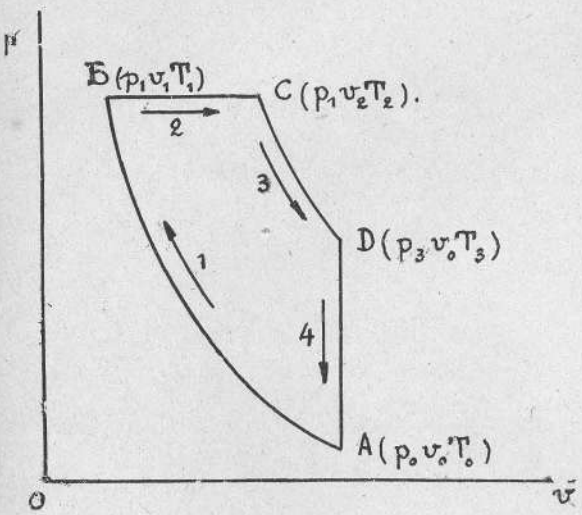
I. — Tracer en coordonnées (p, v) le cycle décrit par cette masse d'air, en calculant en particulier les coordonnées des points de rencontre des côtés du cycle. Quel est le rendement thermique de ce cycle et la quantité de travail obtenue? Chaleur spécifique de l'air à volume constant $c = 0{,}25$. Rapport $\gamma = 1{,}4$.

II. — Calculer la variation d'entropie dans les différentes transformations et construire le diagramme entropique du cycle.

(Physique générale. Paris, 1928).

Nous avons conservé le nombre 0,25 donné dans l'énoncé pour la chaleur spécifique de l'air à volume constant, bien qu'il y ait une erreur manifeste. C'est la chaleur spécifique de l'air à pression constante qui est de l'ordre de 0,25.

I. En coordonnées (p, v), le cycle ABCD comprend deux adiabatiques AB, CD reliées par l'horizontale isobare BC et la verticale isovolumétrique DA. Calculons les coordonnées des points A, B, C, D.



En A, $p_0 = 1$ kg. Le volume v_0 est donné, en litres, par la formule

$$1000 = v_0 \times 1{,}293 \times \frac{1000}{76 \times 13{,}6} \times \frac{273}{293}.$$

On trouve $v_0 = 858$ litres.

En B_1 $p_1 = 20$ kg;

$$v_1 = v_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 858 \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{1{,}4}} = 101 \text{ l.}$$

Calculons la température absolue T_1 en B. D'après la formule (3) du n° 23 on a

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 293 \times 20^{\frac{2}{7}} = 690°.$$

En C, $p = p_1 = 20$ kg. Le volume est $v_2 = v_1 \frac{T_2}{T_1}$. Il faut calculer T_2. Or le long de BC, à pression constante, on a fourni 200 grandes calories au kilog. d'air. On a donc $200 = C(T_2 - T_1)$. D'ailleurs $C = \gamma c = 1{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}35$. Par suite, $T_2 - T_1 = 571$, $T_2 = 1261°$, $v_2 = 101 \times \frac{1261}{690} = 184{,}5$ litres.

En D, $p_3 = p_1 \left(\frac{v_2}{v_0}\right)^{\gamma} = 20 \times \left(\frac{184{,}5}{858}\right)^{1{,}4} = 2^{k}{,}325$; $v = v_0 = 858$ l.

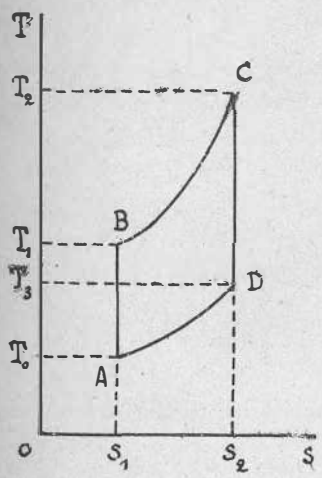
Le rendement thermique du cycle est $r = (Q_1 - Q_2) : Q_1$, en désignant par Q_1 la quantité de chaleur fournie à l'air le long de BC et par Q_2 la quantité de chaleur restituée le long de DA. Nous connaissons déjà $Q_1 = 200$ grandes calories.

D'autre part $Q_2 = c(T_3 - T_0)$. Il faut calculer T_3. D'après la relation (4) du n° 23, on a $T_3 = T_2 \left(\frac{v_2}{v_0}\right)^{\gamma-1} = 1261 \times \left(\frac{184,5}{858}\right)^{0,4} = 682°$. Par suite $Q_2 = 0,25 \times 389 = 97$ grandes calories et le rendement est $r = 103 : 200 = 0,515$.

La quantité de travail obtenue est

$$\mathcal{T} = J(Q_1 - Q_2) = 426,6 \times 103 = 43940 \text{ kilogrammètres.}$$

II. — Dans les transformations adiabatiques AB et CD la variation d'entropie est nulle.



Dans la transformation BC où le gaz s'échauffe de T_1 à T_2 sous pression constante, la variation d'entropie est

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C\,dT}{T} = C \operatorname{Log} \frac{T_2}{T_1} = 0,35 \operatorname{Log} \frac{1261}{690} = 0,211.$$

Dans la transformation DA où le gaz se refroidit de T_3 à T_0 sous volume constant, la variation d'entropie est égale et de signe contraire, soit $-0,211$, puisque la variation de l'entropie le long d'un cycle fermé parcouru d'une manière réversible est nulle. On peut d'ailleurs vérifier que $c \operatorname{Log} \frac{T_0}{T_3} = -0,211$.

Nous avons construit le diagramme entropique du cycle. Les transformations adiabatiques AB et CD qui sont iso-entropiques sont représentées par des droites AB et CD parallèles à l'axe OT.

La transformation BC (échauffement à pression constante) est représentée par un arc de la courbe logarithmique $S - S_1 = C \operatorname{Log}(T : T_1)$.

La transformation DA (refroidissement à volume constant) est représentée par un arc de la courbe $S - S_1 = c \operatorname{Log}(T : T_0$

---

35. — Un compresseur d'air comprend deux cylindres à simple effet en tandem, c'est à dire calés sur la même tige. Le premier puise de l'air dans l'atmosphère à la température t et à la pression p. Il le comprime à la pression αp. On admettra que cette compression se fait sans échange de chaleur avec la paroi et qu'elle est adiabatique. Cet air, après avoir traversé un réfrigérant qui ramène sa température à sa valeur initiale t, est introduit dans un récipient où règne la pression αp. Il est repris par le second cylindre qui le comprime adiabatiquement à la pression $\alpha^2 p$. On appelle V le volume du premier cylindre et n le nombre de tours par minute de la machine. On demande : 1° D'établir la formule qui donne, en chevaux, la puissance nécessaire pour comprimer un volume nV par minute. — 2° De donner la formule qui permet de calculer, en chevaux, l'économie de puissance résultant de la substitution de la compression en deux étages à la compression dans un seul cylindre. — 3° En établissant

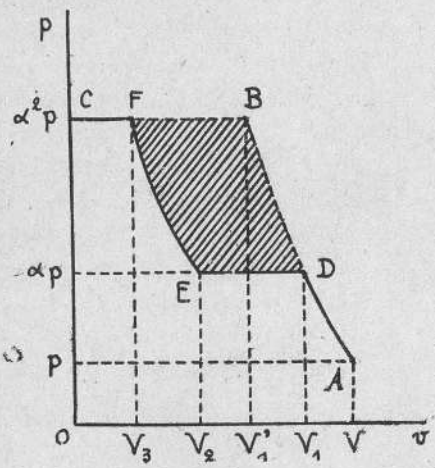
ces formules, montrer que l'échelonnement suivant une progression géométrique des trois pressions initiale, intermédiaire et finale est la condition du maximum d'économie.

Applications: $nV = 750$ litres par minute, et $n = 75$. — Alésage du grand cylindre = 145 millimètres; $\alpha = 3$, $p = 735{,}5$ millimètres de mercure; $t = 27°$ centigrades. — Trouver la course commune des deux pistons, l'alésage du petit cylindre, la puissance nécessaire pour faire tourner la machine. — On négligera, pour simplifier, l'espace nuisible et le frottement. On rappelle que le logarithme néperien de 3 est égal à 1,1.

(*Mécanique physique et expérimentale*, 1926).

1° Le travail d'aspiration, dans le premier cylindre, est nul, puisque les pressions sont les mêmes sur les deux faces du piston et qu'on néglige le frottement. Le travail de compression effectué dans le premier cylindre le long de l'adiabatique AB est, d'après la formule (10) du n° 23 dans laquelle on fait $p_0 = p$, $p_1 = \alpha p$, $v_0 = V$,

$$\mathcal{C}_1 = \frac{pV}{\gamma - 1}\left[\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right].$$



Soit T la température absolue au point D, V_1 le volume correspondant. De D à E, l'air sous la pression constante αp revient à la température initiale $T = t + 273$; son volume décroît de V_1 à V_2, d'où un nouveau travail $\mathcal{C}_2 = \alpha p (V_1 - V_2)$. D'ailleurs $V_1 = V\left(\frac{p}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}$. En A et E, on a la même température T. Les volumes sont donc inversement proportionnelles aux pressions et on a $V_2 = V : \alpha$. En substituant ces valeurs on trouve

$$\mathcal{C}_2 = pV\left[\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right].$$

Le travail de compression effectué dans le second cylindre le long de l'adiabatique EF est

$$\mathcal{C}_3 = \frac{\alpha p V_2}{\gamma - 1}\left[\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] = \mathcal{C}_1 \text{ puisque } \alpha V_2 = V.$$

De F à C, l'air est refoulé sous la pression constante $\alpha^2 p$ dans le réservoir où règne cette pression. Le volume décroît de V_3 à zéro. Le travail correspondant est $\mathcal{C}_4 = \alpha^2 p V_3$. D'ailleurs

$$V_3 = V_2\left(\frac{\alpha p}{\alpha^2 p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_2\alpha^{-\frac{1}{\gamma}} = V\alpha^{-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{C}_4 = pV\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Le travail fourni par la pression atmosphérique étant égal à pV, le travail effectivement dépensé est donc simplement

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 - pV = 2pV\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left[\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right].$$

Les cylindres étant à simple effet, la puissance en ch

chevaux, nécessaire pour comprimer un volume nV par minute, est donnée par la formule $P = \frac{2p}{75} \cdot \frac{nV}{60} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$,

à la condition d'exprimer la pression p en kilogs par mètre carré, et le volume nV en mètres cubes. En faisant $\gamma = 1,4$, on a

$$P = \frac{2 \times 735,5 \times 13,6}{75} \times \frac{0,75}{60} \times \frac{1,4}{0,4}\left[3^{\frac{0,4}{1,4}} - 1\right] = 4,30 \text{ chevaux.}$$

Nous avons eu besoin de connaître le logarithme décimal de 3. L'énoncé donnant le logarithme népérien, nous l'avons multiplié par 0,4343, ce qui a donné $1,1 \times 0,4343 = 0,4777$, chiffre légèrement supérieur à celui des tables décimales.

2° Si la compression se fait dans un seul cylindre, de la pression p à la pression $\alpha^2 p$, le travail le long de l'adiabatique AB est

$$\mathcal{T}'_1 = \frac{pV}{\gamma-1}\left[(\alpha^2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right].$$

En B le volume est $V'_1 = V(\alpha^2)^{-\frac{1}{\gamma}}$ et le travail de refoulement le long de l'horizontale BC est $\mathcal{T}'_2 = \alpha^2 p V'_1 = pV(\alpha^2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Le travail fourni par la pression atmosphérique étant toujours égal à pV, le travail effectivement dépensé est

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T}'_1 + \mathcal{T}'_2 - pV = pV\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\alpha^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}} - 1\right]$$

La nouvelle puissance est, en chevaux,

$$P' = \frac{p}{75} \cdot \frac{nV}{60} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\alpha^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}} - 1\right].$$

L'économie de puissance est

$$P' - P = \frac{p}{75} \cdot \frac{nV}{60} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]^2.$$

Cette différence étant positive, l'économie est bien réelle. D'ailleurs la figure montre que l'économie de travail par coup de piston est représentée par l'aire hachurée. L'application numérique donne $P' - P = 0,79$ cheval, $P' = 5,09$ chevaux. L'économie est de $0,79 : 5,09 = 15,5\ \%$.

3°. Supposons maintenant que les pressions initiale et finale restant toujours égales à p et $\alpha^2 p$, la pression intermédiaire soit devenue βp. Nous allons montrer que la condition du maximum d'économie est $\beta = \alpha$.

Le travail le long de l'adiabatique AD est $\mathcal{T}''_1 = \frac{pV}{\gamma-1}\left[\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$

Celui le long de l'horizontale est $\mathcal{T}''_2 = pV\left[\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$.

Désignons par V'_2 et V'_3 les nouveaux volumes en E et F. Nous savons déjà que $\beta V'_2 = V$. Le travail suivant l'adiabatique EF est

$$\mathcal{T}''_3 = \frac{\beta p V'_2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\alpha^2 p}{\beta p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] = \frac{pV}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right].$$

De F à C, le travail est $\mathcal{T}''_4 = \alpha^2 p V'_3$. D'ailleurs

$$V'_3 = V'_2\left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{V}{\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \text{ d'où } \mathcal{T}''_4 = pV\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

En tenant compte du travail fourni par la pression atmosphérique, le travail effectivement dépensé est

$$\mathcal{T}'' = \mathcal{T}''_1 + \mathcal{T}''_2 + \mathcal{T}''_3 + \mathcal{T}''_4 - pV.$$

On voit facilement que $\mathcal{T}''$ est minimum en même temps que l'expression $\left[\beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\left[\frac{1}{\gamma-1} + 1\right]$, c'est à dire en même

temps que la fonction $y = \beta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Ainsi, y est la somme de deux quantités dont le produit est constant. Le minimum a lieu quand elles sont égales, c. à. d pour $\beta = \alpha$, ce qui démontre la proposition.

Le volume du premier cylindre est $V = 750 : n = 750 : 75 = 10$ litres, soit 10^4 cm^3. Son alésage étant égal à 14,5 cm, la course commune est $10^4 \times 4 : \pi \times 14{,}5^2 = 60{,}55$ cm.

Le volume du petit cylindre est $V_2 = \frac{V}{\alpha^2}$, c. à. d. le tiers du volume du grand. La course étant commune, l'alésage du petit cylindre est $14{,}5 : \sqrt{3} = 8{,}4$ cm.

---

36. – On considère un compresseur à deux étages de pression comprimant de l'air dans les conditions suivantes: le fluide est aspiré à la pression et à la température de l'atmosphère P_0 et T_0; il est comprimé dans le premier cylindre à la pression P', ramené à la température T_0 par passage dans un réfrigérant, puis comprimé finalement dans le second cylindre à la pression P_1. On suppose que dans chaque cylindre la compression et éventuellement la détente sont adiabatiques. On demande: 1° de calculer le travail de compression pour l'unité de poids du fluide; 2° de démontrer que ce travail est minimum lorsque les pressions P_0, P', P_1 sont en progression géométrique; 3° de calculer le rapport du travail total qu'il faut fournir pour opérer ainsi la compression par voie adiabatique dans les deux cylindres au travail qu'il faudrait si la compression était isothermique; 4° de montrer par le calcul algébrique que les expressions algébriques de ces deux travaux se confondent lorsque l'on multiplie indéfiniment le nombre des étages de pression entre P_0 et P_1.

(*Mécanique physique et expérimentale*, Paris, 1928).

Ce problème est un complément du précédent. 1° Le long de la première adiabatique, le travail est $\mathcal{C}_1 = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{P'}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$, en désignant par V_0 le volume du premier cylindre.

Pendant le passage dans le réfrigérant, à la pression P', le travail est $\mathcal{C}_2 = P'(V_1 - V_2)$ avec $V_1 = V_0\left(\frac{P_0}{P'}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ et $V_2 = V_0 \frac{P_0}{P'}$, d'où $\mathcal{C}_2 = P_0 V_0\left[\left(\frac{P'}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$.

Le long de la seconde adiabatique, le travail est $\mathcal{C}_3 = \frac{P'V_2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_1}{P'}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] = \frac{P_0 V_0}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P_1}{P'}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$. Pendant le refoulement sous la pression P_1 le travail est $\mathcal{C}_4 = P_1 V_3$ avec $V_3 = V_2\left(\frac{P'}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, d'où $\mathcal{C}_4 = P_1 \frac{P_0 V_0}{P'}\left(\frac{P'}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = P_0 V_0 \left(\frac{P_1}{P'}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

Le travail fourni par la pression atmosphérique étant égal à $P_0 V_0$, le travail étant effectivement dépensé est simplement

$$(1)\quad \mathcal{C}_a = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 - P_0 V_0 = P_0 V_0 \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{P'}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_1}{P'}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2\right].$$

2° Ce travail est minimum en même temps que la somme $\left(\frac{P'}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_1}{P'}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Le produit des deux termes de cette somme étant égal à la quantité constante $\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, cette somme est minimum quand les deux termes sont égaux, c. à. d. quand on a

$\frac{P'}{P_0} = \frac{P_1}{P'}$: les trois pressions sont en progression géométrique.

3° Nous supposons maintenant que la compression est isothermique, la pression augmentant de P_0 à P_1. On peut admettre qu'il n'y a plus qu'un seul cylindre. Remarquons d'abord que le travail d'aspiration est négligeable, les pressions étant à peu près les mêmes sur les deux faces du piston; nous ne calculerons que le travail dépensé pendant le retour du piston. Lorsqu'on passe de la pression P_0 à la pression P_1, le volume passe de V_0 à V_1; quand le volume est V, la pression est P; le gaz suivant la loi de Mariotte, on a $PV = P_0 V_0 = P_1 V_1$ et le travail reçu par le gaz est

$$-\int_{V_0}^{V_1} P\,dV = -P_0 V_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = P_0 V_0 \operatorname{Log} \frac{V_0}{V_1} = P_0 V_0 \operatorname{Log} \frac{P_1}{P_0}.$$

Puis le gaz est refoulé sous la pression constante P_1, le volume balayé par le piston étant V_1, ce qui correspond à un travail $P_1 V_1$. La pression atmosphérique P_0 qui agit sur l'autre face du piston produit un travail $P_0 V_0$. En remarquant que $P_0 V_0 = P_1 V_1$, on obtient pour la valeur du travail effectivement dépensé:

$$(2) \qquad \mathcal{C}_i = P_0 V_0 \operatorname{Log} \frac{P_1}{P_0} + P_1 V_1 - P_0 V_0 = P_0 V_0 \operatorname{Log} \frac{P_1}{P_0}.$$

De (1) et de (2) on tire le rapport demandé.

$$\frac{\mathcal{C}_a}{\mathcal{C}_i} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{P'}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \left(\frac{P_1}{P'}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2\right] : \operatorname{Log} \frac{P_1}{P_0}.$$

4° Supposons que l'on utilise dans la compression adiabatique n étages de pression entre P_0 et P_1. Les pressions successives étant en progression géométrique, le rapport de deux pressions consécutives quelconques est $\sqrt[n]{P_1 : P_0}$ et, d'après (1) le travail devient

$$\mathcal{C}_n = P_0 V_0 \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left[n\left(\sqrt[n]{\frac{P_1}{P_0}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - n\right] = P_0 V_0 \frac{n\gamma}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{n\gamma}} - 1\right].$$

En posant $\frac{\gamma - 1}{n\gamma} = x$, nous avons affaire à une expression de la forme $\frac{a^x - 1}{x}$. Multiplions indéfiniment le nombre des étages de pression; nous devons faire $x = 0$ (correspondant à n infini). L'expression se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Appliquons la règle de l'Hôpital: le rapport des dérivées est $a^x \operatorname{Log} a$ qui tend vers $\operatorname{Log} a$, c.à.d. vers $\operatorname{Log} \frac{P_1}{P_0}$ quand x tend vers zéro. Ainsi la limite de $\mathcal{C}_n$ est bien égale à $\mathcal{C}_i$. Ce résultat montre que dans l'impossibilité pratique où l'on est de réaliser la compression isotherme, qui réduirait au minimum la dépense de travail, il y a intérêt à augmenter le nombre d'étages de pression.

---

37. — Une masse d'air occupe un volume $V_0 = 100$ litres, à la pression atmosphérique $p_0 = 1$ atmosphère et à la température ambiante T_0, égale à 15° dans l'échelle centigrade. On la comprime par une opération réversible jusqu'à une pression $p_1 = 20$ atmosphères. 1° En supposant que, pendant cette compression, la température

gaz soit maintenue constante, calculer le travail qu'il faut dépenser pour effectuer la compression. Calculer la quantité de chaleur dégagée pendant cette compression. Calculer la variation de l'énergie utilisable du gaz. - 2° En supposant que la compression soit faite d'une manière adiabatique, calculer le volume final et la température finale du gaz. Calculer le travail qu'il faut dépenser pour effectuer la compression. Montrer que ce travail s'exprime très simplement au moyen de la température initiale et de la température finale du gaz, et trouver ce résultat directement par la considération de l'énergie interne. - 3° On comprime adiabatiquement le gaz (en partant toujours du même état initial) jusqu'à une pression p', puis on le laisse se refroidir sans changer son volume jusqu'à la température ambiante T_0. On veut obtenir, après ce refroidissement, de l'air à la pression de 20 atmosphères. Calculer la pression p', le travail dépensé dans la compression, ainsi que la quantité de chaleur cédée au milieu ambiant pendant le refroidissement.

Les données numériques nécessaires sont assez connues pour qu'il soit inutile de les rappeler. Toutes les valeurs numériques du travail et de l'énergie seront calculées en joules, et les quantités de chaleur en petites calories. (*Physique Générale*, Paris 1928).

1° Soit V_1 le volume de l'air à la fin de la compression isotherme. On a $pv = p_0 V_0 = p_1 V_1$, puisque la température est maintenue constante. Le travail qu'il faut dépenser pour effectuer la compression est

$$\mathcal{C} = -\int p\,dv = -p_0 V_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dv}{v} = p_0 V_0 \operatorname{Log} \frac{V_0}{V_1} = p_0 V_0 \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0}.$$

Utilisons d'abord le système C G S. La pression $p_0 = 1$ atmosphère vaut à peu près $\frac{76}{75} \times 10^6$ baryes. D'autre part, $V_0 = 10^5$ cm^3. Par suite, $\mathcal{C} = \frac{76}{75} \times 10^{11} \times \operatorname{Log} 20 = 30357 \times 10^7$ ergs, soit 30357 joules.

Le gaz ayant subi une transformation isotherme, son énergie reste constante ; la quantité de chaleur dégagée est équivalente au travail qu'il a reçu, soit $Q = 30357 : 4.185 = 7254$ petites calories.

2° Si la compression est adiabatique, le volume final V_1 est donné par la formule $p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma$

$$V_1 = V_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 100 \times \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 11,77 \text{ litres.}$$

Pour trouver la température finale T_1 du gaz nous partons des formules $p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma$, $p_0 V_0 = R T_0$, $p_1 V_1 = R T_1$, d'où

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = \frac{p_1}{p_0} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad T = (273+15) \times 20^{\frac{0,4}{1,4}} = 678° \text{ absolus}$$

soit 405° C.

Quand un gaz subit une compression adiabatique en passant de la température T_0 à la température T_1, le travail $\mathcal{C}$ qu'il reçoit est égal à sa variation d'énergie interne $U_1 - U_0$. On sait d'autre part qu'en désignant par c_v la chaleur spécifique à volume constant, l'énergie interne de l'unité de masse d'un gaz parfait a

pour expression, à une constante additive près, $U = JcT$. Pour la masse m de gaz on aura $\mathcal{E} = U_1 - U_0 = Jcm(T_1 - T_0)$.

La masse de 100 litres d'air à 15° sous la pression de 1 atmosphère est $m = 100 \times 1,293 \times \frac{273}{288} = 122$ gr. 56. En faisant $c = 0,17$, $T_1 - T_0 = 390$, on trouve $\mathcal{E} = 34000 \times 10^7$ ergs soit 34.000 joules.

3° La température T' atteinte par l'air à la fin de la compression adiabatique, sous la pression p', est

(1) $T' = T_0 \left(\frac{p'}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 p'^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, puisque $p_0 = 1$. Le gaz devant se refroidir à volume constant, en passant de la température T' à la température T_0, et de la pression p' à la pression de 20 atmosphères, on a (2) $T' = T_0 \frac{p'}{20}$. En portant cette valeur de T' dans (1), il vient $p' = 20^{\gamma} = 20^{1,4} = 66,3$ atmosphères.

Pour calculer le travail dépensé dans la compression adiabatique, nous avons besoin de connaître T'. Il est plus simple de se servir de la relation (2) que de la relation (1). On a $T' = 288 \times \frac{66,3}{20} = 955°$. D'après ce que nous avons vu au 2°, le travail est $\mathcal{E} = Jcm(T' - T_0) = 4,185 \times 0,17 \times 122,56 \times 667 = 58160$ joules

La quantité de chaleur cédée au milieu ambiant pendant le refroidissement à volume constant est

$$Q' = cm(T' - T_0) = \frac{\mathcal{E}'}{J} = 13900 \text{ calories.}$$

On peut aussi raisonner comme suit. L'air étant revenu à sa température initiale, son énergie interne n'a pas varié (bien qu'il ne soit pas revenu à sa pression initiale). La quantité de chaleur cédée au milieu ambiant est donc égale au travail fourni, $JQ' = \mathcal{E}'$.

---

38. — I De l'air comprimé à 10 atmosphères et à la température de 20° est fourni par une conduite qui peut le débiter en quantité illimitée, sous pression et à températures invariables. On utilise cet air pour produire du travail, en le faisant agir sur l'une des faces du piston d'une machine à simple effet ; l'autre face du piston supporte la pression atmosphérique. Calculer le travail produit par kilogramme d'air comprimé consommé. Calculer le volume que doit avoir le cylindre pour que le moteur, effectuant 4 périodes complètes par seconde, produise une puissance mécanique de 1 kilowatt. Calculer alors la consommation d'air comprimé en kilogrammes par heure.

On fera ces divers calculs en supposant successivement réalisées chacune des trois hypothèses suivantes : 1° L'air comprimé est introduit à pleine pression pendant toute la course du piston ; il est ensuite rejeté dans l'atmosphère. — 2° L'air est introduit à pleine pression pendant une partie de la course du piston ; puis la communication avec la conduite est coupée et l'air se détend adiabatiquement jusqu'à la pression atmosphérique. On suppose

qu'il n'y a aucun échange de chaleur entre l'air et les parois du cylindre. On calculera la température de l'air à la sortie et la fraction de la course du piston pendant laquelle doit avoir lieu l'introduction d'air comprimé. On fera une vérification des résultats obtenus en utilisant l'expression de l'énergie interne d'un gaz parfait. — 3° Les choses se passent d'une manière analogue, mais la température de l'air est maintenue constante et égale à 20° pendant la détente. On calculera la fraction de la course du piston pendant laquelle l'air comprimé doit être introduit, ainsi que la quantité de chaleur qu'il faut fournir par coup de piston. Cette quantité de chaleur devant passer à travers les parois du cylindre, la surface externe de celui-ci sera à une température plus élevée que sa surface interne. Déterminer la différence entre la température externe et la température interne, sur les données suivantes: la machine effectue 4 périodes complètes par seconde et donne une puissance de 1 kilowatt; la température de chacune des surfaces du cylindre est uniforme et constante; le cylindre a 10 cm. de diamètre intérieur et ses parois sont en acier de 1 cm. d'épaisseur; la transmission de la chaleur se fait comme à travers une paroi plane ayant cette épaisseur et une surface égale à la surface interne du cylindre (surface latérale et une base); le coefficient de conductibilité thermique de l'acier est 0,1 en prenant comme unités le centimètre, la petite calorie et le degré centigrade.

II. Calculer le travail qu'il a fallu dépenser pour obtenir et refouler 1 kg d'air comprimé à 10 atmosphères et 20° la compression étant supposée faite de la manière suivante: l'air est pris dans l'atmosphère à 20°, et comprimé d'une façon isotherme. Calculer alors le rendement de la transmission d'énergie, en faisant successivement les trois hypothèses précédentes sur les conditions de fonctionnement du moteur.

On admettra dans toutes les parties du problème que l'air se comporte comme un gaz parfait. Le rapport des deux chaleurs spécifiques est 1,4. Les autres données numériques nécessaires pour résoudre le problème sont assez connues pour que l'on juge inutile de les indiquer. (Agrégation de Physique, 1914)

I. 1° Calculons d'abord le volume v d'un kilogramme d'air comprimé à 10 atmosphères et à la température de 20°. On a $1000 = v \times 0{,}001293 \times 10 \times \frac{273}{293}$, d'où $v = 83 \times 10^3$ cm^3.

Soit p_1 la pression de l'air comprimé; p_0 celle de l'atmosphère. Dans le système CGS, on a $p_1 = 10 \times 1{,}013 \times 10^6$ baryes, $p_0 = 1{,}013 \times 10^6$ baryes. Si l'air travaille constamment à pleine pression, le travail produit est

$$\tau_1 = (p_1 - p_0)\, v = 9 \times 1{,}013 \times 10^6 \times 83 \times 10^3 \text{ ergs soit } 75671 \text{ joules.}$$

Une période complète comprend un aller du piston pour l'admission et un retour pour l'échappement à la pression atmosphérique. Le moteur étant à simple effet, le travail

produit pendant l'échappement est nul, les pressions qui agissent sur les deux faces du piston étant les mêmes. Il n'y a de travail produit que pendant l'admission.

Si le cylindre avait un volume v et si le moteur effectuait 4 périodes complètes par seconde, la puissance produite serait $P = 4 \times 75,671$ Kw. Pour produire 1 Kw, le volume du cylindre doit donc être égal à $V = \frac{v}{P} = 274$ cm³.

L'énergie produite pendant 1 heure étant de 1 kilowatt-heure, soit 1000×3600 joules, la consommation d'air comprimé par heure est égale à $\frac{1000 \times 3600}{75671} = 47^{k},574$.

2° L'admission à pression constante est suivie d'une détente adiabatique. Le volume v occupé par 1 Kg d'air à la pression p_1 devient v_0 à la pression atmosphérique p_0. D'après la formule (6) du n° 23, le travail produit pendant la détente est $\frac{p_1 v}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$ et le travail total produit pendant une période complète est

$$(1) \quad \mathcal{T}_2 = p_1 v + \frac{p_1 v}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] - p_0 v_0 .$$

Tout est connu sauf v_0. Mais l'équation de la ligne adiabatique donne $v_0 = v\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = v \times 10^{\frac{1}{1,4}} = 5,18\, v$. En substituant et en divisant par 10^7 pour avoir des joules, on trouve $\mathcal{T}_2 = 141841$ joules, travail par Kilogramme d'air comprimé consommé. On voit que $\mathcal{T}_2$ est presque le double de $\mathcal{T}_1$.

Si le cylindre avait un volume v_0 et si le moteur effectuait 4 périodes complètes par seconde, la puissance mécanique produite serait $P_0 = 4 \times 141,841$ Kw. Pour produire 1 Kw, le volume du cylindre doit donc être $V_0 = \frac{v_0}{P_0} = \frac{5,18\, v}{P_0} = 758$ cm³, et la consommation d'air comprimé par heure est égale à $\frac{1000 \times 3600}{141841} = 25^{k},380$.

D'après la formule (3) du n° 23, la température de l'air à la sortie est $T = 293\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{0,4}{1,4}} = 151°$ abs, soit $-122°$C.

La fraction de la course du piston pendant laquelle doit avoir lieu l'introduction d'air comprimé est $\frac{v}{v_0} = \frac{1}{5,18} = 0,193$.

On peut vérifier les résultats obtenus en utilisant l'expression $U = JcT$ de l'énergie interne d'un gaz parfait. Dans la détente adiabatique qui fait baisser la température du Kilogramme d'air de $T_0 = 293°$ à $T_1 = 151°$, la diminution de l'énergie, en faisant $c = 0,17$, est

$$Jc(T_0 - T_1) = 4,185 \times 0,17 \times 1000 \times 142 = 101026 \text{ joules.}$$

On doit vérifier que cette variation de l'énergie est égale au travail fourni par la détente adiabatique, lequel d'après la relation (1) est égal à $\mathcal{T}_2 - (p_1 v - p_0 v_0) = 141841 - 40526 = 101315$ joules. On voit que la vérification est satisfaisante.

3° L'admission à pression constante est suivie d'une détente isotherme. Le volume v occupé par 1 Kg d'air à la pression p_1 devient v_0 à la pression atmosphérique p_0. D'après la formule (1) du n° 24, le travail produit par la détente est

$p_1 v \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0}$ et le travail total produit pendant une période complète est $\mathcal{E}_3 = p_1 v + p_1 v \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0} - p_0 v_0$. Mais $p_1 v = p_0 v_0$. On a donc simplement

$$\mathcal{E}_3 = p_1 v \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0} = 1{,}013 \times 10^6 \times 10 \times 83 \times 10^3 \operatorname{Log} 10 \text{ ergs}$$

En divisant par 10^7 on trouve $\mathcal{E}_3 = 193600$ joules. Ainsi le travail produit par kilog. d'air comprimé est plus grand dans la détente isotherme que dans la détente adiabatique, mais cet avantage est contrebalancé par la nécessité de fournir de la chaleur au cylindre pour maintenir la température constante.

Le volume v_0 à la fin de la détente isotherme est $v_0 = \frac{p_1}{p_0} v = 10\,v$.

Si le cylindre avait un volume v_0 et si le moteur effectuait 4 périodes complètes par seconde, la puissance mécanique produite serait $P_0 = 4 \times 139{,}6$ Kw. Pour produire 1 Kw, le volume du cylindre doit donc être $V_0 = \frac{v_0}{P_0} = \frac{10\,v}{P_0} = 1072$ cm^3, et la consommation d'air comprimé par heure est $\frac{1000 \times 3600}{193.600} = 18^{k}{,}6$.

La fraction de la course du piston pendant laquelle l'air comprimé doit être introduit est $\frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{10}$.

On sait (n°24) que dans le cas d'une détente isotherme, le gaz parfait reçoit du milieu extérieur une quantité de chaleur équivalente au travail qu'il fournit. Désignons par V_1 le volume d'admission dans le cylindre. La quantité de chaleur qu'il faut fournir par coup de piston est donc $Q = \frac{1}{J} p_1 V_1 \operatorname{Log} 10$. La machine effectuant 4 périodes complètes par seconde et fournissant une puissance mécanique de 1 Kw, on a $4 p_1 V_1 \operatorname{Log} 10 = 10^3 \times 10^7$. Par suite

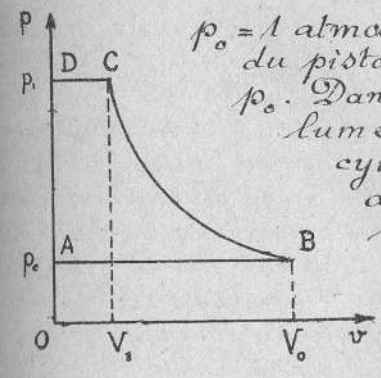
$$Q = \frac{10^{10}}{4J} = \frac{10^3}{4 \times 4{,}185} = 59{,}74 \text{ petites calories.}$$

La différence entre la température externe t_1 et la température interne t_0, dans le régime permanent, est $t_1 - t_0 = \frac{Ud}{K}$, en désignant par U la quantité de chaleur qui traverse par seconde une surface de 1 cm^2 de la paroi, par d l'épaisseur de la paroi, par K le coefficient de conductibilité thermique.

D'après l'énoncé, nous devons prendre une surface S égale à la surface latérale interne augmentée de la surface d'une base. Soit $R = 5$ cm. le rayon intérieur du cylindre, h sa hauteur. On a $\pi R^2 h = V_0 = 1072$, d'où pour la surface latérale $S_1 = 2\pi Rh = \frac{2 \times 1072}{5} = 428{,}8$ cm^2. La surface d'une base est $S_2 = \pi R^2 = 25\pi = 78{,}54$ cm^2. On a donc $S = S_1 + S_2 = 507{,}34$ c
D'autre part, la quantité de chaleur qui doit passer par seconde à travers les parois du cylindre est $Q_1 = 4Q = 238{,}96$ petites calories. Par suite $U = \frac{Q_1}{S} = \frac{238{,}96}{507{,}34}$. En faisant $d = 1$, $K = 0$, on trouve $t_1 - t_0 = 4°{,}71$.

II. — Au lieu d'un moteur à air comprimé, nous avons maintenant affaire à un compresseur.

Pendant l'aspiration AB à la pression constante



p_0 = 1 atmosphère, le travail est nul, les deux faces du piston étant soumises à la même pression p_0. Dans la compression isotherme BC, le volume diminue de V_0 (volume total du cylindre) à V_1 pendant que la pression augmente de p_0 à p_1 = 10 atm., suivant la loi pv = Cte. Le travail reçu par l'air est $p_0 V_0 \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0}$. Puis le gaz est refoulé dans le réservoir sous la pression constante p_1 (droite CD), le volume balayé par le piston étant V_1 ce qui correspond à un travail $p_1 V_1$. Le travail ainsi calculé n'est pas égal à celui qu'il a fallu dépenser, car une partie est effectuée par la pression atmosphérique p_0 qui agit sur l'autre face du piston et produit un travail $p_0 V_0$. En remarquant que $p_0 V_0 = p_1 V_1$ on voit que $\mathcal{E}_4 = p_0 V \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0}$.

Le volume V_0 est celui de 1 kilog d'air pris dans l'atmosphère à 20°. Or nous avons appelé v le volume du même kilog à la pression de 10 atm. Par suite $p_0 V_0 = p_1 v$ et $\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_3 = 193600$ joules.

Le rendement de la transmission d'énergie est donc: dans la première expérience $\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_4} = 0,39$; dans la seconde $\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_4} = 0,73$; dans la troisième $\frac{\mathcal{E}_3}{\mathcal{E}_4} = 1$.

---

39. – I) On considère la fonction thermodynamique $H = U + pv - JTS$, où U et S sont respectivement l'énergie et l'entropie. Calculer, à une constante près, la fonction H pour un gaz parfait, en fonction de p et T. Evaluer sa variation pour une molécule-gramme dont la pression varie de 1 à 1000 atmosphères à la température de 0° C. On rappelle que le volume de la molécule-gramme est 22412 cm³ dans les conditions normales. On indiquera explicitement les unités employées.

II. Pour un gaz réel, on suppose que H soit mise sous la forme $H = RT \operatorname{Log} P + \text{Cte}$ (Log, logarithme népérien), à température constante. Montrer que P coïncide avec la pression p pour un gaz parfait; démontrer que $\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{v}{RT}$.

L'écart entre le gaz réel et le gaz parfait est représenté alors par l'expression $\alpha = \frac{RT}{p} - v$; α est fonction de p et T. Démontrer que, pour un gaz réel, on a

$$\operatorname{Log} P = \operatorname{Log} p - \int_0^p \frac{\alpha}{RT}\, dp.$$

Pour l'oxygène, à 0°C, d'après Amagat, on a le tableau suivant:

p (atm)	25	50	100	200	300	400
$\frac{pv}{RT}$	0,980	0,961	0,929	0,916	0,965	1,05
p (atm)	500	600	700	800	900	1000
$\frac{pv}{RT}$	1,16	1,275	1,39	1,51	1,625	1,74

Calculer les valeurs de $\frac{\alpha}{RT}$; construire la courbe $\frac{\alpha}{RT} = f(p)$; évaluer approximativement l'intégrale ci-dessus pour $p = 1000$ atmosphères. Si on pose alors $f = \frac{P}{p}$, quelle est la valeur de f pour $p = 1000$ atm. ? Montrer que f passe par un minimum quand p varie ; quel est ce minimum ?

III. - Dans le cas où le calcul graphique précédent présenterait des difficultés, on peut essayer le procédé suivant. Les valeurs du tableau précédent se représentent assez bien par la formule de Van der Waals $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$, avec $a = 1{,}01 \times 10^6$, $b = 26{,}4$. Trouver l'expression de $\operatorname{Log} P$ en admettant cette formule et calculer les résultats numériques du paragraphe précédent. (*Physique Générale*. Paris 1930).

I. Pour un gaz parfait, l'énergie est $U = JcT$, à une constante près. En fonction de p et de T, on a

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C\,dT + h\,dp}{T}, \quad \text{avec } h = -\frac{T}{J}\frac{\partial v}{\partial T}.$$

D'ailleurs, de l'équation des gaz parfaits $v = \frac{RT}{p}$ on tire $\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}$. Par suite, $dS = \frac{C\,dT}{T} - \frac{R}{J}\frac{dp}{p}$ et $S = C \operatorname{Log} T - \frac{R}{J}\operatorname{Log} p$, à une constante près. On a donc $H = JcT + RT - JTC \operatorname{Log} T + RT \operatorname{Log} p + C^{te}$.

A la température constante de 0° ($T = 273$), quand la pression varie de p_0 à p_1, la variation de la fonction H pour une molécule-gramme est

$$\Delta H = RT_0 (\operatorname{Log} p_1 - \operatorname{Log} p_0) = RT_0 \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0},$$

en spécifiant que R désigne la constante universelle des gaz parfaits. Pour calculer cette constante, nous utilisons le volume moléculaire de 22412 cm³ donné par l'énoncé. On a, dans le système CGS,

$$R = \frac{p_0 v_0}{273} = \frac{1{,}013 \times 10^6 \times 22412}{273}.$$

Par suite $\Delta H = 1{,}013 \times 10^6 \times 22412 \times \operatorname{Log} 1000 = 15633 \times 10^7$.

II. - On a $U + pv - JTS = RT \operatorname{Log} P + C^{te}$.

Différentions, il vient :

(1) $dU + p\,dv + v\,dp - JT\,dS - JS\,dT = R \operatorname{Log} P\,dT + RT\frac{dP}{P}$.

Mais $dU = JdQ - p\,dv$, $JT\,dS = JdQ$. D'autre part, $dT = 0$, puisque d'après l'énoncé la température est constante. Par suite la relation (1) se réduit à $v\,dp = RT\frac{dP}{P}$ ou

(2) $\frac{1}{P}\frac{dP}{dp} = \frac{v}{RT}$, ce qu'il fallait démontrer. Pour un gaz parfait, $\frac{v}{RT} = \frac{1}{p}$. Par suite $\frac{dP}{P} = \frac{dp}{p}$, ce qui montre bien que P coïncide alors avec la pression p.

De l'égalité $\alpha = \frac{RT}{p} - v$, on tire $v = \frac{RT}{p} - \alpha$. En portant cette valeur dans (2), on trouve $\frac{dP}{P} = \frac{dp}{p} - \frac{1}{p}\frac{\alpha\,dp}{RT}$ et, en intégrant,

(3) $\operatorname{Log} P = \operatorname{Log} p - \int_0^p \frac{\alpha}{RT}\,dp$, ce qu'il fallait démontrer.

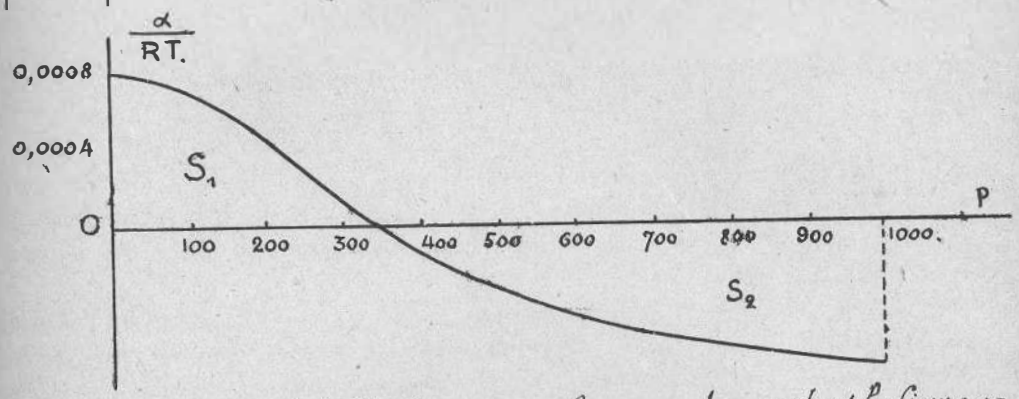
Remarquons qu'il faut bien mettre zéro pour limite inférieure de l'intégrale. En effet, pour $p = 0$, cette intégrale est nulle, ce qui entraîne $P = p$; autrement dit, le gaz peut être considéré

comme parfait. Or on sait précisément que les gaz réels se comportent ainsi pour des pressions évanouissantes.

On a $\frac{\alpha}{RT} = \frac{1}{p} - \frac{v}{RT} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{pv}{RT}\right)$.

Avec le tableau de l'énoncé, nous avons calculé pour les valeurs données de p, les valeurs correspondantes de $\frac{\alpha}{RT}$ et construit la courbe $\frac{\alpha}{RT} = f(p)$.

p	$\frac{\alpha}{RT}$	p	$\frac{\alpha}{RT}$	p	$\frac{\alpha}{RT}$
25	0,0008	300	0,000117	700	- 0,00056
50	0,00078	400	- 0,000125	800	- 0,000G375
100	0,00071	500	- 0,00032	900	- 0,000694
200	0,00042	600	- 0,000458	1000	- 0,00074



Avec une échelle beaucoup plus grande que dans la figure, on trouve que $\frac{\alpha}{RT} = 0$ pour $p = 345$ atm.

Soit A la valeur de l'intégrale ci-dessus pour $p = 1000$ atm. En désignant par S_1 et S_2 respectivement les aires comprises entre l'axe Op et la courbe, l'une au-dessus de Op, l'autre au-dessous, on a $A = S_1 - S_2$. En utilisant par exemple la méthode de Simpson, on trouve $S_1 = 0,16392$, $S_2 = 0,31508$. Par suite, $A = -0,15116$.

Pour $p = 1000$ atm., on a donc $\text{Log } f = 0,15116$, d'où $f = 1,1632$.

La relation (3) montre que f est minimum quand l'intégrale est maximum, c.à.d. quand cette intégrale est égale à S_1. Ce minimum est donc atteint pour $p = 345$ atm. On a alors $\text{Log } f = -0,16392$ et $f = 0,85$.

III – Voyons sous quelle forme se présente l'intégrale I de l'équation (3) quand on utilise la formule de Van der Waals. On a (4) $\frac{\alpha}{RT} = \frac{1}{p} - \frac{v}{RT}$. Comme on tire immédiatement p en fonction de v et qu'il serait impossible d'avoir explicitement v en fonction de p, la première chose à faire est de transformer l'intégrale en p en intégrale en v. Or on a

$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$, $dp = -\frac{RT\,dv}{(v-b)^2} + \frac{2a\,dv}{v^3}$, (5) $\frac{1}{p} = \frac{v^2(v-b)}{RTv^2 - a(v-b)}$

+ 2a dv

A la limite inférieure $p=0$ correspond $v=\infty$. On a donc

$$\int_0^p \frac{\alpha}{RT}\,dp = \int_\infty^v \left(\frac{v^2(v-b)}{RTv^2-a(v-b)} - \frac{v}{RT}\right)\left(\frac{2a}{v^3} - \frac{RT}{(v-b)^2}\right)dv.$$

La fonction sous le signe $\int$ s'écrit

$$\frac{2a(v-b)}{v(RTv^2-av+ab)} - \frac{RTv^2}{(v-b)(RTv^2-av+ab)} - \frac{2a}{RTv^2} + \frac{v}{(v-b)^2}.$$

Remarquons tout d'abord qu'avec les valeurs données pour a et b, il faut exprimer p en atmosphères et le volume moléculaire v en centimètres cubes. On a donc $RT = p_0 v_0 \alpha \times 273 = 22412$ (car il faut faire $p_0 = 1$ avec $T = 273$). On constate alors que le trinôme $RTv^2 - av + ab$ a ses racines imaginaires. La décomposition des fractions rationnelles en éléments simples donne

$$-\frac{2}{v} + \frac{2RTv}{RTv^2-av+ab} - \frac{1}{v-b} - \frac{a}{RTv^2-av+ab} - \frac{2a}{RTv^2} + \frac{v}{(v-b)^2}.$$

En réunissant les deux fractions qui ont pour dénominateur $RTv^2 - av + ab$, on voit que $\int \frac{(2RTv-a)\,dv}{RTv^2-av+ab} = \mathrm{Log}\,(RTv^2-av+ab)$. D'autre part, $\frac{v^2}{(v-b)^2} = \frac{b}{(v-b)^2} + \frac{1}{v-b}$. L'intégrale indéfinie complète est donc $\mathrm{Log}\,\frac{RTv^2-av+ab}{v^2} + \frac{2a}{RTv} - \frac{b}{v-b}$. Nous devons prendre pour limites ∞ et v, de sorte que (6) $J = \mathrm{Log}\,\frac{RTv^2-av+ab}{v^2} + \frac{2a}{RTv} - \frac{b}{v-b} - \mathrm{Log}\,RT$, et la formule demandée est (7) $\mathrm{Log}\,P = \mathrm{Log}\,p - J$.

Pour $p = 1000$ atm., l'équation de Van der Waals donne $v = 40,2$. On trouve alors $\mathrm{Log}\,P - \mathrm{Log}\,p = \mathrm{Log}\,f = 0,1563$, d'où $f = 1,1692$.

La formule (7) montre que f est minimum lorsque J est maximum. Or les valeurs de x qui rendent maxima l'intégrale $y = \int f(x)\,dx$ se trouvent parmi les racines de l'équation $f(x) = 0$, puisque $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Nous sommes donc amenés, pour trouver le maximum de $\int_0^p \frac{\alpha}{RT}\,dp$, à poser $\frac{\alpha}{RT} = 0$, c.à.d. en tenant compte de (4) et de (5), $\frac{v^2(v-b)}{RTv^2-a(v-b)} - \frac{v}{RT} = 0$, d'où l'on tire $v = \frac{ab}{a - RTb} = 63,7$. En portant cette valeur dans (6), on trouve $J = 0,1723$. La valeur minimum de f est telle que $\mathrm{Log}\,f = -0,1723$, d'où $f = 0,84$.

La valeur correspondante de p s'obtient en faisant $v = 63,7$ dans l'équation de Van der Waals, ce qui donne $p = 352$ atmosphères.

On voit que les résultats que donne la méthode analytique par l'emploi de la formule de Van der Waals sont très voisins de ceux obtenus par la méthode graphique.

---

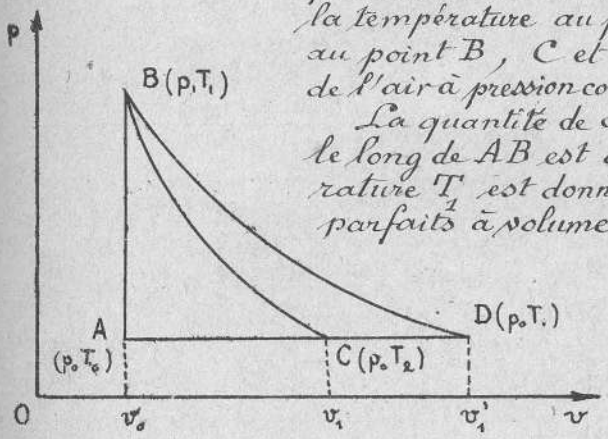
40. — Une masse d'air à la température T (absolue) et à la pression initiale p_0 est portée à volume constant à la pression p_1 supérieure à p_0. Elle est ensuite détendue jusqu'à la pression primitive, puis ramenée à l'état initial à pression constante. On supposera la détente 1° adiabatique, 2° isotherme, et on calculera, dans chacun de ces deux cas, les quantités de travail et de chaleur mises en jeu le long de chaque branche du cycle. Donner les expressions des quantités totales de chaleur et de travail mises en jeu. On appliquera

à la masse de 1 mètre cube pris à 15° centigrades et sous la pression de 1 atmosphère, puis portée à 5 atmosphères. On indiquera les constantes physiques qu'il est nécessaire de connaître.

(Physique Générale. Nancy).

La masse de 1 m^3 d'air à 15° C sous la pression de 1 atmosphère a pour valeur $m = 1000 \times 1,293 \times \frac{273}{273+15} = 1225,6$ g.

1° Supposons d'abord la détente adiabatique. Le cycle est représenté par ABCA. Le long de AB, le travail est nul; puisque le volume reste constant. Soit $T_0 = 15 + 273 = 288$ la température au point A, T_1 la température au point B, C et c les chaleurs spécifiques de l'air à pression constante et à volume constant.



La quantité de chaleur absorbée par le gaz le long de AB est $q_1 = mc(T_1 - T_0)$. La température T_1 est donnée par l'équation des gaz parfaits à volume constant

(1) $T_1 = \frac{p_1}{p_0} \times T_0 = 5 T_0 = 1440°$ abs.

L'énoncé ne donne ni C ni c. Nous prendrons pour l'air, $C = 0,2375$; $\gamma = C:c = 1,40$. On en déduit $c = 0,1696$. Par conséquent,

$q_1 = 1225,6 \times 0,1696 \times 1152 = 239457$ calories.

La température T_2 à la fin de la détente adiabatique, en C, est donnée par la formule (3) du n° 23

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{(\gamma-1):\gamma} = 1440 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{0,4:1,4} = 909° \text{ abs.}$$

D'après la formule (7) du n° 23, le travail $\mathcal{E}_1$ accompli par le gaz dans la détente adiabatique BC est $\mathcal{E}_1 = \frac{p_1 v_0}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right]$.

Pour faire le calcul nous nous rappelons que 1 atmosphère vaut à peu près $\frac{76}{75} \times 10^6$ baryes. Comme la pression p_1 est de 5 atmosphères et que le volume initial est $v_0 = 10^6$ C GS, on a $\mathcal{E}_1 = \frac{5 \times 76 \times 10^{12}}{75 \times 0,4}\left[1 - \frac{909}{1440}\right] = 4,674 \times 10^{12}$ ergs, soit 467.400 joules. Le long de CA, l'air revient de T_2 à T_0 à pression constante p_0. Le travail reçu par le gaz est donc, en désignant par v_1 le volume au point C,

$$\mathcal{E}_2 = p_0 (v_1 - v_0) = p_0 v_0 \left(\frac{v_1}{v_0} - 1\right) = p_0 v_0 \left(\frac{T_2}{T_0} - 1\right),$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{76}{75} \times 10^{12}\left[\frac{909}{288} - 1\right] = 2,1849 \times 10^{12} \text{ ergs soit } 218490 \text{ joules.}$$

Comme le gaz se refroidit à pression constante il abandonne le long de CA la quantité de chaleur

$q_2 = m\,C\,(T_2 - T_0) = 1225.6 \times 0,2375 \times 621 = 180761$ calories.

Le long du cycle entier le gaz a donc absorbé $Q = q_1 - q_2 = 58696$ calories et a effectué un travail $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 248910$ joules

2° Supposons maintenant que la détente soit isotherme. Le

cycle est alors représenté par ABDA. On sait en effet que l'isotherme BD est au-dessus de l'adiabatique BC.

La chaleur q_1 absorbée par le gaz le long de AB est la même que précédemment.

Le long de l'isotherme BD, le gaz doit recevoir du dehors la chaleur équivalente au travail extérieur fourni par lui. Le même calcul nous donnera donc la chaleur et le travail. D'après la formule (1) du n° 24, le travail fourni par la détente est

$$\mathcal{E}'_1 = p_1 v_0 \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0} = 5 \times \frac{76}{75} \times 10^{12} \operatorname{Log} 5 = 8{,}1543 \times 10^{12} \text{ ergs soit } 815430 \text{ joules.}$$

La chaleur absorbée est donc $q' = \frac{815430}{4{,}185} = 194845$ calories.

Le long de DA, le travail reçu par le gaz à pression constante p_0 est, en désignant par v'_1 le volume au point D et en remarquant que l'on a à cause de (1), $\frac{v'_1}{v_0} = \frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1}{p_0} = 5$,

$$\mathcal{E}'_2 = p_0 (v'_1 - v'_0) = p_0 v_0 \left(\frac{v'_0}{v_0} - 1\right) = p_0 v_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right) = 4 p_0 v_0,$$

$$\mathcal{E}'_2 = 4 \times \frac{76}{75} \times 10^{12} = 4{,}0533 \times 10^{12} \text{ ergs soit } 405333 \text{ joules.}$$

Comme le gaz se refroidit à pression constante, il dégage le long de DA la quantité de chaleur

$$q'_2 = mC(T_1 - T_0) = 1225{,}6 \times 0{,}2375 \times 1152 = 335324 \text{ calories.}$$

Le long du cycle entier ABDA le gaz a donc absorbé $Q' = q_1 + q' - q'_2 = 98978$ calories et a effectué un travail

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 - \mathcal{E}'_2 = 410097 \text{ joules.}$$

---

41. — Dix grammes d'air décrivent un cycle de Carnot entre les limites de température de 30 et de 180 degrés centigrades; à la fin de l'échauffement isotherme, l'air a un volume décuple de celui qu'il possédait avant cet échauffement. On demande d'évaluer en kilogrammètres le travail accompli. On assimilera l'air à un gaz parfait. On prendra pour le coefficient de chaleur spécifique sous volume constant de l'air $c = 0{,}16854$ et pour coefficient sous pression constante $C = 0{,}23741$. Il est rappelé que le logarithme népérien de 10 est $\operatorname{Log} 10 = 2{,}30258$.

(Mécanique Physique et Expérimentale Paris).

Soit Q_1 la quantité de chaleur fournie à l'air le long de l'isotherme $T_1 = 180 + 273 = 453°$. Soit Q_0 la quantité de chaleur restituée par l'air le long de l'isotherme $T_0 = 30 + 273 = 303°$. D'après le principe de l'équivalence, le travail accompli $\mathcal{E}$ pendant la transformation représentée par le cycle de Carnot est $\mathcal{E} = J(Q_1 - Q_0)$. Mais on sait que dans le cycle de Carnot, $\frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = \frac{T_1 - T_0}{T_1}$. Par suite (1) $\mathcal{E} = JQ_1 \frac{T_1 - T_0}{T_1}$. Il suffit donc de calculer Q_1. Partons de l'équation (2) $dQ = cdT + ldv$. Puisque l'air est assimilé à un gaz parfait, on sait que $l = (C - c)\frac{p}{v}$. D'autre part, le long de l'isotherme T_1, on a $pv = xT_1$. Par suite (3) $l = (C - c)\frac{T_1}{v}$. Dans l'équation (2), faisons $dT = 0$, puisque nous considérons l'isotherme T_1; remplaçons l par la valeur (3); multiplions par la masse m de l'air,

puisque le coefficient l se rapporte à l'unité de masse et intégrons ; il vient

$$Q_1 = m(C-c)T_1 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = m(C-c)T_1 \operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0},$$

v_0 et v_1 désignant respectivement les volumes spécifiques de l'air au commencement et à la fin de l'échauffement isotherme. D'après l'énoncé on a $\operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0} = \operatorname{Log} 10$. En portant dans (1) cette valeur de Q_1, il vient $\mathcal{E} = Jm(C-c)(T_1 - T_0) \operatorname{Log} 10$.

Employons le système métrique :

$$\mathcal{E} = 426{,}6 \times 0{,}01 \times 0{,}06887 \times 150 \times 2{,}30258 = 101{,}5 \text{ Kgm.}$$

---

42. — Un réservoir ayant une capacité de 200 litres contient de l'air sous une pression de 100 kilogs par centimètre carré. On fait détendre cet air, à température constante, jusqu'à la pression d'un kilog. par centimètre carré dans une machine sans frottements. On demande : a) Quel travail pourra produire cette détente ; b) Pendant combien de temps cette détente pourra alimenter un moteur qui consomme une puissance de 2 chevaux ; c) Quelle quantité de chaleur il faudra fournir à l'air pour maintenir sa température constante pendant la détente. On traitera l'air comme un gaz parfait ; on admet qu'une calorie-kilogramme équivaut à 425 kilogrammètres.

(Physique Générale ; Marseille).

a) D'après la formule (1) du n° 24, le travail produit par la détente isotherme de l'air est $\mathcal{E} = p_0 v_0 \operatorname{Log} \frac{p_0}{p_1} = p_0 v_0 \operatorname{Log} 10$. Utilisons le système métrique. La pression doit être évaluée en Kgs par mètre carré et le volume en mètres cubes. On a donc $p_0 = 100 \times 10^4$, $v_0 = 0{,}2$. En prenant $\operatorname{Log} 10 = 2{,}3026$, on trouve $\mathcal{E} = 460520$ kilogrammètres.

b) Le moteur consomme une puissance de 2 chevaux, c. à d. de 150 kilogrammètres par seconde. La détente précédente pourra donc alimenter ce moteur pendant $\frac{460620}{150} = 3070$ secondes, soit 51 minutes 10 secondes.

c) Pour que la détente soit isotherme, il faut que l'air reçoive du dehors une quantité de chaleur Q équivalente au travail extérieur $\mathcal{E}$ fourni par lui. On a donc

$$Q = \frac{\mathcal{E}}{425} = \frac{460520}{425} = 1084 \text{ calories-Kg.}$$

---

43. — Un gaz parfait se détend réversiblement suivant la loi (1) $pv^\alpha = K$, α et K étant deux constantes positives quelconques. 1° Démontrer que la quantité de chaleur Q, positive ou négative, à fournir au gaz est proportionnelle au travail $\mathcal{E}$ produit. Déterminer le coefficient de proportionnalité $\frac{Q}{\mathcal{E}}$ en fonction des chaleurs spécifiques C et c (sous pression constante et sous volume constant). Condition pour que ce coefficient soit positif. Condition pour qu'il soit égal à $\frac{1}{J}$ (J, équivalent mécanique). 2° En déduire que

les valeurs de γ obtenues dans l'expérience de Clément et Désormes seront systématiquement trop faibles pour deux raisons que l'on précisera, abstraction faite des oscillations et des erreurs accidentelles. 3°) Sachant qu'à 10° sous la pression atmosphérique, la densité de l'anhydride carbonique par rapport à l'oxygène est 1,383, que la valeur de γ est 1,315, on demande quelle valeur au maximum pourra fournir la méthode de Clément et Désormes, les erreurs accidentelles étant supposées compensées (l'oxygène est considéré comme gaz parfait) 4° Exprimer les différentielles dU et dS de l'énergie interne et de l'entropie en fonction de la seule variable v. Conditions pour que soit dU, soit dS soit nulle sans que dv le soit. (*Physique Générale, Paris, Juillet 1914 avec des questions supplémentaires*).

1° Puisqu'il s'agit d'un gaz parfait, nous pouvons utiliser l'une quelconque des formules (5) (6) et (7) du n°3 comme expression de la quantité de chaleur à fournir au gaz dans une transformation élémentaire. Prenons par exemple la formule (2) $dQ = \frac{1}{2R}(C_p\,dv + c\,v\,dp)$. En différentiant (1), on a $v^\alpha\,dp + \alpha v^{\alpha-1} p\,dv = 0$ ou $v\,dp = -\alpha p\,dv$. En portant dans (2), il vient (3) $dQ = \frac{C - c\alpha}{r} p\,dv = \frac{C - c\alpha}{r}\,d\mathcal{T}$, en désignant par $d\mathcal{T}$ le travail produit par le gaz. La quantité de chaleur dQ à fournir au gaz est donc bien proportionnelle au travail produit $d\mathcal{T}$ puisque, d'après l'énoncé, α est constant et que, d'autre part, pour un gaz parfait, C, c et R sont constants. Le coefficient de proportionnalité est évidemment le même entre les quantités finies Q et $\mathcal{T}$ et on a $\frac{dQ}{d\mathcal{T}} = \frac{Q}{\mathcal{T}} = \frac{C - c\alpha}{r}$.

A titre d'exercice de calcul, utilisons la formule (6) du n°3, soit $dQ = c\,dT + \frac{p\,dv}{J}$. On a successivement

$$pv^\alpha = K, \quad pv = rT, \quad T = \frac{K}{r} v^{1-\alpha},$$

$$dT = \frac{K}{r}(1-\alpha)\frac{dv}{v^\alpha} = \frac{1-\alpha}{r} p\,dv, \quad dQ = \frac{c(1-\alpha)}{r} p\,dv + \frac{C-c}{r} p\,dv.$$

On retrouve la formule (3).

Le coefficient de proportionnalité $\frac{C - c\alpha}{r}$ sera positif si $\alpha < \frac{C}{c}$ ou $\alpha < \gamma$. La condition pour qu'il soit égal à $\frac{1}{J}$ donne, à cause de la formule de Mayer $J(C-c) = r$, $\frac{C - c\alpha}{r} = \frac{1}{J} = \frac{C-c}{r}$, d'où $\alpha = 1$. Le gaz se détend suivant une isotherme.

2° Dans l'expérience de Clément et Desormes, la compression n'est pas rigoureusement adiabatique. Le gaz fournit de la chaleur à la paroi. Ainsi dQ et $d\mathcal{T}$ étant négatifs, leur rapport est positif. Donc, d'après ce que nous venons de voir, on a $\alpha < \gamma$.

En second lieu, on a supposé le gaz parfait. En réalité, on a, en adoptant la notation de M. Leduc, $M\,pv = rT\varphi$, la fonction $\varphi(T, p)$ étant généralement inférieure à l'unité, sauf pour quelques gaz tels que l'hydrogène et l'hélium. M. Leduc a établi la formule $\gamma' = \gamma \frac{\varphi}{1 + np^2}$ ou, en négligeant np^2, $\gamma' = \gamma\varphi$.

Le γ' observé est donc inférieur à γ.

3° Si l'anhydride carbonique était supposé parfait comme l'oxygène, sa densité par rapport à l'oxygène serait $\frac{44}{32} = \frac{11}{8} = 1,375$. Cette densité étant, d'après l'énoncé égale à $1,383$, la valeur maximum γ' que pourra fournir la méthode sera $\gamma' = 1,315 \times \frac{1,375}{1,383} = 1,307$.

4° On a $$dU = JdQ - d\mathcal{T} = \left[J\frac{C - c\alpha}{r} - 1 \right] p\,dv.$$

En tenant compte de $r = J(C - c)$ et de (1) on trouve

$$dU = \frac{Kc(1-\alpha)}{C-c} \frac{dv}{v^\alpha}.$$

Pour que dU soit nulle sans que dv le soit, il faut que $\alpha = 1$, c'est à dire que la transformation soit isotherme.

Prenons maintenant la différentielle dS de l'entropie : $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C - c\alpha}{r} \frac{p\,dv}{T} = (C - c\alpha)\frac{dv}{v}$, puisque $pv = rT$. Pour que dS soit nulle sans que dv le soit, il faut que $\alpha = \frac{C}{c} = \gamma$, c.à.d. que la transformation soit adiabatique.

---

44. On constitue une échelle de température θ définie en fonction de la température absolue T par la relation (1) $T = Ke^{m\theta}$. 1° Déterminer les constantes K et m de telle sorte que les points 0° et 100° de la nouvelle échelle coïncident avec les points 0° et 100° de l'échelle centigrade usuelle. 2° Exprimer les coefficients des formules (2) $dQ = a\,d\theta + b\,dv = A\,d\theta + B\,dp$ en fonction des coefficients des formules (3) $dQ = c\,dT + l\,dv = C\,dT + h\,dp$. 3° Écrire sous forme finie les relations adiabatiques relatives aux gaz parfaits, en prenant successivement pour variables indépendantes v et p, puis v et θ. 4° La température s'abaissant adiabatiquement de $\theta = 0$ à $\theta = -100$, dans quel rapport variera le volume d'un gaz parfait pour lequel $\frac{C}{c} = 1,4$? (Physique Générale).

1° Pour $T = 273$, on doit avoir $\theta = 0$, ce qui donne $K = 273$. Pour $T = 373$, on doit avoir $\theta = 100$, ce qui donne

$$373 = 273\,e^{100m}; \quad m = 0,003121.$$

2° La relation (1) montre que si T est constant, il en est de même de θ ; la condition $dT = 0$ entraîne donc $d\theta = 0$ et la comparaison des formules (2) et (3) montre immédiatement que (4) $b = l$, (5) $B = h$.

Pour avoir a et A, différentions la relation (1) $d\mathcal{T} = Kme^{m\theta}d\theta$, $d\theta = \frac{dT}{Kme^{m\theta}}$. On a donc $\frac{a\,dT}{Kme^{m\theta}} + l\,dv = c\,dT + l\,dv$

$$(6) \quad a = Kmce^{m\theta} = 0,852\,ce^{0,003121\theta}.$$

On aurait de même $A = KmCe^{m\theta} = 0,852\,Ce^{0,003121\theta}$.

On voit que (7) $\frac{A}{a} = \frac{C}{c} = \gamma$.

Il ne faut pas être surpris de voir que a et A dépendent de la température, même si c et C n'en dépendent pas (ce qui est le cas des gaz parfaits). C'est qu'en effet T est une fonction exponentielle de θ ; les degrés de la nouvelle échelle des températures n'ont pas la même valeur thermique aux

différents points de l'échelle. On conçoit sans peine que, soit à pression constante, soit à volume constant, il ne faut pas la même quantité de chaleur pour échauffer le corps de un degré.

3° De l'équation (7) on tire immédiatement que la relation adiabatique sous forme finie, relative aux gaz parfaits, quand on prend pour variables indépendantes p et v, est

$$(8) \quad p v^{\frac{A}{a}} = p v^{\frac{C}{c}} = p v^{\gamma} = C^{te}$$

On peut d'ailleurs l'établir directement. En tenant compte des formules (4) et (5), les relations (2) donnent

$$-\frac{aB}{A} dp + b dv = 0, \quad \frac{A}{a} l dv - h dp = 0.$$

Mais nous avons établi au n° 3 que dans le cas des gaz parfaits on avait $l = \frac{p}{J}$, $h = -\frac{v}{J}$. Il vient donc $\frac{A}{a}\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0$ et en intégrant, on tombe sur la relation (8).

Prenons maintenant pour variables indépendantes v et θ. La formule (2) donne, en tenant compte de (4) et (6), $cm K e^{m\theta} d\theta + l dv = 0$. Mais $l = \frac{p}{J} = \frac{rT}{J v} = \frac{C-c}{J v} K e^{m\theta}$. On a donc $m d\theta + (\gamma - 1)\frac{dv}{v} = 0$, $(\gamma - 1) \operatorname{Log} \frac{v}{v_0} = m(\theta_0 - \theta)$.

$$4° \quad \operatorname{Log} \frac{v}{v_0} = \frac{-m(\theta_0 - \theta)}{\gamma - 1} = \frac{0{,}003121 \times 100}{0{,}4} ; \quad \frac{v}{v_0} = 2{,}182.$$

---

45. — On considère deux gaz parfaits dont les capacités calorifiques moléculaires sous volume constant sont c_1 et c_2 et pour lesquels les rapports $\frac{C}{c}$ sont respectivement γ_1 et γ_2. Quelle relation la Thermodynamique fournit-elle entre ces quatre quantités ? On mêle les deux gaz dans la proportion de α volumes moléculaires du premier et $1-\alpha$ volumes moléculaires du second mesurés à la même température et à la même pression. Soient p et v la pression et le volume d'une certaine molécule-gramme mixte de ce mélange. (L'ensemble forme une molécule, c.à.d. qu'il y a la fraction α d'une molécule et la fraction $1-\alpha$ de l'autre molécule). On demande : 1° d'établir la relation adiabatique entre p et v. (démonstration exigée) ; 2° de calculer le travail produit par la détente adiabatique de cette masse gazeuse à partir de l'état initial p_0, v_0, jusqu'à la pression p_1. — Application numérique : $p_0 = 1$ mégadyne par centimètre carré ; $\frac{p_0}{p_1} = 2$; $\gamma_1 = \frac{5}{3}$; $\gamma_2 = 1{,}29$; $\alpha = \frac{3}{5}$.

3° Condition pour que, quelque soit α, le travail de la détente adiabatique correspondant à la variation de pression dp soit égal à la somme des travaux de la détente adiabatique des gaz séparés pris à la même température et sous la même pression que le mélange et subissant la même variation de pression dp. Si cette condition n'est pas remplie, qu'arrivera-t-il si, après avoir détendu adiabatiquement les deux gaz séparés, on les mélange ? (Physique Générale, Paris).

Nous avons établi au n° 3 que la différence des capacités calorifiques moléculaires sous pression constante et sous volume

constant d'un gaz parfait était constante et égale au quotient des deux constantes universelles R et J. On a donc pour les deux gaz parfaits considérés,

$$\frac{R}{J} = C_1 - c_1 = C_2 - c_2 \,, \quad c_1(\gamma_1 - 1) = c_2(\gamma_2 - 1).$$

Telle est la relation demandée.

1° Le volume v du mélange est égal au volume moléculaire puisque $\alpha + (1-\alpha) = 1$. Appelons C et c les capacités calorifiques moléculaires du mélange, lequel est évidemment un gaz parfait.

La quantité élémentaire de chaleur mise en jeu est $dQ = c\,dT + l\,dv$. Mais de $pv = RT$, on tire $dT = \frac{v\,dp + p\,dv}{R}$ et comme, dans les gaz parfaits, on a $l = \frac{p}{J}$ et $C - c = \frac{R}{J}$, on a $dQ = \frac{1}{R}(C\,p\,dv + c\,v\,dp)$. Si la transformation est adiabatique, on a

$$\frac{dp}{p} + \frac{C}{c}\frac{dv}{v} = 0, \quad pv^\gamma = C^{te} = p_0 v_0^\gamma.$$

Le rapport $\gamma = \frac{C}{c}$ relatif au mélange est donné par la formule (4) du n°4. On y fait $f_1 = \alpha$ et $f_2 = 1-\alpha$, puisque α et $1-\alpha$ représentent respectivement les fractions de volume moléculaire du premier et du second gaz qui entrent dans le mélange :

$$(1) \qquad \gamma = \frac{\alpha\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} + (1-\alpha)\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}}{\frac{\alpha}{\gamma_1 - 1} - \frac{1-\alpha}{\gamma_2 - 1}} = \frac{\alpha(\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_2(\gamma_1 - 1)}{\alpha(\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_1 - 1}$$

$$\gamma = \frac{\frac{3}{5}\left(1{,}29 - \frac{5}{3}\right) + 1{,}29 \times \frac{2}{3}}{\frac{3}{5}\left(1{,}29 - \frac{5}{3}\right) + \frac{2}{3}} = 1{,}44.$$

2° Le travail de détente adiabatique fourni par un gaz parfait dans une transformation élémentaire est $d\mathcal{E} = p\,dv$, avec la condition $pv^\gamma = C^{te}$. En différentiant cette dernière relation il vient

$$\gamma p v^{\gamma-1} dv + v^\gamma dp = v^\gamma dp = 0, \quad dv = -\frac{v\,dp}{\gamma p}, \quad d\mathcal{E} = -\frac{v\,dp}{\gamma}.$$

Dans cette formule, v représente $\frac{V}{p}$, le volume total du gaz sur lequel on opère. Dans le cas du mélange, nous opérons sur le volume moléculaire V, puisque nous traitons une molécule. On a donc $d\mathcal{E} = -\frac{V\,dp}{\gamma}$.

Détendons séparément les deux gaz ; comme on a α molécules du premier et $1-\alpha$ molécules du second, les volumes de gaz sur lesquels on opère sont respectivement αV et $(1-\alpha)V$. On a donc

$$d\mathcal{E}_1 = -\frac{\alpha V\,dp}{\gamma_1}, \quad d\mathcal{E}_2 = -\frac{(1-\alpha)V\,dp}{\gamma_2}.$$

On veut avoir identiquement, quel que soit α,

$$\frac{V\,dp}{\gamma} \equiv \frac{\alpha V\,dp}{\gamma_1} + \frac{(1-\alpha)V\,dp}{\gamma_2}, \quad \frac{1}{\gamma} \equiv \frac{\alpha}{\gamma_1} + \frac{1-\alpha}{\gamma_2},$$

$$\gamma(\gamma_2 - \gamma_1)\alpha + \gamma_1(\gamma - \gamma_2) \equiv 0.$$

Il faut évidemment que l'on ait d'abord $\gamma_1 = \gamma_2$.

Il en résulte alors que γ est égal à cette valeur commune.

On le vérifie d'ailleurs avec la formule (1).

Si cette condition est remplie, les deux gaz séparés détendus adiabatiquement subissent le même abaissement de température. On sait en effet (n° 23) que l'on a

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1}.$$

Pour les mêmes valeurs de p_1, p_0 et T_0, la température finale T_1 ne dépend que de γ.

Si la condition $\gamma_1 = \gamma_2$ n'est pas remplie, les deux abaissements de température sont différents et si on mélange les deux gaz, l'un se refroidit et l'autre se réchauffe.

---

46. – Une masse de gaz, contenue dans un réservoir à la pression constante p_1 et à la température T_1, passe, sans prendre de vitesse et sans échanger de chaleur avec l'extérieur, dans un autre réservoir à la pression constante p_2. On demande: 1° l'expression de la variation de l'énergie interne de la masse de gaz dans cette transformation; 2° la relation différentielle entre les variations de pression et de température; 3° sachant que le gaz obéit à la loi de Clausius (1) $p = \frac{RT}{v-\varphi} - \frac{a}{T(v+b)^2}$, on demande la variation de température pour une variation donnée de pression et la valeur de la température pour laquelle la variation de température sera nulle.

Application numérique: Pour l'anhydride carbonique, dont la masse spécifique à 0° et sous la pression normale est 1,977, 10^{-3} gramme on a, en C.G.S, $R = 1,876 \times 10^6$, $\varphi = 0,44$; $b = 0,48$; $a = 5,42 \times 10^{11}$. On prend $C = 0,194$; $\frac{C}{c} = 1,29$.

$p_1 = 2$ atmosphères, $p_2 = 1$ atmosphère, $T_1 = 300$.

On calculera T_2. (Physique Générale. Nancy).

1° La variation d'énergie interne d'un fluide a pour expression générale $\Delta U = J\Delta Q + \Delta \mathcal{E}$, ΔQ étant la chaleur reçue de l'extérieur et $\Delta \mathcal{E}$ étant le travail effectué par les forces extérieures sur le fluide. Dans le cas actuel $\Delta Q = 0$, par hypothèse. Le travail de la pression p_1 est positif et égal à $p_1 v_1$; le travail de la pression p_2 est négatif et égal à $-p_2 v_2$. On a donc (2) $U_2 - U_1 = p_1 v_1 - p_2 v_2$.

2° De l'équation (2) on tire

$$U_1 + p_1 v_1 = U_2 + p_2 v_2, \text{ c'est à dire } U + pv = \text{Cte}$$

Différentions cette dernière relation, il vient

(3) $dU + p\,dv + v\,dp = 0$. Mais on sait que

$$dU = J\,dQ - p\,dv = J(C\,dT + h\,dp) - p\,dv.$$

En substituant dans (3) et en tenant compte de la formule de Clapeyron $h = -\frac{T}{J}\frac{dv}{dT}$, il vient

(4) $JC\,dT = \left(T\frac{dv}{dT} - v\right)dp$.

Telle est la relation différentielle cherchée entre les variations de pression et de température.

3° Remarquons d'abord que si le gaz était un gaz parfait

c'est à dire si on avait $pv = RT$, on aurait $T\frac{\partial v}{\partial T} - v = 0$ et par conséquent $dT = 0$. La température restant constante, on aurait $p_1 v_1 = p_2 v_2$ et par suite $U_2 - U_1 = 0$. On retrouve un résultat bien connu, à savoir que l'énergie interne d'un gaz parfait, à une même température, est constante; elle ne dépend pas de son volume, ni par conséquent de sa pression, elle ne dépend que de la température. Si donc le gaz n'est pas parfait, ce n'est pas U qui est constant, c'est la fonction $U + pv$, comme le montre l'équation (2); c'est ce qui ressort de l'expérience classique de Lord Kelvin et de Joule.

Supposons maintenant que le gaz obéisse à la loi de Clausius, représentée par la relation (1). Pour calculer la dérivée $\frac{\partial v}{\partial T}$, nous supposons la relation (1) mise sous la forme $f(p, vT) = 0$, et nous appliquons la règle de dérivation des fonctions implicites

$$\frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial T} = 0, \qquad \frac{R}{v-\varphi} + \frac{a}{T^2(v+b)^2} + \left[-\frac{RT}{(v-\varphi)^2} + \frac{2a}{T(v+b)^3}\right] \times \frac{\partial v}{\partial T} = 0,$$

d'où

$$T\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{RT^2(v+b)^2 + a(v-\varphi)}{RT^2(v+b)^3 - 2a(v-\varphi)^2}(v-\varphi)(v+b).$$

En portant cette valeur dans (4), il vient, en remplaçant les différentielles par des variations finies

$$(5) \qquad \Delta T = \frac{a(v-\varphi)^2(3v+b) - RT^2\varphi(v+b)^3}{RT^2(v+b)^3 - 2a(v-\varphi)^2} \times \frac{\Delta p}{JC}.$$

Telle est la variation de température pour une variation donnée de la pression.

Cette variation de température est nulle pour la valeur de T qui annule le numérateur ce qui donne $T^2 = \frac{a(v-\varphi)^2(3v+b)}{R\varphi(v+b)^3}$. Comme b et φ sont petits vis à vis de v, on a sensiblement $T^2 = \frac{3a}{R\varphi} = \frac{3 \times 5{,}42 \times 10^{11}}{1{,}876 \times 10^6 \times 0{,}44}$; $T = 1403°$ absolus.

Application numérique sur la formule (5) — La variation Δp est négative et égale à une atmosphère, soit, en C.G.S.,

$$\Delta p = -1{,}013 \times 10^6 \text{ barves}.$$

En désignant par v_0 le volume spécifique de l'anhydride carbonique à la température de 0° centigrade et à la pression de 1 atmosphère, le volume spécifique v à la pression $p_1 = 2$ atmosphères et à la température $T_1 = 300$ est

$$v = v_0 \frac{p_0}{p_1} \times \frac{300}{273} = \frac{1000}{1{,}977} \times \frac{1}{2} \times \frac{300}{273} = 277{,}92;$$

$$v - \varphi = 277{,}48; \quad v + b = 278{,}40; \quad 3v + b = 834{,}24.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (5) on trouve $\Delta T = -1°{,}16$ et par suite $T_2 = T_1 - 1°{,}16 = 298°{,}84$.

On pourrait objecter que la différence de pression Δp de 1 atmosphère étant relativement grande, le volume spécifique v varie considérablement quand p passe de 2 à 1 atmosphère et que par conséquent le calcul précédent est entaché d'une erreur puisqu'on a pris pour v la valeur correspondant à 2 atmosphères. Pour voir s'il en est réellement ainsi partageons

l'intervalle Δp en deux autres égaux à $\frac{1}{2}$ atmosphère. Le premier intervalle donne un ΔT qui est évidemment égal à la moitié du précédent, soit $-0°,58$. Pour le second intervalle, nous partons de la température $T = 300 - 0,58 = 299°,42$ et de la nouvelle pression de $\frac{3}{2}$ atmosphères. Le nouveau volume spécifique est

$$v = \frac{1000}{1,977} \times \frac{2}{3} \times \frac{299,42}{273} = 369,84,$$

$$v - \varphi = 369,40 \; ; \quad v + b = 370,32 \; , \quad 3v + b = 1110.$$

En portant ces valeurs dans (5) on trouve $\Delta T = -0°,58$, c. à. d. que au total, l'abaissement de température est identique à celui que nous avons trouvé plus haut. Notre façon d'opérer était donc légitime, et cela d'autant plus que la variation de température trouvée est précisément celle qui a été constatée dans l'expérience historique de Lord Kelvin et Joule.

---

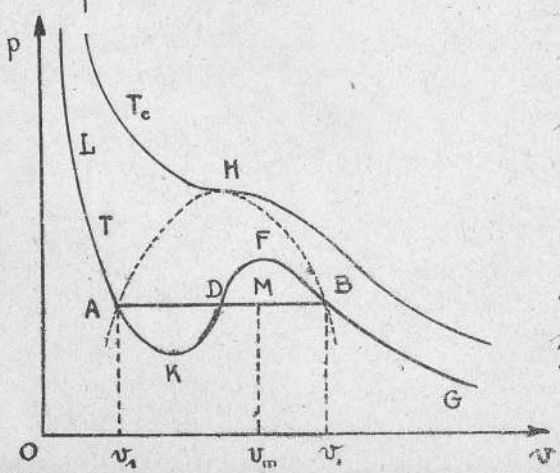
47. – Un fluide réel que l'on suppose satisfaire rigoureusement et dans toute l'échelle des températures et des pressions à l'équation de Van der Waals

$$(1) \quad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = rT,$$

a pour constantes critiques : $T_c = 400°$ absolus; v_c (volume spécifique) $= 4\ cm^3$; $p_c = 60$ atmosphères.

1° Déterminer les constantes a, b et r de l'équation (1), rapportées au volume spécifique v. 2° – Dire ce que devient à la limite l'équation (1) pour les faibles pressions et en déduire la masse moléculaire du fluide considéré. 3°) Etant donné le tableau des valeurs simultanées d_1 et d_2 de la densité du liquide sous la pression saturante et de sa vapeur saturée, quel calcul permettrait d'obtenir la courbe $F = \varphi(T)$ des tensions maxima de vapeur en fonction de la température? 4° Quel serait en kilogrammètres le travail nécessaire à la liquéfaction partielle de 100 grammes de vapeur saturée, poursuivie par compression isothermique jusqu'à obtention de 40 grammes de liquide? On donne : $d_1 = 0,56$; $d_2 = 0,04$ à la température de l'expérience. Quelle est cette température?

(Physique Générale, Paris).



1° Au point critique H, l'isotherme correspondante a un point d'inflexion à tangente horizontale. On a donc à la fois

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0 \; , \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0.$$

En y joignant l'équation (1), on aura trois relations qui permettent de déterminer les constantes a, b et r, si on connaît T_c, v_c et p_c. On a

$$(2) \quad p = \frac{rT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \; !$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{rT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = \frac{a}{(v-b)^2}\left[\frac{2(v-b)^2}{v^3} - \frac{rT}{a}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 2\left[\frac{rT}{(v-b)^3} - \frac{3a}{v^4}\right] = -\frac{2a}{(v-b)^3}\left[\frac{3(v-b)^3}{v^4} - \frac{rT}{a}\right] = 0.$$

Les deux dernières équations peuvent s'écrire

$$(3)\quad \frac{2(v-b)^2}{v^3} = \frac{rT}{a}, \quad (4)\quad \frac{3(v-b)^3}{v^4} = \frac{rT}{a}.$$

En divisant (3) et (4) membre à membre, on a immédiatement $v_c = 3b$. En portant cette valeur dans (3) il vient $T_c = \frac{8a}{27br}$. Enfin l'équation (2) donne $p_c = \frac{a}{27b^2}$.

Réciproquement, on a

$$b = \frac{v_c}{3}, \quad a = 3p_c v_c^2, \quad (5)\quad r = \frac{8}{3}\frac{p_c v_c}{T_c}.$$

En substituant les valeurs de l'énoncé, on trouve

$$a = 2880, \quad b = 4, \quad r = 1,6.$$

2° Si la pression devient faible, v devient très grand; $\frac{a}{v^2}$ est négligeable vis à vis de p et b est négligeable vis à vis de v. Nous tombons sur l'équation des gaz parfaits $pv = rT$.

Calculons la masse moléculaire M du fluide. La relation (5) montre que si l'on exprimait la pression p_c en unités CGS, c.à.d. en baryes et non en atmosphères, on aurait $r = 1,6 \times 1,013 \times 10^6$. Comme la constante universelle des gaz parfaits est $R = 8,316 \times 10^7$, la masse moléculaire du fluide est $M = \frac{R}{r} = 51$.

3° Nous avons figuré en LABG l'isotherme véritable, expérimentale, correspondant à une température quelconque T. Nous savons qu'elle contient une portion de droite horizontale AB le long de laquelle il y a mélange du liquide et de la vapeur saturée. Nous cherchons la relation entre T et la pression maxima p mesurée par l'ordonnée de AB.

Dans la courbe de Van der Waals qui correspond à la même température T, la portion rectiligne AB est à la vérité remplacée par la courbe AKDFB, mais cette courbe passe néanmoins par les points A et B qui ont une ordonnée commune égale à p et pour abscisses respectives $v = \frac{1}{d_1}$ et $v = \frac{1}{d_2}$. Écrivons que ces points sont sur la courbe (1); il vient

$$(5)\ \left(p + a d_1^2\right)\left(\frac{1}{d_1} - b\right) = rT, \quad (6)\ \left(p + a d_2^2\right)\left(\frac{1}{d_2} - b\right) = rT.$$

De ces deux équations on tirera p et T. On aura ainsi autant de valeurs simultanées de p et de T qu'on se donnera de couples de valeurs de d_1 et de d_2, ce qui permettra de construire la courbe $p = \varphi(T)$.

4° Faisons $d_1 = 0,56$ et $d_2 = 0,04$ dans les équations (5) et (6), on a:

$$\left(p + 2880 \times \overline{0,56}^2\right)\left(\frac{1}{0,56} - \frac{4}{3}\right) = 1,6T,$$

$$\left(p + 2880 \times \overline{0,04}^2\right)\left(\frac{1}{0,04} - \frac{4}{3}\right) = 1,6T.$$

On tire: $p = 12,9$ atmosphères; $T = 259°$ absolus.

Quand on liquéfie partiellement 100 grammes de vapeur saturée, le point figuratif se déplace, sur la droite BA, de B

jusqu'à un certain point M. Soit V_2 le volume correspondant au point B, V_M le volume correspondant au point M. Le travail à effectuer est

$$\mathcal{E} = p\,(V_2 - V_M).$$

Les densités étant données par rapport à l'eau, on a

$$V_2 = \frac{100}{0,04} = 2500\ cm^3, \qquad V_M = \frac{60}{0,04} + \frac{40}{0,56} = 1571\ cm^3.$$

D'où $$\mathcal{E} = \frac{12,9 \times 76 \times 13,6 \times 981 \times 929}{981 \times 10^5} = 123,87 \text{ Kilogrammètres.}$$

---

48. — On demande de calculer le travail $\mathcal{E}$ qu'il faut dépenser pour exécuter la compression isothermique d'une molécule-gramme d'un gaz de la pression $p_1 = 5 \times 10^6$ C G S à la pression $p_2 = 5 \times 10^6$ C G S. On admettra que dans cet intervalle, la fonction $Mpv = RT\varphi(T,p)$ peut s'écrire avec (1) $\varphi(T,p) = 1 - mp - np^2$. 2° Calculer numériquement l'erreur relative commise sur l'évaluation du travail si on applique la loi des gaz parfaits. Dire ce que deviendrait cette erreur s'il s'agissait d'un autre gaz ayant même température critique et une pression critique double, en admettant que les deux gaz satisfassent au principe des états correspondants. 3° Calculer la quantité de chaleur, en calories, qu'il faut enlever au gaz pour maintenir la température constante pendant la compression n° 1. 4° Calculer le coefficient moyen d'écart à la loi de Mariotte de ce gaz, à la température T et par atmosphère entre les limites de pression précédentes. Rapprocher les résultats de ceux obtenus aux n°s 1 et 2.

Application numérique. — T (température absolue) = 300°; $R = 8319 \times 10^4$ C.G.S. Quand on évalue les pressions en centimètres de mercure, les coefficients de la formule (1) ont pour valeurs : $m = 2 \times 10^{-4}$; $n = 2 \times 10^{-8}$. On donne $\log e = 0,4343$; équivalent mécanique de la petite calorie $J = 4,185$ joules.

(Proposé à la Sorbonne. Physique Générale).

Dans la formule (2) $Mpv = RT(1 - mp - np^2)$, R désigne la constante universelle, v est le volume de l'unité de masse, M est la masse moléculaire. En remarquant que, dans le cas d'une compression, dv est négatif, le travail $\mathcal{E}$ correspondant à la compression d'une molécule-gramme est $\mathcal{E} = -\int M p\,dv$.

En différentiant l'équation (2), on a, à température constante,

$$M(p\,dv + v\,dp) = -RT(m + 2np)\,dp,$$
$$-Mp\,dv = RT(m + 2np)\,dp + Mv\,dp,$$
$$-Mp\,dv = RT(m + 2np)\,dp + \frac{RT}{p}(1 - mp - np^2)\,dp,$$
$$-Mp\,dv = RT\left(\frac{1}{p} + np\right)dp. \text{ Par suite}$$

$$\mathcal{E} = RT\int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{1}{p} + np\right)dp = RT\left[\operatorname{Log}\frac{p_2}{p_1} + \frac{n}{2}\left(p_2^2 - p_1^2\right)\right].$$

Avant d'effectuer le calcul, nous devons transformer les pressions données en centimètres de mercure, puisque les valeurs des coefficients m et n supposent les pressions évaluées de cette façon. On sait que la pression de 10^6 CGS équivaut très sensiblement à 75 cm. de mercure. Par suite $p_1 = 37,5$, $p_2 = 375$. D'ailleurs

$\text{Log}\,\frac{p_2}{p_1} = \text{Log}\,10 = \frac{1}{\log e} = \frac{1}{0{,}4343} = 2{,}3026$. On a donc

$$\mathcal{E} = 8319 \times 10^4 \times 300 \left[2{,}3026 + 10^{-8}\left(p_2^2 - p_1^2\right)\right].$$

Comme p_1^2 est 100 fois plus petit que p_2^2, on le néglige et on trouve

$\mathcal{E} = 5750 \times 10^7$ ergs, soit $\frac{5750}{9{,}81} = 586$ Kilogrammètres.

2° Si on appliquait la loi des gaz parfaits, le travail serait $\mathcal{E}' = RT\,\text{Log}\frac{p_2}{p_1}$. L'erreur relative serait donc égale à $\frac{n}{2}\left(p_2^2 - p_1^2\right) : \text{Log}\,10$, soit approximativement 6×10^{-4}

C'est une erreur extrêmement faible et très inférieure au coefficient moyen d'écart du gaz considéré par rapport à la loi de Mariotte. Nous allons voir en effet, au 4°, que la diminution supplémentaire de volume est de l'ordre de 7%, alors que l'erreur sur le travail n'est guère supérieure à un demi-millième. Ceci nous montre que dans l'industrie, même pour un gaz comme l'acide sulfureux qui s'écarte très notablement de la loi de Mariotte, un ingénieur pourra évaluer le travail de compression comme s'il s'agissait d'un gaz parfait.

On peut expliquer ce résultat en réfléchissant sur les idées qui ont guidé les physiciens dans l'établissement des formules relatives aux gaz réels, celle de Van der Waals, par exemple, $\left(p + \frac{b}{v^2}\right)(v - a) = RT$. Lorsqu'on comprime un gaz, c'est seulement l'espace vide entre les molécules qui diminue. Si donc a désigne la somme des volumes des molécules formant l'unité de masse, c'est à $(v - a)$ que pourrait s'appliquer la loi de Mariotte. Mais alors il faut pouvoir compenser la diminution du facteur v par une augmentation du facteur p, ce qui amène à écrire $p + \frac{b}{v^2}$. Le terme supplémentaire $\frac{b}{v^2}$, appelé quelquefois pression intérieure, est considéré comme résultant de l'attraction mutuelle des molécules. Cette attraction aide donc l'opérateur dans le travail de la compression et c'est ce qui explique pourquoi l'opérateur n'a à fournir qu'un supplément de travail insignifiant, malgré la diminution importante supplémentaire de 7% du volume.

Pour voir ce que deviendrait l'erreur s'il s'agissait d'un autre gaz ayant même température critique et une pression critique double, il suffit de transformer la relation (1) en introduisant les coordonnées réduites, ce qui donne

$$\varphi(\mathcal{E}, P) = 1 - m p_c \times P - n p_c^2 \times P^2.$$

Les deux gaz satisfaisant par hypothèse à la loi des états correspondants, on voit que si la pression critique est double, le coefficient n relatif au second gaz est égal au quart du même coefficient relatif au premier gaz. L'erreur commise est donc quatre fois plus faible.

3° Puisque la compression doit être isotherme, il faut enlever au gaz, pour maintenir sa température constante, la quantité de chaleur équivalente à 586 Kilogrammètres (travail de compression), soit $\frac{586 \times 9{,}81}{4.185} = 1373$ petites calories.

4° Le coefficient d'écart à la loi de Mariotte a pour expression rigoureuse $\frac{1}{pv}\frac{\partial(pv)}{\partial p}$. Comme coefficient moyen, nous prendrons, selon l'usage, $A\,\frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{p_1 v_1 (p_2 - p_1)}$, ce qui donne, dans le cas actuel,

$$A = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 (p_2 - p_1)} = -\frac{m + n(p_1 + p_2)}{1 - m p_1 - n p_1^2},$$

$$A = -\frac{2\times10^{-4} + 2\times10^{-8}(37{,}5 + 375)}{1 - 2\times10^{-4}\times37{,}5 - 2\times10^{-8}\times1406} = -2{,}1\times10^{-4} \text{ environ},$$

par centimètre de mercure, soit -16×10^{-3} par atmosphère. Comme dans le cas actuel, $p_2 - p_1$ est très sensiblement égal à 4,5 atmosphères, on voit que la diminution supplémentaire de volume par rapport à la loi de Mariotte est de l'ordre de 7%, ce qui est considérable.

49.– Évaluer le travail minimum qu'il faut effectuer pour réduire au dixième de sa valeur initiale le volume d'un kilogramme d'acide carbonique pris à zéro degré centigrade et à la pression initiale de 76 cm. de mercure. On suppose que ce gaz obéit à la formule de Van der Waals et que la compression est isothermique. On donne les constantes critiques suivantes : $T_c = 273 + 31{,}3$; $p_c = 74\times10^6$; $D_c = 0{,}464$. Comparer les résultats obtenus avec ceux qui découleraient de la loi de Mariotte. (Proposé à la Sorbonne. Physique Générale.)

De l'équation de Van der Waals $\left(p + \frac{b}{v^2}\right)(v - a) = \varkappa T$ on tire $p = \frac{\varkappa T}{v - a} - \frac{b}{v^2}$. La valeur absolue du travail qu'il faut effectuer pour comprimer le gaz du volume initial v_1 au volume final v_2 est

$$(1)\qquad \mathcal{C} = \int_{v_2}^{v_1} p\,dv = \varkappa T \operatorname{Log}\frac{v_1 - a}{v_2 - a} + \frac{b}{v_1}\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right).$$

Nous exprimons les quantités $\varkappa$, a et b en fonction des constantes critiques à l'aide des formules établies au n°47 et en tenant compte du changement de notation,

$$a = \frac{v_c}{3},\quad b = 3 p_c v_c^2,\quad \varkappa = \frac{8}{3}\,\frac{p_c v_c}{T_c}.$$

Raisonnons sur un gramme d'acide carbonique. On a

$$v_c = \frac{1}{D_c} = \frac{1}{0{,}464},\quad \text{d'où}\quad a = \frac{1}{3\times0{,}464} = 0{,}718;$$

$$b = \frac{3\times74\times10^6}{(0{,}464)^2} = 1{,}031\times10^9 \text{ CGS};\quad \varkappa = \frac{8}{3}\cdot\frac{74\times10^6}{0{,}464}\times\frac{1}{304{,}3} = 1{,}398\times10^6.$$

La densité de l'acide carbonique étant égale à 1,529, on a, en unités CGS, $\frac{1}{v_1} = 0{,}0012\,93\times1{,}529$; $v_1 = 506$, $v_2 = \frac{v_1}{10} = 50{,}6$.

En portant ces valeurs dans l'expression (1) il vient

$$\mathcal{C} = \frac{1{,}398\times10^6\times273}{0{,}4343}\log_{10}\frac{506 - 0{,}718}{50{,}6 - 0{,}718} - \frac{9\times1{,}031\times10^9}{506},$$

$$\mathcal{C} = 883{,}97\times10^6 - 18{,}3\times10^6 = 0{,}866\times10^9 \text{ ergs}.$$

Pour un kilog de gaz carbonique, le travail est 866×10^3 ergs soit 8827 kilogrammètres.

Si on appliquait la loi de Mariotte (loi des gaz parfaits),

$pv = rT$, le travail serait $\mathcal{T} = rT \int_{v_2}^{v_1} \frac{dv}{v} = rT \operatorname{Log} \frac{v_1}{v_2}$.

Il faut bien se garder de prendre pour r la valeur déterminée précédemment qui n'est valable que pour la formule de Van der Waals. D'autre part, comme l'acide carbonique n'est pas un gaz parfait, on ne peut pas adopter le quotient $\frac{R}{M}$ de la constante universelle par le poids moléculaire. On prend $rT = p_o v_o$, avec $p_o = 76 \times 981 \times 13{,}6 = 1{,}013 \times 10^6$, $v_o = v_1 = 506$, $\mathcal{T} = \frac{1{,}013 \times 10^6 \times 506}{0{,}4343} = 1{,}180 \times 10^9$ ergs. Pour un kilogramme de gaz, le travail serait 1180×10^9 ergs, soit 12028 kilogrammètres. Ce chiffre est très supérieur à celui trouvé précédemment. D'après ce que nous avons vu au n° 48, cela tient à la pression intérieure $\frac{b}{v^2}$ qui aide l'opérateur dans la compression.

---

50. On admet pour constantes critiques de CO^2 : 31°3 et 73 atmosphères, et pour celles de l'eau : 365° et 200 atmosphères. Admettant en outre que ces deux corps obéissent à la loi des états correspondants, on calculera la température d'ébullition de CO^2 sous la pression normale, sachant qu'à 131° la pression maxima de la vapeur d'eau est mesurée par 208 cm. de mercure.

(Physique Générale. Paris).

On sait qu'on appelle température réduite, pression réduite, volume réduit, les rapports $\frac{T}{T_c}$, $\frac{p}{p_c}$, $\frac{v}{v_c}$ de la température réelle, de la pression réelle, du volume réel aux mêmes variables dans l'état critique. (On prend les températures absolues).

Si on porte deux fluides à des températures absolues T et T' telles que l'on ait (1) $\frac{T}{T_c} = \frac{T'}{T'_c}$ les températures T et T' sont dites <u>correspondantes</u>

Même définition pour les pressions. Si on a (2) $\frac{p}{p_c} = \frac{p'}{p'_c}$, les pressions p et p' sont dites <u>correspondantes</u>. De même pour les volumes.

La loi des états correspondants qui s'applique à notre problème est la suivante : Pour une même température réduite, les deux fluides, eau et acide carbonique, ont la même pression maxima réduite.

La pression maxima p' de la vapeur d'eau, <u>correspondante</u> de la pression normale de CO^2, est donnée par la relation (2) $\frac{p'}{200} = \frac{1}{73}$, $p' = \frac{200}{73}$ atmosphères, $p' = \frac{200}{73} \times 76 = 208$ cm. de mercure. Or la 73e pression maxima de la vapeur d'eau est précisément, d'après l'énoncé, mesurée par 208 centimètres de mercure, à la température de 131° centigrades. Il en résulte que la température d'ébullition T' de CO^2 sous la pression de 1 atmosphère sera la température <u>correspondante</u> de la température de 131° centigrades de la vapeur d'eau. Autrement dit, en appliquant l'équation (1) on a $\frac{T'}{273 + 31{,}5} = \frac{273 + 131}{273 + 365}$. On trouve $T' = 192°{,}7$ absolus, soit $-80°3$ centigrades. Or nous lisons dans les Traités de Chimie que

l'anhydride carbonique bout à $-79°$ sous la pression atmosphérique. On voit que l'approximation donnée par le calcul est très convenable.

---

51 – Sachant que la pression interne $\Pi - p$ d'un gaz est représentée par $(K : v^2) \times a^{\frac{1}{T}}$, on demande d'écrire l'équation d'état sous la forme $p = f(T, v)$.

On admettra que la pression p ne peut devenir infinie lorsque la température T augmente indéfiniment, v restant constant.

(Physique générale. Proposé à la Sorbonne).

On a $\Pi - p = (K : v^2) \times a^{\frac{1}{T}}$. En tenant compte de la formule de Clapeyron, $l = \frac{T}{J} \frac{\partial p}{\partial T}$, il vient (1) $T \frac{dp}{dT} - p = (K : v^2) \times a^{\frac{1}{T}}$. (Nous employons d droits au lieu de celle des ∂ ronds, mais nous n'oublions pas que p est fonction des deux variables indépendantes T et v).

Prenons d'abord l'équation sans second membre $T \frac{dp}{dT} - p = 0$, $\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T}$. Son intégrale est $p = AT$, où A est une fonction de v.

Employant la méthode de la variation des constantes, nous pouvons admettre que $p = AT$ est encore l'intégrale de l'équation complète (1) à la condition que A soit non plus une simple fonction de v, mais une fonction de v et de T.

Dans cette hypothèse, on a $\frac{dp}{dT} = A + T \frac{dA}{dT}$. En portant dans (1) il vient

$$T^2 \frac{dA}{dT} = \frac{K}{v^2} a^{1:T}, \quad A = \frac{K}{v^2} \int \frac{1}{T^2} a^{1:T} dT,$$

$$A = \frac{K}{v^2} \left[-\frac{1}{\text{Log}\, a} a^{1:T} + \frac{C}{\text{Log}\, a} \right],$$

en donnant à la constante d'intégration la forme particulière $\frac{C}{\text{Log}\, a}$ (le symbole Log désigne les logarithmes népériens). On a donc

$$p = \frac{KT}{v^2 \text{Log}\, a} \left[C - a^{1:T} \right].$$

On veut que, v restant constant, la pression p ne devienne pas infinie pour T infini. Cela oblige à faire $C = 1$. L'équation d'état cherchée est donc (2) $p = \frac{K}{\text{Log}\, a} \frac{T}{v^2} \left[1 - a^{1:T} \right]$.

Mettons $T(1 - a^{\frac{1}{T}})$ sous la forme d'un quotient $(1 - a^{\frac{1}{T}}) : \frac{1}{T}$ et appliquons la règle de l'Hôpital. Le rapport des dérivées $-a^{\frac{1}{T}} \text{Log}\, a$ tend vers $-\text{Log}\, a$ quand T grandit indéfiniment. Donc p reste fini pour T infini et v fini.

Pour que p soit positif, il faut d'après l'expression (2) que la constante donnée a soit inférieure à l'unité. On vérifie immédiatement que la fonction (2) satisfait à l'équation (1).

---

52. L'état d'un gaz étant représenté par l'équation

(1) $p = rT \left[\frac{v}{(v-a)^2} - \frac{b}{(v+a)^2} (K^{\frac{1}{T}} - 1) \right]$, dans laquelle a, b, K et r sont des constantes, on demande : 1° de donner l'expression de la quantité de chaleur à fournir à l'unité de masse de ce gaz pour faire passer son volume de v_1 à v_2, à température constante; 2° de calculer numériquement le

travail interne effectué dans cette transformation ; 3° d'écrire la loi suivant laquelle la chaleur spécifique de ce gaz, sous volume constant, varie avec la densité à température constante.

Données numériques (pour le n° 2) : $v_1 = 24{,}6\ cm^3$, $v_2 = 49\ cm^3$, $T = 300°$, $a = 0{,}4\ cm^3$, $br = 2{,}4 \times 10^6$ C GS, $K = 183$.

(Physique Générale, Paris, 1923).

1° Nous partons de la formule $dQ = c\,dT + l\,dv$ qui, à température constante ($dT = 0$), donne $dQ = l\,dv$. La chaleur de dilatation l est donnée par la formule de Clapeyron $l = \frac{T}{J}\frac{\partial p}{\partial T}$. De l'équation (1) on tire

$$(2)\qquad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{rv}{(v-a)^2} - \frac{rb}{(v+a)^2}\left(K^{1:T} - 1\right) + \frac{rb}{T(v+a)^2}K^{1:T}\operatorname{Log} K.$$

$$(3)\qquad dQ = \frac{T}{J}\frac{\partial p}{\partial T}dv = \frac{T}{J}\frac{rv\,dv}{(v-a)^2} - \frac{rbT\,dv}{J(v+a)^2}\left(K^{\frac{1}{T}} - 1\right) + \frac{rb\,dv}{J(v+a)}K^{\frac{1}{T}}\operatorname{Log} K,$$

$$Q = \left[\frac{rT}{J}\operatorname{Log}(v-a) - \frac{rTa}{J(v-a)} + \frac{rbT}{J(v+a)}\left(K^{\frac{1}{T}} - 1\right) - \frac{rbK^{\frac{1}{T}}\operatorname{Log} K}{J(v+a)}\right]_{v_1}^{v_2}$$

2° Le travail interne est $\mathcal{E}_i = \int (Jl - p)\,dv = \int (J\,dQ - p\,dv)$. En tenant compte de l'équation (1) la formule (3) s'écrit

$$J\,dQ = p\,dv + \frac{rb\,dv}{(v+a)^2}K^{\frac{1}{T}}\operatorname{Log} K.$$ Par suite

$$\mathcal{E}_i = rbK^{\frac{1}{T}}\operatorname{Log} K\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{(v+a)^2} = rbK^{\frac{1}{T}}\frac{(v_2 - v_1)\operatorname{Log} K}{(v_1+a)(v_2+a)},$$

$$\mathcal{E}_i = 2{,}4 \times 10^6 \times 183^{\frac{1}{300}} \times \frac{25\operatorname{Log} 183}{25 \times 50} = 254430\ \text{C GS}.$$

3° Cherchons la loi suivant laquelle la chaleur spécifique c du gaz à volume constant varie avec la densité ρ à température constante. Établissons d'abord la relation $\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{T}{J}\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$. En tenant compte de la formule de Clapeyron rappelée plus haut, la différentielle de l'entropie s'écrit $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c}{T}dT + \frac{l}{T}dT = \frac{c}{T}dT + \frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial T}dv$. Exprimons que c'est une différentielle totale exacte, ce qui donne $\frac{1}{T}\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{1}{J}\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$. C'est la relation cherchée. De (2) on tire

$$\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} = -\frac{rb(\operatorname{Log} K)^2}{T(v+a)^2}\frac{1}{T^2}K^{\frac{1}{T}}.$$ Par suite

$$\frac{\partial c}{\partial v} = -\frac{A}{(v+a)^2},$$ en posant $A = \frac{rbK^{\frac{1}{T}}(\operatorname{Log} K)^2}{JT^2}$. D'ailleurs, $\frac{\partial c}{\partial \rho} = \frac{\partial c}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \rho}$. De $\rho v = 1$ on tire $\rho\,dv + v\,d\rho = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{v}{\rho} = -\frac{1}{\rho^2}$, d'où $\frac{\partial c}{\partial \rho} = \frac{A}{(v+a)^2}\times\frac{1}{\rho^2} = \frac{A}{(1+a\rho)^2}$, $c = \int\frac{A\,d\rho}{(1+a\rho)^2} = -\frac{A}{a(1+a\rho)} + \lambda$.

Soit c_0 la chaleur spécifique à très faible pression, c. à d. pour $\rho = 0$, on a $c_0 = -\frac{A}{a} + \lambda$, d'où $\lambda = c_0 + \frac{A}{a}$ et, par suite,

$$c = c_0 + \frac{A}{a}\left[1 - \frac{1}{1+a\rho}\right] = c_0 + \frac{A\rho}{1+a\rho}.$$

La loi de variation est représentée par une hyperbole équilatère. Elle a été vérifiée très convenablement par les expériences de M. Joly.

---

53 Une masse d'un gaz parfait égale à 500 grammes décrit, de façon à transformer du travail en chaleur, un cycle défini par deux lignes à énergie interne constante U_0 et $U_0 + 10^9$ reliées par deux lignes à entropie constante S_0 et S_1. Le point (U_0, S_0) correspond à 0° centigrade et à la pression normale. Le rapport des volumes extrêmes le long de la ligne U_0 est égal à e (base des logarithmes népériens). La chaleur spécifique sous pression constante C est 0,247; le rapport $\gamma = C : c$ est 1,41 et l'équivalent mécanique de la calorie est $J = 4{,}17 \times 10^7$. On demande: 1° quelle est la plus haute température atteinte par le gaz; 2° quelle est la valeur de $S_1 - S_0$; 3° quelle est la quantité de chaleur créée pour la totalité du cycle. (Physique générale. Paris).

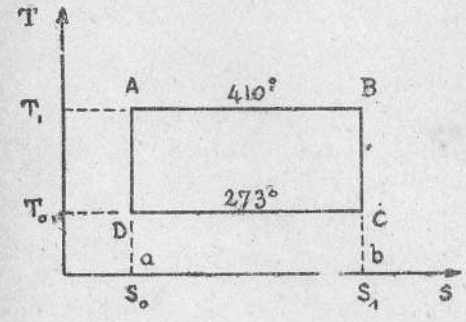
1° Le gaz étant parfait, son énergie interne ne dépend que de la température et on a (1) $\frac{dU}{dt} = Jc$. Les lignes à énergie interne constante sont donc des lignes à température constante, c. à. d. des isothermes. D'autre part, pour les lignes à entropie constante, on a $dQ = 0$; ce sont des adiabatiques. Le cycle décrit est donc un cycle de Carnot. De (1) on tire

$$U_1 - U_0 = Jc(T_1 - T_0) = \frac{JC}{\gamma}(T_1 - T_0).$$ Mais $U_1 - U_0 = 10^9$. On a donc

$$T_1 = T_0 + \frac{10^9 \gamma}{JC} = 273\gamma + 137 = 410° \text{ absolus.}$$

2° Utilisons le diagramme entropique en prenant pour abscisses les entropies $S = \int \frac{dQ}{T}$ et pour ordonnées les températures absolues.

Notre cycle de Carnot est représenté par un rectangle ABCD. Les deux isothermes AB et DC sont deux droites horizontales et les deux adiabatiques AD et BC sont deux droites verticales. Ce mode de représentation jouit d'une propriété remarquable: l'aire du cycle représente la chaleur évoluée, puisque $TdS = dQ$. La chaleur Q_0 évoluée le long de l'isotherme T_0 est mesurée par l'aire du rectangle



DCba et on a

$$(2) \quad ab = S_1 - S_0 = \frac{Q_0}{T_0}.$$

Calculons Q_0. En prenant pour variables indépendantes T et v et en remarquant que $dT = 0$ le long de l'isotherme, on a $dQ = ldv = \frac{pdv}{J}$, puisque c'est un gaz parfait. Intégrons après avoir remplacé p par $\frac{rT_0}{v}$,

$$Q_0 = \frac{rT_0}{J}\int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = \frac{rT_0}{J} \operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0} = \frac{rT_0}{J},$$

puisque $\frac{v_1}{v_0} = e$. En portant dans (2), il vient, en tenant compte de la relation de Mayer,

$$S_1 - S_0 = \frac{r}{J} = C - c = \frac{C(\gamma - 1)}{\gamma}$$

Mais il faut remarquer que nous y avons employé la constante spécifique r, c.à.d. celle qui est relative à 1 gramme de gaz. La masse du gaz étant de 500 grammes, la variation d'entropie est

$$\Delta S = \frac{500\, C(\gamma - 1)}{\gamma} = 35{,}9.$$

3° La quantité de chaleur créée pour la totalité du cycle est égale à l'aire du rectangle ABCD. On a donc

$$\Delta Q = (T_1 - T_0)\, \Delta S = 137 \times 35{,}9 = 4918 \text{ calories}.$$

---

54. — Un piston P peut glisser sans frottement dans un corps de pompe clos par deux fonds a, b et qui il divise en deux compartiments A, B. Dans chacun de ces compartiments est enfermé un gramme d'hydrogène (Chaleur spécifique sous pression constante $C = \frac{7}{2}$). Les parois du corps de pompe, le piston, le fond a sont imperméables à la chaleur. Le fond b est en métal et baigné de glace fondante. On admettra que la température du gaz dans B est toujours 0° centigrade. Un fil métallique de capacité calorifique négligeable, parcouru par un courant électrique et logé dans A permet de céder au gaz de A telle quantité de chaleur que l'on désire.



État initial. — Températures dans A et B égales (0° centigr.); pressions égales (1 atmosphère); volumes égaux (11l15). On fait passer le courant, le piston se déplace; on l'arrête quand la température dans A est devenue 100° centigrades. Quelle dépense d'énergie a-t-on dû faire dans le fil pour arriver à ce résultat? Calculer pour chacune des deux masses de gaz les valeurs finales du volume et de la pression, et les variations de l'énergie interne et de l'entropie. (Physique Générale. Lille).

La pression du gaz de A augmentant avec la température pousse le piston qui comprime le gaz de B. Le mouvement s'arrête lorsque des deux côtés du piston règne une même pression que nous appellerons π. Désignons par p_0 et v_0 la pression initiale et le volume initial des gaz A et B. Soit x la diminution de volume du gaz de B et par suite l'augmentation de volume du gaz de A. On a pour déterminer π et x les deux équations

$$(1)\quad p_0 v_0 = \pi (v_0 - x), \qquad (2)\quad p_0 v_0 = \frac{273\, \pi (v_0 + x)}{373}.$$

En les divisant membre à membre, on a

$$373 (v_0 - x) = 273 (v_0 + x), \qquad x = \frac{100\, v_0}{646} = \frac{100 \times 11{,}15}{646} = 1{,}72 \text{ litres}.$$

Le volume final de B est donc $11{,}15 - 1{,}72 = 9{,}43$ litres; celui de A est $11{,}15 + 1{,}72 = 12{,}87$ litres.

La pression commune π est, d'après (1),

$$\pi = \frac{p_0 v_0}{v_0 - x} = \frac{11{,}15}{9{,}45} = 1{,}182 \text{ atm}.$$

Mettons la quantité élémentaire de chaleur à fournir au gaz de A sous la forme $dQ = c\,dT + l\,dv = c\,dT + \frac{\pi\, dv}{J}$, puisque nous supposons le gaz

parfait. Intégrons; comme la température varie de 0° à 100° et que la masse du gaz de A est de 1 gramme, on a $\Delta Q = 100\,c + \frac{1}{J}\int p\,dv$. L'intégrale du second membre représente le travail exécuté par le gaz de A, lequel travail est égal et de sens contraire à celui exécuté par le gaz de B. Pour ce dernier, la température étant constante, on a $pv = p_0 v_0$ et par suite

$$-\int p\,dv = -p_0 v_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \int_{v_1}^{v_0} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \operatorname{Log} \frac{v_0}{v_1}.$$

Evaluons ce travail en ergs. La pression p_0 étant de 1 atmosphère, on a très sensiblement $p_0 = \frac{76}{75} \times 10^6$ barves. D'autre part $v_0 = 11150$. En prenant $C = \frac{7}{2}$ et $\frac{C}{c} = 1,40$, on trouve $c = \frac{5}{2}$.

Donc $\Delta Q = 100 \times \frac{5}{2} + \frac{76 \times 10^6 \times 11150}{75 \times 4,18 \times 10^7} \operatorname{Log} \frac{11,15}{9,43} = 295,28$ calories.

La variation d'énergie interne d'un gaz parfait est $dU = Jc\,dT$. Pour le gaz de A, on a donc

$$U_1 - U_0 = 4,18 \times 10^7 \times \frac{5}{2} \times 100 = 1045 \times 10^7 \text{ ergs}.$$

La variation d'énergie interne du gaz de B est nulle, puisque sa température n'a pas varié.

Pour calculer les variations de l'entropie nous prenons pour dQ l'expression (7) du n° 3, $dQ = (C_p\,dv + c_v\,dp) : x$. On a donc, à cause de $pv = xT$, $dS = \frac{dQ}{T} = C\frac{dv}{v} + c\frac{dp}{p}$,

$$S_1 - S_0 = C \operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0} + c \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0} = c\left[\gamma \operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0} + \operatorname{Log} \frac{p_1}{p_0}\right] = c \operatorname{Log} \frac{p_1 v_1^{\gamma}}{p_0 v_0^{\gamma}}.$$

Pour le gaz de A, on a, en remarquant que $p_1 = \pi$,

$$S_1 - S_0 = \frac{5}{2} \operatorname{Log}\left[\frac{11,15}{9,43} \times \left(\frac{12,87}{11,15}\right)^{\gamma}\right] = 0,921 \text{ CGS}.$$

Pour le gaz de B, on a, en remarquant que $p_1 v_1 = p_0 v_0$,

$$S_1 - S_0 = c \operatorname{Log}\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^{\gamma-1} = \frac{5}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{9,43}{11,15}\right)^{0,4} = -0,1675 \text{ CGS}.$$

L'entropie de A a augmenté, celle de B a diminué.

---

55. - Deux isothermes d'un gaz ont été déterminées par les mesures suivantes portant sur une masse inconnue du gaz. Les pressions sont évaluées en colonne de mercure normal, avec une erreur absolue possible de 0°,01, les volumes en divisions d'un tube calibré avec une erreur absolue possible de 1/2 division, les températures centigrades à 0°,2 près.

Pression	Température 0°	Température 136°5
75	100d	149d,8
60	124,7	187,4
45	167	250
30	249,5	374,9
15	500,3	750,3

Peut-on admettre que dans ces limites de pression et de température le gaz

peut être considéré comme un gaz parfait?

Sachant que pour ce gaz le rapport $\frac{c}{c}$ est égal à $\frac{5}{3}$, quel abaissement de température obtiendrait-on en faisant détendre un gramme de ce gaz adiabatiquement de la pression 75^c à celle de 15^c à partir de la température centigrade de +127°? Calculer cet abaissement de température avec 3 chiffres exacts.

(Physique Générale. Paris).

Si le gaz était parfait, on aurait la relation (1) $R = \frac{pv}{T}$. Toutes les expériences devraient donner pour R une valeur constante. En remarquant que l'on a $T = 273$ pour la première isotherme et $T = 409,5$ pour la seconde, on trouve les résultats suivants:

p	Température 0°		Température 136°,5	
	$R = \frac{pv}{T}$	$R - R_m$	$R = \frac{pv}{T}$	$R - R_m$
75	27, 4725	+ 0,0097	27, 4359	− 0,0269
60	27, 4066	− 0,0562	27, 4578	− 0,0050
45	27, 5274	+ 0,0646	27, 4735	+ 0,0097
30	27, 4176	− 0,0452	27, 4652	+ 0,0024
15	27, 4890	+ 0,0262	27, 4835	+ 0,0207

La valeur moyenne de R est $R_m = 27,4628$. Nous avons indiqué les écarts $R - R_m$ correspondant aux différentes expériences. L'écart maximum fourni par la 3e expérience est égal à 0,0646. L'erreur relative correspondant est $\frac{\Delta R}{R} = \frac{0,0646}{27,4628} < \frac{24}{10.000}$.

Pour voir si dans les limites de pression et de température considérées le gaz peut être considéré comme parfait nous allons calculer l'erreur relative en prenant les différentielles logarithmiques des deux membres de l'équation (1) On obtient $\frac{dR}{R} = \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} - \frac{dT}{T}$. En prenant toutes les erreurs dans le même sens, il vient

$$\frac{\Delta R}{R} < \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta T}{T}.$$

Pour la 3e expérience, qui a fourni l'écart maximum, on a $\frac{\Delta p}{p} = \frac{0,01}{45} > \frac{22}{100.000}$; $\frac{\Delta v}{v} = \frac{0,5}{167} > \frac{29}{10.000}$; $\frac{\Delta T}{T} = \frac{0,2}{273} > \frac{73}{100.000}$

Donc la somme des erreurs qui peuvent résulter des degrés de précision indiqués dans l'énoncé pour les mesures des pressions, volumes et températures peut atteindre un chiffre supérieur à 38×10^{-4}, et par conséquent supérieur au chiffre de 24×10^{-4} trouvé plus haut avec l'écart maximum. On peut donc admettre que le gaz se comporte sensiblement comme un gaz parfait.

Appliquons la formule (3) du n° 23 qui est l'une des formules de la détente adiabatique. On a, en remarquant que $T_0 = 127 + 273 = 400$, $p = 15^c$, $p_0 = 75^c$, $\gamma = \frac{5}{3}$, $T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1):\gamma} = 400 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{0,4} = 210°$ absolus ou −63° C. L'abaissement de température est de 190 degrés.

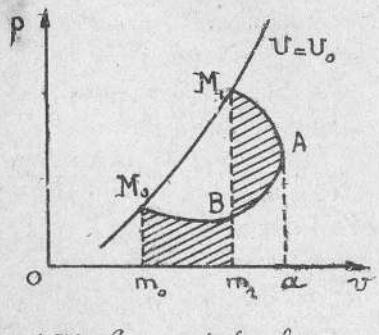
56. - Un fluide est défini par les deux relations $f(p,v,T)=0$, $dQ = c\,dT + l\,dv$. Pour représenter une série d'opérations thermodynamiques, on convient de porter en abscisses les quantités de chaleur Q fournies et en ordonnées les travaux mécaniques $\mathcal{T}$ produits. On donne les conditions initiales p_0, v_0 correspondant à un point $(Q_0, \mathcal{T}_0)$ du diagramme. Cela posé, quand le point figuratif $(Q, \mathcal{T})$ décrit une courbe fermée, le fluide revient-il à son état initial? On suppose en particulier que le fluide est un gaz parfait. Le point $(Q, \mathcal{T})$ décrit une portion de droite 1° parallèle à l'axe des Q; 2° parallèle à l'axe des $\mathcal{T}$; 3° quelconque. Quelles sont les équations des lignes correspondantes sur le diagramme en (p,v)?

Application. Masse d'air égale à 1 Kilog occupant d'abord un mètre cube à 0°. On a constamment $Q = \mathcal{T} : 4{,}18 \times 10^7$ en unités CGS et l'on fournit en tout à la masse 20000 calories-gramme. Trouver le volume final. (Physique Générale. Paris).

Faisons subir au fluide une transformation quelconque. $\mathcal{T}$ étant le travail exécuté par le fluide sur l'extérieur et Q la chaleur absorbée, la variation de l'énergie interne est $\Delta U = J\Delta Q - \Delta\mathcal{T}$ ou $U_1 - U_0 = J(Q_1 - Q_0) - (\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_0)$. Si $Q_1 = Q_0$ et $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0$, c.à.d. si le point $(\mathcal{T}, Q)$ décrit une courbe fermée, on est certain que $U_1 = U_0$; l'énergie interne reprend la même valeur.

Puisque les trois variables p, v, T sont reliées par l'équation $f(p,v,T)=0$, il y a seulement deux variables indépendantes, p et v par exemple. L'énergie interne est une fonction $U(p,v)$ de p et de v. On a donc certainement $U(p_1, v_1) = U(p_0, v_0)$, mais rien ne nous autorise à dire que $p_1 = p_0$ et $v_1 = v_0$. Autrement dit, si on pose $U(p,v) = U_0$, il y a une infinité de valeurs de p et de v qui peuvent donner à U la valeur U_0; le fluide ne revient donc pas nécessairement à son état initial, il peut avoir la même énergie interne sans être dans le même état.

Nous pouvons donner une interprétation géométrique de ces résultats. Construisons dans le système de coordonnées (p,v) la courbe (1) $U(p,v) = U_0$. Partons du point $M_0(p_0 v_0)$ situé sur cette courbe. Quand le point figuratif $(Q, \mathcal{T})$ décrit une courbe fermée, le point (p,v) part du point M_0 pour aboutir en un autre point M_1 de la courbe (1). Le chemin suivi $M_0 B A M_1$ peut être quelconque sous la réserve suivante. Comme le travail doit être nul, il faut que $\int p\,dv = 0$. Ainsi dans le cas de la figure, il faut que le travail le long de $M_1 A$ qui est de signe contraire au travail le long de $A M_1$ lui soit égal en valeur absolue. Comme les aires qui représentent ces travaux ont une partie commune $m_1 B A a$, il faut que les parties hachurées aient des aires égales.



Si le point $(Q, \mathcal{T})$ décrit une parallèle à l'axe des Q, on a $\mathcal{T} = C^{te}$, $d\mathcal{T} = p\,dv = 0$, $v = C^{te}$. Le point (p, v) décrit une parallèle à l'axe Op.

Si le point $(Q, \mathcal{T})$ décrit une parallèle à l'axe des $\mathcal{T}$, on a $Q = C^{te}$, $dQ = 0$, $pv^{\gamma} = C^{te}$. Le point (p, v) décrit une ligne adiabatique.

Supposons maintenant que le point $(Q, \mathcal{T})$ décrive une droite quelconque $\mathcal{T} = aQ + b$. On a $d\mathcal{T} = a\,dQ = a(c\,dT + l\,dv) = p\,dv$ (2).

Le fluide étant un gaz parfait, on a $pv = rT$, $dT = \frac{1}{r}(p\,dv + v\,dp)$, $Jl = p$. En portant ces valeurs dans (2) et en posant $K = \frac{1}{ac}\left(\frac{ac}{J} + \frac{a}{J} - 1\right)$, il vient $\frac{dp}{p} + K\frac{dv}{v} = 0$, $pv^K = C^{te}$. Le point (p, v) décrit une courbe analogue à une ligne adiabatique.

Application. — Si $\mathcal{T} = JQ$, on voit que $a = J$; alors $K = 1$, la masse d'air évolue suivant une isotherme $pv = p_0 v_0$. En désignant par v_1 le volume final, on a

$$\mathcal{T} = JQ = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv = p_0 v_0 \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = p_0 v_0 \operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0},$$

(3) $\operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0} = \frac{JQ}{p_0 v_0}$. La pression p_0 est donnée en baryes par la formule $1000 = 10^6 \times 0{,}0012 g^3 \times \frac{p_0}{1{,}013 \times 10^6}$. On a $v_0 = 10^6$, $Q = 20000$, $J = 4{,}18 \times 10^7$. En portant ces valeurs dans (3) et en passant aux logarithmes décimaux, on trouve $\frac{v_1}{v_0} = 2{,}904$, d'où $v_1 = 2^{m3}{,}904$.

---

57. — Le poids du litre d'un certain gaz, sous la pression de 1 Kilogramme par centimètre carré et à la température absolue de 273° a été trouvé égal à 0,0869 gramme avec une erreur possible d'une unité du dernier ordre. La chaleur spécifique de ce gaz sous pression constante C est 3,5 avec une erreur relative inférieure à 1 : 100 ; le rapport γ des deux chaleurs spécifiques est 1,39 avec une erreur relative inférieure à 1 : 200. Quelles sont les valeurs extrêmes de l'équivalent mécanique de la calorie J compatibles avec ces données numériques, dans l'hypothèse où le gaz est un gaz parfait ? Si l'on sait d'autre part que J est égal à $4{,}18 \times 10^7$ avec une erreur relative inférieure à 1 : 200, y a-t-il contradiction à admettre que le gaz est un gaz parfait ? Entre quelles limites extrêmes peut se trouver comprise la température finale d'une masse de ce gaz, prise à la température initiale de 273° absolus, quand on lui fait occuper brusquement un volume égal à 10 fois son volume primitif ?

(Physique Générale. Paris).

La relation de Mayer donne, pour un gaz parfait, (1) $J = \frac{r}{C - c}$, r étant la constante spécifique du gaz. D'autre part, si v est le volume occupé par la masse m de gaz, la formule (3) du n° 2 donne $r = \frac{pv}{mT}$. En substituant dans (1) et en faisant apparaître le rapport $\frac{C}{c} = \gamma$, il vient

(2) $J = \frac{pv}{mT} : \left(C \times \frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)$.

Evaluons les quantités dans le système C.G.S.

$$J = \frac{1000 \times 931 \times 1000 \times 1{,}39}{0{,}0869 \times 273 \times 3{,}5 \times 0{,}39} = 4{,}21 \times 10^7.$$

Calculons l'erreur relative maxima commise sur J. Pour cela, prenons les différentielles logarithmiques des deux membres de (2) en remarquant que, d'après l'énoncé p, v et T étant parfaitement connus devront être considérés comme des constantes:

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{dm}{m} - \frac{dC}{C} - d\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) : \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right).$$

Prenons toutes les erreurs partielles avec le signe +

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta C}{C} + \Delta\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) : \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right).$$

Mais $d\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) : \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) = \frac{d(\gamma-1)}{\gamma-1} - \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{d\gamma}{\gamma} \times \frac{1}{\gamma-1}$.

Par exception nous écrivons

$$\Delta\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) : \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) = \frac{\Delta(\gamma-1)}{\gamma-1} - \frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \times \frac{1}{\gamma-1}$$

en conservant les signes, car les erreurs sur $\gamma - 1$ et sur γ sont nécessairement de même sens. Ce serait exagérer volontairement l'erreur globale si on ajoutait ces deux erreurs partielles. Nous les retranchons donc et nous obtenons.

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \times \frac{1}{\gamma-1}, \quad \frac{\Delta J}{J} < \frac{0{,}0001}{0{,}0869} + \frac{1}{100} + \frac{1}{200} \times \frac{1}{0{,}39} = 0{,}024,$$

$$\Delta J < 4{,}21 \times 10^7 \times 0{,}024 = 0{,}10 \times 10^7.$$

On a donc (3) $\quad 4{,}11 \times 10^7 < J < 4{,}31 \times 10^7.$

D'autre part, si l'on sait que J est égal à $4{,}18 \times 10^7$ avec une erreur relative inférieure à 1 : 200, la limite de l'erreur absolue est $4{,}18 \times 10^7 : 200 = 0{,}02 \times 10^7$ et l'on peut écrire

(4) $\quad 4{,}16 \times 10^7 < J < 4{,}20 \times 10^7.$

La simple comparaison des inégalités (3) et (4) montre qu'il n'y a pas contradiction à admettre que le gaz est un gaz parfait.

Le gaz passe adiabatiquement de l'état $(p_0 v_0 T_0)$ à l'état $(p_1 v_1 T_1)$. La formule (4) du n° 23 donne

(5) $T_1 = T_0 \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1} = 273 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{\gamma-1} = 273 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{0{,}39} = 111°,2$ absolus.

Pour calculer l'erreur commise sur T_1, nous prenons les logarithmes népériens des deux membres de (5), d'où

$\text{Log } T_1 = \text{Log } 273 - (\gamma - 1) \text{ Log } 10$. Puis nous différentions, en prenant le signe + pour le second membre,

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \Delta\gamma \times \text{Log } 10 = \frac{1{,}39}{200} \times 2{,}302 = 0{,}016, \quad \Delta T_1 = 111{,}2 \times 0{,}016 = 1°,8.$$

On a donc $109°,4$ abs. $< T_1 < 113°$ abs. ou $-163°,6\,C < t_1 < 160°C$.

---

58. — Une masse d'air, enfermée dans un corps de pompe dont les parois sont imperméables à la chaleur, occupe, dans l'état

initial, un litre à 0 degré sous la pression normale. Le corps de pompe contient en outre une résistance métallique, sans self-induction, dans laquelle on fait passer un courant. On suppose l'équilibre thermique établi à chaque instant entre la résistance métallique et le gaz. On considère l'air comme un gaz parfait. La résistance R est formée d'un métal dont la résistivité (résistance spécifique) est proportionnelle à la température absolue. La force électromotrice E appliquée aux extrémités de la résistance est constante. On négligera les variations de longueur et de section de la résistance métallique avec la température. Cela posé, on demande: 1° d'écrire la relation différentielle qui lie la température absolue T et le volume spécifique de l'air v au temps t; T, v, t sont considérées comme variables indépendantes. 2° de calculer le temps au bout duquel le volume du gaz serait augmenté dans un rapport égal à e (base des logarithmes népériens) à température constante à partir de l'état initial. 3° de calculer l'échauffement du gaz sous volume constant au bout de 40 secondes, toujours à partir de l'état initial.

Données numériques. — E = 25 volts; valeur R_0 de la résistance R à 0 degré : 1 ohm; capacité calorifique de la résistance: a = 0,78; chaleur spécifique de l'air sous volume constant c = 0,170; équivalent mécanique de la chaleur: $J = 4{,}18 \times 10^7$ C.G.S.

(Physique Générale Paris).

1° La quantité de chaleur dégagée pendant le temps dt par le passage d'un courant d'intensité I dans une résistance R a pour expression, d'après la loi de Joule,
$dQ = \frac{1}{J} RI^2 dt = \frac{1}{J} \frac{E^2}{R} dt$. Mais, d'après l'énoncé, $\frac{R}{R_0} = \frac{T}{T_0}$;
donc $dQ = \frac{1}{J} \frac{E^2}{R_0} \frac{T_0}{T} dt$.
Cette quantité de chaleur produit trois effets: 1° elle échauffe la masse m d'air à volume constant, ce qui absorbe $mc\,dT$ calories; 2° elle échauffe la résistance métallique, ce qui absorbe $a\,dT$ calories; 3° elle fait varier le volume du gaz à température constante, ce qui absorbe $m l\,dv$ calories, l désignant la chaleur latente spécifique de dilatation. On a donc $\frac{1}{J} \frac{E^2}{R_0} \frac{T_0}{T} dt = (mc + a)\,dT + ml\,dv$.

Mais $l = \frac{L}{J} = \frac{rT}{Jv}$, l'air étant considéré comme un gaz parfait, on a $pv = rT$. Par suite

$$(1) \qquad \frac{E^2}{R_0} \frac{T_0}{T} dt = J(mc + a)\,dT + mrT \frac{dv}{v}.$$

Telle est la relation différentielle cherchée.

2° Faisons $T = T_0$ et $dT = 0$ dans (1) et intégrons. En appelant t le temps au bout duquel le volume du gaz sera augmenté dans le rapport e, il vient

$$\frac{E^2}{R_0} dt = mrT_0 \frac{dv}{v}; \quad \frac{E^2 t}{R_0} = mrT_0 \operatorname{Log} \frac{v_1}{v_0} = mrT_0, \quad t = \frac{mrT_0 R_0}{E^2}$$

Nous avons vu (n° 2) que la constante spécifique r est égale à $\frac{p_0 v_0}{273}$, en désignant par v_0 le volume spécifique. D'ailleurs c

$T_0 = 273$. Par suite, $t = m p_0 v_0 R_0 : E^2$. Evaluons toutes les quantités dans le système C G S. On a $m = 1^{gr},293$; p_0 est la pression normale de 76 cm. de mercure, évaluée en baryes ; v_0 est le volume spécifique de l'air, $\frac{1000}{1,293}$; $R_0 = 10^9$; $E = 25 \times 10^8$; $t = 76 \times 13,596 \times 981 \times 1000 \times 10^3 : 625 \times 10^{16} = 0,162$ seconde.

3° Pour calculer l'échauffement du gaz sous volume constant, nous ferons $dv = 0$ dans (1), d'où $\frac{E^2}{R_0} \frac{T_0}{T} dt = J (mc + a) dT$.

Séparons les variables et intégrons. On a, en désignant par τ le temps de passage du courant et par T_1 la température atteinte,

$$\frac{T_0 E^2}{R_0} \int_0^{\tau} dt = J (mc+a) \int_{T_0}^{T_1} T dT,$$

$$\frac{T_0 E^2}{R_0} \tau = J (mc+a) \frac{T_1^2 - T_0^2}{2}, \qquad T_1^2 = T_0^2 + \frac{2 T_0 E^2 \tau}{R_0 J (mc+a)},$$

$$T_1^2 = \overline{273}^2 + \frac{2 \times 273 \times 625 \times 10^{16} \times 40}{10^9 \times 4,18 \times 10^7 (1,293 \times 0,170 + 9,78)}, \qquad T_1 = 634° \text{ abs.}$$

L'échauffement est donc $T_1 - T_0 = 634 - 273 = 361°$.

59.- Calculer en unités C G S pour un gramme d'hydrogène, considéré comme gaz parfait à la température absolue T et sous la pression p : 1° l'énergie ; 2° l'entropie (on convient de prendre l'énergie et l'entropie nulles dans l'état du gaz où sa pression est d'une mégabarye et sa température celle de la glace fondante) ; 3° le potentiel thermodynamique à volume constant ; 4° le potentiel thermodynamique à pression constante ; 5° le coefficient d'élasticité pour une transformation adiabatique. (Au lieu de calculer les potentiels thermodynamiques le candidat peut, s'il le préfère, calculer les fonctions H et H' de Massieu).

Densité de l'hydrogène par rapport à l'air : 0,06948.
Chaleur spécifique de ce gaz à pression constante
$c = 3,409$. Equivalent mécanique de la chaleur.
$J = 4,189 \times 10^7$. (Physique générale. Paris).

1° Puisqu'il s'agit d'un gaz parfait, la différentielle de l'énergie interne a pour expression $dU = Jc dT$. Intégrons en remarquant que $U_0 = 0$ pour $T_0 = 273$, et en tenant compte de la formule de Mayer $J(C-c) = r$, il vient

$$U = Jc (T - T_0) = (JC - r)(T - T_0).$$

La quantité r est la constante spécifique $\frac{p_0 v_0}{273}$ de l'hydrogène. Comme, d'après l'énoncé, $p_0 = 10^6$, le volume v_0 est le volume en cm^3 occupé à 0° par 1 gr. d'hydrogène sous la pression d'une mégabarye. On a donc $1 = v_0 \times 0,001293 \times 0,06948 \times 10^6 : (76 \times 13,596 \times 981)$,

$$r = \frac{76 \times 13,596 \times 981}{273 \times 0,001293 \times 0,06948} = 4,1331 \times 10^7,$$

$JC = 4,189 \times 3,409 \times 10^7 = 14,2803 \times 10^7$, $U = 10,1472 \times 10^7 (T - 273)$.

2° La différentielle de l'entropie est $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C}{T} dT + \frac{k}{T} dp$,

c. à. d, en tenant compte de la deuxième formule de Clapeyron $h = -\frac{T}{J}\frac{\partial v}{\partial T}$ et de l'équation des gaz parfaits $pv = rT$, $dS = \frac{C}{T}dT - \frac{r}{J}\frac{dp}{p}$. Intégrons en remarquant que $S_0 = 0$ pour $T_0 = 273$ et pour $p_0 = 10^6$,

$$S = C \operatorname{Log}\frac{T}{T_0} - \frac{r}{J}\operatorname{Log}\frac{p}{p_0} = 3{,}409 \operatorname{Log}\frac{T}{273} - 0{,}9866 \operatorname{Log}\frac{p}{10^6}.$$

3° Le potentiel thermodynamique à volume constant appelé encore énergie utilisable est la fonction $A = U - JTS$. On a donc

$$A = 10^7\left[10{,}1472(T-273) - 14{,}2803\,T \operatorname{Log}\frac{T}{273} + 4{,}1331\,T \operatorname{Log}\frac{p}{10^6}\right]$$

La fonction H de Massieu ne diffère de A que par le facteur $-\frac{1}{J}$. On a $H = TS - \frac{U}{J}$.

4° Le potentiel thermodynamique à pression constante est la fonction $\Phi = A + pv = U - JTS + rT$. On a donc

$$\Phi = 10^7\left[14{,}2803\,T - 14{,}2803\,T \operatorname{Log}\frac{T}{273} + 4{,}1331\,T \operatorname{Log}\frac{p}{10^6} - 2770\right].$$

La fonction H' de Massieu ne diffère de Φ que par le facteur $-\frac{1}{J}$. On a $H' = TS - \frac{U}{J} - \frac{pv}{J} = TS - \frac{U}{J} - \frac{rT}{J}$.

5° Nous avons vu (n° 21) que le coefficient d'élasticité pour une transformation adiabatique était (1) $E = \frac{C}{c}p$, c. à. d. en tenant compte de la formule de Mayer $J(C-c) = r$,

$$E = \frac{JC}{JC - r}\,p = \frac{14{,}2803}{10{,}1472} \times 10^6 = 1{,}40 \times 10^6.$$

Ce résultat rapproché de la formule (1) nous fait vérifier en passant que le rapport $\frac{C}{c}$ relatif à l'hydrogène est égal à la valeur théorique $\frac{7}{5} = 1{,}40$.

---

60. 1° Une pompe à air, dont le volume du cylindre est de 4 litres, aspire de l'air atmosphérique à la pression p_0, dont le volume spécifique est v_0. Elle envoie cet air dans un réservoir dont le volume vaut μ fois celui du cylindre et qui au début est plein d'air atmosphérique à l'état (v_0 p_0). On suppose imperméables à la chaleur les parois du cylindre et du réservoir et l'on néglige leur dilatation thermique. On suppose également que les soupapes jouent sans effort. On demande de calculer en fonction de n le volume spécifique v_n et la pression p_n dans le réservoir après n coups de piston en ayant soin d'analyser les conditions de mélange de la n^e cylindrée d'air avec l'air précédemment emmagasiné dans le réservoir. — 2° On calculera le travail nécessaire pour produire les n premiers coups de piston en négligeant le travail absorbé par le jeu des pièces de la pompe. On désignera par E l'équivalent mécanique de la chaleur, par C et c les chaleurs spécifiques. On néglige l'espace nuisible. — 3° On injecte dans le réservoir après le n^e coup de piston un poids Q, d'eau liquide à la température de l'atmosphère ; cette eau s'échauffe aux dépens de l'air. On demande après l'établissement de l'équilibre thermique quelle est la température de l'air et sa pression. On négligera le volume de l'eau vis à vis de celui du réservoir. On suppose égale à 1 la chaleur spécifique de l'eau liquide. (Mécanique Physique et expérimentale. Paris).

1° Les n coups de piston introduisent dans le réservoir nu litres d'air pris dans l'atmosphère à l'état $(v_0\ p_0)$, qui viennent s'ajouter aux μu litres qui y existaient déjà dans ce même état $(v_0\ p_0)$. La masse totale de gaz qui occupait initialement le volume $V_0 = (\mu + n)u$ litres à l'état $(v_0\ p_0)$ occupe maintenant le volume du réservoir $V_1 = \mu u$ litres à l'état $(v_n\ p_n)$. Les volumes spécifiques v_0 et v_n étant évidemment proportionnels aux volumes totaux V_0 et V_1, on a

$$\frac{v_n}{v_0} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{\mu u}{(\mu+n)u} = \frac{\mu}{\mu+n}, \qquad (1)\quad v_n = v_0 \frac{\mu}{\mu+n}.$$

Puisqu'on suppose imperméables à la chaleur les parois du cylindre et du réservoir, cela signifie que la compression est adiabatique. En tenant compte de la relation (1), on a donc

$$(2)\quad p_n = p_0 \left(\frac{v_0}{v_n}\right)^{\gamma} = p_0 \left(\frac{\mu+n}{\mu}\right)^{\gamma}, \text{ avec } \gamma = \frac{c}{c}.$$

Analysons les conditions de mélange de la n^e cylindrée d'air avec l'air précédemment emmagasiné dans le réservoir et qui se trouve à l'état $(v_{n-1}\ p_{n-1}\ T_{n-1})$. Tout d'abord l'air de cette n^e cylindrée est à l'état atmosphérique $(v_0\ p_0\ T_0)$. En la comprimant adiabatiquement, on commence par l'amener à l'état $(v_{n-1}\ p_{n-1}\ T_{n-1})$, c'est-à-dire à l'état actuel de l'air du réservoir. En continuant à comprimer adiabatiquement, la pression augmente, les soupapes fonctionnent, le mélange s'effectue d'une façon réversible puisqu'au moment du contact l'air du cylindre et celui du réservoir sont dans le même état. A la fin de la compression, après le n^e coup de piston, l'air dans le réservoir est à l'état $(v_n\ p_n\ T_n)$.

2° D'après la formule (9) du n° 23, le travail nécessaire pour produire les n premiers coups de piston, c.à.d. pour comprimer adiabatiquement le gaz en faisant passer son volume de V_0 à V_1 est

$$\mathcal{E} = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = \frac{p_0(\mu+n)u}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\mu+n}{\mu}\right)^{\gamma-1} - 1\right].$$

3° Il nous faut d'abord connaître la température T_n régnant dans le réservoir après le n^e coup de piston. Elle est donnée par la formule (4) du n° 23.

$$(3)\quad T_n = T_0 \left(\frac{v_0}{v_n}\right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{\mu+n}{\mu}\right)^{\gamma-1}.$$

Injectons dans le réservoir après le n^e coup de piston, un poids Q grammes d'eau liquide à la température T_0 de l'atmosphère. La masse de l'air du réservoir est, en désignant par a la masse d'un litre à l'état $(v_0\ p_0)$, $M = (\mu+n)au$. Cette masse d'air va se refroidir à volume constant, puisqu'on néglige le volume de l'eau injectée vis à vis de celui du réservoir. On va donc utiliser la chaleur spécifique c à volume constant. La température T de l'air du réservoir, après l'établissement de l'équilibre thermique, est donnée par l'équation calorimétrique

$$(\mu+n)auc(T_n - T) = Q(T - T_0), \quad T = \frac{(\mu+n)auc\,T_n + QT_0}{(\mu+n)auc + Q},$$

ou, d'après (3), (4) $T = \frac{T_0}{(\mu+n)\,a\,u\,c\,(\mu+n)^{\gamma}\,\mu^{1-\gamma}+Q}\left[a\,u\,c(\mu+n)^{\gamma}\mu^{1-\gamma}+Q\right]$.

La masse d'air étant passée sous volume constant de l'état (T_n, p_n) à l'état (T, p), sa pression après l'établissement de l'équilibre thermique est, en tenant compte de (2) et de (3), $p = p_n \frac{T}{T_n} = \frac{\mu+n}{\mu} p_0 \frac{T}{T_0}$. Il n'y a plus qu'à remplacer T par sa valeur (4).

---

61. – Un aérostat complètement fermé contient une masse d'air m à la température absolue T. L'enveloppe parfaitement souple et imperméable à la chaleur n'est jamais entièrement gonflée dans le champ des expériences et un dispositif convenable permet de fournir de la chaleur à l'air enfermé dans l'appareil. La masse de l'enveloppe et des accessoires est μ. La température ambiante absolue est $\underline{T}$. 1° Quelle relation doit-il exister entre T et $\underline{T}$ pour que l'ascension soit réversible? – 2° Montrer que pour une ascension réversible, dans laquelle la température T est maintenue constante, le travail d'expansion de l'air enfermé dans l'appareil est égal au travail de la pesanteur. Préciser la condition imposée à la température ambiante pour la réversibilité. – 3° La chaleur étant fournie par une pile de force électromotrice E et de résistance intérieure négligeable qui débite dans une résistance convenable, comment pourrait-on dans l'expérience précédente vérifier le principe de l'équivalence? – 4° D'autre part, en l'absence de cette pile, quelle devrait être la loi de répartition de la température ambiante $\underline{T}$ en fonction de l'altitude $\underline{z}$ pour que l'ascension fût réversible? 5° Supposant qu'entre certaines limites on ait $\underline{T} = 300 - 0{,}005\,\underline{z}$, ($\underline{z}$ étant exprimé en mètres) calculer, pour chaque kilogramme d'air emprisonné dans l'appareil, la variation d'entropie dans une ascension réversible de 600 m.

On prendra la chaleur spécifique C de l'air sous pression constante égale à 0,24 et l'intensité de la pesanteur égale à 1000 C.G.S. Le volume des accessoires et la capacité calorifique de l'enveloppe sont supposés négligeables. On considère l'air comme gaz parfait.

(Physique Générale, Paris 1920).

Pour que l'ascension soit réversible, il faut qu'à chaque instant la force ascensionnelle soit nulle, ou, si l'on veut, infiniment petite (positive pour l'ascension, négative pour la descente). Si donc on désigne par m' la masse de l'air déplacé on doit avoir (1) $m + \mu = m'$. Puisque l'enveloppe est parfaitement souple et qu'elle n'est pas entièrement gonflée, la pression est la même à l'intérieur et à l'extérieur. Or, à pression et à volume constants, la masse d'un gaz est inversement proportionnelle à la température absolue. On a donc $m' = m\frac{T'}{\underline{T}}$. En portant cette valeur dans (1), on trouve (2) $\underline{T} = \frac{m+\mu}{m}T$. Telle est la relation simple demandée entre T et $\underline{T}$. On voit que si T est constant, il en est de même de $\underline{T}$.

2° En notant que la masse du gaz est m, la formule (2) du n° 24 montre que le travail d'expansion de l'air pendant la

détente isotherme, quand l'aérostat monte d'une hauteur z au dessus du sol, est (3) $\mathcal{C} = mr\,T \log \frac{p_0}{p}$ en désignant respectivement par p_0 et p les pressions au niveau du sol et à l'altitude z.

Cherchons maintenant la loi de variation de la pression p en fonction de z. Soit ρ la densité de l'air atmosphérique en un point d'altitude z. La pression p qui règne en ce point est égale au poids de la colonne verticale d'air, de section unité, située au-dessus de ce point. Une colonne de hauteur dz a pour poids $\rho g\,dz$. Comme la pression diminue quand z augmente, on a $dp = -\rho g\,dz$. D'ailleurs l'atmosphère étant à la température constante T, comme le montre la relation (2) on a $pv = \frac{p}{\rho} = rT$, (4) $p = \rho rT$, $dp = rT\,d\rho = -\rho g\,dz$, $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g\,dz}{RT}$, $\rho = \rho_0 e^{-gz:rT}$. D'après (4), la loi de variation de p est la même que celle de ρ. Par suite, $p = p_0 e^{-gz:rT}$, $\log \frac{p_0}{p} = \frac{gz}{rT}$. En portant cette valeur dans (3), il vient $\mathcal{C} = mgz\frac{T}{\tau}$, c'est-à-dire, en tenant compte de (2), $\mathcal{C} = (m+\mu)gz$. C'est précisément le travail total de la pesanteur, en valeur absolue. On peut encore écrire $\frac{T}{\tau} = \frac{\mathcal{C}}{mgz}$. Cette relation précise la condition imposée à la température ambiante pour la réversibilité. Elle montre que le rapport de T à τ est égal au rapport du travail total de la pesanteur au travail de la pesanteur pour la seule masse m du gaz emprisonné.

3° Dans la détente isotherme étudiée, le gaz reçoit de la pile la quantité de chaleur équivalente au travail extérieur fourni par lui. On notera donc l'énergie rI^2t fournie par la pile et on devra constater qu'elle est égale au travail $(m+\mu)gz$ développé par la détente.

4° En l'absence de la pile et de toute autre source de chaleur, la détente est adiabatique. On peut donc écrire (5) $dQ = C\,dT + h\,dp = 0$. On considère l'air comme un gaz parfait. On sait (n° 3) que $h = -(C-c)\frac{v}{r} = -(C-c)\frac{T}{p}$. L'équation (5) devient alors $C\,dT = (C-c)\frac{T}{p}\,dp$. L'ascension devant être réversible, T et τ sont proportionnels à p et on peut écrire $C\,d\tau = (C-c)\frac{\tau}{p}\,dp$. En remplaçant p par ρrT et dp par $-\rho g\,dz$, on trouve

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g(C-c)}{rC}, \qquad T = A - \frac{g(C-c)}{rC}z.$$

Ainsi la température ambiante T doit être une fonction linéaire décroissante de l'altitude z pour que l'ascension soit réversible.

5° On a $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C\,dT}{T} + \frac{h\,dp}{T}$.

A cause de la proportionnalité de T et de τ, le premier terme peut s'écrire $\frac{C\,dT}{T} = \frac{C\,d\tau}{\tau} = -\frac{0{,}005\,C\,dz}{300 - 0{,}005z}$ (6)

Le second terme s'écrit $\frac{h\,dp}{T} = -\frac{v\,dp}{JT} = \frac{vpg\,dz}{JT} = \frac{g\,dz}{JT}$, puisque $vp = 1$. Pour intégrer ce second terme il faudrait

connaître numériquement T en fonction de z ou de ce qui revient au même T en fonction de τ. Or on ne connait que la relation littérale (2) et l'énoncé ne donne ni m ni μ. Mais il y a lieu de remarquer qu'en remplaçant T par la valeur plus petite τ, on augmente ce second terme. Or le coefficient $\frac{g}{J}$ de $\frac{dz}{\tau}$ vaut 0,000024, alors que le coefficient 0,005 C de la même quantité $\frac{d\tau}{\tau}$ dans le premier terme (6) vaut 0,0012, c'à-d cinquante fois plus. On fera donc une erreur insignifiante en écrivant $\frac{h\,dp}{T} = \frac{g\,dz}{J\tau}$. La variation d'entropie, pour un gramme d'air T emprisonné dans l'appareil, dans une ascension réversible de 600 m est

$$\delta S = C\int \frac{d\tau}{\tau} + \frac{g}{J}\int_0^{600} \frac{dz}{300 - 0{,}005z}.$$

La première intégrale est

$$C\,\Big|\,\mathrm{Log}(300 - 0{,}005z)\Big|_0^{600} = 0{,}24\,\mathrm{Log}\,\frac{297}{300}.$$

La seconde intégrale est

$$-\frac{g}{J}\,\frac{1}{0{,}005}\,\mathrm{Log}\,\frac{297}{300} = -0{,}0048\,\mathrm{Log}\,\frac{297}{300}.$$

Par suite, $\delta S = 0{,}2352\,\mathrm{Log}\,\frac{297}{300}$. Pour 1 Kilogramme d'air, la variation d'entropie sera $\Delta S = 235{,}2\,\mathrm{Log}\,\frac{297}{300} = -2{,}364$. Cette variation est négative.

---

62. — Un aérostat sphérique de 10 mètres de rayon est gonflé, au départ, d'hydrogène à 90% seulement de son volume. La température est zéro et la force ascensionnelle est de 20 Kilogs. On admet que l'enveloppe, une fois complètement remplie, ne peut se distendre et qu'elle est imperméable aux gaz. Cet aérostat s'élève dans une atmosphère parfaitement calme et sèche depuis longtemps jusqu'à une hauteur x que l'on calculera. On demande quelle est alors la traction exercée sur l'étoffe à la partie supérieure du ballon et quelle serait à cette altitude x la composition de l'air en supposant que l'atmosphère parfaitement calme renfermait au départ 21 % d'oxygène en volume. (Physique générale. Proposé à la Sorbonne)

La force ascensionnelle est égale à l'excès de la poussée sur le poids total P de l'appareil. Soit V le volume du ballon en mètres cubes, quand il est complètement gonflé. Au départ, la poussée est $\frac{9V}{10} \times 1^{k}{,}293$. On a donc (1) $\frac{9V}{10} \times 1{,}293 - P = 20$.

Soit p la pression et T la température absolue à l'altitude x où le ballon s'arrête. L'aérostat est alors complètement gonflé. La poussée étant nulle on a (2) $1{,}293\,V \times \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T} - P = 0$.

En éliminant P entre (1) et (2), il vient

$$\frac{p}{T} \times \frac{T_0}{p_0} = \frac{9}{10} - \frac{20}{1{,}293\,V} = \frac{9}{10} - \frac{20 \times 3}{4000\,\pi \times 1{,}293} = 0{,}89631$$

En évaluant les pressions en centimètres de mercure, on a $p_0 = 76$ et comme $T_0 = 273$, on trouve (3) $\frac{p}{T} = 0{,}2495$.

Une seconde relation entre p et T est obtenue en supposant applicable la loi des transformations adiabatiques. La

formule (3) du n° 23 donne (4) $\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\gamma-1}$.
Éliminons T entre (3) et (4), il vient, en prenant les logarithmes dans le système décimal

$$\log p = \gamma \log 0{,}2495\, T_0 - (\gamma - 1) \log p_0 .$$

En faisant $\gamma = 1{,}4$, on trouve $p = 65{,}2$ cm., $T = \frac{65{,}2}{0{,}2495} = 261°3$ abs. soit $t° = -11°7$ C.

Cherchons maintenant la loi de la variation de la température en fonction de l'altitude x. Soit ρ la densité de l'air atmosphérique en un point d'altitude x. La pression p qui règne en ce point est égale au poids de la colonne verticale d'air, de section unité, située au dessus de ce point. Une colonne de hauteur dx a pour poids $\rho g\, dx$, et comme la pression diminue quand x augmente on a $-dp = \rho g\, dx$. D'ailleurs, $\rho = 1 : v$ en désignant par v le volume spécifique. D'après la formule (5) du n° 3 on a $C\, dT = \frac{C-c}{E} v\, dp = -\frac{C-c}{E} g\, dx$, puisque $v\rho = 1$,
$C(T_0 - T) = \frac{C-c}{E} g x$, $x = \frac{E}{J} \frac{1}{C} (T_0 - T)$, en utilisant la formule de Mayer. Employons le système C.G.S. en faisant $J = 4{,}185 \times 10^7$, $C = 0{,}239$, $g = 981$. On trouve $x = 11\,300$ cm, soit environ 1200 mètres, ce qui correspond à un abaissement de température d'un degré par 102 mètres environ d'élévation. Ce résultat est purement théorique. En pratique on a trouvé, dans certains cas, un abaissement d'un degré par 180 mètres d'élévation. Cette énorme différence tient à ce que nous avons appliqué la loi des transformations adiabatiques. En réalité, il y a réchauffement de l'atmosphère par suite du rayonnement mutuel des gaz des parties hautes et des parties basses de l'atmosphère. D'autre part, nous avons supposé l'atmosphère parfaitement sèche et calme depuis longtemps ; nous négligeons ainsi la présence de la vapeur d'eau et le phénomène du brassage de l'air par les courants atmosphériques, ce qui modifie complètement les résultats.

Déterminons maintenant, à l'altitude de 1200 mètres, la traction exercée sur l'étoffe à la partie supérieure du ballon. La pression $p = 65{,}2$ cm., déterminée plus haut, est la pression atmosphérique extérieure. La pression intérieure p' due à l'hydrogène est donnée par l'équation de Laplace $p' v'^{\gamma} = p_0 v_0^{\gamma}$, en remarquant que le volume au départ n'est que les 9/10 du volume final ; $\log p' = \log 76 + 1{,}4 \log \frac{9}{10}$, $p' = 65^{cm}{,}58$. Il est logique d'admettre que ces pressions p et p' s'entendent au niveau du centre du ballon, supposé placé à 1200 mètres. La différence 0,38 cm. de mercure correspond à une pression de $0{,}38 \times 13{,}6 = 5{,}17$ gr. par cm². Au sommet du ballon, c. à d. à 10 mètres du centre, suivant la verticale, nous avons à tenir compte en outre de la différence des poids de 2 colonnes d'air et d'hydrogène d'une hauteur de 10^m et d'une section de 1 cm², c. à. d. d'un volume d'un litre. Le poids d'un litre d'air à la pression

65,2 cm. et à la température 261°3 est $1,293 \times \frac{65,2}{76} \times \frac{273}{261,3} = 1,16$ gr.
Le poids d'un litre d'hydrogène qu'on supposera placé dans les mêmes conditions de température et de pression (ce qui entraîne une erreur tout à fait insignifiante) est $\frac{1,16}{14,4} = 0,08$ gr.
En définitive, la différence $p_1 - p_2$ des pressions intérieure et extérieure à la partie supérieure du ballon est $5,17 + 1,16 - 0,08 = 6,25$ gr. par cm^2.

Pour trouver la tension de l'enveloppe, nous l'assimilons à la tension superficielle A des phénomènes capillaires et nous écrivons $p_1 - p_2 = \frac{2A}{R}$, d'où $A = \frac{6,25 \times 1000}{2}$ gr, soit $3^k,125$ par centimètre de longueur, ou, pour nous conformer à l'usage établi dans la technique des ballons, 31,25 kilogs par décimètre.

Déterminons enfin la composition de l'air à l'altitude x. L'oxygène et l'azote se détendent dans l'atmosphère indépendamment l'un de l'autre. Soit δ_1 la densité de l'oxygène, δ_2 celle de l'azote, a_0 le poids d'un centimètre cube d'air à 0° et 76 cm. a le poids d'un cm^3 d'air à la pression p et à la température T. On a

$$-dp_1 = a\delta_1 g\, dx, \qquad -dp_2 = a\delta_2 g\, dx, \qquad a = a_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, on peut représenter la température absolue T en fonction de la hauteur x par une relation de la forme $T = T_0(1 - kx)$, la constante k étant déterminée par la condition que

$$\frac{dx}{dT_0} = -10300, \text{ d'où } \frac{dx}{dT} = -\frac{1}{T_0 k} = -10300, \quad k = \frac{1}{273 \times 10300}$$

On a donc

$$-\frac{dp_1}{p_1} = \frac{a_0}{p_0}\delta_1 g \frac{dx}{1 - kx},$$

$$\text{Log}\frac{p_1}{p_{10}} = \frac{a_0 \delta_1 g}{p_0 k} \text{Log}(1 - kx), \text{ pour l'oxygène,}$$

$$\text{Log}\frac{p_2}{p_{20}} = \frac{a_0 \delta_2 g}{p_0 k} \text{Log}(1 - kx), \text{ pour l'azote,}$$

en désignant par p_{10} et p_{20} les pressions au départ de l'oxygène et de l'azote, égales respectivement à $p_{10} = 0,21\, p_0$ et $p_{20} = 0,79\, p_0$.
Effectuons les calculs en employant le système CGS et les logarithmes décimaux.

$$\log\frac{p_1}{p_{10}} = \frac{1,293 \times 1,105 \times 981 \times 273 \times 10300}{1000 \times 76 \times 13,6 \times 981} \log\left(1 - \frac{120.000}{273 \times 10300}\right).$$

On trouve $p_1 = 0,844\, p_{10}$, puis $p_2 = 0,862\, p_{20}$. La proportion d'oxygène, à l'altitude de 1200 m. serait donc

$$100\frac{p_1}{p_1 + p_2} = 100\frac{0,844 \times 0,21\, p_0}{0,844 \times 0,21\, p_0 + 0,862 \times 0,79 p_0} = 20,65\ \%$$

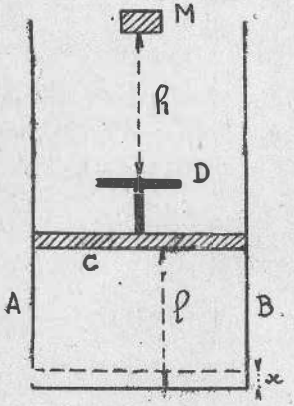
au lieu de 21%. Ce chiffre n'est pas conforme à la réalité, pour toutes les raisons exposées plus haut. On a fait des expériences directes à des altitudes voisines de 1200^m et on a trouvé que la proportion d'oxygène, en volume, tout en étant inférieure à 21% était supérieure à 20,9 %.

63. — Un cylindre à parois très épaisses AB est fermé par un piston C dont la tige est surmontée d'une plateforme D sur laquelle on fait tomber une masse M d'une hauteur h. On demande jusqu'où va descendre au minimum le piston et à quelle température au maximum pourra être porté le gaz contenu dans le cylindre.

Données numériques. — $h = 20$ cm ; $M = 30$ kilogs ; section du cylindre $S = 5$ cm^2 ; hauteur initiale de la colonne d'air $l = 30$ cm. La pression initiale p_0 du gaz, supposée égale à la pression atmosphérique, est celle d'une colonne de mercure de 75 cm. Température initiale 17°. Le gaz est supposé être de l'air. Qu'arriverait-il si c'était du protoxyde d'azote ?

(Proposé à la Sorbonne. Physique générale).

Soit x la distance, comptée à partir du fond du cylindre, à laquelle se trouve le piston à la fin de sa chute (Il ne peut s'agir que d'une position moyenne, car le piston subira certainement une série d'oscillations). En négligeant la masse du piston, le travail $\mathcal{C}$ effectué contre le gaz est la somme de deux travaux, l'un effectué par le poids Mg, l'autre effectué par la pression atmosphérique, ce qui donne



$$(1) \qquad \mathcal{C} = Mg(h + l - x) + (l - x) S p_0$$

Nous allons donner une autre expression de ce travail. Si on opère rapidement, on se trouve dans les conditions du briquet à air et on peut admettre que le gaz est comprimé adiabatiquement. D'après la formule (9) du n° 23, le travail reçu par le gaz est $\mathcal{C} = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$. Mais $v_0 = Sl$, $v_1 = Sx$; donc

$$(2) \qquad \mathcal{C} = \frac{p_0 l S}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{l}{x}\right)^{\gamma-1} - 1\right].$$

En égalant les seconds membres de (1) et de (2), il vient

$$(3) \qquad Mg(h + l - x) + (l - x) S p_0 = \frac{p_0 l S}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{l}{x}\right)^{\gamma-1} - 1\right].$$

Cette équation transcendante donne x. Nous allons la résoudre par approximations successives. On prévoit que x sera faible ; nous commençons donc par négliger les termes en x dans le premier membre : $\left(\frac{l}{x}\right)^{\gamma-1} = 1 + (\gamma - 1)\frac{Mg(h+l) + p_0 l S}{p_0 l S} = \gamma + (\gamma - 1)\frac{Mg(h+l)}{p_0 l S} = A$.

Prenons les logarithmes décimaux : $\log x = \log l - \frac{\log A}{\gamma - 1}$. On a $p_0 = 75 \times 13{,}6 \times 981 = 10^6$ barves. Pour l'air, $\gamma = 1{,}40$. On a donc $\log x = \log 30 - \frac{\log 5{,}324}{0{,}4}$. On en tire $x = 0{,}45$ cm et en portant cette valeur dans le 0,4 premier membre de (3) et recommençant le calcul, on trouve en seconde approximation $x = 0{,}47$ cm.

En laissant de côté la très faible erreur due au mode de calcul,

on peut se demander si cette valeur de x est trop grande ou trop petite. L'énoncé demande jusqu'où descend le piston au minimum ; il ne peut certainement pas faire allusion aux frottements car leur influence ne pourrait faire qu'augmenter x ; le piston ne descendrait donc pas au niveau x. D'ailleurs, si le piston ou le cylindre sont bien graissés, les frottements sont négligeables. Mais il y a autre chose ; nous avons supposé la compression adiabatique. En réalité la paroi absorbe de la chaleur d'autant plus que la température atteinte par le gaz est très élevée, comme nous allons le voir plus loin. La force élastique réelle de l'air est donc moindre que dans la compression adiabatique, puisque la température est moindre, et le piston descend davantage. Il descend donc bien au moins au niveau x.

Cherchons maintenant la température T_1 atteinte par le gaz. Elle est donnée par la formule (4) du n° 23,

$$T_1 = T_0 \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{l}{x}\right)^{\gamma-1}.$$

En faisant $T_0 = 290°$, $x = 0,47$ on trouve $T_1 = 1529°$ absolus soit $1256°$ centigrades. C'est bien un maximum, comme le demande l'énoncé, puisque nous avons supposé qu'il n'y avait pas de pertes de chaleur.

Si le gaz était du protoxyde d'azote, il se décomposerait en dégageant de la chaleur.

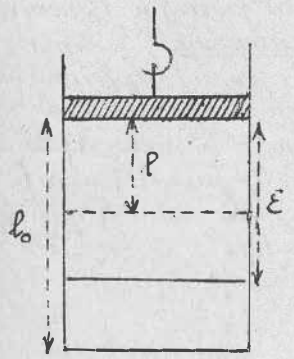
---

64. — Un cylindre vertical est obturé par un piston de masse P. Celui-ci est soutenu par une corde munie d'un crochet et enroulée sur un treuil. Le cylindre et le piston sont supposés imperméables à la chaleur ; le frottement du piston est assez faible pour être négligé. Le cylindre renferme de l'air sec à 0° et à la pression atmosphérique qui est actuellement normale. 1° On déroule le treuil assez lentement pour qu'on puisse considérer la compression comme s'effectuant à chaque instant d'une manière réversible, et jusqu'à ce que le piston se décroche et cesse de descendre. Calculer la température de l'air et la hauteur qu'il occupe dans le cylindre à ce moment et le travail reçu par l'opérateur. 2° On se prépare à répéter l'expérience ; mais le piston se décroche au moment du départ. Calculer encore, au moins approximativement, la température de l'air et la hauteur qu'il occupe à la fin de l'expérience.

Données numériques. — Section du cylindre : $S = 25$ cm^2. Hauteur initiale occupée par l'air $l_0 = 1$ mètre. — Masse du piston $P = 51,65$ kgs. (Le poids de la corde est négligeable). — Rapport des deux chaleurs spécifiques principales de l'air $\gamma = 1,40$. Chaleur spécifique de l'air à pression constante $C = 0,24$. (Physique générale Paris 1921).

1° Pour que la condition de réversibilité soit satisfaite, c.à.d. pour que l'équilibre puisse être considéré comme existant à chaque instant, il est indispensable que l'on soutienne convena-

blement le poids pendant la chute, de telle façon que la force due au poids varie graduellement de zéro à $F_1 = Pg$. Soit ε la quantité dont s'est enfoncé le piston quand il a cessé de descendre. Bien que le travail effectué par la pesanteur soit égal à $F_1 \varepsilon$, nous allons montrer que le travail reçu par le gaz, du fait du poids du piston, est seulement $\frac{1}{2} F_1 \varepsilon$. En effet quand la force croît de zéro à F_1, le raccourcissement l du cylindre d'air croît de zéro à ε. On peut supposer que ce raccourcissement est proportionnel à la force avec cette condition que la force est égale à Pg pour $l = \varepsilon$, ce qui donne $F = Pg \frac{l}{\varepsilon}$. Le travail reçu par l'air, du fait du poids du piston, est



$$\mathcal{E}_1 = \frac{Pg}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} l\,dl = \frac{Pg}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{1}{2} F_1 \varepsilon.$$

Pour avoir le travail total $\mathcal{E}$ reçu par l'air il faut ajouter à $\mathcal{E}_1$ le travail fourni par la pression atmosphérique p_0. On a donc

$$(1) \quad \mathcal{E} = Pg \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon S p_0.$$

Nous allons donner une autre expression de ce travail. La compression étant adiabatique par hypothèse, le travail reçu par le gaz est, d'après la formule (9) du n° 23

$$\mathcal{E} = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{v_0}{v_1} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right].$$

Mais $v_0 = S l_0$, $v_1 = S(l_0 - \varepsilon)$. Donc

$$(2) \quad \mathcal{E} = \frac{p_0 S l_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{l_0}{l_0 - \varepsilon} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right].$$

En égalant les seconds membres de (1) et de (2), il vient

$$(3) \quad Pg\varepsilon + 2\varepsilon S p_0 = \frac{2 p_0 S l_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{l_0}{l_0 - \varepsilon} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right],$$

$$(4) \quad \varepsilon = \frac{2 p_0 S l_0}{(\gamma - 1)(Pg + 2 S p_0)} \left[\left(\frac{l_0}{l_0 - \varepsilon} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right].$$

Evaluons les quantités dans le système CGS.

$$\varepsilon = \frac{2 \times 76 \times 981 \times 13{,}6 \times 25 \times 100}{0{,}4 \left[51650 \times 981 + 2 \times 25 \times 76 \times 981 \times 13{,}6 \right]} \left[\left(\frac{100}{100 - \varepsilon} \right)^{0{,}4} - 1 \right], \quad \varepsilon = 125 \left[\left(\frac{100}{100 - \varepsilon} \right)^{0{,}4} - 1 \right]$$

Nous tombons ainsi sur une équation transcendante de la forme $\varepsilon = f(\varepsilon)$. Selon l'usage, nous la résolvons par la méthode des approximations successives. Après quelques tâtonnements, on trouve $\varepsilon = 64{,}8$ cm. Par conséquent la hauteur occupée par l'air dans le cylindre est

$$h_1 = l_0 - \varepsilon = 35{,}2 \text{ cm}.$$

La température T_1 atteinte par l'air est donnée par la formule (4) du n° 23. $T_1 = T_0 \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^{\gamma - 1} = T_0 \left(\frac{l_0}{h_1} \right)^{\gamma - 1}$.

En faisant $T_0 = 273°$, on trouve $T_1 = 415°$ abs. soit $142°$ C. D'après (2) le travail reçu par l'opérateur, évalué dans le système métrique, est

$$\mathcal{E} = \frac{10330}{0{,}4} \times 0{,}0025 \left[\left(\frac{100}{35{,}2} \right)^{0{,}4} - 1 \right] = 33{,}5 \text{ kilogrammètres}.$$

2° Si le piston se décroche au moment du départ, il y a rupture brusque de l'équilibre. Le piston étant abandonné à lui-même sans être soutenu, la pression extérieure, somme de la pression atmosphérique et de celle due au poids du piston, est très notablement supérieure à la pression intérieure. La compression adiabatique ne s'effectue plus d'une façon réversible. Le piston en tombant dépasse tout d'abord sa position d'équilibre; il ne l'atteint qu'après une série d'oscillations qui modifient le phénomène au point de vue thermique. C'est pourquoi l'énoncé demande de calculer, approximativement seulement, la température de l'air et la hauteur qu'il occupe à la fin de l'expérience. Nous supposerons donc, pour effectuer le calcul, que le piston atteint du premier coup sa position d'équilibre et nous désignerons par ε' la longueur dont il s'est alors enfoncé. Cette fois, le travail $Pg\varepsilon'$ effectué par le poids du piston est reçu en entier par le gaz et le travail total effectué contre le gaz est $\mathcal{E}' = Pg\varepsilon' + \varepsilon' S p_0$. Les équations (3) et (4) sont remplacées par les suivantes

$$Pg\varepsilon' + \varepsilon' S p_0 = \frac{p_0 S l_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{l_0}{l_0 - \varepsilon'}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$$

$$\varepsilon' = \frac{p_0 S l_0}{(\gamma-1)(Pg + S p_0)}\left[\left(\frac{l_0}{l_0-\varepsilon'}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = 83{,}36\left[\left(\frac{100}{100-\varepsilon'}\right)^{0{,}4} - 1\right]$$

Après quelques tâtonnements, on trouve $\varepsilon' = 82$ cm. Par suite, la hauteur occupée par l'air dans le cylindre est $h_2 = l_0 - \varepsilon' = 18$ cm. C'est à peu près la moitié de la valeur trouvée quand la compression était effectuée d'une façon réversible. La température T_2 atteinte par l'air est

$$T_2 = T_0\left(\frac{l_0}{h_2}\right)^{\gamma-1} = 273\left(\frac{100}{18}\right)^{0{,}4} = 542° \text{ abs. ou } 269° \text{C.}$$

---

65. — Un corps de pompe dont les parois sont imperméables à la chaleur renferme, à l'état initial, un litre d'air à 0° sous la pression normale. Il renferme aussi une résistance formée d'un métal dont la résistivité est proportionnelle à la température absolue T et l'on maintient une différence de potentiel constante E entre les extrémités de cette résistance. En admettant que l'air et le métal sont à chaque instant à la même température, négligeant la dilatation du métal et considérant l'air comme un gaz parfait: 1° Écrire la relation différentielle qui existe entre T, le temps θ et le volume spécifique v de l'air. 2° Le piston étant immobilisé, calculer l'échauffement du gaz au bout d'une minute. 3° Le piston étant libéré, calculer le temps au bout duquel le volume du gaz aurait doublé, la température demeurant constante grâce à cette augmentation de volume.

Données numériques. — E = 5 volts. Valeur de la résistance à 0°: $r_0 = 1$ ohm. Capacité calorifique de cette résistance 9,78. Chaleur spécifique de l'air sous volume constant: 0,170.

(Physique générale. Paris, Octobre 1925)

1° Pendant le temps $d\theta$, la quantité de chaleur fournie à l'air est $dQ = \frac{E^2}{Jr}\,d\theta$, en désignant par r la

valeur de la résistance à la température absolue T. En posant $\alpha = \frac{1}{273}$, il découle de l'énoncé que $r = r_0 \alpha T$. Désignons par h la capacité calorifique de la résistance, par a la masse de l'air, par v son volume spécifique, par c sa chaleur spécifique sous volume constant. La chaleur dQ est employée à échauffer la résistance et l'air et à produire le travail $ap\,dv$. On a donc la relation différentielle cherchée

$$(1) \qquad \frac{E^2 d\theta}{J r_0 \alpha T} = (h + ac)\,dT + \frac{ap\,dv}{J}.$$

2° Si le piston est immobilisé, on a $dv = 0$. Par suite $T\,dT = \frac{E^2 d\theta}{J r_0 \alpha (h+ac)}$. Intégrons : $\frac{T_1^2 - T_0^2}{2} = \frac{E^2 \theta}{J r_0 \alpha (h+ac)}$. Employons le système pratique. $E = 5$, $r_0 = 1$, $J = 4,185$, $a = 1,293$, $T_0 = 273$, $\theta = 60$, $h + ac = 9,78 + 0,22 = 10$. On trouve $T_1 = 306°,75$ absolus, soit $33°,75$ centigrades.

3° A température constante $T = 273$, on a $dT = 0$ et $dT = 1$. La pression reste constamment égale à la pression atmosphérique normale p_0. La relation (1) se réduit à $d\theta = \frac{r_0 a p_0 dv}{E^2}$. Intégrons : $\theta = \frac{r_0 p_0}{E^2}(av_1 - av_0)$. Employons le système CGS. D'après l'énoncé on doit avoir $av_1 - av_0 = 1000$. Par suite

$$\theta = \frac{1 \times 10^9 \times 76 \times 13,6 \times 981 \times 1000}{25 \times 10^{16}} = 4 \text{ secondes}.$$

---

66. On considère l'anhydride carbonique dont l'équation d'état peut être représentée d'une manière suffisante par la formule (1) $\left(p + \frac{\alpha}{v^2}\right)(v - b) = \varepsilon T$, avec $\alpha = 1,89 \times 10^9$, $b = 0,973$, $\varepsilon = 1,89 \times 10^6$. Ces valeurs correspondent à 1 gramme du corps; la pression p et le volume v sont exprimés en unités CGS ; T est la température absolue, qu'on peut prendre pratiquement égale à la température centigrade normale augmentée de 273. L'expérience donne, pour les chaleurs spécifiques du gaz carbonique à pression constante et à volume constant, en calories par gramme et par degré centigrade : $C = 0,210$, $c = 0,160$; d'ailleurs ces chaleurs spécifiques peuvent être considérées comme constantes dans un assez grand intervalle de températures et de pressions.

Ceci posé : 1° Calculer la chaleur de dilatation l qui correspond à une variation du volume à température constante. Chercher, pour 1 gramme du gaz, les expressions de l'énergie interne et de l'entropie, en fonction de la température et du volume. 2° Un gramme de gaz étant comprimé à 10 atmosphères, à la température de 15° centigrades, déterminer son volume (on pourra par exemple, construire sur papier quadrillé et utiliser, dans le voisinage de la valeur de v cherchée, la courbe qui représente p en fonction de v, à 15° C). On détend le gaz, d'une façon isotherme et réversible, jusqu'à ce que sa pression soit égale à 1 atmosphère ; calculer son nouveau volume, la quantité de chaleur qu'il a fallu lui fournir et le travail qu'il a effectué. On comparera ces résultats avec ceux qu'on

aurait obtenus si on avait pu considérer le gaz comme parfait. — 3° Un récipient de 2,4 litres, fermé par un robinet, contient du gaz carbonique sous la pression de 10 atmosphères; il est placé dans un calorimètre dont la température est celle de l'air extérieur, 15° C. On ouvre le robinet de façon que le gaz s'échappe du récipient avec une vitesse négligeable, jusqu'à ce que la pression soit devenue égale à la pression atmosphérique qui est de 76 cm. de mercure. Quelle est la variation de température de l'eau du calorimètre? La capacité calorifique du calorimètre, de ses accessoires et de l'eau qu'il contient est égale à 8000; celle du récipient est égale à 1000. — 4° Dans le même calorimètre contenant la même masse d'eau, on place maintenant deux récipients identiques au précédent, pouvant communiquer entre eux; l'un contient du gaz carbonique à la pression de 10 atmosphères; dans l'autre on a fait le vide; la température du calorimètre est encore 15° C. On établit la communication entre les deux récipients; quelle sera la variation de température de l'eau du calorimètre? Est-elle mesurable? 5° Du gaz carbonique, comprimé à 10 atmosphères, se détend jusqu'à la pression atmosphérique à travers un tampon d'ouate placé dans un tube dont les parois ne sont pas conductrices de la chaleur, de façon à prendre une vitesse négligeable; la température du gaz avant le tampon est 15° C. Quelle est, une fois l'état stationnaire atteint, l'indication d'un thermomètre placé de l'autre côté du tampon?

(Agrégation de Physique, 1921).

1° Prenons comme variables indépendantes la température absolue T et le volume spécifique v. Les échanges élémentaires de travail et de chaleur sont représentés par $d\mathcal{E} = -p\,dv$, $dQ = c\,dT + l\,dv$, et on a, pour les différentielles de l'énergie et de l'entropie,

(2) $dU = J\,dQ + d\mathcal{E} = Jc\,dT + (Jl - p)\,dv$, (3) $dS = \frac{c}{T}\,dT + \frac{l}{T}\,dv$.

Écrivons qu'elles sont des différentielles totales exactes:

$$J\frac{\partial c}{\partial v} = J\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T}, \quad \frac{1}{T}\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{1}{T}\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{l}{T^2}.$$

Multiplions la seconde relation par JT et retranchons-la de la première; on retrouve la formule de Clapeyron $l = \frac{T}{J}\frac{\partial p}{\partial T}$.

De l'équation d'état (1) on tire (4) $p = \frac{RT}{v-b} - \frac{1}{J}\frac{a}{v^2}$, $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v-b}$. Par suite (5) $l = \frac{T}{J}\frac{R}{v-b}$.

Cherchons l'expression de l'énergie interne pour 1 gramme de gaz. De (2), (4) et (5) on tire

$$dU = Jc\,dT + \frac{a\,dv}{v^2}, \quad (6)\quad U = U_0 + Jc\,T - \frac{a}{v},$$

$$U = U_0 + 4{,}185 \times 10^7 \times 0{,}160\,T - 1{,}89 \times 10^9 \frac{1}{v}.$$

Pour l'entropie, les relations (3) et (5) donnent

$$dS = c\frac{dT}{T} + \frac{1}{J}\frac{R\,dv}{v-b}, \quad S = S_0 + c\log T + \frac{R}{J}\log(v-b),$$

$$S = S_0 + 0{,}160\ \mathrm{Log}\,T + \frac{1{,}89}{4{,}189\times 10}\,\mathrm{Log}\,(v - 0{,}973).$$

2° Pour avoir le volume v d'un gramme de gaz comprimé à 10 atmosphères à la température de 15° C, nous devons faire $p = 10 \times 1{,}013 \times 10^6$ baryes, $T = 288$ dans l'énergie (1), ce qui donne, en divisant par 10^6,

$$(7)\qquad \left(10{,}13 + \frac{1890}{v^2}\right)(v - 0{,}973) - 544{,}32 = 0.$$

On obtient l'ordre de grandeur de v, en cherchant le volume V_1 d'un gramme de gaz considéré comme parfait. L'équation d'état se réduit à $pv = r'T$ avec $r' = \frac{R}{M} = \frac{8{,}3456\times 10^7}{44} = 1{,}89 \times 10^6$. On voit que $r' = r$. En faisant $p = 10 \times 1{,}013 \times 10^6$, on trouve $v = V_1 = 53{,}7\ \mathrm{cm}^3$.

Remarquons tout d'abord que dans l'équation d'état figure le terme $v - b$ avec $b = 0{,}973$. Il est donc logique d'avoir v avec 3 décimales exactes. Comme il serait difficile d'obtenir une telle précision avec un dessin sur papier quadrillé, à moins d'adopter de très grandes échelles, nous préférons faire des substitutions dans l'équation (7). Après quelques tâtonnements, nous trouvons $v_1 = 51{,}127\ \mathrm{cm}^3$ tout à fait exactement.

Détendons le gaz d'une façon isotherme et réversible jusqu'à ce que sa pression soit égale à 1 atmosphère. Le nouveau volume v_2 est racine de l'équation $\left(1{,}013 + \frac{1890}{v^2}\right)(v - 0{,}973) - 544{,}32 = 0$. On trouve $v_2 = 534{,}83\ \mathrm{cm}^3$. On voit que $v_2 > 10\, v_1$.

Calculons maintenant la quantité de chaleur Q qu'il a fallu fournir au gaz dans la détente isotherme. A température constante, on a $dQ = l\,dv$,

$$Q = \frac{rT}{J}\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v-b} = \frac{rT}{J}\,\mathrm{Log}\,\frac{v_2 - b}{v_1 - b} = 30{,}763\ \text{calories}.$$

Le travail effectué par le gaz est

$$\mathcal{E} = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = \int_{v_1}^{v_2}\left(\frac{rT}{v-b} - \frac{a}{v^2}\right)dv = rT\,\mathrm{Log}\,\frac{v_2 - b}{v_1 - b} - a\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right),$$

$$\mathcal{E} = JQ - a\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = 125{,}4 \times 10^7\ \text{ergs soit } 125{,}4\ \text{joules}.$$

Comparons tous ces résultats avec ceux qu'on aurait obtenus si on avait pu considérer le gaz comme parfait. Nous avons vu plus haut que, dans ces conditions, le volume de 1 gramme de gaz sous la pression de 10 atmosphères était $V_1 = 53{,}7\ \mathrm{cm}^3$. Sous la pression de 1 atmosphère le volume serait $V_2 = 10\, V_1 = 537\ \mathrm{cm}^3$. Le gaz carbonique est donc plus compressible que ne l'indique la loi de Mariotte.

D'après la formule (3) du n° 24, la quantité de chaleur à fournir eût été

$$Q' = \frac{rT}{J}\,\mathrm{Log}\,\frac{p_1}{p_2} = \frac{1{,}89\times 10^6 \times 288}{4{,}185\times 10^7}\,\mathrm{Log}\,10 = 29{,}95\ \text{calories}.$$

On voit que $Q' < Q$.

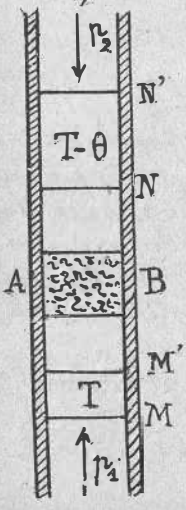
Le travail effectué $\mathcal{E}' = JQ' = 125{,}34$ joules. Il est

sensiblement égal à $\mathcal{C}$.

3° Nous avons vu plus haut que 51,127 cm³ de gaz carbonique à 10 atmosphères et à 15°C pesaient 1 gramme. On en conclut que 2,4 litres pèsent $P = 2400 : 51,127$ grammes. Pour les faire passer de la pression de 10 atmosphères à celle de 1 atmosphère, la température finale étant égale à la température initiale, il faut leur fournir $P \times Q$ calories. La capacité calorifique du système calorimètre – eau – récipient étant égale à 9000, la température de l'eau du calorimètre baisse de $\Delta t = \frac{P \times Q}{9000 \text{ Joule}} = \frac{2400 \times 30,763}{51,527 \times 9000} = 0°,16$.

4° C'est l'expérience de Nous savons déjà que la variation de température sera excessivement faible. Raisonnons d'abord sur 1 gramme de gaz. La formule (6) dans laquelle on fait T constant montre que la variation d'énergie de 1 gramme de gaz quand le volume passe de v_1 à $2v_1$ est $\Delta U = a\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{2v_1}\right) = \frac{a}{2v_1}$. Cette quantité étant positive, l'énergie a augmenté. Considérons d'autre part l'équation générale $\Delta U = J\Delta Q + \Delta \mathcal{C}$. Le gaz étant séparé du milieu extérieur par les parois rigides des récipients, il n'y a pas d'échange de travail; $\Delta \mathcal{C} = 0$ et on a simplement $\Delta U = J\Delta Q$. Comme ΔU est positif, il en est de même de ΔQ, ce qui signifie que le calorimètre doit fournir de la chaleur au gaz.

En notant qu'il y a P grammes de gaz, la quantité de chaleur à fournir est $P \times \Delta Q = P \times \frac{\Delta U}{J} = \frac{aP}{2Jv_1}$. La capacité calorifique du calorimètre et des deux récipients étant égale à 10000, l'abaissement de température de l'eau du calorimètre est $\Delta t = \frac{aP}{20000\, Jv_1} = 0°,002$. La précision d'un thermomètre à mercure pouvant atteindre dans les cas les plus favorables le millième de degré (il suffit de prendre un réservoir suffisamment gros et une tige suffisamment fine), on voit que cet abaissement de température serait mesurable.



5° Il s'agit de l'expérience classique de Joule-Thomson. Le tampon de ouate AB a été traversé par l'unité de masse du gaz quand la masse gazeuse contenue d'abord entre les deux tranches MN est venue occuper l'espace M'N', les deux volumes MM' et NN' étant les volumes v_1 et v_2 occupés par l'unité de masse du gaz, le premier sous la pression p_1 et à la température T, le second sous la pression p_2 et à la température $T - \theta$, en désignant par θ l'abaissement de température à la sortie. Calculons l'énergie $JQ + \mathcal{C}$ reçue pendant ce temps par la masse MN de gaz. Comme nous étudions le régime stationnaire, la partie

$M'N$ est inaltérée et la variation d'énergie est égale à la différence $U_2' - U_1$ des énergies de l'unité de masse dans les deux positions NN' et MM'. Les parois du tube n'étant pas conductrices de la chaleur, le gaz n'échange pas de chaleur avec l'extérieur : donc $Q = 0$. Quant au travail $\mathcal{E}$ reçu par le gaz, il se compose des travaux effectués par les pressions p_1 et p_2 sur les tranches M et N dans les déplacements MM' et NN' ; la pression p_1 fournit au gaz le travail $p_1 v_1$; la pression p_2 reçoit du gaz le travail $p_2 v_2'$. On a donc (8) $U_2' - U_1 = \mathcal{E} = p_1 v_1 - p_2 v_2'$. Ramenons maintenant le gaz de l'état $(T - \theta, p_2)$ à l'état (T, p_2) ; son volume devient v_2 ; il reçoit la quantité de chaleur $C\theta$ et le travail $-p_2 (v_2 - v_2')$. Son énergie devient U_2 ; la variation d'énergie est donc $U_2 - U_2' = JC\theta - p_2 v_2 + p_2 v_2'$. Remplaçons $U_2' + p_2 v_2'$ par sa valeur $U_1 + p_1 v_1$, comme le montre l'équation (8) ; il vient

$$JC\theta = U_2 - U_1 + p_2 v_2 - p_1 v_1$$

En remarquant que U_1 et U_2 se rapportent à la même température, 15°C, la formule (6) montre que l'on a $U_2 - U_1 = a\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = 1{,}89 \times 10^9 \left[\frac{1}{51{,}127} - \frac{1}{534{,}83}\right]$.

Faisant en outre $p_2 = 1{,}013 \times 10^6$ $p_1 = 10 \times 1{,}013 \times 10^6$, $C = 0{,}210$, on trouve $\theta = 6°,52$. Le thermomètre placé de l'autre côté du tampon marquera donc $15 - 6{,}52 = 8°,48$.

Applications des deux principes de la Thermodynamique.

---

67. — Un fluide est caractérisé par l'équation

$$(1) \qquad \left(p + \frac{\alpha}{(v+\beta)^2}\right)\left(v - \frac{\alpha}{v-\beta}\right) = RT$$

entre la pression p, le volume v et la température absolue T. R, α et β sont des constantes. Appliquer à ce fluide les principes fondamentaux de la thermodynamique. Indiquer l'expression du travail interne. Démontrer que la chaleur spécifique sous volume constant c est indépendante de la densité. (Paris).

Écrivons que la différentielle dU de son énergie interne et la différentielle dS de son entropie sont des différentielles exactes. Prenons pour variables indépendantes le volume v et la température absolue T. On a

$$(2) \qquad dU = J\,dQ - p\,dv = Jc\,dT + (Jl - p)\,dv.$$

Pour que ce soit une différentielle exacte, on doit avoir

$$J\frac{\partial c}{\partial v} = J\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T} \quad \text{ou} \quad (3)\ J\left(\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial c}{\partial v}\right) = \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Pour que la différentielle de l'entropie $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c\,dT}{T} + \frac{l\,dv}{T}$ soit une différentielle exacte, on doit avoir

$$\frac{1}{T}\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{1}{T}\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{l}{T^2} \quad \text{ou} \quad (4)\ \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial c}{\partial v} = \frac{l}{T}.$$

La comparaison des formules (3) et (4) donne (5) $l = \frac{T}{J}\frac{\partial p}{\partial T}$ qui est la première formule de Clapeyron.

La variation $d\mathcal{E}_i$ du travail interne est par définition la variation de l'énergie interne à température constante. On l'obtient donc en faisant $dT = 0$ dans l'expression (2);

(6) $d\mathcal{E}_i = (Jl - p)\,dv$. Or de l'équation (1) on tire

$$p = \frac{RT}{v - \alpha} - \frac{\alpha}{(v-\beta)^2}, \quad (7)\ \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v - \alpha}.$$

Remplaçons l et p par leurs valeurs dans l'équation (6), il vient $d\mathcal{E}_i = \frac{\alpha\,dv}{(v-\beta)^2}$ et, en intégrant entre deux valeurs v_1 et v_2,

$$\mathcal{E}_i = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\alpha\,dv}{(v+\beta)^2} = \alpha\left[\frac{1}{v_1+\beta} - \frac{1}{v_2+\beta}\right].$$

On voit que si α est nul, il en est de même de $\mathcal{E}_i$. On retrouve un résultat connu, puisqu'alors l'équation (4) devient l'équation des gaz parfaits $pv = RT$.

Pour démontrer que la chaleur spécifique c sous volume constant est indépendante de la densité ρ, je remarque que $\rho = 1:v$, v désignant le volume spécifique. Il suffit donc de démontrer que $\frac{\partial c}{\partial v} = 0$. Or de (4) et de (5) on tire

$$\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{l}{T} = \frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{T}{J}\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - \frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{T}{J}\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$$

Or, d'après (7), $\frac{\partial p}{\partial T}$ est constant; par conséquent $\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} = 0$ et on a bien $\frac{\partial c}{\partial v} = 0$.

68.— Un gaz obéit à la loi de compressibilité et de dilatation représentée par la formule (1) $\left(p + \frac{b}{v^2}\right)(v - \alpha) = RT$. Appliquer à ce gaz les deux principes de la Thermodynamique en prenant T et v comme variables indépendantes. En déduire l'expression de $C - c$. A quoi se réduit cette expression quand le rapport $b:T$ peut être considérée comme négligeable?

(Physique générale. Paris).

En prenant T et v pour variables indépendantes la quantité élémentaire de chaleur à fournir au gaz est $dQ = c\,dT + l\,dv$. Ecrivons que les différentielles dU et dS de l'énergie interne et de l'entropie

$dU = J\,dQ + d\mathcal{E} = J\,c\,dT + (Jl - p)\,dv$,

$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c}{T}\,dT + \frac{l}{T}\,dv$, sont des différentielles totales exactes:

$$J\frac{\partial c}{\partial v} = J\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T} \quad \text{ou} \quad (2)\ J\left(\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial c}{\partial v}\right) = \frac{\partial p}{\partial T},$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{1}{T}\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{l}{T^2} \quad \text{ou} \quad (3)\ \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial c}{\partial v} = \frac{l}{T}.$$

De (2) et de (3) on tire immédiatement $l = \frac{T}{J}\frac{\partial p}{\partial T}$, qui est la première formule de Clapeyron.

En lui adjoignant la formule (2) du n°3 on a (4) $C - c = l\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{T}{J}\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial v}{\partial T}$. De l'équation (1) on tire $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v-\alpha}$. Pour obtenir $\frac{\partial v}{\partial T}$ nous mettons (1) sous la forme $f(p, v, T) = \left(p + \frac{b}{v^2}\right)(v-\alpha) - RT = 0$, et nous dérivons cette équation par rapport à T en considérant v comme fonction implicite de T et de p et en appliquant la règle de dérivation des fonctions implicites:

$$\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial T} = 0, \quad \left[-\frac{2b}{v^3}(v-\alpha) + p + \frac{b}{v^2}\right] \times \frac{\partial v}{\partial T} - R = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial T} = R : \left[p + \frac{b^2}{v^2} - \frac{2b}{v^3}(v-\alpha)\right] = R : \left[\frac{RT}{v-\alpha} - \frac{2b}{v^3}(v-\alpha)\right].$$

En substituant dans (4), on trouve $C - c = R^2 : J\left[R - \frac{2b(v-\alpha)^2}{Tv^3}\right]$. Si le rapport $b : T$ peut être considéré comme négligeable, on tombe sur la formule de Mayer $C - c = R : J$ applicable aux gaz parfaits.

69.- Un ballon en caoutchouc très mince possède une petite ouverture par laquelle il est assujetti à l'extrémité d'un tube. En insufflant de l'air par celui-ci dans le ballon, on le gonfle. L'état de l'enveloppe du ballon dépend de sa température et de la pression de l'air intérieur, la pression de l'air extérieur étant constante. On constate que, la température passant de 20 à 21° centigrades comptés sur le thermomètre normal, et la pression intérieure étant maintenue constamment égale à celle produite par une colonne de mercure de un mètre, le volume du ballon diminue de un centimètre cube. Le ballon étant ramené à la température de 20°, on fait très brusquement varier la pression intérieure depuis celle de 1000 millimètres de mercure jusqu'à celle de 1001 millimètres. On demande quelle sera la variation de température de l'enveloppe, sachant que la capacité calorifique à pression constante de celle-ci est 10. On admettra que dans les limites de variations de pression aussi faibles que celles indiquées il y a proportionnalité entre les variations de pression et de température. Densité du mercure : 13,6. Intensité de la pesanteur : 981. Equivalent mécanique de la chaleur : $4{,}19 \times 10^7$.

(Physique Générale. Paris).

Prenons pour variables indépendantes la température T et la pression intérieure p. La quantité élémentaire de chaleur à fournir à l'enveloppe de caoutchouc est

(1) $dQ = C\,dT + h\,dp$, C désignant la capacité calorifique de l'enveloppe à pression intérieure constante et h la chaleur latente de compression à température constante; C est donné. Nous allons déterminer h en appliquant les deux principes de la Thermodynamique.

Pour évaluer le travail élémentaire $d\mathfrak{T}$ effectué par-

les forces extérieures sur l'enveloppe, il y a lieu de remarquer que ces forces extérieures proviennent aussi bien de l'air intérieur que de l'air extérieur. Si donc on désigne par p_e la pression constante de l'air extérieur, on a $d\mathcal{E} = (p - p_e)\,dv$. La différentielle de l'énergie interne est $dU = J\,dQ + d\mathcal{E} = J\,dQ + (p - p_e)\,dv$. Il n'y a pas de doute sur le signe à mettre devant $(p - p_e)\,dv$, car lorsque le volume de l'enveloppe augmente, il en est de même de sa tension, son énergie interne croît, et comme $p > p_e$, il faut bien mettre le signe +. D'autre part, (2) $dv = \frac{\partial v}{\partial T}\,dT + \frac{\partial v}{\partial p}\,dp$. Par conséquent,

$$dT' = \left[JC + (p - p_e)\frac{\partial v}{\partial T}\right]dT + \left[Jh + (p - p_e)\frac{\partial v}{\partial p}\right]dp.$$

La différentielle de l'entropie est $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C}{T}\,dT + \frac{h}{T}\,dp$. Ecrivons que dU et dS sont des différentielles totales exactes, il vient:

$$J\frac{\partial C}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial T} + (p - p_e)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T\,\partial p}\right) = J\frac{\partial h}{\partial T} + (p - p_e)\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial T}, \text{ ou}$$

(3) $J\left(\frac{\partial C}{\partial p} - \frac{\partial h}{\partial T}\right) = -\frac{\partial v}{\partial T}$! $\frac{1}{T}\frac{\partial C}{\partial p} = \frac{1}{T}\frac{\partial h}{\partial T} - \frac{h}{T^2}$ ou (4) $\frac{\partial C}{\partial p} - \frac{\partial h}{\partial T} = -\frac{h}{T}$. De (3) et de (4) on tire $h = \frac{T}{J}\frac{\partial v}{\partial T}$, formule analogue à la deuxième formule de Clapeyron. Mais d'après l'énoncé, à pression constante, pour $dT = 1$, on a $dv = -1$. On a donc, d'après (2), $\frac{\partial v}{\partial T} = -1$ puisque $dp = 0$ et par suite $h = -T : J$. La compression étant faite très brusquement est adiabatique. La variation de température s'obtiendra en faisant $dQ = 0$ dans l'équation (1) ce qui donne $\frac{dT}{T} = \frac{dp}{JC}$. Intégrons entre les limites T et $T + \Delta T$ correspondant aux pressions p et $p + \Delta p$. On a $\mathrm{Log}\frac{T + \Delta T}{T} = \frac{\Delta p}{JC}$.

Ecrivons le premier membre sous la forme $\mathrm{Log}\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)$, ΔT étant faible on a certainement $|\Delta T : T| < 1$, puisque $T = 20 + 273 = 293$; on peut donc développer en série le logarithme et ne conserver que le premier terme $\frac{\Delta T}{T}$, puisqu'on admet qu'il y a proportionnalité entre Δp et ΔT. On a

$$\Delta T = \frac{T\,\Delta p}{JC} = \frac{293 \times 0{,}1 \times 13{,}6 \times 981}{4{,}19 \times 10^7 \times 10} = 0{,}00093 \text{ degré}.$$

Ainsi ΔT est positif; l'enveloppe de caoutchouc s'est échauffée quand on a augmenté sa tension; c'est une conséquence du fait particulier que dans certaines conditions de pression le caoutchouc se contracte quand on le chauffe.

---

70. — Une lame d'un liquide visqueux, comme de l'eau de savon, est formée dans un cadre plan dont un côté rectiligne est mobile et peut glisser sur la partie fixe, de façon qu'on puisse augmenter ou diminuer l'étendue de la lame. Une force extérieure à ce système située dans le plan de la lame et normale au côté mobile est appliquée à celui-ci pour équilibrer la traction capillaire. La constante capillaire ou tension superficielle A du liquide visqueux varie avec la

température suivant la relation $A = A_0(1-\alpha t)$, où A_0 et α sont deux constantes et t la température comptée sur le thermomètre normal. On demande : 1° de montrer qu'il faut fournir de la chaleur à la lame pour maintenir sa température constante quand on augmente sa surface ; 2° de démontrer que la capacité calorifique de la lame à étendue constante est indépendante de cette étendue ; 3° de calculer numériquement l'abaissement de température θ produit, si l'on augmente adiabatiquement d'un dixième de sa valeur primitive l'étendue de la lame. Les phénomènes de variation de surface et de température de la lame sont réversibles.

Données numériques en unités C.G.S. : $A_0 = 80$, $\alpha = 0,0015$; épaisseur primitive de la lame : 0,001 ; chaleur spécifique de la lame : 1 ; densité : 1 ; équivalent mécanique de la calorie : 41.350.000 ; température initiale $t_0 = 27°$. On peut négliger le carré ou les puissances supérieures de $\frac{\theta}{T}$, T représentant la température absolue de la lame.

(Physique Générale. Paris).

1° Le phénomène à étudier ne comporte que deux variables indépendantes, la température absolue T et la surface s de la lame, car la tension superficielle A dépend de la température. On peut donc poser, pour la chaleur à fournir à la lame dans une transformation élémentaire, (1) $dQ = c\,dT + a\,ds$; c représente la capacité calorifique de la lame à surface constante ; a est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la lame quand la surface augmente de l'unité à température constante. La force extérieure appliquée au côté mobile de la lame produit contre les forces de tension superficielle de la lame un travail qui, d'après la théorie des phénomènes capillaires, est égal à $dE = 2A\,ds$, ds désignant l'augmentation de surface de la lame. Le facteur 2 provient de ce que le liquide a deux surfaces libres égales à s ; il y a en effet entre le liquide et l'air deux couches de passage où se manifestent les forces capillaires. On a donc pour la différentielle de l'énergie potentielle interne

$$dV = J\,dQ + 2A\,ds = Jc\,dT + (Ja + 2A)\,ds.$$

Il ne peut y avoir de doute sur le signe à mettre devant $2A\,ds$, car lorsqu'on augmente la surface de la lame, son énergie potentielle augmente et comme A est positif par définition, il faut bien mettre le signe +.

La différentielle de l'entropie est $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c}{T}\,dT + \frac{a}{T}\,ds$. Écrivons que dV et dS sont des différentielles totales exactes

$$J\frac{\partial c}{\partial s} = J\frac{\partial a}{\partial T} + 2\frac{\partial A}{\partial T} \quad \text{ou} \quad (2)\quad J\left(\frac{\partial c}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial T}\right) = 2\frac{\partial A}{\partial T},$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{1}{T}\frac{\partial a}{\partial T} - \frac{a}{T^2} \quad \text{ou} \quad (3)\quad \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{\partial a}{\partial T} = -\frac{a}{T}.$$

De (2) et (3) on tire $\alpha = -\frac{2T}{J}\frac{\partial A}{\partial T}$.
Comme $A = A_0(1-\alpha t)$ et que $T = t + 273$, on a $\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{\partial A}{\partial t} = -A_0\alpha$. Par suite, (4) $a = 2TA_0\alpha : J$.
La quantité de chaleur à fournir à la lame pour maintenir sa température constante quand on augmente sa surface de ds s'obtient en faisant $dT = 0$ dans (1) ce qui donne (5) $dQ = a\,ds = 2TA_0\alpha\,ds : J$. Comme toutes les quantités figurant dans le dernier membre de (5) sont positives, il en est de même de dQ. Il faut donc bien fournir de la chaleur à la lame.

2° De (3) et (4) on tire $\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{\partial a}{\partial T} - \frac{\alpha}{T} = \frac{2A_0\alpha}{J} - \frac{2A_0\alpha}{J} = 0$, ce qui démontre bien que la capacité calorifique c de la lame à étendue constante est indépendante de cette étendue.

3° Nous allons supposer que la surface de la lame est telle que la masse du liquide soit égale à l'unité. Dans cette hypothèse, la capacité calorifique se confondant avec la chaleur spécifique, on a $c = 1$. Le phénomène étant adiabatique, les équations (1) et (4) donnent

$$dT + \frac{2TA_0\alpha\,ds}{J} = 0, \qquad \int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T} = -\frac{2A_0\alpha}{J}\int_{s_0}^{s_1} ds.$$

Si T_0 est la température initiale, la température finale est $T_0 - \theta$ et on a $\operatorname{Log}\frac{T_0-\theta}{T_0} = -\frac{2A_0\alpha}{J}(s_1 - s_0)$. D'après l'énoncé $s_1 - s_0 = \frac{s_0}{10}$ ce qui donne $\operatorname{Log}(1-\theta:T_0) = -2A_0\alpha s_0 = 10J$; θ étant faible, on a certainement $\theta : T_0 < 1$; on peut donc développer le premier membre en série. En ne prenant que le premier terme du développement, il vient, en changeant les signes des deux membres, $\theta : T_0 = 2A_0\alpha s_0 : 10J$. Ainsi θ est positif; il y a donc bien abaissement de température, comme l'indique l'énoncé.

La densité du liquide étant l'unité et l'épaisseur de la lame étant 0,001 cm., la surface s_0 de la lame ayant pour masse l'unité est telle que $s_0 \times 0{,}001 = 1$, d'où $s_0 = 10^3$. Comme $T_0 = 27 + 273 = 300$, on a

$$\theta = 300 \times \frac{2 \times 80 \times 0{,}0015 \times 10^3}{10 \times 4{,}185 \times 10^7} = 0^\circ,000172.$$

---

71. — Une enveloppe élastique d'épaisseur négligeable, et de forme parfaitement sphérique, en équilibre, contient un gaz de pression p et est enveloppée par une atmosphère de pression p'; en désignant par R le rayon de cette enveloppe et par T la température absolue on a:
(1) $p - p' = \frac{a + b\operatorname{Log} R}{R(m + qT)}$ où a, b, m, q sont des constantes et Log indique un logarithme népérien. Les transformations éprouvées par cette enveloppe quand on modifie son rayon et sa température sont réversibles. On demande de calculer, en fonction des données, la quantité de chaleur qu'il faut fournir

à cette enveloppe pour augmenter son rayon de R_1 à R_2 en laissant la température constante.

Nota. — Dans l'intégration à faire se trouve une expression q s'obtient sans difficulté par l'intégration par parties

(Physique générale. Paris)

Prenons pour variables indépendantes la température absolue et le rayon R de l'enveloppe. L'énoncé spécifiant que les transfor mations sont réversibles, nous allons appliquer à la manière ordinaire, les deux principes de la Thermodynamique. La qu tité élémentaire de chaleur à fournir à l'enveloppe est

(2) $dQ = c\,dT + l\,dR$, c désignant la capacité calorifique l'enveloppe à rayon constant, c'est à dire à volume cons tant, et l étant un coefficient qui sera déterminé par l'application des deux principes. Pour évaluer le travail élé mentaire $d\mathcal{E}$ effectué par les forces extérieures sur l'envelop il y a lieu de remarquer que ces forces extérieures provien nent aussi bien de l'air intérieur que de l'air extérieur. a donc $d\mathcal{E} = (p - p')\,dv$. Mais $v = \frac{4}{3}\pi R^3$, $dv = 4\pi R^2 dR$. Par suite en tenant compte de la formule (1), $d\mathcal{E} = 4\pi R\,\frac{a + b\,\mathrm{Log}\,R}{m + qT}\,dR$. La différentielle de l'énergie interne est

$$dU = J\,dQ + d\mathcal{E} = Jc\,dT + \left(Jl + 4\pi R\,\frac{a + b\,\mathrm{Log}\,R}{m + qT}\right) dR.$$

La différentielle de l'entropie est

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c}{T}\,dT + \frac{l}{T}\,dR.$$

Écrivons que dU et dS sont des différentielles totales exactes $J\left(\frac{\partial c}{\partial R} - \frac{\partial l}{\partial T}\right) = -\frac{4\pi q R(a + b\,\mathrm{Log}\,R)}{(m + qT)^2}$, $\frac{\partial c}{\partial R} - \frac{\partial l}{\partial T} = -\frac{l}{T}$

On tire de là (3) $l = \frac{T}{J}\,\frac{4\pi q R(a + b\,\mathrm{Log}\,R)}{(m + qT)^2}$.

Pour calculer la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'enveloppe pour augmenter isothermiquement son rayon de R_1 à R_2 nous faisons $dT = 0$ dans la formule (2); nous rem placons l par sa valeur (3) et nous intégrons

$$Q = \frac{4\pi q T}{J(m + qT)^2} \int_{R_1}^{R_2} (a + b\,\mathrm{Log}\,R)\,R\,dR.$$

On intègre par parties en posant $a + b\,\mathrm{Log}\,R = u$, $R\,dR = d$ et on trouve immédiatement

$$Q = \frac{\pi q T}{J(m + qT)^2}\left[(2a - b)(R_2^2 - R_1^2) + 2b\,(R_2^2\,\mathrm{Log}\,R_2 - R_1^2\,\mathrm{Log}\,R_1)\right]$$

---

72. — Un fluide est défini thermodynamiquement par ses deux relations (1) $(p + \pi)(v - \alpha) = RT$,

(2) $dQ = (a + bT)\,dT + l\,dv$,

π, α, R, a, b désignant des constantes. 1° Expliciter les valeu de l et de la chaleur spécifique C sous pression constante. 2° Ex primer la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de masse de ce fluide pour maintenir sa température invariabl

quand il se détend dans le vide. 3° L'unité de masse de ce fluide se détend isothermiquement dans le vide à T°; du volume 6α au volume 11α, et on le ramène à son volume initial par voie de compression isotherme. Quelle est la quantité totale de chaleur évoluée? (Physique générale Paris)

1° Écrivons que les différentielles de l'énergie interne et de l'entropie $dU = J\,dQ + d\bar{U} = J(a+bT)\,dT + (Jl-p)\,dv$, $dS = \frac{dQ}{T} = \left(\frac{a}{T}+b\right)dT + \frac{l}{T}\,dv$, sont des différentielles totales exactes:

$$0 = J\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T}\,; \qquad 0 = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{l}{T}.$$

En éliminant $\frac{\partial l}{\partial T}$ entre ces deux dernières relations on obtient $l = \frac{T}{J}\frac{\partial p}{\partial T}$ qui est la première formule de Clapeyron. De (1) on tire $p = \frac{RT}{v-\alpha} - \pi$, $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v-\alpha}$. Par suite, (3) $l = \frac{T}{J}\frac{R}{v-\alpha} = \frac{p+\pi}{J}$. Pour calculer C, nous identifions les deux expressions suivantes de dQ, $C\,dT + h\,dp = (a+bT)\,dT + l\left(\frac{\partial v}{\partial T}\,dT + \frac{\partial v}{\partial p}\,dp\right)$ ce qui donne $C = a + bT + l\frac{\partial v}{\partial T}$. Mais on a $v = \frac{RT}{p+\pi} + \alpha$, $\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p+\pi}$. Par conséquent, en tenant compte de (3),

$$(4)\quad C = a + bT + \frac{lR}{p+\pi} = a + bT + \frac{R}{J}.$$

Remarque. — En comparant la formule (2) avec la formule classique $dQ = C\,dT + l\,dv$, on voit que, pour le fluide étudié, $c = a + bT$. Par conséquent la formule (4) n'est pas autre chose que la formule de Robert Mayer $J(C-c) = R$ applicable aux gaz parfaits. Il est curieux de constater qu'elle s'applique au fluide étudié bien qu'il ne soit pas un gaz parfait. Cela tient à ce que l'équation caractéristique (1) ne diffère de l'équation des gaz parfaits $pv = RT$ qu'en ce que l'on a ajouté ou retranché de simples constantes π et α à p et à v.

2° La température étant constante et le fluide se détendant dans le vide, la quantité de chaleur à fournir sert uniquement à exécuter le travail interne nécessaire pour disjoindre les molécules. On sait que ce travail interne est égal au produit de dv par la pression interne $Jl - p$. On a donc, en tenant compte de (3) et en intégrant,

$$dQ = \frac{1}{J}(Jl-p)\,dv = \frac{1}{J}\pi\,dv, \qquad (5)\quad Q = \frac{\pi}{J}(v_1 - v_0).$$

3°) La quantité de chaleur à fournir à température constante, pendant la détente dans le vide, est, par application de la formule (5), $Q_1 = \frac{\pi}{J}(11\alpha - 6\alpha) = \frac{5\alpha\pi}{J}$. Pendant la compression, la quantité de chaleur à fournir s'obtient en intégrant l'expression (2) après y avoir fait au préalable $dT = 0$, ce qui donne, en tenant compte de (3),

$$Q_2 = \int_{11\alpha}^{6\alpha} l\,dv = \frac{RT}{J}\int_{11\alpha}^{6\alpha}\frac{dv}{v-\alpha} = \frac{RT}{J}\operatorname{Log}\frac{5\alpha}{10\alpha} = -\frac{RT}{J}\operatorname{Log} 2.$$

Le signe $-$ indique qu'en réalité la compression dégage de la chaleur. La quantité totale de chaleur évoluée est donc $q = Q_1 + Q_2 = \frac{1}{J}(5\alpha\pi - RT\operatorname{Log} 2)$.

73. — A. La molécule d'un gaz parfait se dissocie partiellement en donnant naissance à deux molécules d'un autre gaz parfait. Ecrire la relation entre la pression p, le volume v, la température absolue T du mélange et la fraction de dissociation α. B. Considérant d'une manière générale un fluide dont l'état ne dépend que de deux variables indépendantes p et v, on représente par $dQ = K\,dp + \lambda\,dv$ la quantité de chaleur élémentaire à fournir à l'unité de masse de ce gaz pour produire les variations dp, dv. Appliquer à ce fluide les principes de la Thermodynamique. En déduire une relation entre K et λ indépendante des dérivées partielles de ces coefficients. — C. Expliciter cette dernière relation pour le mélange. A la fraction de dissociation α sera considérée comme une fonction de la pression p et du volume v du mélange.

Examiner particulièrement le cas où α est nul pour toutes les valeurs de p et de v. (Physique générale. Paris).

A. Un mélange de deux gaz parfaits constitue un gaz parfait. Soit α la fraction dissociée de la molécule du premier gaz; elle donne après la dissociation 2α molécules du second gaz. Le nombre total de molécules est donc maintenant $2\alpha + 1 - \alpha = 1 + \alpha$. Soit v le volume du mélange. La formule (6) du n° 2 qui s'appliquait à une molécule, se transforme en la suivante:

(1) $pv = (1+\alpha)RT$, R désignant la constante universelle d'Avogadro égale à $8{,}316 \times 10^7$ C.G.S. Telle est la relation cherchée.

B. La variation d'énergie est

$$dU = J\,dQ + d\mathcal{E} = JK\,dp + (J\lambda - p)\,dv.$$

La variation d'entropie est $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{K}{T}\,dp + \frac{\lambda}{T}\,dv$.

Ecrivons que dU et dS sont des différentielles totales exactes. On trouve

$$\frac{\partial K}{\partial v} - \frac{\partial \lambda}{\partial p} = \frac{1}{J}, \quad \frac{\partial K}{\partial v} - \frac{\partial \lambda}{\partial p} = \frac{K}{T}\frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\lambda}{T}\frac{\partial T}{\partial p}.$$

On en déduit la relation (2) $\frac{T}{J} = \lambda \frac{\partial T}{\partial p} - K \frac{\partial T}{\partial v}$, indépendante des dérivées partielles de K et de λ.

C. De (1) on tire $T = \frac{1}{R}\frac{pv}{1+\alpha}$, $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R(1+\alpha)}\left[1 - \frac{p}{1+\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right]$, $\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R(1+\alpha)}\left[1 - \frac{v}{1+\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right]$.

Portons ces deux dernières valeurs dans (2), il vient, en tenant compte de (1),

(3) $$\frac{1}{J} = \frac{\lambda}{p} - \frac{K}{v} + \frac{1}{1+\alpha}\left[K\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial p}\right]$$

Si α est nul pour toutes les valeurs de p et de v, ses dérivées partielles sont identiquement nulles et la formule (3) devient $\frac{1}{J} = \frac{\lambda}{p} - \frac{K}{v}$, ce qui constitue une relation remarquable entre les deux coefficients thermiques λ et K des gaz parfaits.

---

74. — On considère un fluide dont la pression p, le volume spécifique v et la température absolue T satisfont entre certaines limites de température et de pression à une équation de la forme

(1) $p\varphi(v) = RT$, $\varphi(v)$ désignant une fonction du volume seul qui, pour les grands volumes, tend vers la valeur limite $\underline{v}$.

1° Montrer en appliquant le principe de l'équivalence que la chaleur spécifique sous volume constant $\underline{c}$ est indépendante du volume. 2° En admettant en outre que $\underline{c}$ soit indépendant de la température, déterminer la forme de la fonction $\varphi(v)$ pour laquelle $C - c$ (où C désigne la chaleur spécifique sous pression constante) a la même valeur que dans l'état gazeux parfait. 3° Cette condition étant supposée remplie, on fait subir au fluide à partir d'une température initiale donnée T_0 et d'une pression initiale également donnée p_0 une détente réversible satisfaisant à la condition (2) $p^c : C\varphi(v) = C^{te}$ jusqu'à ce que la pression soit réduite de moitié. Calculer la température finale T_1. 4° Etant donné en outre le rapport $v_0 : v_1$ du volume initial au volume final, calculer le covolume du fluide.

Application numérique. — $R = 1,89 \times 10^6$ C.G.S. ; $C : c = 1,32$; $T_0 = 473°$ absolus ; $p_0 = 1000$ atmosphères ; $v_0 : v_1 = 0,914$.

(Physique générale. Paris, 1918).

1° Prenons comme variables indépendantes T et v. La quantité de chaleur à fournir au fluide est (3) $dQ = c\,dT + l\,dv$. Le travail fourni par l'extérieur au fluide est $d\mathcal{E} = -p\,dv$. On a donc $dU = J\,dQ + d\mathcal{E} = Jc\,dT + (Jl - p)\,dv$.

Ecrivons que dU est une différentielle totale exacte, (4) $J\frac{\partial c}{\partial v} = J\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T}$. Pour que la différentielle de l'entropie $dS = \frac{c\,dT}{T} + \frac{l\,dv}{T}$ soit une différentielle totale exacte, on doit avoir en multipliant par T, (5) $\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{l}{T}$. De (4) et (5) on tire la première formule de Clapeyron, (6) $l = \frac{T}{J}\frac{\partial p}{\partial T}$ et par suite $\frac{\partial l}{\partial T} = \frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{T}{J}\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$. En portant ces valeurs dans (5) il vient

$$\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{T}{J}\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - \frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{T}{J}\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}.$$

Or, d'après l'équation (1), p est une fonction linéaire de T. On a donc $\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} = 0$ et par suite $\frac{\partial c}{\partial v} = 0$, ce qui montre bien que la chaleur spécifique sous volume constant $\underline{c}$ est indépendante du volume spécifique $\underline{v}$.

2° Cherchons une expression de la différence $C - c$. En prenant T et p comme variables indépendantes, on a (7) $dQ = C\,dT + h\,dp$. D'autre part, on peut mettre (3) sous la forme (8) $dQ = c\,dT + l\left(\frac{\partial v}{\partial T}\,dT + \frac{\partial v}{\partial p}\,dp\right)$.

La comparaison de (7) et de (8) donne $C - c = l\frac{\partial v}{\partial T}$, c.à.d. à cause de (6), $C - c = \frac{T}{J}\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial v}{\partial T}$. Cette différence $C - c$ doit avoir, d'après l'énoncé la même valeur que dans l'état gazeux parfait, c.à.d. celle donnée par la formule de Mayer $C - c = R : J$. On a donc l'équation (9) $R = T\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial v}{\partial T}$. De l'équation (1) on tire $\varphi(v) = \frac{RT}{p}$. Prenons les dérivées partielles des deux membres par

rapport à T, il vient $\varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial T}=\frac{R}{p}$, $\frac{\partial v}{\partial T}=\frac{R}{p\varphi'(v)}$. On a, d'autre part, $p=\frac{RT}{\varphi(v)}$, $\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{\varphi(v)}$. En portant dans (9) ces valeurs de $\frac{\partial p}{\partial T}$ et de $\frac{\partial v}{\partial T}$, on trouve en tenant compte de (1),

$\varphi(v)\varphi'(v)=\frac{RT}{p}=\varphi(v)$, $\varphi'(v)=1$, (10) $\varphi(v)=v-a$.

La constante d'intégration a est le covolume. On voit que la fonction $\varphi(v)$ tend, pour les grands volumes, vers la valeur limite v, comme le demande l'énoncé. L'équation caractéristique du fluide est donc (11) $p(v-a)=RT$

3° Des relations (11), (2) et (10) on tire, en posant $C:c=\gamma$,

(12) $p_0(v_0-a)=RT_0$, (13) $p_1(v_1-a)=RT_1$, $p_0^{1:\gamma}(v_0-a)=p_1^{1:\gamma}(v_1-a)$,

$$\frac{T_1}{T_0}=\frac{p_1(v_1-a)}{p_0(v_0-a)}=\frac{p_1}{p_0}\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{1:\gamma}=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{(\gamma-1):\gamma},$$

$$T_1=T_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=473\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0,32}{1,32}}=400^\circ \text{ absolus}.$$

On remarquera que la relation entre T et p est la même que dans la transformation adiabatique des gaz parfaits.

4° Posons $v_0:v_1=b$. Les équations (12) et (13) deviennent $p_0bv_1-p_0a=RT_0$, $p_1v_1-p_1a=RT_1$. En éliminant v_1 entre entre ces deux dernières équations il vient

$a=R(bp_0T_1-p_1T_0):p_1p_0(1-b)$. Exprimons le covolume a en unités CGS. Comme les pressions entrent d'une façon homogène au premier degré au numérateur et au second degré au dénominateur, nous pouvons continuer à les exprimer en atmosphères, mais à la condition d'introduire au dénominateur le facteur $1,013\times10^6$ qui représente en baryes la pression d'une atmosphère. En faisant $b=0,914$ on a

$$a=\frac{1,89\times10^6(0,914\times1000\times400-500\times473)}{1,013\times10^6\times500\times1000\times0,086}=5,6.$$

Fusion.

75.- Calculer en se plaçant dans le système CGS, la variation éprouvée par la température de fusion de la glace, lorsqu'on augmente de 10 atmosphères la pression subie par ce corps. On suppose la densité de l'eau égale à 1, celle de la glace égale à 0,917. On donne la chaleur de fusion de la glace $L=80$ et l'équivalent mécanique $E=4,17\times10^7$.

(Physique Générale Marseille).

La formule de Clapeyron donne pour la chaleur latente de fusion de la glace, $L=\frac{T}{E}(u'-u)\frac{dp}{dT}$, u' volume spécifique du liquide, u volume spécifique de la glace. Remplaçons la dérivée $\frac{dp}{dT}$ par le rapport $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ des accroissements finis. Il vient $\Delta T=\frac{T}{EL}(u'-u)\Delta p$.

Opérons dans le système CGS. Pour l'eau, $u' = 1$; pour la glace $u = 1 : 0,917$. Faisons $T = 273$, $L = 80$. En notant qu'une pression d'une atmosphère vaut $1,013 \times 10^6$ baryes, on a $\Delta p = 10 \times 1,013 \times 10^6$ baryes. On trouve $\Delta T = -0°,075$. Ainsi quand la pression s'accroît de 10 atmosphères, le point de fusion de la glace s'abaisse de $0°,075$.

---

76. — Les données suivantes sont relatives à la benzine: Température de fusion sous la pression atmosphérique + 5°,43 C.; Chaleur spécifique du liquide 0,40; Chaleur de fusion 30,4; Densité à l'état liquide à la température de fusion 0,880; Densité à l'état solide dans les mêmes conditions 1,031; Coefficient de dilatation 0,00124.

Au moyen de ces données, on demande de résoudre les questions suivantes: 1° Le liquide étant à la température de + 7° C., on le comprime en maintenant sa température constante. Sous quelle pression passera-t-il à l'état solide? 2° Le liquide étant pris à la même température de + 7° et à la pression atmosphérique, on le comprime d'une manière adiabatique. Calculer la variation de température produite par une augmentation de pression de 1 atmosphère, ainsi que la pression nécessaire pour élever la température de 1 degré. — 3° Dans les mêmes conditions (température initiale + 7°, pression initiale égale à la pression atmosphérique, compression adiabatique), à quelle pression la solidification commencera-t-elle à se produire? (*Physique générale*, Paris, 1929).

1° Appliquons la formule de Clapeyron qui donne la chaleur latente de fusion $L = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dp}{dT}$. En remplaçant dp et dT par des accroissements finis Δp et ΔT, il vient (1) $\Delta p = \frac{JL\Delta T}{T(u'-u)}$. Opérons dans le système CGS. On a $J = 4,185 \times 10^7$; $u' = \frac{1}{0,880} = 1,1363$; $u = \frac{1}{1,031} = 0,9699$; $u' - u = 0,1664$; $L = 30,4$. Il est essentiel de remarquer que l'on doit prendre pour T la température de fusion sous la pression atmosphérique, soit $T = 273 + 5,4 = 278,4$. Comme on maintient la température du liquide à 7°, on a $\Delta T = 7 - 5,4 = 1,6$. Pour avoir Δp en atmosphères, il faut diviser par $1,013 \times 10^6$. On trouve $\Delta p = 43,37$ atmosphères. Le liquide passera donc à l'état solide sous la pression de 44,37 atmosphères. Ainsi, par compression, on solidifie la benzine à une température supérieure à son point de fusion normal.

2° La compression étant adiabatique, on a $dQ = C\,dT + h\,dp = 0$, avec $h = -\frac{T}{J}\frac{\partial v}{\partial T}$. En remplaçant encore dT et dp par des accroissements finis on a (2) $\Delta T = \frac{T}{J}\frac{\partial v}{\partial T}\frac{\Delta p}{C}$. Cette fois, nous devons faire $T = 273 + 7 = 280$. Le coefficient de dilatation $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$ est, d'après l'énoncé, égal à 0,00124; on a donc $\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{0,00124}{0,880}v$. Toutes les quantités figurant dans le second membre de (2) étant positives, on voit qu'une augmen-

tation de pression produit une augmentation de température. Pour $\Delta p = 1$ atmosphère, c.à.d. $1{,}013 \times 10^6$ baryes, on a

$$\Delta T = \frac{280 \times 0{,}00124 \times 1{,}013 \times 10^6}{4{,}185 \times 10^7 \times 0{,}88 \times 0{,}40} = 0°{,}0239.$$

On en déduit que l'augmentation de pression nécessaire pour élever la température de 1 degré est $\Delta p = 1 : 0{,}0239 = 41{,}9$ atmosphères, la pression elle-même étant 42,9 atmosphères.

3° La compression adiabatique Δp produit, à partir de la température $t_1 = 7°$ une élévation de température $\Delta T_1 = \frac{T_1}{J} \frac{\partial v}{\partial T} \frac{\Delta p}{C}$. Pour calculer l'augmentation de pression Δp à laquelle commencera la solidification, nous devons donc dans la formule (1) remplacer ΔT par $1{,}6 + \Delta T_1$, ce qui donne

$$\Delta p = \frac{JL}{T(u'-u)} \left(1{,}6 + \frac{T_1}{J} \frac{\partial v}{\partial T} \frac{\Delta p}{C}\right),$$

$$\Delta p = 1{,}6\, JLC : \left[CT(u'-u) - L\, T_1 \frac{\partial v}{\partial T}\right].$$

En faisant $T = 273 + 5{,}4$, $T_1 = 273 + 7$ et en divisant par $1{,}013 \times 10^6$ pour avoir des atmosphères, on trouve $\Delta p = 123$ atmosphères. La solidification commencera donc à se produire à la pression de 124 atmosphères. En comparant avec les résultats du 1°, on voit que dans la compression adiabatique, la pression à laquelle commence la solidification est presque le triple de celle de la compression isothermique, ce qui était à prévoir puisque la compression adiabatique augmente la température.

77.- D'après Bridgman, le point de fusion t du benzène varie avec la pression p comme l'indique le tableau suivant, qui donne en outre la variation Δv du volume spécifique pendant la fusion

p	t	$dt : dp$	Δv
1	5°, 4	0,0285	0,1317
1000	32, 5	0,0241	0,1026
2000	56, 5	0,0219	0,0872
3000	77, 7	0,0201	0,0759

p en Kg par cm^2, t en degrés centigrades, Δv en cm^3 par gramme. 1° Calculer pour les différentes valeurs de p, la valeur de la chaleur latente de fusion L et de la variation d'énergie interne pendant la fusion. Indiquer les unités employées pour exprimer les résultats. 2° La variation de volume Δv et la chaleur latente L varient avec la pression. Démontrer les formules qui donnent les deux quotients différentiels $\frac{d(\Delta v)}{dp}$ et $\frac{dL}{dp}$. En désignant par α la dérivée $\frac{\partial v}{\partial T}$ et par $-\beta$ la dérivée $\frac{\partial v}{\partial p}$, on trouve les deux formules

(1) $\frac{d(\Delta v)}{dp} = \frac{dT}{dp} \Delta\alpha - \Delta\beta$, (2) $\frac{dL}{dp} = \frac{dT}{dp} \Delta C_p + \Delta v - T\Delta\alpha$, où les

quantités $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, ΔC_p désignent les variations des quantités α, β et C_p quand on passe de l'état liquide à l'état solide. 3° Appliquer ces formules au cas du benzène et calculer la valeur de $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ pour les différentes valeurs de p, dans l'hypothèse où le solide et le liquide ont même chaleur spécifique à pression constante.

(*Physique générale. Paris 1927*).

1° La chaleur latente de fusion est donnée par la formule de Clapeyron $L = \frac{T}{J}\Delta v \frac{dp}{dT}$. Comme d'après l'énoncé Δv est positif, on voit que la fusion du benzène s'accompagne d'une augmentation de volume, ainsi que cela a lieu dans l'immense majorité des cas.

Utilisons le système CGS. Comme la pression de 1 kg par cm² vaut $0,981 \times 10^6$ baryes, nous devons diviser par ce dernier chiffre les valeurs de $dT : dp$ données dans l'énoncé. Nous prenons $J = 4,185 \times 10^7$ ergs. Pour $p = 1$ k, on a

$$L = \frac{273 + 5,4}{4,185 \times 10^7} \times 0,1317 \times \frac{0,981 \times 10^6}{0,0285} = 30,16 \text{ cal. gr.}$$

Un calcul analogue donne $L = 30,49$ pour $p = 1000$ k; $L = 30,75$ pour $p = 2000$ k; $L = 31,04$ pour $p = 3000$ k. Ainsi L croît avec p.

La variation d'énergie interne est

$$\Delta U = JQ - p\Delta v = JL - p\Delta v.$$

Faisons l'application pour 1 g. de benzène. Pour $p = 1$ k, on a

$$\Delta U = 4,185 \times 10^7 \times 30,16 - 0,981 \times 10^6 \times 0,1317 = 126,2 \times 10^7 \text{ ergs.}$$

On trouve de même $\Delta U = 117,5 \times 10^7$ ergs pour $p = 1000$; $\Delta U = 111,6 \times 10^7$ ergs pour $p = 2000$; $\Delta U = 107,6 \times 10^7$ ergs pour $p = 3000$. On voit que U décroît quand p croît.

2° La formule $dv = \frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{\partial v}{\partial p} dp = \alpha dT - \beta dp$ donne, avec des accroissements finis $\Delta v = \alpha \Delta T - \beta \Delta p$, puis $\frac{\Delta(\Delta v)}{\Delta p} = \Delta\alpha \frac{\Delta T}{\Delta p} - \Delta\beta = \frac{\Delta T}{\Delta p}\Delta\alpha - \Delta\beta$ et, en revenant à la notation différentielle $\frac{d(\Delta v)}{dp} = \frac{dT}{dp}\Delta\alpha - \Delta\beta$. C'est la formule (x).

Mettons la formule (2) sous la forme $dL = \Delta C_p dT + (\Delta v - T\Delta\alpha)dp$. Faisons une remarque. Alors que Δv est la variation du volume spécifique quand on passe de l'état solide à l'état liquide, ΔC_p et $\Delta\alpha$ sont, d'après l'énoncé, les variations des quantités C_p et α quand on passe de l'état liquide à l'état solide. Pour que toutes les variations se rapportent au passage de l'état solide à l'état liquide, on écrit $dL = -\Delta C_p dT + (\Delta v + T\Delta\alpha)dp$. Mais, à température constante, $\Delta v + T\Delta\alpha = \Delta(v + T\alpha)$. Par suite, $dL = \Delta(v + T\alpha)dp - \Delta C_p dT$ relation évidente qui exprime que la variation dL est égale au travail occasionné par la variation dp, diminué de la quantité de chaleur correspondant à la variation dT.

3° L'énoncé indiquant que $\Delta C_p = 0$, la formule (2) se réduit à $\frac{dL}{dp} = \Delta v - T\Delta\alpha$, qui donne $\Delta\alpha = \left(\Delta v - \frac{dL}{dp}\right) : T$. Avec les valeurs de L que nous avons trouvées au 1°, on pourrait déterminer les valeurs approchées de $\frac{dL}{dp}$ correspondant aux différentes valeurs de p. Mais puisque nous connaissons

quatre valeurs de L, il est préférable de mettre L sous la forme d'une fonction à quatre termes $L = a + bp + cp^2 + dp^3$. On trouve $L = 30,16 + \frac{0,399}{10^3} p - \frac{0,17}{10^6} p^2 + \frac{1}{6 \times 10^{10}} p^3$, d'où $\frac{dL}{dp} = \frac{0,399}{10^3} - \frac{0,17}{10^6} p + \frac{0,5}{10^{10}} p^2$. Pour $p = 1$, on a $\Delta\alpha = 0,00047$; pour $p = 1000$, $\Delta\alpha = 0,000\,33$; pour $p = 2000$, $\Delta\alpha = 0,000\,26$; pour $p = 3000$, $\Delta\alpha = 0,000\,22$.

Connaissant $\Delta\alpha$, la formule (1) donne $\Delta\beta = \frac{dT}{dp} \Delta\alpha - \frac{d(\Delta v)}{dp}$. Avec les données de l'énoncé on pourrait déterminer $\frac{dT}{dp}$ des valeurs approchées de $\frac{d(\Delta v)}{dp}$; mais, ici encore, il vaut mieux prendre une formule à quatre termes

$$\Delta v = 0,317 - \frac{0,03915}{10^3} p + \frac{0,01165}{10^6} p^2 - \frac{0,0016}{10^9} p^3$$

d'où $\frac{d(\Delta v)}{dp} = -\frac{0,03915}{10^3} + \frac{0,0233}{10^6} p - \frac{0,0048}{10^9} p^2$. Pour $p = 1$, on trouve $\Delta\beta = 52 \times 10^{-6}$; pour $p = 1000$, $\Delta\beta = 29 \times 10^{-6}$; pour $p = 2000$, $\Delta\beta = 17,4 \times 10^{-6}$; pour $p = 3000$, $\Delta\beta = 16,8 \times 10^{-6}$.

---

78. — Un corps fond à 72°,5 sous la pression de une atmosphère, à 72°,6 sous la pression de 6 atmosphères, à 72°,7 sous la pression de 11 atmosphères. En fondant, chaque gramme du corps subit une augmentation de volume de $0^{cc},05$. Sachant que l'équivalent mécanique de la chaleur est $J = 4,19 \times 10^7$, on demande quelle est la chaleur latente de fusion de ce corps. Le même corps est placé dans un calorimètre à la température de fusion, une spirale de fil métallique est plongée au milieu du corps en partie fondu; elle est traversée par un courant de 10 ampères et la différence de potentiel mesurée aux extrémités de la spirale qui sortent du bain est de 10 volts. Quelle est la quantité du corps qui sera fondue par seconde, si les parois du calorimètre sont imperméables à la chaleur? On demande de faire ce dernier calcul au moyen des données des deux paragraphes précédents, sans se servir de la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur.

(Physique Générale. Paris).

La formule de Clapeyron donne, pour la chaleur latente de fusion, (1) $L = \frac{T}{J} (u' - u) \frac{dp}{dT}$.

Quand la pression passe de 1 atmosphère à 6 atmosphères, la température de fusion passe de 72°,5 à 72°,6. On a donc, pour ces intervalles, $\Delta p = 5$ atm. soit $5 \times 76 \times 13,596 \times 981$ baryes; $\Delta T = 0°,1$. Quand la pression passe de 6 atmosphères à 11 atmosphères, c-à-d. avec le même Δp, on observe le même ΔT. Autrement dit, pour les températures considérées, la courbe qui représente les variations de la température en fonction de la pression est une droite. La dérivée $dp : dT$ est donc rigoureusement égale au rapport des accroissements finis $\Delta p : \Delta T$ on a, en prenant $T = 72,5 + 273 = 345,5$

$$L = \frac{345,5 \times 0,05 \times 5 \times 76 \times 13,596 \times 981}{4,19 \times 10^7 \times 0,1} = 20,89 \text{ calories}$$

Désignons par x la quantité du corps en grammes qui sera

fondue par seconde. La quantité de chaleur que devra fournir le courant sera $L\alpha$ soit $JL\alpha$ ergs par seconde. Si donc E désigne la différence de potentiel aux extrémités de la spirale, et i le courant, on a $JL\alpha = Ei$, $\alpha = Ei : JL$. Mais nous ne devons pas nous servir de J; nous remplaçons JL par sa valeur tirée de (1), ce qui donne $\alpha = Ei\Delta T : T(w-u)\Delta p$. Évaluons les quantités électriques dans le système électromagnétique C.G.S.

$$x = \frac{10 \times 10^8 \times 10 \times 10^{-1} \times 0,1}{345,5 \times 0,05 \times 5 \times 76 \times 13,596 \times 981} = 1,14 \text{ grammes.}$$

Vaporisation.

79. Rappelons quelques définitions.

Pour transformer un gramme d'eau liquide, pris à la température t_0, en vapeur saturée à la température t, il faut lui fournir une quantité de chaleur $Q = q + L$ qui comprend deux parties : 1° le nombre de calories q nécessaires pour amener l'eau de t_0 à t degrés sans changement d'état. Si on admet que la chaleur spécifique de l'eau est indépendante de la température et égale à l'unité, on a $q = t - t_0$. On désigne quelquefois q sous le nom de <u>chaleur du liquide</u> ou de <u>chaleur sensible</u>.

2° Le nombre de calories L à dépenser pour transformer le gramme d'eau à t degrés en vapeur saturante à la même température. Cette quantité L, appelée <u>chaleur latente de vaporisation</u> se compose elle-même de deux parties : <u>la chaleur latente interne</u> ρ emmagasinée à l'état d'énergie interne dans le fluide, et la <u>chaleur latente externe</u>, ou chaleur dépensée pour vaincre les forces extérieures, égale à $Ap(w-u)$, en posant $A = \frac{1}{J}$ et en désignant par $w-u$ l'augmentation de volume que subit le gramme de fluide en passant de l'état liquide à la température t, à l'état de vapeur saturée à la même température. On a donc $L = \rho + Ap(w-u)$ d'où (1) $\rho = L - Ap(w-u)$.

Jusqu'à 200°C, on peut se contenter de la formule de Regnault : $L = 606,5 - 0,695t$.

Si on fait $t_0 = 0°C$, il vient $Q = q + L = t + L = 606,5 + 0,305t$. Q est alors la <u>chaleur totale de vaporisation</u>.

En multipliant les deux membres de la relation (1) par J, pour avoir des énergies, et en posant $\rho J = \Delta U$, il vient $\Delta U = JL - p(w-u)$. La variation de l'énergie interne dans la vaporisation est ΔU.

Certains auteurs désignent sous le nom de <u>chaleur interne</u> ou d'<u>énergie interne</u> la quantité $q + \rho$.

80. L'entropie et l'énergie d'un gramme de glace à 0° et sous la pression atmosphérique étant prises nulles par définition, on demande de calculer l'entropie et l'énergie : 1° d'un gramme d'eau liquide sous la pression atmosphérique à 0° ; 2° d'un gramme de vapeur d'eau saturante à 100°.

Données numériques. — Chaleur latente de fusion de la glace : $L = 80$ C.G.S. Chaleur latente de vaporisation de l'eau à 100° : $L = 537$ C.G.S. Equivalent mécanique de la chaleur $J = 4{,}19 \times 10^7$ C.G.S. ; $\text{Log}_e 273 = 5{,}60947$; $\text{Log}_e 373 = 5{,}92158$. Une augmentation de pression d'une atmosphère abaisse le point de fusion de la glace de 0°,0075. Dans le voisinage de 100°, la pression maximum de la vapeur d'eau augmente de 0,036 atmosphère par degré. On considérera la chaleur spécifique de l'eau comme constante et égale à l'unité entre 0° et 100° ; on négligera sa dilatation. (Physique Générale - Paris).

Soient S_0, U_0 l'entropie et l'énergie de 1 gr. de glace à 0° ; S_1, U_1 les mêmes quantités pour 1 gr. d'eau liquide à 0° ; S_2, U_2 les mêmes quantités pour 1 gr. de vapeur d'eau saturante à 100°.

1° On a

$$S_1 - S_0 = \int \frac{dQ}{T} = \frac{L_1}{T} = \frac{80}{273} = 0{,}292.$$

Puisque S_0 est nul, on a $S_1 = 0{,}292$. D'autre part, on a :

$$dU = J\,dQ - p\,dv \; ; \quad U_1 - U_0 = JQ - p(v' - v),$$

en désignant par v' le volume spécifique de l'eau et par v le volume spécifique de la glace. La variation de volume $v' - v$ est donnée par la formule de Clapeyron $L_1 = \frac{T}{J}(v' - v)\frac{dp}{dT}$. Comme $Q = L_1$ on a $U_1 - U_0 = JL_1\left(1 - \frac{p}{T}\frac{dT}{dp}\right)$. Les pressions ne figurant dans cette expression que par le rapport $\frac{dp}{p}$, nous les évaluons en atmosphères : $p = 1$; $\frac{dp}{dT} = -\frac{1}{0{,}0075}$. On a donc :

$$U_1 - U_0 = JL_1(1 + 0{,}0075 : 273).$$

Le second terme de la parenthèse étant négligeable devant l'unité et U_0 étant nul par définition, on a

$$U_1 = JL_1 = 4{,}19 \times 10^7 \times 80 = 335{,}2 \times 10^7 \text{ ergs}.$$

2° Nous chauffons maintenant le gramme d'eau de 0° à 100° et nous le vaporisons à 100°. La chaleur spécifique de l'eau étant égale à l'unité, on a

$$S_2 - S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{273}^{373} \frac{dT}{T} + \frac{L}{373}, \quad S_2 = S_1 + \text{Log}\frac{373}{273} + \frac{537}{273} = 2{,}043.$$

Pour l'énergie, on a $U_2 - U_1 = J(100 + L) - p(u' - u)$ en désignant par u' le volume spécifique de la vapeur d'eau et par u le volume spécifique de l'eau liquide. La variation de volume $u' - u$, qui, cette fois est positive est donnée par la formule de Clapeyron $L = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dp}{dT}$. On a donc $U_2 - U_1 = J \times 100 + JL\left(1 - \frac{p}{T}\frac{dT}{dp}\right)$,

$$U_2 - U_1 = 100 \times 4{,}19 \times 10^7 + 4{,}19 \times 10^7 \times 537\left(1 - \frac{1}{373} \times \frac{1}{0{,}036}\right),$$

$$U_2 = 2836{,}6 \times 10^7 \text{ ergs}.$$

81 – Dans un vase clos de 100 litres de capacité, rempli d'air, maintenu à 100° et dont on peut négliger la variation de volume sous l'influence de la pression, on introduit 1 kilog. de glace à 0°. Quand l'équilibre sera établi, quel sera le poids de l'eau transformée en vapeur et quelle sera la quantité de chaleur fournie au système? Chaleur de fusion de la glace 79,2 calories. Chaleur totale de vaporisation de l'eau, d'après les expériences de Regnault, $L = 606,5 + 0,305\,t$. Poids normal du litre de vapeur d'eau 0,804 gramme. On négligera la dilatation de l'eau liquide entre 4° et 100°.

(Physique générale. Proposé à la Sorbonne).

Le poids normal du litre de vapeur d'eau s'entend à 0° et à la pression de 76 cm. de mercure. Pour trouver son poids à 100°, nous admettrons, ce qui n'est pas exact, qu'entre 0° et 100°, c'à.d. entre 273° et 373° absolus, la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait. Le poids du litre de vapeur d'eau saturante à 100° est donc $0,804 \times \frac{273}{373} = 0,588$ gr... (Remarquons qu'en réalité c'est plutôt le poids $\frac{373}{273}$ de 0,588 qui serait mesuré, et le poids de 0,804 qui en serait déduit).

Puisque nous sommes à 100°, il ne peut y avoir en présence que de l'eau et de la vapeur saturante. Soit x le poids de vapeur formée. Le poids de l'eau restante est $1000 - x$. Exprimons que la somme des volumes de l'eau et de la vapeur est égale à 100 litres c'à.d. à 100.000 cm3. Puisqu'on néglige la dilatation de l'eau, on a $1000 - x + \frac{x}{0,000588} = 100.000$, d'où $x = 58,25$ gr.

Calculons maintenant la quantité de chaleur Q qu'il a fallu fournir au système. Appliquons le principe de l'équivalence $dU = J\,dQ + d\mathcal{E}$. Le travail extérieur est nul puisque le vase clos est à paroi rigide et vide d'air. On a donc simplement (1) $U - U_0 = JQ$. Du fait que la pression extérieure est nulle, le phénomène est essentiellement irréversible. Pour calculer $U - U_0$, employons l'artifice signalé au n° 7; imaginons une transformation adjointe donnant lieu à la même variation d'énergie. On a $dU = J\,dQ_r - p\,dv$, Q_r désignant cette fois la quantité de chaleur absorbée réversiblement. Il faut qu'il y ait un travail extérieur, afin que la pression extérieure soit à chaque instant égale et opposée à la pression p du fluide. Intégrons: (2) $U_1 - U_0 = JQ_r - \int p\,dv$. De (1) et (2) on tire $Q = Q_r - \frac{1}{J}\int p\,dv$.

La chaleur absorbée réversiblement Q_r comprend diverses parties: d'abord la quantité de chaleur nécessaire pour fondre 1 kilog de glace, soit 79200 calories. Il faut ensuite porter à 100° les $1000 - x$ grammes d'eau, ce qui exige $100\,(1000 - x)$ calories. Enfin il faut porter x gr. d'eau à 100°, les vaporiser à 100° et cela réversiblement; c'est précisément dans ces conditions de réversibilité que s'est placé Regnault pour déterminer la chaleur de vaporisation totale de l'eau. On a donc $Q_r = 79200 + 100\,(1000 - x) + 637\,x$. En faisant $x = 58,25$ gr. on trouve

$Q_2 = 210480$ calories.

Pour calculer $\int p\,dv$, nous négligeons la dilatation de l'eau. La seule variation de volume à envisager est celle provoquée par la vaporisation. La pression p est constante et égale à celle de la vapeur saturante à 100° c.à.d. à la pression normale de 76 cm. de mercure. En désignant par u' le volume spécifique de la vapeur saturante et par u celui de l'eau, on a $\int p\,dv = (u' - u)\,p$. Comme $u = 1$ et $u' = \frac{1}{0,000588}$, u est négligeable vis à vis de u' et on a

$$\frac{1}{J}\int p\,dv = \frac{76 \times 13,6 \times 981 \times 58,25}{4,18 \times 10^7 \times 0,000588} = 2403 \text{ calories.}$$

Par suite, $Q = 210480 - 2403 = 208077$ calories.

---

82. — Un liquide dont la densité par rapport à l'eau est 0,8 et dont la densité de vapeur saturée à 50° est 2,1 par rapport à l'air possède à cette même température une force élastique maxima p équilibrée par 608 millimètres de mercure. On sait de plus que, à 50°, $\frac{dp}{dT}$ correspond à 21 mm 858 de mercure. Cela posé, on demande de calculer : 1° le travail externe de la vaporisation de 1 gramme de ce liquide dans une atmosphère dont la pression est de 608 m/m de mercure et à la température de 50° ; 2° la chaleur latente de vaporisation dans les mêmes conditions ; 3° l'accroissement de l'entropie dans les mêmes conditions. (Paris).

1° Le travail externe de la vaporisation de 1 gramme de liquide sous la pression constante p est

$$(1) \quad E = \int_u^{u'} p\,dv = p\,(u' - u),$$

u' et u désignant respectivement les volumes spécifiques de la vapeur et du liquide à 50°. On a $p = 60,8 \times 13,596 \times 981$ baryes. Les volumes u' et u sont donnés par les formules

$$1 = u' \times 2,1 \times 0,00129 \times \frac{273}{273+50}, \quad u = 1 : 0,8.$$

En substituant ces valeurs dans (1), on trouve

$$E = 3523 \times 10^5 \text{ ergs}, \text{ soit } 3,59 \text{ kilogrammètres.}$$

2° La chaleur latente de vaporisation est donnée par la formule de Clapeyron $L = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dp}{dT}$,

$$L = \frac{323}{4,18 \times 10^7} \times 434,48 \times 2,1858 \times 13,596 \times 981 = 97,8 \text{ calories.}$$

3° Puisque nous sommes à température et à pression constantes, le liquide et la vapeur n'absorbent pas de chaleur pour se réchauffer ; la chaleur fournie est employée uniquement à vaporiser le liquide. L'accroissement d'entropie est donc

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{L}{T} = \frac{97,8}{323} = 0,304 \text{ CGS.}$$

---

83. — Calculer en unités CGS, d'après les données suivantes qui se rapportent à l'acide sulfureux, les valeurs à zéro degré : 1° du

volume spécifique de la vapeur saturante ; 2° de la différence entre la chaleur spécifique de la vapeur saturante et la chaleur spécifique du liquide sous la pression de la vapeur saturante.

Données numériques en C.G.S.

Températures	−1°	0°	+1°
Hauteur de mercure à 0° qui équilibre à Paris la force élastique maximum de la vapeur	111,75	116,49	121,25
Chaleur latente de vaporisation L	92,254	91,876	91,486

Densité à 0° de l'acide sulfureux liquide ..... $d = 1,364$
Densité à 0° du mercure ..... $D = 13,6$
Intensité de la pesanteur à Paris ..... $g = 981$
Équivalent mécanique de la chaleur ..... $J = 4,18 \times 10^7$. (Paris).

1° Le volume spécifique u' de la vapeur saturante est donné par la formule de Clapeyron $L = T(u' - u)\frac{dp}{dT}$, u désignant le volume spécifique 1 : d du liquide. On en tire $u' = \frac{1}{d} + JL : T\frac{dp}{dT}$. De −1° à 0° la force élastique maximum de la vapeur varie de $116,49 - 111,75 = 4,74$ cm. de mercure ; de 0° à 1°, elle varie de $121,25 - 116,49 = 4,76$ cm. Dans l'intervalle de température considéré, $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ est donc sensiblement constant ; autrement dit, les variations de pression sont sensiblement proportionnelles aux variations de température et on peut sans erreur notable, remplacer la dérivée $\frac{dp}{dT}$ par le rapport des accroissements finis $\frac{\Delta p}{\Delta T}$. A 0°, nous prendrons la valeur moyenne

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 4,75 \times 13,6 \times 981.$$

En faisant l'application numérique, il vient

$$u' = \frac{1}{1,434} + \frac{4,18 \times 10^7 \times 91,876}{273 \times 4,75 \times 13,6 \times 981} = 222,677 \text{ cm}^3.$$

2° La différence entre la chaleur spécifique m' de la vapeur saturante et la chaleur spécifique m du liquide est donnée par la formule (1) $m' - m = \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T}$ que nous allons établir rapidement. Considérons une masse totale de 1 gr. renfermant x gr. de vapeur et par conséquent $1 - x$ gr. de liquide. Faisons varier T de dT et x de dx. La quantité de chaleur absorbée dQ est la somme de trois termes : 1° la chaleur absorbée par le liquide $(1-x)m\,dT$; 2° celle absorbée par la vapeur $x m'\,dT$; 3° celle absorbée pour vaporiser la masse dx de liquide, $L\,dx$. Donc $dQ = [(m' - m)x + m]\,dT + L\,dx$. Écrivons que la différentielle de l'entropie $dS = \frac{(m'-m)x+m}{T}dT + \frac{L}{T}dx$ est une différentielle totale exacte. Il vient, en nous rappelant que m, m' et L ne dépendent que de T, $\frac{m'-m}{T} = \frac{1}{T}\frac{dL}{dT} - \frac{L}{T^2}$, c. à. d. la formule (1).

De −1° à 0°, on a $\frac{\Delta L}{\Delta T} = 91,876 - 92,254 = -0,378$.
De 0° à 1°, on a $\frac{\Delta L}{\Delta T} = 91,486 - 91,876 = -0,390$.
A 0° nous prendrons la valeur moyenne $-0,384$ et nous confondrons $\frac{dL}{dT}$ avec $\frac{\Delta L}{\Delta T}$; il vient $m' - m = -0,384 - \frac{91,876}{273} = -0,720$.

84. – Calculer l'entropie d'un mélange d'eau et de vapeur de titre x à la température T.

Application numérique. – On porte à la température de 120° de l'eau à 0° en empêchant toute vaporisation, puis on la vaporise entièrement à cette température. On produit ensuite une détente adiabatique qui abaisse la température à 30°. Quel est à ce moment le titre de la vapeur?

Données. – La chaleur spécifique de l'eau entre 0 et 120° sera supposée égale à 1 et on admettra aussi que le coefficient h relatif à l'eau liquide est négligeable. La chaleur latente de vaporisation à la température centigrade θ est donnée par la formule de Henning : $r = 538{,}46 - 0{,}6422(\theta - 100) - 0{,}0008\,93(\theta - 100)^2$ (Nancy).

On dit qu'un mélange d'eau et de vapeur est au titre x lorsque 1 kg de mélange renferme x kg de vapeur et $1-x$ kg d'eau vésiculaire.

Faisons varier la température T de dT et la masse x de vapeur de dx. Calculons la quantité de chaleur dQ absorbée. La chaleur absorbée par le liquide est $(1-x)\,m\,dT$, m étant la chaleur spécifique du liquide maintenu dans les conditions de saturation ; la chaleur absorbée pour échauffer la vapeur est $m'x\,dT$, m' étant la chaleur spécifique de la vapeur maintenue saturante et sèche ; enfin, pour vaporiser la masse dx de liquide, il a fallu fournir la quantité de chaleur $r\,dx$, r étant la chaleur latente de vaporisation à la température absolue T. On a donc

$$dQ = [(1-x)m + m'x]\,dT + r\,dx = [(m'-m)x + m]\,dT + r\,dx.$$

Écrivons que la différentielle de l'entropie

(1) $dS = \dfrac{(m'-m)x + m}{T}\,dT + \dfrac{r}{T}\,dx$ est une différentielle totale exacte ; il vient en remarquant que m, m' et r ne sont fonctions que de T, $m' - m = \dfrac{dr}{dT} - \dfrac{r}{T}$.

Portons dans (1) cette valeur de $m'-m$, on obtient successivement

$$dS = \left(\frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}\right)\frac{x\,dT}{T} + \frac{r\,dx}{T} + \frac{m\,dT}{T},$$

$$dS = \frac{T(x\,dr + r\,dx) - rx\,dT}{T^2} - \frac{m\,dT}{T} = d\left(\frac{rx}{T}\right) + m\frac{dT}{T}.$$

Si m était constant, l'intégration serait immédiate. En égalant deux expressions de la chaleur absorbée par 1 gr. de liquide pour que la température passe à $T + dT$ et la pression à $p + dp$, on a, par définition même de m, $C\,dT + h\,dp = m\,dT$.

Si donc, comme l'indique l'énoncé, le coefficient h relatif à l'eau liquide est négligeable, on a $m = C$. On a donc

(2) $S = \dfrac{rx}{T} + m\,\text{Log. nép.}\,T + C^{te}$.

Si, à la température T_0, on a de la vapeur saturante sèche, alors $x = 1$ et on peut écrire $S_0 = \dfrac{r_0}{T_0} + m\,\text{Log. nép.}\,T + C^{te}$, et la valeur de l'entropie est donnée par la formule

$$(3)\qquad S - S_0 = \frac{\varepsilon x}{T} - \frac{r_0}{T_0} + m \,\text{Log. nép.}\,\frac{T}{T_0}.$$

Dans une détente adiabatique, l'entropie reste constante. Si donc nous passons de la température $T_0 = 120 + 273$ à la température $T = 30 + 273$, le titre x qui était égal à 1, au début de la détente, d'après l'énoncé, aura à la fin de la détente une valeur que l'on obtiendra en annulant le second membre de l'équation (3) ce qui donne

$$(4)\qquad x = \frac{T}{r}\left[\frac{r_0}{T_0} - m \,\text{Log. nép.}\,\frac{T}{T_0}\right].$$ On a

$$r_0 = 538{,}46 - 0{,}6422 \times 20 - 0{,}000833 \times \overline{20}^2 = 525{,}2828,$$
$$r = 538{,}46 + 0{,}6422 \times 70 - 0{,}000833 \times \overline{70}^2 = 579{,}3323.$$

En portant ces valeurs dans (4) et en remarquant que $m = C = 1$, il vient

$$x = \frac{303}{579{,}3323}\left[\frac{525{,}2828}{393} + 0{,}2601\right] = 0{,}835.$$

Par conséquent 16,5 % de la vapeur se sont condensés par la détente.

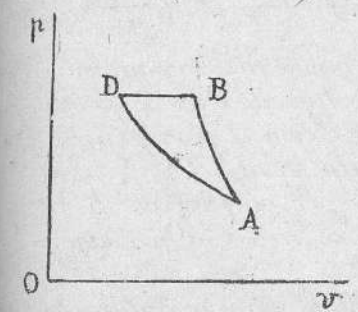
---

85. — 1° La chaleur spécifique C de la vapeur d'eau à 100° sous la pression constante de l'atmosphère est égale à 0,43 et le coefficient de température de sa pression maxima $\left(\frac{1}{F}\frac{dF}{dt}\right)$ est 0,036 à 100°. Calculer la chaleur spécifique C' de cette vapeur maintenue saturante à cette température, en l'assimilant à un gaz parfait.

2° D'autre part, en admettant que la chaleur de vaporisation de l'eau soit donnée par la formule de Regnault $L = 606{,}5 - 0{,}695t$, calculer, indépendamment de ce qui précède, le coefficient de température $\left(\frac{1}{F}\frac{dF}{dt}\right)_{100}$ et la chaleur spécifique C'. On assimilera la vapeur d'eau à un gaz parfait. On négligera le volume de l'eau liquide devant celui de sa vapeur et l'on prendra pour chaleur spécifique de l'eau dans ces conditions 1,02. Constante universelle des gaz parfaits : 832×10^5 C.G.S. Expliquer les divergences obtenues

(*Physique générale* — Paris 1919).

1° Utilisons le diagramme en (p, v), c'est-à-dire en (F, v). Nous voulons passer du point A (F, T) au point infiniment voisin B $(F + dF, T + dT)$. Nous considérons la vapeur maintenue saturante en l'assimilant à un gaz parfait ; en parcourant le chemin AB, la chaleur fournie est $dQ = C'dT$, par définition même de C'.



On peut également aller de A à B en suivant l'isotherme AD et la portion DB de courbe à pression constante ; la chaleur fournie est alors $dQ_1 = CdT + hdp$. Le terme hdp correspond à l'isotherme AD ; le terme CdT correspond au chemin DB, d'après la définition même de C. La chaleur évoluée le long du cycle fermé est donc $dq = CdT + hdp - C'dT$.

Cette quantité de chaleur est nulle puisque, d'après le principe de l'équivalence, elle est égale, au facteur J près, à l'aire du cycle, laquelle est un infiniment petit du deuxième ordre, car ses côtés sont des infiniment petits du premier ordre.

On a donc $C' = C + h\frac{dp}{dT}$.

Le coefficient h est donné par la formule de Clapeyron $h = -\frac{T}{J}\frac{dv}{dT}$. Par suite, $C' = C - \frac{T}{J}\frac{dv}{dT}\frac{dp}{dT}$. Puisque l'on assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait, on a $Mpv = RT$, v désignant le volume spécifique, M la masse moléculaire, R la constante universelle des gaz parfaits. On en tire $\frac{dv}{dT} = \frac{R}{Mp}$ et par suite

$$C' = C - \frac{T}{J}\frac{R}{Mp}\frac{dp}{dT} = C - \frac{T}{M}\frac{R}{J}\frac{1}{F}\frac{dF}{dt}.$$

Pour l'application numérique, $M = 18$, $\frac{R}{J} = 2$. D'où

$$C' = 0{,}43 - \frac{373}{18} \times 2 \times 0{,}836 = -1{,}062$$

On tombe sur un résultat bien connu, savoir que la chaleur spécifique de la vapeur d'eau saturante, à la température considérée, 100°, est négative.

2° Partons de la formule de Clapeyron $L = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dF}{dt}$, u' désignant le volume spécifique de la vapeur, u celui du liquide. En négligeant, selon les indications de l'énoncé, u devant u', on a $L = \frac{T}{J}u'\frac{dF}{dt}$.

La vapeur d'eau étant assimilée à un gaz parfait, on a $Mu'F = RT$, $u' = \frac{RT}{MF}$, $L = \frac{T}{J}\frac{RT}{MF}\frac{dF}{dt}$,

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dt} = M\frac{J}{R}\frac{L}{T^2} = \frac{18}{2} \times \frac{606{,}5 - 69{,}5}{373^2} = 0{,}0347.$$

Dans l'énoncé de la première partie on avait admis 0,036.

La chaleur spécifique C' de la vapeur maintenue saturante et sèche est donnée, en fonction de L et de la chaleur spécifique C'' du liquide par la formule (1) du n° 83 (tenir compte du changement de notation) : $C' = C'' + \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T}$. D'ailleurs $\frac{dL}{dT} = \frac{dL}{dt} = -0{,}695$. Par suite,

$$C' = 1{,}02 - 0{,}695 - \frac{537}{373} = -1{,}115,$$

au lieu de la valeur $-1{,}062$ trouvé dans la première partie.

Les divergences obtenues sur $\frac{1}{F}\frac{dF}{dt}$ et sur C' tiennent d'abord à ce qu'on n'est pas très sûr des nombres 0,43 et 0,036 admis dans la première partie. Mais le gros défaut provient de ce qu'on a appliqué la loi de Mariotte à la vapeur d'eau saturée ; l'erreur qui en résulte est de l'ordre de plusieurs centièmes. De plus, on a admis pour C'' la valeur fixe 1,02 alors que C'' dépend de T. Enfin la formule de Regnault $L = 606{,}5 - 0{,}695t$ n'est pas rigoureuse dans les limites de l'expérience. Pour $t = 100°$, elle donne $L = 537$, alors que l'expérience a donné 538,6. La grosse erreur provient du coefficient 0,695.

86. – Calculer au moyen des données ci-dessous:
1° La chaleur spécifique de l'eau à 100° sous la pression (variable) de sa vapeur saturante. 2° La chaleur spécifique de la vapeur d'eau maintenue saturante à 100°. 3° La chaleur spécifique de cette vapeur à 100° sous la pression constante de 76 cm. de mercure. – 4° Les coefficients angulaires des tangentes à la courbe de liquéfaction, en coordonnées entropiques (S, T), aux deux points correspondant à 100°. – 5° Démontrer en outre que la formule $Q = 606{,}5 + 0{,}305\,t$, par laquelle Regnault représente la chaleur totale de vaporisation de l'eau, est incompatible avec le fait que la détente de la vapeur d'eau saturante peut s'effectuer sans condensation dans un certain intervalle de températures, la chaleur spécifique de l'eau demeurant voisine de l'unité dans un tel intervalle.

Données numériques. – Chaleur spécifique de l'air à 100° sous la pression constante de 76 cm. de mercure : 1,01. Chaleur de vaporisation à 100° : $L = 538$ calories et $\frac{dL}{dT} = -0{,}650$. Rapport des volumes spécifiques de la vapeur saturante et de l'eau liquide,

$$\frac{u'}{u} = 1610\,; \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dT} = 0{,}0008\,; \quad \frac{1}{u'}\frac{du'}{dT} = 0{,}00280.$$

(*Physique générale*. Paris 1920).

1° Soit C_p la chaleur spécifique de l'eau saturée, sous pression constante, à la température absolue T. Quand on élève de T à $T+dT$ la température du liquide saturé, la quantité de chaleur dQ absorbée par l'unité de masse de ce liquide n'est pas égale à $C_p\,dT$. En réalité, lorsqu'on élève de dT la température du liquide saturé en le maintenant sous la tension de vapeur saturée variable avec la température, on opère ni sous volume constant ni sous pression constante. En effet, quand, sous tension de vapeur saturée, on élève la température du liquide saturé de la valeur T à la valeur $T+dT$, le volume spécifique passe de la valeur $u(T)$ à la valeur $u(T+dT)$ et la pression supportée par le liquide passe de la valeur p à la valeur $p+dp$. On doit donc écrire, en tenant compte de la variation de pression qui accompagne la variation de température, $dQ = C_p\,dT + h\,dp$.

Mais la tension de vapeur saturée est une fonction de la température seule ; on peut donc écrire $dp = \frac{dp}{dT}\,dT$ et par suite $dQ = \left(C_p + h\frac{dp}{dT}\right)dT = m\,dT$, en posant $m = C_p + h\frac{dp}{dT}$. La grandeur m est la chaleur spécifique de l'eau saturée à $T°$ sous la pression variable de sa vapeur saturante. Le coefficient h est donné par la formule de Clapeyron $h = -\frac{T}{J}\frac{du}{dT}$: (On sait que u ne dépend que de T). On a donc

$$m = C_p - \frac{T}{J}\frac{du}{dT}\frac{dp}{dT}.$$

La quantité $\frac{dp}{dT}$ est reliée à la chaleur de vaporisation L par la formule de Clapeyron $L = \frac{T}{J}(u'-u)\frac{dp}{dT}$. Par suite, $m = C_p - \left(\frac{1}{u}\frac{du}{dT}\right)\frac{L}{u':u-1} = 1{,}01 - 0{,}0008 \times 538 \times \frac{dT}{dT}\frac{1}{1609} = 1{,}00974$.

On voit que le terme correctif est extrêmement faible et que

pratiquement on peut confondre m et C_p, à la température de 100° centigrades. Il en est ainsi tant qu'on est éloigné du point critique. Or on sait que la température critique de l'eau est 365° centigrades.

2° La chaleur spécifique m' de la vapeur d'eau maintenue saturante à la température T est donnée par la formule (V) du n°83 soit $m' = m + \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T}$.

Pour $T = 273 + 100$, on a, en tenant compte de la valeur trouvée précédemment pour m, $m' = 1{,}00974 - 0{,}650 - \frac{538}{373} = -1{,}0826$. On retombe sur ce résultat bien connu qu'à la température de 100° centigrades la chaleur spécifique de la vapeur d'eau maintenue saturante est négative.

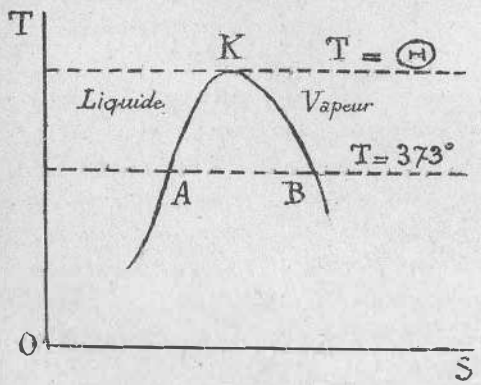
3° Calculons maintenant la chaleur spécifique C de la vapeur d'eau à 100° sous la pression constante de 76 cm. de mercure. Remarquons d'abord que m' et C sont deux quantités physiques tout à fait différentes. En effet quand la vapeur passe de la température T à la température $T + dT$, la vapeur restant saturée, on doit fournir à l'unité de masse de cette vapeur la quantité $dQ = m' dT$, par définition même de m'. Mais m' n'est pas la chaleur spécifique de la vapeur sous pression constante ou sous volume constant. En effet, dans l'opération où on porte cette vapeur de la température T à la température $T + dT$, le volume spécifique de la vapeur passe de la valeur $u'(T)$ à la valeur $u'(T + dT)$ et en même temps la pression passe de la valeur p à la valeur $p + dp$. On doit donc écrire, en raisonnant comme dans la première partie du problème,

$$dQ = C dT + h dp = \left(C + h \frac{dp}{dT}\right) dT = m' dT$$

$$C = m' - h \frac{dp}{dT} = m' + \frac{T}{J} \frac{du'}{dT} \frac{dp}{dT}, \text{ c.à.d. en tenant compte de la relation } L = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dp}{dT},$$

$$C = m' + \left(\frac{1}{u'} \frac{du'}{dt}\right) L \frac{u' : u}{u' : u - 1} = -1{,}0826 + 0{,}0028 \times 538 \times \frac{1610}{1619} = 0{,}4247.$$

4° Figurons en coordonnées entropiques la courbe de liquéfaction (appelée souvent courbe de saturation). On sait qu'elle est tangente à l'isotherme $T = \Theta$ en désignant par Θ la température critique. Traçons l'isotherme $T = 373°$ qui correspond à 100° centigrades. Cette droite coupe la courbe de liquéfaction aux deux points A et B. On demande les coefficients angulaires des tangentes à la courbe en A et B.



En A, on a avec les notations employées plus haut

$$dQ = m\, dT, \qquad T dS = m dT.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en A est donc

$$\frac{dT}{dS} = \frac{T}{m} = \frac{373}{1,00974} = 369,4.$$

En B, on a $dQ = m' dT$, $T dS = m' dT$. Le coefficient angulaire de la tangente en B est donc

$$\frac{dT}{dS} = \frac{T}{m'} = -\frac{373}{1,0826} = -344,5.$$

5° Puisque, d'après l'énoncé, la chaleur spécifique de l'eau reste voisine de l'unité, nous pouvons, au lieu de la formule $Q = 606,5 + 0,305\,t$ qui donne la chaleur totale de vaporisation, considérer la formule qui donne la chaleur de vaporisation $L = 606,5 - 0,695\,t$, ou, en utilisant des températures absolues,

$$L = 796,2 - 0,695\,T = A - BT.$$

Effectuons une détente adiabatique. Nous avons établi au n° 84 que la différentielle de l'entropie d'un mélange d'eau et de vapeur de titre x était, en faisant $m = 1$ d'après l'énoncé,

$$dS = d\left(\frac{Lx}{T}\right) + \frac{dT}{T}.$$

Puisqu'une détente adiabatique est en même temps isentropique, on doit avoir $dS = 0$, d'où

$$T(x\,dL + L\,dx) - Lx\,dT + T\,dT = 0,$$

c'est-à-dire en tenant compte de $L = A - BT$, $(A - BT)\,dx = T(Ax - T)\,dT$. Supposons x voisin de l'unité, il vient $(A - BT)\,dx = T(A - T)\,dT$.

Dans les conditions de la pratique on a $T < A$, c'est-à-dire $T < 796°$. Il en résulte que $A - BT$ et $A - T$ sont positifs, et que dx et dT sont de même signe. Or, dans une détente adiabatique, dT est négatif ; donc dx devrait toujours être négatif ; autrement dit, il devrait y avoir toujours condensation partielle de la vapeur dans une détente. Puisque, d'après l'énoncé, la détente de la vapeur d'eau saturante peut s'effectuer sans condensation dans un certain intervalle de températures, cela prouve bien que la formule de Regnault dont nous sommes partis est incompatible avec ce résultat expérimental.

---

87. — Un kilogramme de vapeur saturée et sèche à 200° centigrades se détend adiabatiquement jusqu'à la température de 100°. 1° Calculer le titre x à la fin de la détente. — 2° Calculer le travail accompli par la vapeur.

N.B. — On pourra prendre approximativement la chaleur spécifique de l'eau liquide égale à l'unité et adopter pour la chaleur de vaporisation de l'eau la formule $r = 606,5 - 0,7\,t$. Les valeurs de la chaleur latente interne ρ sont 417,17 pour 200° ; 496,29 pour 100°. (*Mécanique physique et expérimentale*. Paris).

1° Le titre x à la fin de la détente est donné par la formule (4) du n° 84, $x = \frac{T}{r}\left[\frac{r_0}{T_0} - m \log \frac{T}{T_0}\right]$, dans laquelle on fait $T = 100 + 273 = 373$; $T_0 = 200 + 273 = 473$; $r = 606,5 - 0,7 \times 100 = 536,5$; $r_0 = 606,5 - 0,7 \times 200 = 466,5$; $m = 1$. On trouve $x = 0,85$.

2° Calculons le travail accompli par un kilogramme de vapeur

dans une détente adiabatique, quand le titre passe de la valeur x_0 à la valeur x_1.

Reportons-nous aux définitions du n° 79. Dans l'état $(x_0\ t_0)$, la chaleur renfermée dans la vapeur est $(q_0 + \rho_0)x_0$; celle renfermée dans le liquide est $q_0(1-x_0)$. La chaleur totale est donc $A_0 = q_0 + \rho_0 x_0$. Dans l'état $(x_1\ t_1)$, cette chaleur est $A_1 = q_1 + \rho_1 x_1$. La différence $A_0 - A_1$ disparue dans la détente a été transformée en travail mécanique. On a donc $E = J(A_0 - A_1) = J(q_0 - q_1 + \rho_0 x_0 - \rho_1 x_1)$. D'ailleurs $q_0 - q_1 = 200 - 100 = 200$, $x_0 = 1$; $x_1 = 0{,}85$; $\rho_0 = 417{,}17$; $\rho_1 = 496{,}29$. En faisant $J = 427$ kgm on trouve $E = 40\,702$ kgm.

88.– Une certaine masse d'eau (liquide) à 100° est placée dans un cylindre vertical et recouverte par un piston parfaitement mobile dont le poids est convenablement équilibré. On fait subir à cette masse d'eau d'une manière réversible, les transformations suivantes: 1° On la chauffe de 100 à 200° sous la pression de sa vapeur saturante; 2° Elle est transformée à 200° en un mélange de vapeur saturante et de fines gouttelettes dont le titre est x. 3° Ce mélange est détendu adiabatiquement jusqu'à la pression atmosphérique.

I Calculer d'abord le titre x sachant que si l'on comprimait adiabatiquement cette vapeur à partir de 200°, elle deviendrait saturante et pèche à 240°.

II. Calculer ensuite le nouveau titre y de la vapeur à la fin de la détente adiabatique.

III Calculer le rapport du volume final au volume initial dans cette détente en admettant que celle-ci s'effectue suivant la loi $pv^n = C^{te}$ avec $n = 1{,}14$, et qu'on peut appliquer les lois des gaz parfaits jusqu'au voisinage immédiat de la saturation.

IV.– Ecrire les formules qui permettraient de calculer le rendement du cycle obtenu en fermant le diagramme ci-dessus par l'isotherme à 100°.

Données numériques: Chaleur latente de vaporisation de l'eau: 431 cal. à 240°, 465 cal. à 200°, 538 cal. à 100°. On admettra que la chaleur spécifique de l'eau sous la pression de saturation est uniformément 1,02 depuis 100° jusqu'à 240°.

(Physique générale, Paris, Juillet 1924).

I Opérons sur une masse de 1 Kg de fluide. Elle renferme x Kg de vapeur et $1-x$ Kg d'eau en gouttelettes.

Dans une détente adiabatique, l'entropie reste constante. En appliquant la formule (2) du n° 84, on a, pour $T_0 = 200°$, $S_0 = \frac{r_0 x}{T_0} + m \operatorname{Log} T + K$. A la température $T_1 = 240°$, on doit avoir $x = 1$, d'où $S_1 = \frac{r_1}{T_1} + m \operatorname{Log} T_1 + K$. La condition $S_0 = S_1$ donne

$$x = \frac{T_0}{r_0}\left[\frac{r_1}{T_1} + m \operatorname{Log} \frac{T_1}{T_0}\right] = \frac{473}{465}\left[\frac{431}{513} + 1{,}02 \operatorname{Log} \frac{513}{473}\right] = 0{,}939.$$

II Effectuant maintenant une détente adiabatique du mélange depuis $T_0 = 200°$ jusqu'à la pression atmosphérique,

c'est-à-dire jusqu'à la température $T_2' = 100°$. En opérant comme précédemment, on a

$$y = \frac{T_2}{T_2'}\left[\frac{x_0 \alpha}{T} + m \operatorname{Log} \frac{T_0}{T_2}\right] = \frac{373}{538}\left[\frac{465 \times 0{,}939}{473} + 1{,}02 \operatorname{Log}. \frac{473}{373}\right] = 0{,}808$$

III – Le mélange passe adiabatiquement de l'état (p_0, v_0, T_0) à l'état (p_2, v_2, T_2). D'après la formule (4) du n° 23, on a $\left(\frac{v_0}{v_2}\right)^{n-1} = \frac{T_2}{T_0}$ ou $\frac{v_2}{v_0} = \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{473}{373}\right)^{\frac{1}{0{,}14}}$, d'où $\frac{v_2}{v_0} = 5{,}455$.

IV – Pour échauffer 1 kg d'eau de 100° à 200° sous la pression de saturation, il faut fournir $1{,}02 \times 100 = 102$ calories. Pour la transformation à 200° en mélange d'eau et de vapeur saturante au titre $\alpha = 0{,}939$, il faut encore fournir $0{,}939 \times 465 = 436{,}635$ calories. Rien de fourni ni de restitué pendant la détente adiabatique. Au total, il faut fournir la quantité $Q_1 = 102 + 436{,}635 = 538{,}635$ calories. La vapeur à 100°, au titre $y = 0{,}808$, en se liquéfiant à 100° restitue $Q_0 = 0{,}808 \times 538 = 434{,}704$ calories.

Le rendement du cycle est $\rho = 1 - \frac{Q_0}{Q_1} = 0{,}20$.

---

89. Un corps de pompe vertical est fermé par un piston parfaitement mobile ayant un décimètre carré de surface. Au-dessous du piston, le corps de pompe contient 3 grammes d'anhydride sulfureux pur. Ce corps de pompe est immergé dans un calorimètre et, tout l'appareil étant d'abord à 10°, le piston est chargé de poids convenables pour l'empêcher de monter sous la pression de l'acide sulfureux en partie liquide et en partie gazeux. En portant l'appareil successivement à 9°,5 et à 10°,5 on constate qu'il faut pour maintenir le piston en équilibre le décharger dans le premier cas de 4400 grammes, le surcharger dans le second cas de 4400 grammes par rapport à la charge qui convient pour 10°.

La température de l'appareil étant ramenée à 10° et l'acide sulfureux étant entièrement à l'état liquide, on soulève le piston de 4,59 cm. ce qui amène tout l'acide sulfureux à l'état de vapeur saturante, en même temps on empêche le refroidissement de l'appareil en versant dans l'eau du calorimètre 10 grammes d'eau chauffée à une température convenable. Quelle est cette température? On prendra $g = 981$.

(Physique générale. Nancy).

Appliquons la formule de Clapeyron relative à la vaporisation (1) $L = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dp}{dT}$, L étant la chaleur latente de vaporisation, à la température T; u' et u étant les volumes spécifiques de la vapeur et du liquide.

Quand on soulève le piston de 4,59 cm, l'augmentation de volume est $4{,}59 \times 100 = 459$ cm3. Cette augmentation est relative à 3 grammes d'anhydride. Pour 1 gramme, on a

$$u' - u = \frac{459}{3} = 153 \text{ cm}^3.$$

D'autre part, au voisinage de 10°, on a, d'après l'énoncé, la section du piston étant de 100 cm², $\frac{dp}{dT} = \frac{1400 \times 981}{100 \times 0,5} = 86328$ CGS. Substituons ces valeurs dans (V), il vient, en remarquant que $T = 273 + 10 = 283$, $L = \frac{283 \times 153 \times 86328}{4,18 \times 10^7} = 89,4$ calories. Donc pour amener à l'état de vapeur saturante 3 grammes d'anhydride sulfureux liquide à la température de 10°, il faut leur fournir $89,4 \times 3 = 268$ calories. Si cette quantité de chaleur est fournie par 10 grammes d'eau, comme leur température finale est 10°, il faut que leur température initiale soit $10 + 26,8 = 36°,8$.

---

90. — Un gaz liquéfié est contenu dans un récipient en acier, fermé par un robinet à pointeau. Le tout est immergé dans un calorimètre à eau dont on maintient la température T constante en y versant une quantité de chaleur Q tandis que du gaz s'échappe sans vitesse appréciable à la pression extérieure H, grâce à une légère ouverture du pointeau. La perte de poids du récipient est ϖ et à la fin de l'expérience il reste encore du liquide dans le récipient.

Sachant que le gaz, dans les conditions de l'expérience, peut être assimilé à un gaz parfait jusqu'à la pression P de saturation, qu'il possède par rapport à l'air une densité ρ, que le gaz liquéfié a par rapport à l'eau une densité D, on demande: 1° de calculer le travail externe effectué.

Application numérique: $\varpi = 206$ grammes; $\rho = 1,529$; masse du litre d'air normal 1gr,293; température 0° centigrade et pression H normale. 2° de calculer le poids de liquide vaporisé x, la chaleur latente interne L_i et la chaleur latente vulgaire L (à la température T, la vaporisation ayant lieu sous la pression maximum P). Pas d'application numérique.

On n'a pas le droit de négliger le volume spécifique du liquide par rapport à celui de la vapeur.

(Physique générale. Paris).

1° Le gaz en se vaporisant absorbe de la chaleur; il faut donc bien, comme l'indique l'énoncé, verser une certaine quantité de chaleur Q dans le calorimètre pour maintenir la température T constante.

Le phénomène est irréversible, car dans la région du pointeau tout au moins, la pression extérieure H est inférieure à la pression P du fluide. Par conséquent dans la relation $dU = J\,dQ + d\mathcal{E}$, il faut faire $d\mathcal{E} = -H\,dv$ et non $d\mathcal{E} = -P\,dv$. Selon nos conventions, $d\mathcal{E}$ est le travail effectué par l'extérieur sur le système. Le travail externe effectué par le fluide est égal et de signe contraire et on a $\mathcal{E}_e = H \int dv = Hv$.

Pour que Hv puisse représenter un travail il faut que H soit exprimé en unités de pression; ce sera par exemple des baryes et non des centimètres de mercure. La hauteur en

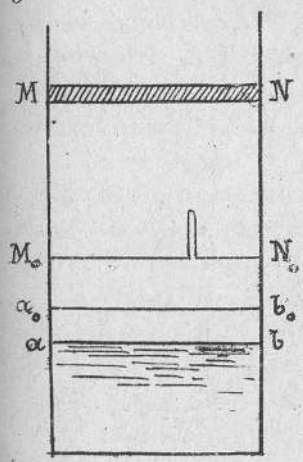
centimètres de mercure est $\frac{H}{\delta g}$, δ étant la densité du mercure et g l'intensité de la pesanteur. Le terme v est l'accroissement de volume du fluide; c'est donc le volume du gaz sorti, mesuré à la pression H et à la température T. Le poids de ce gaz étant ϖ on a $\varpi = vap\,\frac{H}{76\delta g}\,\frac{273}{T}$, d'où (1) $\mathcal{E} = Hv = \frac{76\delta g \varpi T}{273\,ap} = \frac{76\times 13{,}6\times 981\times 206\times 273}{273\times 0{,}001293\times 1{,}529}$

$\mathcal{E} = 10565\times 10^7$ ergs, soit 1077 kilogrammètres.

2° Il est évident que le poids x du liquide vaporisé n'est pas égal au poids ϖ du gaz sorti; car le niveau du liquide ayant baissé par suite de la vaporisation, une région du récipient qui était primitivement occupée par du liquide l'est maintenant par de la vapeur à la température T et à la pression P (évaluée en barves). Le poids p de la vapeur qui occupe cette région de volume $\frac{x}{D}$, D désignant la densité du liquide, est $p = \frac{x}{D}\,ap\,\frac{P}{76\delta g}\,\frac{273}{T}$. Donc,

$x = \varpi + p = \varpi + \frac{x}{D}\,ap\,\frac{P}{76\delta g}\,\frac{273}{T}$, (2) $x = \varpi : \left[1 - \frac{ap}{D}\,\frac{P}{76\delta g}\,\frac{273}{T}\right]$.

Pour calculer L_i et L, nous allons employer l'artifice indiqué au n° 7. Imaginons une transformation réversible adjointe donnant lieu à la même variation d'énergie, c'est à dire qui partirait du même état initial pour aboutir au même état final. Nous pouvons par exemple supposer que le cylindre est prolongé par en haut et que la partie supérieure M_0N_0 du récipient, au lieu d'être fixe, est remplacée par un piston mobile que l'on soulève lentement de façon qu'il soit soumis à la même pression sur ses deux faces. Le liquide vaporisé, au lieu de s'échapper à l'extérieur reste sous le piston dont on arrête l'ascension en MN lorsque le niveau du liquide, primitivement en a_0b_0, est descendu au même niveau ab que dans la transformation irréversible.



La transformation réversible donne l'équation (3) $U_1 - U_0 = JQ_2 + \mathcal{E}_2$, $Q = L\,x$, $\mathcal{E}_2 = -P\,(u'-u)\,x$, en désignant par L la chaleur latente vulgaire de vaporisation, par u' le volume spécifique de la vapeur et par u le volume spécifique du liquide. L'augmentation de volume est en effet égale à $(u'-u)\,x$.

La transformation irréversible nous a donné l'équation (4) $U_1 - U_0 = JQ - Hv$. En comparant les formules (3) et (4), on a (5) $\cdots JQ - Hv = JL\,x - P\,(u'-u)\,x$. Mais on a, par définition, (6) $L_i = L - \frac{P}{J}\,(u'-u)$. Donc $JQ - Hv = JL_i\,x$, $L_i = \frac{JQ - Hv}{Jx}$. En remplaçant Hv par sa valeur (1) on trouve (7) $L_i = \frac{1}{x}\left[Q - \frac{1}{J}\,\frac{76\delta g\,\varpi T}{273\,ap}\right]$. Il suffit de remplacer x par sa valeur (2) pour avoir L_i en fonction des données. De (6) on tire (8) $L = L_i + \frac{P}{J}\,(u'-u)$. Le volume spécifique u

du gaz liquéfié est $u = \frac{1}{D}$. Le volume spécifique u' du gaz sous la pression P est donné par l'équation

$$1 = u' a\rho \frac{P}{76\delta g} \frac{273}{T} \quad ; \quad u' = \frac{76 T \delta g}{273 a \rho P}$$

En portant ces valeurs dans (8) et en tenant compte de (7) il vient (9) $L = \frac{Q}{x} + \frac{76\delta g T}{273 J a \rho}\left(1 - \frac{\varpi}{x}\right) - \frac{P}{JD}$. Mais de (2) on tire $1 - \frac{\varpi}{x} = \frac{273 a \rho P}{76\delta g T D}$, en portant dans (9) il vient simplement $L = \frac{Q}{x}$.

On arrive donc à cette conclusion que $Q = Q_x$. La quantité de chaleur absorbée est la même dans les deux transformations réversible et irréversible.

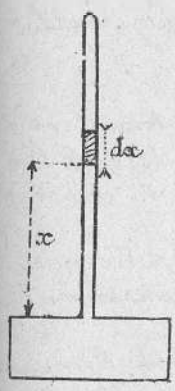
Ce résultat nous suggère, après coup, une méthode beaucoup plus simple que la précédente. En effet de l'équation (5) on déduit que si $Q = Lx$, on aura (10) $Hv = P(u' - u)x$. Inversement, si l'on démontre cette dernière relation, on en conclura que $Q = Lx$. Or la relation (10) est évidente. Reportons-nous en effet à la figure. Le liquide vaporisé dans la transformation réversible occupe à l'état de vapeur les espaces $a_0 b_0 ab$ et $M_0 N_0 MN$, car on peut estimer que l'espace $a_0 b_0 M N$ ne subit pas de modification. Le volume total vaporisé est xu'; le volume $a_0 b_0 ab$ est xu. Le volume $M_0 N_0 MN$ est donc $x(u' - u)$; la vapeur y est à la pression P. Si maintenant nous nous reportons à l'appareil lui-même, tel qu'il fonctionne réellement, le poids de vapeur sorti ϖ, occupant le volume v à la pression H, est précisément la vapeur qui occuperait l'espace $M_0 N_0 MN$. La loi de Mariotte nous donne bien la formule (10). Mais nous pensons qu'il fallait avoir fait le problème par la première méthode pour avoir l'idée de la seconde.

---

91. — Un tube vertical de section égale à l'unité et de hauteur h assez considérable dans lequel on a fait le vide surmonte un large réservoir plein de liquide. Le tube et le réservoir étant maintenus à une température T invariable, on établit la communication entre le réservoir et le tube. On suppose la gravité g invariable dans toute la hauteur h et on assimile la vapeur à un gaz parfait. L'équilibre étant établi on demande de déterminer 1° la loi de variation de la densité ρ (masse volumique) de la vapeur avec la hauteur x au-dessus du réservoir; 2° la masse totale M de vapeur formée; 3° le travail mécanique $\mathfrak{T}$ produit à l'encontre de la pesanteur. Démontrer que ce travail est égal à la somme des travaux de la détente isotherme depuis la pression maximum p_0 jusqu'à la pression p qui règne dans chaque tranche infiniment mince; 4° la quantité de chaleur Q empruntée au milieu extérieur. On désigne par L la chaleur latente vulgaire de vaporisation à la température T qui est donnée, ainsi que la densité Δ de la vapeur par rapport à l'air.

(*Physique générale*, Paris).

La pression p qui règne en un point situé à une hauteur x au-dessus du réservoir est égale au poids de la vapeur située dans



le tube au-dessous de ce point. La section du tube étant égale à l'unité, une tranche de vapeur d'épaisseur dx, située à la hauteur x, a pour poids $\rho g\,dx$. Comme la pression diminue quand x augmente on a $dp = -\rho g\,dx$. Il y a une relation entre p et ρ. On a en effet, la vapeur étant considérée comme un gaz parfait,

$$pv = \frac{p}{\rho} = RT, \quad (1)\ p = \rho rT.$$

Différentions, en remarquant que dT est nul, puisque la transformation est supposée isothermique. On a

$$dp = rT\,d\rho = -\rho g\,dx, \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g\,dx}{rT}, \quad \rho = \rho_0 e^{-gx:rT},$$

ρ_0 désignant la densité à l'extrémité inférieure du tube. On voit que ρ diminue à mesure que l'on s'élève et que la loi de variation est celle d'une exponentielle décroissante; ρ_0 est donc la densité maximum. Comme, d'après (1), on a (2) $p_0 = \rho_0 rT$, p_0 désignant la pression à l'extrémité inférieure du tube, on voit que l'on a également (3) $p = p_0 e^{-gx:rT}$, p_0 étant la pression maximum. La loi de variation avec x de la densité et de la pression est évidemment la même.

2° La tranche de vapeur d'épaisseur dx a pour masse (4) $dM = \rho\,dx$, puisque la section du tube est égale à l'unité. En intégrant de 0 à h, on a

$$(5)\quad M = \int_0^h \rho\,dx = \rho_0 \int_0^h e^{-\frac{gx}{rT}}\,dx = \frac{\rho_0 rT}{g}\left[1 - e^{-\frac{gh}{rT}}\right].$$

On peut aussi exprimer M en fonction de p_0 et de p_1, p_1 désignant la pression au sommet du tube, c'est-à-dire à la hauteur h. D'après (3) on a $p_1 = p_0 e^{-gh:rT}$ et en tenant compte de (2),

$$M = \frac{p_0}{g}\left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right) = \frac{p_0 - p_1}{g}.$$

3° La tranche de vapeur d'épaisseur dx, en s'élevant à la hauteur x, produit à l'encontre de la pesanteur le travail (6) $d\mathcal{E} = \rho g x\,dx$. Par suite, le travail total est

$$(7)\quad \mathcal{E} = g\int \rho x\,dx = g\rho_0 \int_0^h x e^{-\frac{gx}{rT}}\,dx.$$

En intégrant par parties, on trouve immédiatement

$$\mathcal{E} = \rho_0 rT\left[\frac{rT}{g}\left(1 - e^{-gh:rT}\right) - h e^{-gh:rT}\right].$$

On pourrait pour simplifier remplacer par p_0 le produit $\rho_0 RT$ qui se trouve devant le crochet.

Nous allons maintenant calculer, pour la masse dM, le travail de la détente isotherme depuis la pression maximum p_0 jusqu'à la pression p. En remarquant que la masse dM occupe le volume dx, la formule (3) du n° 2 devient (8) $p\,dx = rT\,dM$.

Le travail de la détente isotherme est $d^2\mathcal{E}' = p\,d(dx) = p\,d^2x$. Mais de (8) on tire en différentiant, r, T et dM étant constants, $p\,d^2x = -dx\,dp = -rT\,dM\,\frac{dp}{p}$. En intégrant, il vient $d\mathcal{E}' = rT\,dM \operatorname{Log}\frac{p_0}{p}$, c'est-à-dire en tenant compte de (2) (3) et (4), $d\mathcal{E}' = \rho g x\,dx = \frac{p}{p_0}\,d\mathcal{E}$. La proposition est donc démontrée.

4° La transformation étudiée est irréversible, car la vaporisation s'opère d'une façon tumultueuse et non avec une vitesse infiniment lente. Le principe de l'équivalence appliqué à la transformation totale donne l'équation (9) $\Delta U = J Q + \mathcal{E}_{irr}$. D'après nos conventions, Q est la quantité de chaleur empruntée au milieu extérieur et $\mathcal{E}_{irr}$ est le travail effectué par l'extérieur.

Imaginons (n° 7) une transformation réversible élémentaire adjointe. Supposons par exemple qu'il y ait dans le tube un piston que l'on soulève avec une lenteur infinie de façon que ses deux faces soient soumises à la même pression p. Le principe de l'équivalence donne, en remarquant que $dQ = L\,dM$, $dU = J L\,dM + d\mathcal{E}_r$.

Le travail $d\mathcal{E}_r$ effectué par l'extérieur sur la vapeur comprend deux travaux élémentaires : l'un $-pg\rho x\,dx$ provenant de l'action de la pesanteur sur la masse $\rho\,dx$ soulevée à la hauteur x, l'autre $-p\,dx$ occasionné par l'expansion de la vapeur (l'énoncé spécifiant que le réservoir est large, nous admettrons que le niveau du liquide n'y varie pas). On a donc en intégrant

$$(10)\qquad \Delta U = J L M - \int_0^h g\rho x\,dx - \int_0^h p\,dx.$$

En comparant (9) et (10), il vient

$$(11)\qquad J Q + \mathcal{E}_{irr} = J L M - g\int_0^h \rho x\,dx - \int_0^h p\,dx.$$

Mais le travail $\mathcal{E}_{irr}$ effectué par l'extérieur sur la vapeur, dans la transformation irréversible est précisément égal et de sens contraire au travail $\mathcal{E}$ calculé plus haut, travail exécuté par la vapeur à l'encontre de la pesanteur. Dans la transformation irréversible en effet, le travail occasionné par l'expansion de la vapeur est nul, puisqu'il y a le vide au-dessus du fluide. En tenant compte de (7) l'équation (11) devient $JQ = JLM - \int_0^h p\,dx$,

$\int_0^h p\,dx$ à cause de (2) et de (5) $\int_0^h p_0 e^{-\frac{g x}{rT}}\,dx = \frac{p_0 r T}{g}\left[1 - e^{-gh : rT}\right]$, c'est-à-dire $JQ = JLM - rTM$, $Q = LM - \frac{rTM}{J}$.

Dans les calculs précédents nous avons laissé subsister la constante spécifique r. Nous allons l'exprimer en fonction de la densité Δ de la vapeur par rapport à l'air qui est une donnée du problème. Nous avons vu (N°2) que $r = \frac{h_0 v_0}{273}$. (Nous mettons h_0 et non p_0 qui a une signification précise dans notre problème).

Nous prenons pour h_0 la pression normale, évaluée en baryes, de 76 cm. de mercure ; v_0 est le volume spécifique à 0°, c'est à dire le volume occupé par 1 gramme de la vapeur. Par suite

$$v_0 = \frac{1000}{1{,}293 \times \Delta}\ ; \qquad r = \frac{76 \times 13{,}6 \times 981 \times 1000}{1{,}293 \times 273 \times \Delta}.$$

Remarque. — Nous avons admis que le réservoir était isolé de l'extérieur. On aurait pu également supposer que le tube était ouvert à sa partie supérieure mettant ainsi le liquide du réservoir en contact avec l'atmosphère. Le niveau du liquide dans le tube est alors supérieur, égal ou inférieur au niveau du liquide dans le

réservoir, selon que la tension maxima p_0 du liquide à la température T est inférieure, égale ou supérieure à la pression atmosphérique H. Soit, par exemple $p_0 < H$ et d la densité du liquide. Le liquide monte alors dans le tube à un niveau x défini par l'équation $p_0 + x\,dg = H$, $x_0 = \frac{H - p_0}{dg}$. Dans les calculs précédents, on devra intégrer de x_0 à h et non de 0 à h.

---

99. — De l'éther à 0° étant contenu dans un corps de pompe sous un piston mobile, on suppose qu'on puisse effectuer le cycle suivant d'opérations : 1° On porte la température à 30° en empêchant toute vaporisation. — 2° A 30° on vaporise entièrement le liquide ; — 3° On produit une détente adiabatique telle que la température soit redevenue 0° ; 4° On ramène l'éther à l'état initial à température constante.

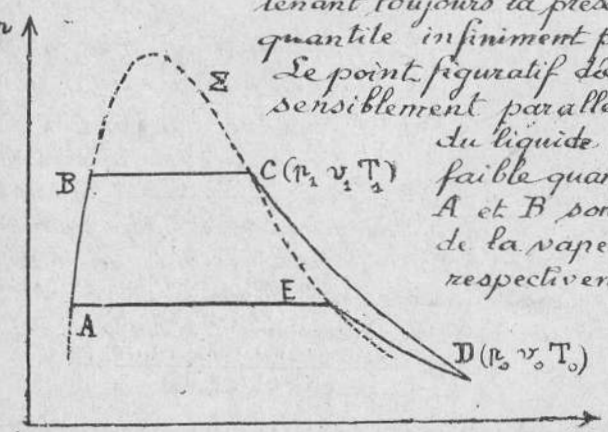
On demande de tracer le cycle dans les diagrammes (p, v) et (S, T), de décrire les phénomènes relatifs à ses différentes branches et de calculer la variation d'entropie correspondant à la surchauffe de la vapeur d'éther à la température de 0°, dans les conditions de l'expérience, c'est à dire à son augmentation de volume à la température constante 0°.

Données : Surface du piston : 1 décimètre carré. Volume massique de la vapeur d'éther à 30° : 400 cm³. — Course du piston : 30 cm. Chaleur spécifique moyenne de l'éther liquide entre 0° et 30° : 0,535. — Chaleur latente de vaporisation à 0° : 94 cal ; à 30° : 91,3 cal. — On supposera le coefficient h négligeable pour l'éther liquide.

(Nancy. Physique générale).

Raisonnons d'abord sur 1 gramme d'éther. Nous déterminerons ultérieurement la quantité réelle d'éther sur laquelle on opère.

Traçons le cycle en (p, v). Elevons la température de 0° à 30° centigrades en empêchant toute vaporisation, mais en maintenant toujours la pression supérieure d'une quantité infiniment petite à la tension maxima. Le point figuratif décrit une droite AB sensiblement parallèle à Op, car le volume du liquide ne varie que d'une faible quantité. Les pressions en A et B sont les tensions maxima de la vapeur d'éther à 0° et 30° respectivement ; ces quantités n'étant pas données dans l'énoncé, nous ne pouvons tracer qu'un diagramme qualitatif.



Vaporisons entièrement le liquide à la température de 30° sous la tension maxima correspondant à cette température ; le point figuratif décrit

la droite BC parallèle à Ov.

Produisons une détente adiabatique jusqu'à ce que la température soit redevenue 0°. Nous allons montrer que dans ces conditions, la vapeur d'éther se surchauffe, c.à.d. cesse d'être saturante, ce qui nous permet d'admettre que cette vapeur se comporte comme un gaz parfait et que le point figuratif décrit la branche de courbe CD, d'équation $pv^\gamma = C^{te}$, en prenant $\gamma = 1,40$. En D, la vapeur étant non saturante, et la température étant 0°, la pression est inférieure à la pression en A.

Ramenons enfin l'éther à l'état initial à la température constante de 0°. Au début de la compression isothermique, la vapeur étant non saturante se comporte comme un gaz parfait et le point figuratif décrit l'isotherme DE qui est un arc d'hyperbole équilatère. En E la vapeur est saturante et l'ordonnée de E, égale à celle de A, représente la tension maxima de la vapeur d'éther à 0°.

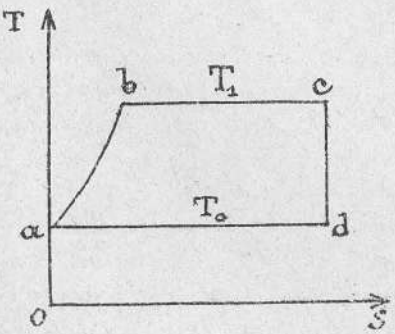
Notons en passant que les 4 points A, B, C, E appartiennent à la courbe de saturation Σ que nous avons figurée en pointillé.

On sait que l'aire du cycle (p, v) représente le travail produit par l'éther pendant la transformation.

Traçons maintenant le diagramme (S, T) en portant les entropies S en abscisses et les températures absolues T en ordonnées.

Nous partons du point a correspondant à la température $T = 273$ et pour lequel, nous supposons l'entropie nulle. Elevons la température du liquide de T à $T + dT$; la pression passe de p à $p + dp$. La chaleur absorbée est (1) $dQ = C\,dT + h\,dp$.

Si, comme l'indique l'énoncé, le coefficient h relatif à l'éther liquide est négligeable, on a $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C\,dT}{T}$, C désignant la chaleur spécifique du liquide à pression constante. Intégrons, en remarquant que $S_o = 0$, (2) $S = C \operatorname{Log} \frac{T}{T_o}$, ce qui donne l'arc de courbe logarithmique ab. En vaporisant entièrement le liquide à la température $T_1 = 273 + 30 = 303°$, on obtient l'isotherme bc, droite parallèle à OS.



La détente adiabatique correspondant à une valeur constante de l'entropie, est représentée par une droite cd parallèle à OT.

En ramenant l'éther à l'état initial, à la température T_o, on obtient l'isotherme da, droite parallèle à OS.

De $dS = \frac{dQ}{T}$ on tire $Q = \int T\,dS$, ce qui montre que la chaleur absorbée par l'éther est égale à l'aire du cycle.

Démontrons maintenant que la détente adiabatique surchauffe la vapeur d'éther.

Supposons que dans le mélange de 1 gramme de vapeur et de liquide, il y ait x grammes de vapeur et par suite $1-x$ gr. de liquide. Désignons par u et u', respectivement les volumes spécifiques du liquide et de la vapeur. Le volume du mélange a pour valeur $v = (1-x)u + xu'$.

Dans une transformation infiniment petite, il y a une variation de volume $dv = (1-x)du + x du' + (u'-u)dx$. Les volumes u et u' sont variables puisqu'ils dépendent de la température.

Supposons qu'on parte du point C, où la quantité de liquide est infiniment petite, alors $x = 1$, à un infiniment petit près et on a $dv = du' + (u'-u)dx$; (3) $dv = \frac{du'}{dT} dT + (u'-u)dx$.

Nous avons vu au n°84 que la quantité de chaleur dQ absorbée quand on faisait varier la température T de dT et la masse x de vapeur de dx était, en désignant par m et m' les chaleurs spécifiques du liquide et de la vapeur et par λ la chaleur latente de vaporisation à la température T,

$$dQ = \left[(1-x)m + m'x\right]dT + \lambda dx.$$

Ecrivons que la transformation est adiabatique ($dQ = 0$) et faisons $x = 1$, on a $m'dT + \lambda dx = 0$, $dT = -\frac{\lambda}{m'} dx$. Portons cette valeur de dT dans (3):

$$dv = \left[-\frac{\lambda}{m'}\frac{du'}{dT} + u' - u\right]dx, \quad \frac{dx}{dv} = \frac{m'}{m'(u'-u) - \lambda\, du' : dT}.$$

Le terme $u'-u$ est toujours positif; $\frac{du'}{dT}$ est toujours négatif; quand on descend en effet sur la branche de gauche de la courbe de saturation Σ, la température diminue et l'abscisse u' augmente. Le terme $-\lambda \frac{du'}{dT}$ est donc positif. Il en résulte que si m' est positif, il en sera de même de $\frac{dx}{dv}$. Or nous avons vu au n°83 que (4) $m' = m + \frac{d\lambda}{dT} - \frac{\lambda}{T}$. Calculons cette quantité pour l'éther en utilisant les données de l'énoncé. Nous admettrons que la chaleur latente de vaporisation est une fonction linéaire de la température $\lambda = a - bT$.

On a pour déterminer a et b les deux équations $94 = a - 273b$; $91{,}3 = a - 303\,b$ d'où l'on tire $a = 118{,}57$; $b = 0{,}09$; $\lambda = 118{,}57 - 0{,}09\,T$; $\frac{d\lambda}{dT} = -0{,}09$. D'autre part, par définition même de m, on a $dQ = m\,dT$, c'est à dire, en tenant compte de (1) et de ce que h est négligeable, $m = C = 0{,}535$. Portons ces valeurs dans l'équation (4) où nous faisons $T = 303°$ il vient

$$m' = 0{,}535 - 0{,}09 - \frac{91{,}3}{303} = 0{,}144.$$

La quantité m' étant positive, il en est de même de $\frac{dx}{dv}$. Or la détente rend dv positif; donc dx est positif; la quantité de vapeur augmente; la trace de liquide qui restait s'évapore. On arrive donc bien à cette conclusion connue que, par la détente adiabatique la vapeur d'éther cesse d'être saturante, c'est à dire se surchauffe. Considérant alors la vapeur non saturante comme un gaz parfait, on a, d'après la formule (4) du n°23, $v_1 = v_0 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{1:(\gamma-1)}$; p_0, v_0, T_0 correspondent au point D; p_1, v_1, T_1 correspondent au point C.

Cette relation, vraie pour les volumes spécifiques est également vraie pour les volumes V_0 et V_1 de la masse de la vapeur d'éther sur laquelle on opère et on a $V_1 = V_0 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{1:(\gamma-1)}$. Or le volume V_0 à la fin de la détente est égal au volume du corps de pompe quand le piston est à fond de course. La surface du piston étant de 1 décimètre carré et sa course de 30 centimètres, on a: $V_0 = 100 \times 30 = 3000\ cm^2$ et par suite, en faisant $\gamma = 1,40$, $V_1 = 3000 \times \left(\frac{273}{303}\right)^{2,5} = 2312\ cm^3$. Comme le volume massique v_1 de la vapeur d'éther à 30° est $400\ cm^3$, la masse p de la vapeur d'éther est $p = \frac{2312}{400} = 5,78\ gr$.

Puisqu'au point E du diagramme en (p, v) la vapeur commence à être saturante à la température de 0°, l'augmentation de volume spécifique due à la surchauffe est égale à la différence des abscisses des points D et E et la variation d'entropie correspondant à la surchauffe de la vapeur d'éther à 0° est $S_D - S_E$. D'après la formule (2), on a, S_A étant nul par convention

(5) $S_B = p\,C \log \frac{T_1}{T_0} = 5,78 \times 0,535 \times \text{Log}\frac{303}{273} = 0,3224.$

D'autre part,

(6) $S_C - S_B = \frac{p\,\lambda_1}{T_1} = \frac{5,78 \times 91,3}{303} = 1,7416.$

Comme $S_C = S_D$, puisque CD est une adiabatique, on a, en ajoutant (5) et (6), $S_C = S_D = 2,064$.

En suivant l'isotherme AE, on a $S_E = \frac{p\,\lambda_0}{T_0} = \frac{5,78 \times 94}{273} = 1,990$

Donc $S_D - S_E = 2,064 - 1,990 = 0,074$ C.G.S.

93.– Un poids d'eau E dont on ignore le titre en vapeur, et même si l'état de saturation ou de surchauffe, occupe un volume V sous une pression p, fournis l'un et l'autre par un bon diagramme. Comment peut-on reconnaître si cette eau est à l'état de vapeur saturée ou non et, dans le cas de l'affirmative, comment calculer son titre?

On appliquera aux trois cas suivants, où V est donné en litres, p en atmosphères et E en grammes. On représentera par a le poids en grammes d'un litre de vapeur saturée et sèche sous la pression p.

1°	V = 25;	p = 4,0;	E = 59,97;	a = 2,230;
2°	V = 25;	p = 4,4;	E = 59,97;	a = 2,439;
3°	V = 25;	p = 4,6;	E = 59,97;	a = 2,543;

(*Mécanique physique et expérimentale*, Paris, 1922).

Le poids de V litres de vapeur saturée et sèche, sous la pression p est $P = aV$. Trois cas peuvent se présenter

1° $aV > E$; la vapeur n'est pas saturée; elle est surchauffée.

2° $aV = E$; la vapeur est saturée et sèche; son titre est 1.

3° $aV < E$; il y a de l'eau liquide, la vapeur est saturée et humide. Pour calculer son titre x, nous écrivons que le volume V est égal à la somme des volumes occupés par l'eau, et la vapeur. On a donc, en exprimant les volumes en cm^3,

$1000\,V = E(1-x) + Ex\frac{1000}{a}$, d'où $x = \frac{a(1000\,V - E)}{E(1000 - a)}$.

Faisons l'application numérique.

Dans le premier cas $aV = 2,23 \times 25 = 55,75$. Ce produit étant inférieur à E, la vapeur est saturée et non sèche; son titre est

$$x = \frac{2,23(25000 - 59,97)}{59,97(1000 - 2,23)} = 0,929.$$

Dans le deuxième cas, $aV = 2,439 \times 25 = 60,975$.

Par suite, $aV > E$; la vapeur est surchauffée.

Il en est de même dans le troisième cas.

---

94. — Un poids connu P d'eau occupe le volume v sous la pression p. On demande comment on reconnaîtra si la vapeur est surchauffée ou non et, dans ce dernier cas, comment calculera-t-on sa chaleur interne ϖ?

Appliquer aux trois exemples numériques suivants:

A) $v = 20$ litres, $p = 10$ atmosphères, $P = 120$ grammes.

B) $v = 20$ litres, $p = 12$ atmosphères, $P = 125$ grammes.

C) $v = 20$ litres, $p = 14$ atmosphères, $P = 130$ grammes.

On donne les valeurs ci-après extraites des tables de Regnault.

Pressions en atmosphères	Poids en kgs d'un mètre cube de vapeur sèche.	Chaleur du liquide q	Chaleur latente de la vapeur ρ
10	$5^k,25$	182,719	432,775
12	$6^k,25$	191,126	426,368
14	$7^k,22$	198,537	420,736

(Mécanique physique et expérimentale, Paris.)

A. Sous la pression de 10 atmosphères, 20 litres de vapeur saturante et sèche pèseraient $5,25 \times 20 = 105$ gr. Ce poids étant inférieur à P, il y a de l'eau liquide. La vapeur est donc saturée et humide. Pour calculer son titre x, nous écrivons que le volume v est égal à la somme des volumes occupés par l'eau et la vapeur. Il y a $P(1-x)$ gr. d'eau et Px gr de vapeur. On a donc, en exprimant les volumes en litres et en désignant par a le poids en grammes d'un litre de vapeur sèche,

$$v = \frac{P(1-x)}{1000} + \frac{Px}{a}, \quad x = \frac{a(1000v - P)}{P(1000 - a)}, \quad x = \frac{5,25 \times (20000 - 120)}{120 \times (1000 - 5,25)} = 0,874.$$

Le poids de vapeur est donc $120 \times 0,874 = 104,9$ grammes. La chaleur interne du fluide, liquide et vapeur, en nous reportant à la définition donnée au n° 79 est

$$\varpi = 120 \times 182,719 + 104,9 \times 432,775 = 67324 \text{ cal. gr.}$$

B. Sous la pression de 12 atmosphères, 20 litres de vapeur saturante et sèche pèsent $6,25 \times 20 = 125$ gr. C'est précisément le nombre de l'énoncé. La vapeur est donc saturante et sèche. La chaleur interne est

$$\varpi = 125 \times (191,126 + 426,368) = 77187 \text{ cal. gr.}$$

C. Sous la pression de 14 atmosphères, 20 litres de vapeur saturante et sèche pèseraient $7,22 \times 20 = 144,4$ grammes. Puisque d'après l'énoncé, le poids de la vapeur n'est que de 130 grammes, c'est qu'elle est surchauffée.

Loi de Guldberg et Waage

95. A la température ordinaire on introduit dans un récipient clos 5 volumes d'anhydride carbonique et 3 volumes d'hydrogène. On porte ensuite le récipient à une température telle que la réaction (1) $CO^2 + H^2 = CO + H^2O$ puisse se produire réversiblement. Le coefficient K de la formule de Guldberg et Waage (2) $K = \frac{p_1 p_2}{p_3 p_4}$ est égal à 0,5 à cette température ; p_1, p_2, p_3, p_4 sont respectivement les pressions de chacun des gaz quand l'équilibre est établi. 1° On demande quelle est la composition centésimale en volume du mélange en équilibre. — 2° On dispose sur le récipient une paroi perméable seulement à la vapeur d'eau, au delà de laquelle peut se mouvoir un piston P_1. Soit v le volume du récipient, V le volume compris entre la paroi semiperméable et le corps de pompe. Donner la formule qui détermine la composition du mélange restant en équilibre dans le récipient. Effectuer le calcul numérique dans le cas de V infini. — 3° On introduit en outre dans le récipient un liquide desséchant qui, à la température considérée et à l'état d'équilibre, émet de la vapeur d'eau pure avec une pression maximum f. En relation avec le liquide se trouve une paroi perméable seulement à l'eau-liquide et au delà un piston P_2. Soit F la pression maximum de l'eau pure, π la pression osmotique, U le volume de liquide contenant une molécule d'eau. Comment peut-on dans ces conditions, en utilisant les pistons P_1 et P_2 constituer un cycle fermé réversible et isotherme? Déterminer d'après le cycle la pression osmotique π.

(Physique générale. Paris.)

1° Toutes les molécules gazeuses, à la même température et sous la même pression, occupent le même volume. La réaction (1) étant équimoléculaire fait disparaître des volumes égaux x de CO^2 et de H^2 en même temps qu'apparaissent les mêmes volumes x de CO et de H^2O. Les volumes des quatre gaz CO^2, H^2, CO, H^2O sont donc respectivement $5-x$, $3-x$, x, x. D'autre part, le produit pv étant constant pour chaque gaz, le rapport des pressions partielles pour un même volume est égal au rapport des volumes partiels mesurés sous une même pression. La formule (2) donne $0,5 = \frac{(5-x)(3-x)}{x^2}$, d'où $x^2 - 16x + 30 = 0$. Les racines de cette équation sont $x = 13,83$ et $2,17$. Comme x ne peut être supérieur à 3, la première racine ne convient pas. Les volumes cherchés sont donc pour CO^2, $5 - 2,17 = 2,83$; pour H^2, $3 - 2,17 = 0,83$; pour CO, $2,17$; pour H^2O, $2,17$, soit 35,375 % de CO^2, 10,375 % de H^2, 27,125 % de CO et 27,125 % de H^2O.

2° Le volume occupé par les trois gaz CO^2, H^2 et CO reste encore égal à v. Celui de H^2O devient $v + V$. Appelons y le volume transformé par la réaction. Les volumes des quatre gaz seront : $5-y$ pour CO^2, $3-y$ pour H^2, y pour CO, y pour H^2O.

Mais cette fois la pression partielle de H^2O est diminuée dans le rapport $\frac{v}{v+V}$. On a donc $0,5 = \frac{(5-y)(3-y)}{y^2} \frac{v+V}{v}$. Telle est la formule demandée.

Dans le cas de V infini, y, qui ne peut devenir plus grand que 3, tend vers 3. Tout l'hydrogène passe en combinaison. Il reste $5-3=2$ volumes de CO^2 et il apparaît 3 volumes de CO et 3 volumes de H^2O.

3° En déplaçant simultanément les pistons P_1 et P_2 on peut introduire, par exemple, une molécule d'eau liquide dans le système et l'en extraire en même temps à l'état gazeux. Les travaux fournis par l'opérateur sont: d'une part πV, d'autre part $-RT$, en désignant par R la constante moléculaire des gaz. Pour fermer le cycle il suffit: 1° de comprimer la vapeur d'eau depuis la pression f jusqu'à la pression F, ce qui nécessite un travail $-\int_f^F f\,dv = RT\int_f^F \frac{dF}{f} = RT\,\mathrm{Log}\frac{F}{f}$ (car de $fv=RT$, on tire $\frac{df}{f}+\frac{dv}{v}=0$); 2° de condenser cette vapeur, ce qui correspond à un travail sensiblement égal à RT, car le volume du liquide est négligeable vis à vis de celui de la vapeur; 3° d'amener le liquide obtenu à la pression π, ce qui ne nécessite aucun travail, les liquides étant pratiquement incompressibles. Ecrivons que dans ce cycle fermé réversible le travail total est nul: il vient, en définitive, $\pi V = -RT\,\mathrm{Log}\frac{F}{f}$. C'est l'équation classique qui relie la pression osmotique à l'abaissement de la tension de la vapeur; π est une pression négative. L'eau est aspirée par le système.

Etude des corps solides.

96.— Un ressort en hélice en acier, fixé à sa partie supérieure, est tendu par un poids de 80 grammes. Ce fil pèse 4 grammes. La température étant de 27°, si elle s'élève à 28°, le ressort s'allonge, mais on constate qu'il suffit de diminuer la charge de 0,1 gramme pour que le ressort reprenne sa longueur primitive. D'ailleurs, il s'allonge de 1 cm. si on augmente la charge de 2 grammes, toujours à température constante. Cela étant, on demande: 1° quelle quantité de chaleur il faut fournir à ce ressort pour maintenir sa température constante pendant qu'il subit un allongement Δl sous l'influence d'une augmentation de traction ΔF. 2° quelle variation de température le ressort subit si on augmente subitement la traction de 4 grammes. 3° Quel est l'accroissement d'énergie ΔU par centimètre d'allongement à température constante. On calculera la chaleur spécifique de l'acier du ressort au moyen de la loi de Dulong.

(Physique générale, Proposé à la Sorbonne).

L'état du ressort dépend de la température T, de la traction F et de la pression extérieure p (si on admet qu'elle peut varier pendant l'expérience). Pour effectuer la transformation élémentaire (dT, dF, dp), il faut fournir la quantité de chaleur $dQ = c\,dT + a\,dF + b\,dp$, en désignant par c la capacité calorifique du ressort (et non la chaleur spécifique de l'acier). Le travail reçu par le système est $d\mathcal{E} = F\,dl - p\,dv$.

La différentielle de l'énergie potentielle interne est
$dU = J\,dQ + d\mathcal{E} = J(c\,dT + a\,dF + b\,dp) + F\,dl - p\,dv$.

Il ne peut y avoir de doute sur le signe à mettre devant $F\,dl$; car lorsqu'on allonge un ressort, on augmente certainement son énergie potentielle ; il faut donc bien mettre le signe +. (Nous recommandons beaucoup au lecteur, dans des cas analogues, de faire ce raisonnement intuitif sur l'énergie).

Nous devons écrire que dU et dS sont des différentielles exactes. Pour simplifier l'écriture et surtout pour nous débarrasser de dl et de dv, nous ajoutons à dU la différentielle exacte $d(pv) - d(Fl)$, ce qui donne la nouvelle différentielle
$dX = dU + d(pv) - d(Fl) = Jc\,dT + (Ja - l)\,dF + (Jb + v)\,dp$.
Supposons la pression extérieure constante ($dp = 0$), il vient $dX = JC\,dT + (Ja - l)\,dF$. Écrivons que dX est une différentielle exacte, il vient (1) $J\left(\frac{\partial c}{\partial F} - \frac{\partial a}{\partial T}\right) = -\frac{\partial l}{\partial T}$.

Écrivons que
$dS = \frac{c}{T}\,dT + \frac{a}{T}\,dF$ est une différentielle exacte, il vient
(2) $\frac{\partial c}{\partial F} - \frac{\partial a}{\partial T} = -\frac{a}{T}$. (De (1) et de (2), on tire $a = \frac{T}{J}\frac{\partial l}{\partial T}$.

1° La question étant ainsi préparée, la quantité de chaleur à fournir, si la température et la pression restent constantes, est $dQ = a\,dF = \frac{T}{J}\frac{\partial l}{\partial T}\,dF$. Il nous faut calculer $\frac{\partial l}{\partial T}$. La longueur du ressort dépend de T et de F et on peut écrire $dl = \frac{\partial l}{\partial T}\,dT + \frac{\partial l}{\partial F}\,dF$. D'après l'énoncé, si on produit simultanément un accroissement dT' de 1 degré et une diminution dF de 0,1 gramme-poids, l'accroissement dl est nul. On a donc, en employant le système C.G.S., $0 = \frac{\partial l}{\partial T} \times 1 + \frac{\partial l}{\partial F} \times 0{,}1 \times 981$; donc $\frac{\partial l}{\partial T} = 98{,}1\,\frac{\partial l}{\partial F}$.

D'autre part, le ressort s'allonge de 1 cm si on augmente la charge de 2 grammes poids, à température constante, d'où $dl = \frac{\partial l}{\partial F}\,dF$, $1 = \frac{\partial l}{\partial F} \times 2 \times 981$. On en déduit $\frac{\partial l}{\partial T} = \frac{1}{20}$ et, par suite, $dQ = \frac{T}{J}a\,dF = \frac{1}{20}\frac{T}{J}\,dF$.

2° Si la traction est subite, le phénomène peut être considéré comme adiabatique, et on a $dQ = 0 = c\,dT + a\,dF$, (3) $dT = -\frac{a}{c}\,dF$.

Soit K la chaleur spécifique de l'acier dont le poids atomique est 56 ; on a, d'après la loi de Dulong, $56\,K = 6{,}4$. Comme le ressort pèse 4 grammes, on a $c = 4K = \frac{3{,}2}{7}$. D'ailleurs $a = \frac{T}{20J} = \frac{300}{20 \times 4{,}185 \times 10^7}$. En portant ces valeurs dans (3) et en notant que $\Delta F = 4 \times 981$, on trouve $\Delta T = -3{,}07 \times 10^{-3}$ degré, soit un abaissement de température d'un trois-millième de degré.

3° A température et à pression constantes, et en négligeant

le terme $p\,dv$ qui est extrêmement petit, on a, en passant aux quantités finies, $\Delta U = Ja\,\Delta F + F\,\Delta l$. D'après l'énoncé $F = 80 \times 981$, et on a $\Delta l = 1$ pour $\Delta F = 2 \times 981$. En remarquant que $Ja = \frac{T}{20} = \frac{300}{20}$, il vient

$$\Delta U = (30 + 80) \times 981 = 107910 \text{ ergs, soit } 108000 \text{ ergs.}$$

97.– Un cylindre d'un métal parfaitement élastique est posé sur un support fixe de façon que son axe soit vertical dans un espace vide d'air. Sur la base supérieure plane et horizontale on dépose sans choc un poids de 100 kilogs. On demande de calculer la quantité de chaleur qu'il faut fournir au cylindre ou en retirer pour que sa température qui est 20° centigrades reste invariable pendant l'opération.

Hauteur du cylindre à 20° ..... 1 mètre.
Coefficient de dilatation linéaire du métal ..... 0,00002.
Intensité de la pesanteur ..... $g = 981$ CGS.
Equivalent en ergs d'une petite calorie ..... $J = 4{,}18 \times 10^7$.

La diminution de hauteur du cylindre par l'apposition du poids est de l'ordre de $\frac{1}{100{,}000}$ de cette hauteur ; on ne demande le résultat qu'à $\frac{1}{1000}$ près. (Physique générale. Paris).

Prenons pour variables indépendantes la température absolue T et la pression F exercée par le poids P que l'on dépose sur le cylindre.

La quantité de chaleur à fournir au cylindre dans une transformation élémentaire est (1) $dQ = a\,dT + b\,dF$.

Le coefficient a est la capacité calorifique du cylindre à pression constante. Le coefficient b est la chaleur latente de compression à température constante ; c'est ce dernier coefficient que nous devons calculer puisqu'on demande la quantité de chaleur à fournir à température constante.

Première méthode. – On a $dU = J\,dQ + d\mathcal{T}$.

Le travail extérieur $d\mathcal{T}$ reçu par le cylindre comprend deux parties. Il y a d'abord le travail fourni par la pression F, qui en produisant une variation de hauteur dh du cylindre, exécute un travail $-F\,dh$ (Il ne doit pas y avoir d'hésitation sur le signe de ce travail : en comprimant le cylindre, on augmente en effet son énergie interne, et comme dh est négatif, il faut bien écrire $-F\,dh$). Il y a en outre le travail exécuté par la pression extérieure p. Si pour simplifier nous supposons cette pression p constante, le travail correspondant est $-p\,dv$. On a donc

(2) $dU = J\,dQ + d\mathcal{T} = J\,(a\,dT + b\,dF) - F\,dh - p\,dv$.

Employant un artifice bien connu, nous ajoutons à dU les différentielles $d(Fh)$ et $d(pv)$ qui sont des différentielles totales exactes, puisqu'elles ne dépendent que des coordonnées du système. Il vient, en posant $dX = dU + d(Fh) + d(pv)$ et en remarquant que $d(pv) = p\,dv$, puisque p est constant, $dX = Ja\,dT + (Jb + h)\,dF$.

Ecrivons que dX est une différentielle totale exacte, il vient

(3) $J\frac{\partial a}{\partial F} = J\frac{\partial b}{\partial T} + \frac{\partial h}{\partial T}$. Pour que la différentielle de l'entropie

(4) $dS = \frac{a\,dT}{T} + \frac{b\,dF}{T}$ soit une différentielle totale exacte, on doit avoir en multipliant par T, (5) $\frac{\partial a}{\partial F} = \frac{\partial b}{\partial T} - \frac{b}{T}$.

La comparaison des formules (3) et (5) donne :

$b = -\frac{T}{J}\frac{\partial h}{\partial T}$, c.à.d. (6) $b = -\frac{Th}{J}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial T}\right) = -\frac{Th\lambda}{J}$.

Deuxième méthode. — Utilisons la première fonction H de Massieu définie par la relation $JH = JTS - U$. En différentiant il vient $d(JH) = J(TdS + SdT) - dU$, c.à.d. en tenant compte de (2)

$$d(JH) = JS\,dT + JT\,dS - J\,dQ + F\,dh + p\,dv.$$

Mais $TdS = dQ$; donc $d(JH) = JS\,dT + F\,dh + p\,dv$. En posant $dY = d(JH) - d(Fh) - d(pv)$, il vient $dY = JS\,dT - h\,dF$.

Écrivons que dY est une différentielle totale exacte :

$J\frac{\partial S}{\partial F} = -\frac{\partial h}{\partial T}$. Mais de (4) on tire $\frac{\partial S}{\partial F} = \frac{b}{T}$. On a donc $b = -\frac{T}{J}\frac{\partial h}{\partial T} = -\frac{Th\lambda}{J}$. On retombe sur la formule (6).

La quantité de chaleur à fournir au cylindre pour que sa température reste constante s'obtient en intégrant l'équation (1) après y avoir fait $dT = 0$. Les limites de F sont zéro et $F_1 = Pg$. Il vient

$Q = -\frac{T}{J}h\lambda Pg$. On a $T = 20 + 273 = 293$; $P = 10^5$. Comme h ne varie que de $\frac{1}{100000}$ de sa valeur et qu'on ne demande le résultat qu'à $\frac{1}{1000}$ près, nous prenons $h = 100$ cm, ce qui donne

$$Q = -\frac{293}{4{,}18\times 10^7} \times 100 \times \frac{2}{10^5} \times 981 = -1{,}375 \text{ calories.}$$

Cette valeur étant négative, nous en concluons qu'il faut retirer au cylindre 1,375 calories-gramme pour que sa température reste constante.

Remarque. — Pour que la condition de réversibilité soit satisfaite, c.à.d. pour que l'équilibre puisse être considéré comme existant à chaque instant, il est indispensable que l'on soutienne convenablement le poids pendant la chute, de manière que la pression varie progressivement de zéro à $F_1 = Pg$, ainsi que nous l'avons supposé implicitement dans la solution précédente.

Soit ε la quantité dont a diminué la hauteur du cylindre. Bien que le travail de la pesanteur soit évidemment égal à $F_1\varepsilon$, nous allons montrer, en nous référant à une Note de M. Leduc à l'Académie des Sciences (Comptes-rendus du 25 Avril 1921) que le travail reçu par le cylindre est seulement $\frac{1}{2}F_1\varepsilon$. En effet, quand la force croît de zéro à F_1, le raccourcissement $h_0 - h$ du cylindre varie de zéro à ε. On peut supposer que le raccourcissement est proportionnel à la force. En faisant intervenir le coefficient d'élasticité E et la section droite s du cylindre, le travail reçu par le cylindre est, en remarquant que dh est négatif,

$$\mathcal{E} = -\int_{h_0}^{\varepsilon} \frac{Es}{h_0}(h_0 - h)\,dh,$$

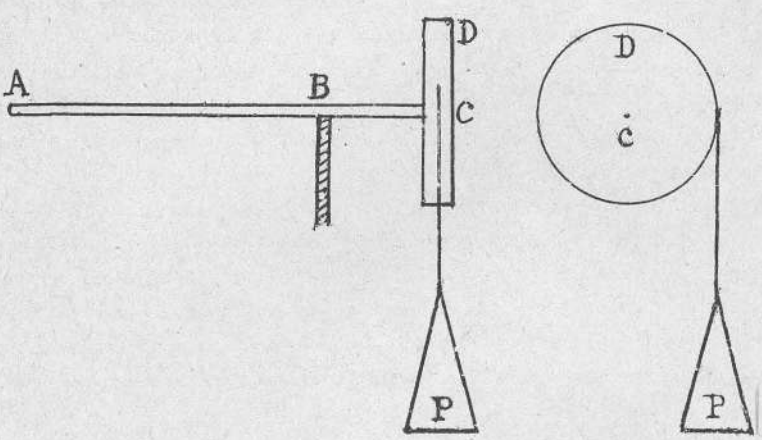
$$\mathcal{E} = \int_0^{\varepsilon} \frac{Es}{h_0}(h_0 - h)\,d(h_0 - h) = \frac{Es}{h_0} \times \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{F_1\varepsilon}{2}.$$

— Supposons maintenant que l'on dépose, toujours sans choc, mais sans autre précaution, le poids P sur le cylindre. Le raccourcissement final sera encore ε, et il n'est pas douteux que le travail de la pesanteur soit $F_1 \varepsilon$. Mais la moitié seulement est reçue par le cylindre à titre réversible, c.à.d. compensée par une augmentation d'énergie potentielle élastique. Comme précédemment, pour que la température reste invariable, il faut déjà enlever au cylindre une première quantité de chaleur égale à $\frac{T}{J} h \lambda Pg$. Mais l'autre moitié du travail de chute est transformée en énergie vibratoire; puis les oscillations s'amortissent rapidement et produisent un dégagement de chaleur dans le cylindre. La nouvelle quantité Q' qu'il faut enlever pour que le cylindre ne s'échauffe pas est $Q' = \frac{F_1 \varepsilon}{2J} = \frac{Pg\varepsilon}{2J}$.

D'après l'énoncé $\varepsilon = 20 \times 10^{-5}$. On a donc $Q' = \frac{10^5 \times 981 \times 100}{2 \times 10^5 \times 4{,}18 \times 10^7} = 0{,}0012$ calorie. On voit que Q' est inférieur au millième de Q. C'est un effet de second ordre.

— Si on connaissait E, on pourrait se passer de ε. On a, en effet, $\frac{\varepsilon}{h} = \frac{1}{E} \times \frac{F_1}{s} = \frac{Pg}{Es}$, d'où $Q' = \frac{h P^2 g^2}{2JEs}$.

98... Une baguette d'acier ABC a une section circulaire de 2 m/m de rayon et 50 cm. de longueur. L'extrémité A est serrée dans un étau; à l'extrémité C est fixée une poulie dont le plan lui est perpendiculaire et elle repose en B sur un tourillon parfaitement lubréfié. Un câble souple supportant un plateau P est enroulé sur la gorge de la poulie dont le rayon CD = 20 cm. et fixé en l'un de ses points. Si l'on pose sur le plateau un poids de 20 Kgs, on constate que la poulie tourne d'un radian. On demande de calculer la variation de température de la baguette dans les deux cas suivants:



1° Grâce à des précautions que l'on indiquera, l'opération a été effectuée d'une manière très sensiblement réversible et adiabatique.
2° On a laissé tomber le poids sur le plateau d'une hauteur d'un centimètre.

Données numériques. — Température initiale t = 17° Chaleur spécifique de l'acier K = 0,11; sa densité $\rho = 7{,}9$. Coefficient de température de son coefficient de torsion $\frac{1}{c} \frac{dC}{dT} = -23.10^{-5}$. On suppose négligeables les poids du plateau et du câble et celui-ci est supposé parfaitement souple.

(Physique Générale, Paris 1922).

1° Prenons pour variables indépendantes la température absolue T et l'angle de torsion ω de la baguette. Pour que l'opération soit effectuée d'une façon réversible, il faut qu'il y ait à chaque instant équilibre entre le moment moteur dû au poids et le moment résistant dû à la torsion de la baguette. Ce dernier étant proportionnel à l'angle de torsion, il faudra donc que l'on soutienne le poids dans sa chute, en le lâchant progressivement de façon que son moment moteur fasse équilibre, dans toutes les positions, au moment de torsion. A la fin de la rotation, quand on lâchera le poids, son moment PgR (en désignant par R le rayon CD de la poulie) sera égal à $C\omega_1$, ω_1 étant l'angle final de rotation, soit un radian.

Pour effectuer la transformation élémentaire $(dT, d\omega)$, il faut fournir à la baguette la quantité de chaleur

(1) $dQ = a\,dT + b\,d\omega$, a étant la capacité calorifique de la baguette sous torsion constante. Le travail fourni par l'opérateur étant $d\mathcal{E} = C\omega\,d\omega$, on a

$$dU = J\,dQ + d\mathcal{E} = Ja\,dT + (Jb + C\omega)\,d\omega.$$

Ecrivons que dU et dS sont des différentielles totales exactes:

$$J\frac{\partial a}{\partial \omega} = J\frac{\partial b}{\partial T} + \omega\frac{\partial C}{\partial T}, \qquad \frac{\partial a}{\partial \omega} = \frac{\partial b}{\partial T} - \frac{b}{T}, \text{ d'où}$$

$$b = -\frac{T}{J}\,\omega\frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{TC\omega}{J}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T}\right) = -\frac{TC\omega\lambda}{J},$$

en posant $\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T} = \lambda$. Portons cette valeur de b dans (1) et faisons $dQ = 0$. On obtient pour la variation de température cherchée

$$\Delta T = \frac{TC\omega\lambda}{aJ}\Delta\omega.$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, le moment de torsion $C\omega$ passe progressivement, pendant l'opération, de la valeur zéro à la valeur PgR; sa valeur moyenne est donc $\frac{PgR}{2}$ et on a $\Delta T = \frac{TPgR\lambda}{2aJ}\Delta\omega$. En faisant $T = 17 + 273$, $P = 20000$, $g = 981$, $R = 20$, $\lambda = -23 \times 10^{-5}$, $a = \pi \times 0{,}2^2 \times 50 \times 7{,}9 \times 0{,}11$, $J = 4{,}185 \times 10^7$, $\Delta\omega = 1$, on trouve $\Delta T = -0°,057$.

2° Supposons maintenant qu'on laisse tomber le poids sur le plateau d'une hauteur h centimètres. Cette fois, tout le travail de la pesanteur, soit $Pg(R+h)$, est absorbé par le système. Mais nous savons que la quantité $\frac{PgR}{2}$ seulement est reçue par la baguette à titre réversible, c.à.d. compensée par une augmentation d'énergie potentielle élastique, correspondant à la variation de température ΔT. Le reste, soit $Pg\left(\frac{R}{2} + h\right) = 11\,Pg$ est transformé en énergie vibratoire qui se traduit finalement en chaleur. Si on suppose que toute cette chaleur est absorbée par la baguette, la variation de température maximum correspondante est $\Delta T_1 = \frac{11Pg}{aJ} = 0°,944$.

La variation totale de température de la baguette est $\Delta T = \Delta T + \Delta T_1 = 0°,887$. Cette fois, elle est positive; la baguette s'échauffe.

99. — La longueur d'un certain fil de métal soumis à la traction F est donnée par la formule

$$(1)\qquad l = l_0 e^{aF+b(t-t_0)}$$

l_0 étant la longueur à t_0 et sous la traction $F_0 = 0$, a et b sont deux constantes. 1° Calculer le coefficient d'élasticité linéaire E (ou module de Young) et le coefficient de dilatation linéaire $\lambda = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial t}$. 2°. Ce fil soumis à une traction très subite ΔF s'allonge brusquement d'une quantité Δl. Abandonné à lui-même sous cette traction ΔF à température ambiante constante, il s'allonge d'une nouvelle quantité $\Delta l'$. Calculer les allongements Δl et $\Delta l'$.

Application numérique. — $l_0 = 1^m$; $t_0 = 27°$; $\Delta F = 20^{kgs},4$; section $S = 1\,mm^2$; $\lambda = 10^{-5}$; coefficient d'élasticité $E = 2\times10^{12}$ CGS ; capacité calorifique par cm^3, sous pression constante, $c = 0,86$. — 3° Calculer la traction supplémentaire qu'il faudrait appliquer à ce fil pour l'empêcher de se raccourcir si la température s'abaissait de 1 degré. (Physique générale, Proposé à la Sorbonne).

1°. — Un fil de longueur l et de section S, soumis à une traction dF, subit un allongement dl donné par la formule $\frac{dl}{l} = \frac{1}{E}\frac{dF}{S}$, en désignant par E le coefficient d'élasticité linéaire ou module de Young. On a donc (2) $E = \frac{l}{S} : \frac{dl}{dF}$. Par suite $E = \frac{1}{a}\frac{l}{S}$.

Or de l'équation (1) on tire $\frac{dl}{dF} = al$. La même formule (1) donne (3) $\lambda = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial t} = b$.

2° Prenons pour variables indépendantes la température absolue T et la traction F. La quantité de chaleur à fournir au fil est $dQ = K\,dT + h\,dF$, en désignant par K la capacité calorifique du fil à traction constante. On a donc $K = cl\,S$.

Le principe de l'équivalence donne $dU = J(K\,dT + h\,dF) + d\mathcal{T}$. Le travail $d\mathcal{T}$ reçu par le fil ou fourni par l'opérateur est $+F\,dl$. Il n'y a pas d'hésitation sur le signe, car un fil tiré doit pouvoir soulever un corps si on cesse la traction ; son énergie interne a donc augmenté. Comme dl est positif, on doit bien mettre $+F\,dl$. En remarquant que $d(Fl) = F\,dl + l\,dF$, on peut écrire

$$d(U - Fl) = JK\,dT + (Jh - l)\,dF.$$

Écrivons que U, ou, ce qui revient au même que $U - Fl$ est une différentielle totale exacte, il vient

$$(4)\qquad J\frac{\partial K}{\partial F} = J\frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial l}{\partial T}.$$

Pour que la différentielle de l'entropie $dS = \frac{K\,dT}{T} + \frac{h\,dF}{T}$ soit une différentielle totale exacte, on doit avoir

$$\frac{1}{T}\frac{\partial K}{\partial F} = \frac{1}{T}\frac{\partial h}{\partial T} - \frac{h}{T^2},\ \text{ou, en multipliant par } T,\ (5)\quad \frac{\partial K}{\partial F} = \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{h}{T}.$$

La comparaison des formules (4) et (5) donne

$$h = \frac{T}{J}\frac{\partial l}{\partial T} = \frac{Tl}{J}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial T}\right) = \frac{T}{J}\,l\lambda.$$

Calculons l'allongement Δl. On a (6) $dl = \frac{\partial l}{\partial T}dT + \frac{\partial l}{\partial F}dF$.

Pour calculer la variation de température ΔT, nous écrivons que le phénomène est adiabatique ($dQ = 0$) puisque la traction est très

brusque : $K dT + \frac{T}{J} l\lambda\, dF = 0$, $\frac{dT}{T} = -\frac{l\lambda}{KJ} dF = -\frac{\lambda}{Jsc} dF$,

$\text{Log}\frac{T}{T_0} = \text{Log}\left(1 + \frac{T-T_0}{T_0}\right) = \text{Log}\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) = -\frac{\lambda \Delta F}{Jsc}$. Nous ne mettons pas de constante d'intégration dans le second membre puisque la traction est nulle pour $T = T_0$. Nous développons en série le logarithme népérien et comme ΔT est très petit, nous ne prenons que le premier terme du développement, ce qui donne (7) $\Delta T = -\frac{\lambda T_0 \Delta F}{Jsc}$. Bien qu'on ne demande pas ΔT, nous allons le calculer pour justifier notre hypothèse de sa petitesse. On trouve

$$\Delta T = -\frac{10^{-5} \times 300 \times 20{,}4 \times 981 \times 10^3}{4{,}18 \times 10^7 \times 10^{-2} \times 0{,}86} = -0°{,}167.$$

Le fil subit donc un abaissement de température.

Pour calculer Δl, nous nous servons de l'équation (6) qui donne, en tenant compte des relations (2), (3) et (7),

$$\Delta l = \frac{l \Delta F}{s}\left[\frac{1}{E} - \frac{\lambda^2 T_0}{Jc}\right] = \frac{20{,}4 \times 981}{10^5}\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{10^3 \times 4{,}18 \times 0{,}86}\right].$$

Le terme soustractif de la parenthèse est négligeable devant $\frac{1}{2}$ et l'on trouve sensiblement $\Delta l = \frac{1}{10}$ cm, soit 1 m/m.

Si on abandonne le fil à lui-même sous la traction constante ΔF, à température ambiante constante, il va se réchauffer en subissant une augmentation de température égale à $-\Delta T = \frac{\lambda T_0 \Delta F}{Jsc}$. L'allongement corrélatif $\Delta l'$ s'obtient en faisant $dF = 0$ dans (6), ce qui donne $\Delta l' = \frac{l \lambda^2 T_0 \Delta F}{Jsc} = 1{,}67 \times 10^{-4}$ cm soit 1,67 micron.

On voit que par sa petitesse cet allongement est un effet de second ordre par rapport au premier allongement Δl.

3° Faisons $\Delta T = -1°$. Pour empêcher le fil de se raccourcir, il faut, d'après l'équation (6), appliquer une traction supplémentaire ΔF donnée par la relation $0 = -\frac{\partial l}{\partial T} + \frac{\partial l}{\partial F}\Delta F$. On en tire

$$\Delta F = \frac{\partial l}{\partial T} : \frac{\partial l}{\partial F} = \lambda E \ell = 10^{-5} \times 2 \times 10^{12} \times 10^{-2} = 2 \times 10^5 \text{ dynes},$$

soit 204 grammes-poids. (Si pour cette dernière application on avait fait $\Delta T = -0°{,}167$, quantité trouvée dans le 2°, on aurait trouvé 34 grammes-poids comme traction supplémentaire, ce qui représente encore un effet de second ordre par rapport à l'effort principal de 20,4).

100.— Un fil métallique fixé à l'une de ses extrémités supporte un poids P. On lui applique en outre à l'extrémité inférieure un couple horizontal qui a pour effet de lui imprimer une torsion α. — 1° Donner l'expression de la quantité de chaleur à fournir à ce fil pour maintenir sa température constante pendant qu'on lui imprime un petit excès de torsion $\Delta\alpha$. 2° Exprimer la variation de α sous l'influence d'un petit excès de traction ΔF en fonction du raccourcissement du fil sous l'influence de cette torsion qu'on lui a imprimée. Dire ce qui arrivera en particulier pour $\alpha = 0$.

(Proposé à la Sorbonne).

L'état du fil est conditionné par la température T, la traction F, la longueur l, le couple Γ, la torsion α. Dans les limites de l'expérience où les conditions de réversibilité sont satisfaites, on peut considérer que F et Γ sont respectivement proportionnels à l et à α. On prendra donc seulement trois variables indépendantes, T, F et α par exemple.

Pour effectuer la transformation élémentaire $(dT, dF, d\alpha)$, il faut fournir la quantité de chaleur $dQ = c\,dT + a\,dF + b\,d\alpha$, c désignant la capacité calorifique (et non la chaleur spécifique) du fil à traction et à torsion constantes.

Le travail reçu par le fil est $d\mathcal{E} = C\alpha\,d\alpha + F\,dl$. Nous mettons le signe + dans le second membre, car en tordant le fil et en l'allongeant, nous augmentons son énergie, puisqu'il peut fournir un travail supplémentaire en se détordant et en se raccourcissant. Nous écrivons donc

$$dU = J\,dQ + d\mathcal{E} = Jc\,dT + Ja\,dF + F\,dl + (Jb + C\alpha)\,d\alpha.$$

Nous devons écrire que dU et dS sont des différentielles exactes. Pour simplifier l'écriture, nous retranchons de dU la différentielle exacte $d(Fl)$, ce qui donne

(1) $$dX = dU - F\,dl = Jc\,dT + (Ja - l)\,dF + (Jb + C\alpha)\,d\alpha,$$

(2) $$dS = \frac{c}{T}\,dT + \frac{a}{T}\,dF + \frac{b}{T}\,d\alpha.$$

1° A température et à traction constantes, la quantité de chaleur à fournir est $dQ = b\,d\alpha$. Il faut donc calculer b. En écrivant que dX et dS sont des différentielles exactes et en ne prenant que les relations nécessaires, il vient

$$J\frac{\partial c}{\partial \alpha} = J\frac{\partial b}{\partial T} + \alpha\frac{\partial C}{\partial T}, \quad \frac{\partial c}{\partial \alpha} = \frac{\partial b}{\partial T} - \frac{b}{T}, \quad b = -\frac{T}{J}\alpha\frac{\partial C}{\partial T}.$$

Par suite, $dQ = -\frac{T}{J}\alpha\frac{\partial C}{\partial T}\,d\alpha$.

Il y a intérêt à faire intervenir $C\alpha$ et à écrire, en passant à des quantités finies, mais toujours petites, $\Delta Q = -\frac{T}{J}\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T}\,C\alpha\,\Delta\alpha$. On remarquera que la quantité $C\alpha\,\Delta\alpha$ représente le travail reçu par le fil.

Il y a lieu de noter que $\frac{\partial C}{\partial T}$ est généralement négatif. On s'en rend compte physiquement en remarquant que, si on chauffe un fil, il s'amollit et devient de plus en plus facile à tordre. Par conséquent, ΔQ est positif; il faut bien fournir de la chaleur au fil.

2° Sous l'influence d'un excès de traction ΔF, le couple ne change pas. On peut donc écrire $C\alpha = (C + \Delta C)(\alpha + \Delta\alpha)$, d'où, en négligeant le produit $\Delta C\,\Delta\alpha$, (3) $\Delta\alpha = -\frac{\alpha}{C}\Delta C$. Mais comme on demande $\Delta\alpha$ en fonction de ΔF, nous devons chercher l'expression de ΔC en fonction ΔF. De (1) et (2) on tire $J\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial l}{\partial \alpha} = J\frac{\partial b}{\partial F} + \alpha\frac{\partial C}{\partial F}$, $\frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{\partial b}{\partial F}$, d'où $\frac{\partial C}{\partial F} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial l}{\partial \alpha}$ ce que l'on peut écrire $\Delta C = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial l}{\partial \alpha}\Delta F$. En portant dans (3), il vient l'expression cherchée $\Delta\alpha = \frac{1}{C}\frac{\partial l}{\partial \alpha}\Delta F$.

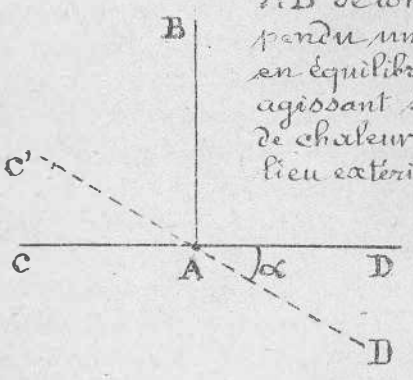
Si $\alpha = 0$, l'expression (3) montre que $\Delta\alpha = 0$. La traction ΔF ne produit aucun effet. Il est d'ailleurs évident physiquement

que si on tire sur un fil qui n'est pas tordu, on ne le tord pas.

Nota. — On pourra justifier les résultats trouvés par comparaison avec un bifilaire à brins parallèles très longs.

---

101. — Un pendule de torsion est constitué par un fil métallique AB de longueur l et de section s auquel on a suspendu une barre horizontale CD. L'appareil étant en équilibre, on imprime au fil une torsion α en agissant sur CD. On suppose qu'aucun échange de chaleur n'a le temps de se produire avec le milieu extérieur.



1° Calculer la variation de température du fil produite par cette torsion. — 2° Montrer comment le principe de Lenz permet de prévoir le sens de cette variation. — 3° Déterminer le rapport qui existe entre la quantité de chaleur qu'il faudrait fournir au fil (ou lui enlever) pour le ramener à la température initiale et le travail reçu pendant le phénomène de torsion. — 4° Peut-on voir dans les phénomènes thermiques une cause d'amortissement des oscillations du pendule? Examiner si la capacité calorifique du fil dépend de α.

Données numériques. — $l = 80$ cm; $s = 1$ mm^2; $\alpha = 180°$; température centigrade initiale $t = 17°$. Le coefficient de torsion C du fil est donné par la formule (1) $C = {}^{\circ}K \frac{s^2}{l}$ avec (2) $K = 12^{10}\left[1 - 2{,}33 \times 10^{-4}(t - 17)\right]$. Chaleur spécifique du métal $c = 0{,}11$. Coefficient de dilatation linéaire $\lambda = 11 \times 10^{-6}$. Densité du métal $D = 7{,}84$.

(Physique générale, Proposé à la Sorbonne).

1° Prenons pour variables indépendantes l'angle de torsion α et la température absolue T. La quantité de chaleur à fournir au système est (3) $dQ = a\,dT + b\,d\alpha$, a est la capacité calorifique du fil, à torsion constante et on a $a = cls\,D$. Le principe de l'équivalence donne $dU = J\,dQ + d\mathcal{E}$.

Le travail $d\mathcal{E}$ reçu par le fil est obtenu par le couple $C\alpha$ produisant une rotation élémentaire $d\alpha$. On a donc $d\mathcal{E} = C\alpha\,d\alpha$ et, par suite, $dU = J\,a\,dT + (Jb + C\alpha)\,d\alpha$.

Écrivons que dU est une différentielle totale exacte, il vient (4) $J\frac{\partial a}{\partial \alpha} = J\frac{\partial b}{\partial T} + \alpha\frac{\partial C}{\partial T}$. Pour que la différentielle de l'entropie $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{a\,dT}{T} + \frac{b\,d\alpha}{T}$ soit une différentielle totale exacte, on doit avoir $\frac{1}{T}\frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{1}{T}\frac{\partial b}{\partial T} - \frac{b}{T^2}$, ou, en multipliant par T, (5) $\frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{\partial b}{\partial T} - \frac{b}{T}$.

La comparaison des formules (4) et (5) donne (6) $b = -\frac{\alpha T}{J}\frac{\partial C}{\partial T}$.

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de la formule (1), on trouve

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial T} + \frac{2}{s}\frac{\partial s}{\partial T} - \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial T}.$$

Rigoureusement, pour calculer ces coefficients de température

nous devrions revenir à la température de zéro degré centigrade. Mais les valeurs K_0, ρ_0, l_0 à zéro degré, sont tellement voisines des valeurs K, l, s à 17° qu'on peut se tenir à cette température de 17° centigrades. De la formule (2) on tire $\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial T} = -2,33\times10^{-4}$. D'ailleurs: $\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial T} = \lambda = +11\times10^{-6}$, le coefficient de dilatation, $\frac{2}{s}\frac{\partial s}{\partial T} = 4\lambda$, puisque superficielle est le double du coefficient de dilatation linéaire. On a donc

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T} = -2,33\times10^{-4} + 3\lambda = -2\times10^{-4}.$$

Ainsi le coefficient de température de C est négatif.

Par hypothèse, le phénomène est adiabatique ($dQ = 0$), ce qui donne, en tenant compte de (3) et de (6),

$$a\,dT - \frac{T}{J}\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T}\,C\alpha\,d\alpha = 0, \qquad \frac{a\,dT}{T} = \frac{1}{J}\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T}\,C\alpha\,d\alpha.$$

Intégrons, en remarquant que pour $T = T_0$, on a $\alpha = 0$,

$$a\,\mathrm{Log}\frac{T}{T_0} = \frac{1}{J}\cdot\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T}\frac{C\alpha^2}{2}.$$

Le second membre étant négatif, on en conclut que $T < T_0$. La torsion produit donc un <u>abaissement</u> de température du fil. Comme on prévoit que cet abaissement sera très faible, on peut écrire, en ne prenant que le premier terme du développement en série, $\mathrm{Log}\frac{T}{T_0} = \mathrm{Log}\left(1+\frac{T-T_0}{T_0}\right) = \frac{T-T_0}{T_0}$.

On a donc (7) $T - T_0 = \frac{T_0}{Ja}\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T}\frac{C\alpha^2}{2}$,

$$T - T_0 = -\frac{290\times2\times10^{-4}\times12^{10}\times10^{-4}\times\pi^2}{4,18\times10^7\times0,11\times80\times10^{-2}\times7,84\times80\times2} = -7,7\times10^{-4}\ \text{degré}$$

L'abaissement de température est inférieur à $\frac{1}{1000}$ de degré.

2° Le principe de Lenz permet de prévoir le sens de cette variation de température. J'agis sur le fil, il va résister. D'après la loi de Lenz, pour gêner le mouvement, le coefficient de torsion doit augmenter. Comme $\frac{\partial C}{\partial T}$ est négatif, il faut bien que la température diminue.

3° La quantité de chaleur qu'il faudrait <u>fournir</u> au fil pour le ramener à sa température initiale T_0 est $a(T_0 - T)$. Le travail reçu par le fil, c.à.d. fourni par l'opérateur est $\frac{1}{J}\frac{C\alpha^2}{2}$. D'après l'équation (7), le rapport de ces deux équations est

$$\frac{a(T_0 - T)}{\frac{1}{J}\frac{C\alpha^2}{2}} = -T_0\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{58}{1000}.$$

Il est inférieure à $\frac{6}{100}$. On voit que si K et λ sont des fonctions linéaires de T, ce rapport est proportionnel à la température absolue.

4° Supposons maintenant que le système oscille. Il y a chaleur dégagée pendant une oscillation et chaleur absorbée pendant l'oscillation suivante. Si le phénomène est rigoureusement adiabatique et si le fil est parfaitement élastique, ces quantités de chaleur sont égales et de signes contraires. On a un régénérateur de chaleur; la chaleur est reprise à la même température. On a un moteur qui fonctionne d'une manière parfaitement réversible. Aucune quantité de chaleur n'est cédée au milieu ambiant. Il n'y a pas de dégradation d'énergie et le rendement est

égal à l'unité.

Mais en réalité, le phénomène n'est pas adiabatique. Il y a échange de chaleur avec le milieu ambiant. Le moteur ne travaille pas d'une façon absolument réversible. Il y a diminution de rendement et par suite amortissement. Mais comme les quantités de chaleur échangées avec le milieu extérieur sont physiquement infiniment petites, il n'y a pas d'amortissement au point de vue pratique.

De (5) et de (6) on tire

$$\frac{\partial a}{\partial \alpha} = -\frac{\alpha}{J}\frac{\partial C}{\partial T} - \frac{\alpha T}{J}\frac{\partial^2 C}{\partial T^2} + \frac{\alpha}{J}\frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{\alpha T}{J}\frac{\partial^2 C}{\partial T^2}$$

Nous avons admis que K, s, l et par suite C sont des fonctions linéaires de T; donc $\frac{\partial^2 C}{\partial T^2} = 0$. Par suite $\frac{\partial a}{\partial \alpha} = 0$. La capacité calorifique du fil ne dépend donc pas de α.

Moteurs thermiques à vapeur et à explosion.

---

102. — Un kilogramme d'air subit une série de transformations réversibles constituant un cycle de Carnot entre les températures de 0° et 100° centigrades. Le volume initial est de un mètre cube à 100°; le gaz se détend jusqu'à 2,718 mètres cubes à la même température, puis subit une transformation adiabatique, etc. On propose de calculer la quantité de chaleur fournie au gaz à 100° et la quantité de chaleur qu'il dépose sur la source froide. (Paris).

Pour calculer la quantité de chaleur Q_1 fournie au gaz le long de l'isotherme $T_1 = 100 + 273 = 373$, nous faisons $dT = 0$ dans l'équation $dQ = c\,dT + l\,dv$, puis nous intégrons entre les deux volumes v_0 et v_1. L'air pouvant être considéré comme un gaz parfait on a $l = \frac{p}{J} = \frac{rT_1}{Jv}$.

D'autre part $\frac{v_1}{v_0} = 2,718 = e$, base des logarithmes népériens. On a donc

$$Q_1 = \frac{rT_1}{J}\int_{v_0}^{v_1}\frac{dv}{v} = \frac{rT_1}{J}\,\mathrm{Log}\,\frac{v_1}{v_0} = \frac{rT_1}{J}.$$

Nous avons vu (n°2) que la constante spécifique r de l'air, pour 1 gramme, est égale à $2,873 \times 10^6$. Pour 1 kilogramme, on aura $r = 2,873 \times 10^9$. Par suite $Q_1 = \frac{2,873 \times 10^9 \times 373}{4,185 \times 10^7} = 25607$ petites calories.

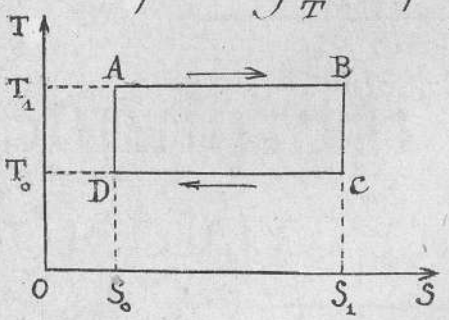
Si Q_0 est la quantité de chaleur déposée par le gaz sur la source froide à la température $T_0 = 273$, on sait que l'on a, pour un cycle de Carnot, $Q_0 = Q_1 \frac{T_0}{T_1} = 25607 \times \frac{273}{373} = 18741$ petites calories.

103. – On sait que chaque ligne adiabatique est caractérisée par une valeur déterminée de l'entropie, de même que chaque ligne isotherme est caractérisée par une valeur déterminée de la température. Ce point étant rappelé, la question posée est la suivante:

Un moteur, dont le point figuratif décrit exactement un cycle de Carnot fournit 25 kilogrammètres par période. Les isothermes présentant une différence de température de 100 degrés de l'échelle absolue, on demande de calculer en unités C G S la différence des valeurs de l'entropie qui caractérisent les deux adiabatiques.

(Dans le système C G S, l'équivalent mécanique de la chaleur est $4,18 \times 10^7$, et l'intensité de la pesanteur à Paris, est 981. (Physique générale Paris).

Utilisons le diagramme entropique en prenant pour abscisses les entropies $S = \int \frac{dQ}{T}$ et pour ordonnées les températures absolues.



Le cycle de Carnot est représenté par un rectangle ABCD. Les deux isothermes AB et CD sont deux droites horizontales et les deux adiabatiques AD et BC qui sont des lignes d'entropie constante sont deux droites verticales. Ce mode de représentation jouit d'une propriété remarquable: l'aire du cycle représente la chaleur évaluée puisque $T\,dS = dQ$.

La quantité de chaleur ΔQ transformée en travail pour le cycle entier est égale à l'aire du rectangle ABCD. La différence des valeurs de l'entropie $S_1 - S_0$ est donc donnée par l'équation (1) $\Delta Q = (T_1 - T_0)(S_1 - S_0)$.

Le travail fourni par période étant de 25 kilogrammètres, et le kilogrammètre valant $9,81 \times 10^7$ ergs, on a $\Delta Q = 25 \times 9,81 \times 10^7$.

En portant cette plus-value dans (1) et en remarquant que $T_1 = T_0 = 100°$ il vient $S_1 - S_0 = \frac{25 \times 9,81}{418} = 0,587$.

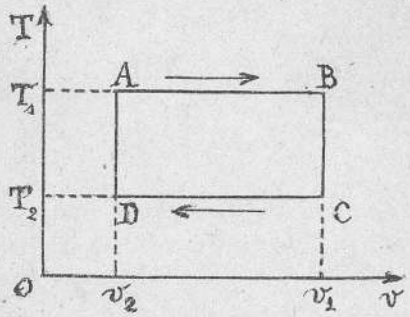
---

104. – La pression, le volume et la température absolue d'un gaz évalués en unités C G S sont liés par la relation (1) $p(v-1) = 3 \times 10^6 T$. Le cycle décrit dans un sens tel que de la chaleur se trouve transformée en travail, est représenté, sur un diagramme où l'on prend pour coordonnées v et T, par un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. Soient v_1 et v_2, T_1 et T_2 les valeurs extrêmes du volume et de la température. On impose au cycle les conditions suivantes $\frac{T_1}{T_2} = 2$, (2) $\frac{v_1 - 1}{v_2 - 1} = \sqrt{e}$, e étant la base des logarithmes népériens. De plus, le cycle doit être tel que le travail fourni par gramme de gaz et par cycle soit équivalent à 15 calories-gramme. Le cycle est-il entièrement déterminé par ces conditions? Sinon, quels sont les éléments qui demeurent arbitraires? On prendra pour l'équivalent mécanique de la chaleur $J = 4,17 \times 10^7$. Si cette valeur est considérée comme comportant une erreur relative

égale au plus à 1:200, quelles sont les erreurs absolues maximum que comportent les valeurs de T_1 et de T_2 déterminées d'après les données du problème? (Physique générale, Paris).

Le travail produit par le gaz est, en tenant compte de (1),

$$\mathcal{E} = \int p\,dv = 3\times10^6 \int \frac{T\,dv}{v-1}.$$



Pour que de la chaleur se trouve transformée en travail, c.à.d. pour que $\mathcal{E}$ soit positif, il faut que le cycle soit parcouru dans le sens des flèches. En effet les travaux suivant BC et DA sont nuls puisque le volume reste constant. Les travaux suivant AB et CD sont de signes contraires, celui de AB étant positif; ils correspondent à la même variation de volume, mais comme la température et par suite la pression sont plus grandes le long de AB, le travail positif l'emporte. Le long de AB, le travail en ergs est

$$\mathcal{E}_1 = 3\times10^6 \times T_1 \int_{v_2}^{v_1} \frac{dv}{v-1} = 3\times10^6 T_1 \operatorname{Log}\frac{v_1-1}{v_2-1} = 3\times10^6 T_1 \operatorname{Log}\sqrt{e} = 15\times10^5 T_1.$$

Le long de CD le travail est $\mathcal{E}_2 = -15\times10^5 T_2$.

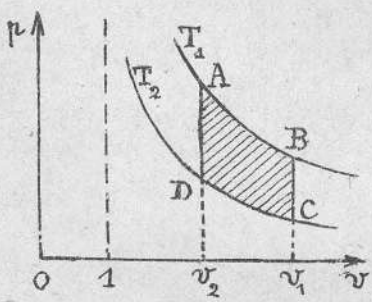
En écrivant que le travail total est équivalent d'après l'énoncé, à 15 calories, on a successivement

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 15J = 15\times10^5 (T_1 - T_2), \quad T_1 - T_2 = \frac{J}{10^5} = 417°. \text{ Comme } T_1 = 2T_2, \text{ on a (3) } T_2 = \frac{J}{10^5} = 417° \quad T_1 = 834°.$$

Les deux isothermes sont donc bien déterminées mais il n'en est pas de même des deux côtés verticaux puisque nous ne possédons que l'unique relation (2) entre v_1 et v_2. Pour achever de déterminer le cycle, il faudrait se donner l'une ou l'autre de ces deux quantités.

On peut se demander si la surface du cycle est constante; il faudrait pour cela que $v_1 - v_2$ fût constant. Or, en mettant la relation (2) sous la forme $\frac{v_1 - v_2 + v_2 - v_1}{v_2 - 1} = \sqrt{e}$, on voit que $v_1 - v_2 = (\sqrt{e} - 1)(v_2 - 1)$; $v_1 - v_2$ dépend donc de v_2 qui lui-même n'est pas déterminé. Le cycle est donc indéterminé en surface et en position bien qu'il corresponde à un travail fourni constant; il est seulement assujetti à rester compris entre deux isothermes fixes.

On peut se rendre compte autrement de l'indétermination du cycle. Avec le diagramme en (p, v), un cycle répondant à la question comprend deux isothermes AB, CD et deux isovolumétriques BC, DA. L'équation (1) montre que les isothermes sont des hyperboles équilatères ayant toutes pour asymptotes l'axe Ov et la droite v = 1. Cette fois, l'aire du cycle est constante comme le travail lui-même. Or il suffit de



regarder la figure pour voir que l'on peut trouver une infinité de cycles, tels que celui hachuré, ayant une aire donnée et compris entre les deux hyperboles T_1 et T_2.

Pour résoudre la dernière question, prenons les différentielles logarithmiques des deux membres de (3), il vient $\frac{dT_2}{T_2} = \frac{dJ}{J} = \frac{1}{200}$. L'erreur absolue maximum que comporte la valeur de T_2 déterminée plus haut est donc $\frac{417}{200} = 2°,1$. Celle que comporte la valeur de T_1 est le double, soit $4°,200$. On a donc

$$414°,9 < T_2 < 419°,1, \quad 829°,8 < T_1 < 838°,2.$$

---

105. – A l'intérieur d'un corps de pompe se trouve une masse d'air sec occupant primitivement un volume de 10 litres sous la pression de 4 mégabaryes et à la température de 27° centigrades. On fait subir à cette masse d'air les transformations suivantes: 1° A pression constante, on élève sa température jusqu'à ce que son volume ait triplé. – 2° En maintenant constant ce nouveau volume, on abaisse la température jusqu'à ce que la pression soit réduite à une mégabarye. 3° En maintenant constante cette nouvelle pression, on abaisse la température jusqu'à ramener le volume à sa valeur primitive de 10 litres. – 4° En maintenant ce volume constant, on ramène l'air à sa température primitive de 27°.

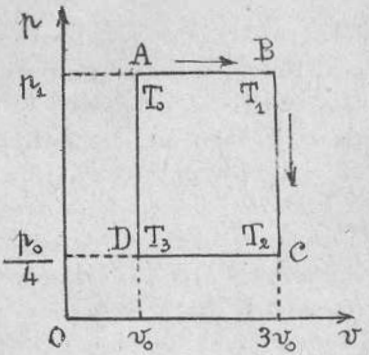
On demande 1° le travail en ergs accompli par cette masse d'air pendant cette transformation fermée; 2° la quantité de chaleur en calories qu'il a fallu fournir à la masse d'air et celle qu'il a fallu lui enlever; 3° de déduire de ces données l'équivalent mécanique de la chaleur; 4° de déterminer le rapport entre le rendement de ce moteur thermique et celui d'une machine fonctionnant suivant un cycle de Carnot, la plus haute température des sources de chaleur et la plus basse étant les mêmes pour les deux moteurs.

On considérera l'air comme un gaz parfait et l'on prendra les données numériques suivantes: Chaleur spécifique de l'air à pression constante $C = 0,2375$. Rapport des deux chaleurs spécifiques principales de l'air $\frac{C}{c} = 1,41$. Masse en grammes d'un litre d'air à 0° et sous la pression qu'exerce à Paris une colonne de mercure de 76 cm à 0°: $a = 1,293$. Densité du mercure à 0°: $D = 13,596$. Intensité de la pesanteur à Paris: $g = 981$. La valeur trouvée pour l'équivalent mécanique de la chaleur n'étant pas exactement égale à la valeur admise d'après les expériences les plus précises, dire à quoi tient ce léger désaccord. (Physique générale. Paris).

1° Le point figuratif (p, v) décrit dans le sens des flèches le rectangle ABCD dont les côtés sont parallèles aux axes des p et des v. Le travail accompli par la masse d'air est égal à l'aire de ce rectangle,

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} v_0 \times \frac{3p_0}{4} = \frac{3p_0 v_0}{2},$$

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} \times 4 \times 10^6 \times 10^4 = 6 \times 10^{10} \text{ ergs},$$



2° D'après l'énoncé, la température en A est $T_0 = 27 + 273 = 300°$ absolus. Calculons les températures T_1, T_2 et T_3 en B, C et D. L'air étant considéré comme un gaz parfait les quatre équations

$$p_0 v_0 = RT_0 \quad , \quad p_0 \times 3v_0 = RT_1 \, ,$$

$$\frac{p_0}{4} \times 3v_0 = RT_2 \quad , \quad \frac{p_0}{4} \times v_0 = RT_3$$

donnent immédiatement

$$T_1 = 3T_0 = 900° \, , \quad T_2 = \frac{3}{4} T_0 = 225 \, , \quad T_3 = \frac{T_0}{4} = 75°.$$

On fournit de la chaleur à la masse d'air le long du parcours AB à pression constante et le long du parcours DA à volume constant; on lui en enlève le long du parcours BC à volume constant et le long du parcours CD à pression constante. En désignant par m la masse du gaz, la chaleur fournie est $Q = mC(T_1 - T_0) + mc(T_0 - T_3)$,

$$Q = mC \times 2T_0 + mc \times \frac{3T_0}{4} = mCT_0 \left(2 + \frac{3}{4x}\right).$$ La masse m de l'air sec est donnée par la formule

$$m = 10^4 \times 0{,}00129 \times \frac{4 \times 10^6}{76 \times 13{,}596 \times 981} \times \frac{273}{300} = 46^{gr}{,}43.$$

On a donc $Q = 46{,}43 \times 0{,}2375 \times 300 \left(2 + \frac{3}{4 \times 1{,}41}\right) = 8376$ calories.

La chaleur enlevée le long du parcours BCD est

$$Q' = mc(T_1 - T_2) + mC(T_2 - T_3) = mc \times \frac{9}{4} T_0 + mC \times \frac{T_0}{2} \, ,$$

$$Q' = \frac{mCT_0}{2} \left(\frac{9}{2y} + 1\right) = \frac{1}{2} \times 46{,}43 \times 0{,}2375 \times 300 \left(\frac{9}{2 \times 1{,}41} + 1\right) = 6933 \text{ calories.}$$

3° La quantité de chaleur transformée en travail est

$$q = Q - Q' = 1443 \text{ calories.}$$

La valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur déduite de ces données est $J = \frac{E}{q} = \frac{6 \times 10^{10}}{1443} = 4{,}158 \times 10^7$.

Cette valeur diffère légèrement de la valeur admise d'après les expériences les plus précises et qui est $4{,}185 \times 10^7$. Cela tient à ce que nous avons supposé que l'air sec est un gaz parfait, ce qui n'est pas rigoureusement exact.

4° Le rendement de ce moteur thermique est $R = \frac{q}{Q} = \frac{1443}{8376}$.

Le rendement d'une machine fonctionnant suivant un cycle de Carnot entre les températures extrêmes T_1 et T_3 est $R' = \frac{T_1 - T_3}{T_1} = \frac{825}{900} = \frac{11}{12}$.

Le rapport de ces deux rendements est $\frac{R}{R'} = 0{,}187$.

---

106. — Deux masses égales d'un même gaz parfait sont d'abord aux températures T_1 et T_2. Elles sont astreintes à conserver chacune un volume constant. En adoptant une idée de Carnot, nous imaginerons qu'un moteur thermique parfait fonctionne entre ces deux masses, considérées comme des sources finies de chaleur.

Soient Θ_1 et Θ_2 les températures des deux masses à un

moment donné. On demande 1° de déterminer la relation entre Θ_1, Θ_2, T_1 et T_2 ainsi que la température finale Θ commune aux deux masses gazeuses ; 2° de calculer le travail total fourni par le moteur ; 3° de comparer la somme des entropies des deux masses de gaz au début et à la fin de l'opération. Interpréter le résultat obtenu. (Physique Générale, Paris).

Soient, à un instant donné, T et θ les températures respectives de la source chaude et de la source froide ; désignons par c la capacité calorifique de chaque masse de gaz à volume constant. Puisque ce sont des sources finies de chaleur, une transformation infiniment petite amène la source chaude à la température $T - dT$ en lui enlevant la quantité de chaleur $dQ = c\,dT$; cette même transformation amène la source froide à la température $\theta + d\theta$ en lui apportant la quantité de chaleur $dq = c\,d\theta$. Le rendement du moteur thermique est $\frac{dQ - dq}{dQ} = \frac{dT - d\theta}{dT} = 1 - \frac{d\theta}{dT}$.

D'autre part, comme ce moteur est supposé parfait, son rendement est égal au rendement minimum $1 - \frac{\theta}{T}$. On a donc $\frac{d\theta}{dT} = \frac{\theta}{T}$, premier membre, $\frac{dT}{T} = \frac{d\theta}{\theta}$. Intégrons entre les limites Θ_1, T_1 pour le premier membre, entre les limites T_2, Θ_2 pour le second membre, il vient

$$\int_{\Theta_1}^{T_1} \frac{dT}{T} = \int_{T_2}^{\Theta_2} \frac{d\theta}{2}, \quad \text{Log}\,\frac{T_1}{\Theta_1} = \text{Log}\,\frac{\Theta_2}{T_2}.$$

On en déduit immédiatement $\frac{T_1}{\Theta_1} = \frac{\Theta_2}{T_2}$ ou $T_1 T_2 = \Theta_1 \Theta_2$. Telle est la relation simple demandée.

On obtient la température finale Θ commune aux deux masses gazeuses en faisant dans la relation précédente $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ ce qui donne (1) $\Theta = \sqrt{T_1 T_2}$. La température finale est donc la moyenne géométrique des températures initiales.

2° La source chaude a cédé au total $c(T_1 - \Theta)$ calories, la source froide a absorbé $c(\Theta - T_2)$ calories. La différence a été transformée en travail. Le travail total $\mathcal{T}$ fourni par le moteur est donc, en tenant compte de (1),

$$\mathcal{T} = Jc(T_1 + T_2 - 2\Theta) = Jc(T_1 T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}) = Jc(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$$

3° Pour comparer les sommes des entropies des deux masses gazeuses au début et à la fin de l'opération, nous écrivons la différentielle de l'entropie en prenant v et T comme variables indépendantes. Puisque $dv = 0$ par hypothèse, on a simplement $dS = \frac{c}{T}\,dT$. En intégrant, on a, au début de l'opération, pour la première masse de gaz, $S - S_0 = c\,\text{Log}\,T_1$ et pour la seconde masse de gaz $S' - S_0 = c\,\text{Log}\,T_2$, S_0 désignant une constante d'intégration ; S est l'entropie de la première masse de gaz à T_1 ; S' est l'entropie de la deuxième masse à T_2.

A la fin de l'opération on a pour la première masse, $S_\Theta - S_0 = c\,\text{Log}\,\Theta$; pour la seconde masse, $S'_\Theta - S_0 = c\,\text{Log}\,\Theta$.

On tire de là $S + S' = c\,\text{Log}\,T_1 T_2 + 2S_0$, $S_\Theta + S'_\Theta = c\,\text{Log}\,\Theta^2 + 2S_0$, c'est à dire à cause de (1), $S + S' = S_\Theta + S'_\Theta$.

La somme des entropies n'a donc pas varié. Ce résultat

était à prévoir. L'ensemble des deux masses de gaz constitue en effet un système isolé thermiquement, puisqu'il n'échange pas de chaleur avec l'extérieur. Or on sait que dans toute transformation adiabatique, l'entropie reste constante.

---

107. – 1° Un gramme de vapeur saturante à T_1 se détend adiabatiquement et d'une manière réversible jusqu'à T_2. Calculer le travail produit et le titre x de la vapeur à la fin de la détente. – 2° Afin d'éviter la condensation partielle, on fait précéder la détente adiabatique d'une détente isothermique telle que la vapeur soit exactement saturante à la fin de cette détente adiabatique (de T_1 à T_2). Calculer la quantité de chaleur supplémentaire absorbée et le travail fourni par la vapeur pendant cette détente isothermique. – 3° Rechercher au moyen des diagrammes (sans calcul) si le travail fourni dans ce cas par l'ensemble des deux détentes consécutives est supérieur à celui produit dans le premier cas par la seule détente adiabatique et si le rendement théorique de la machine serait augmenté par l'emploi de cette détente isothermique préalable. – 4° Peut-on conclure de ce qui précède que l'emploi d'une chemise de vapeur augmente nécessairement le rendement d'une machine à vapeur?

Données numériques: $T_1 = 273 + 160$, $T_2 = 273 + 40$. Pressions de saturation: $F_1 = 6{,}2 \times 10^6$, $F_2 = 73 \times 10^3$ CGS. Chaleurs latentes de vaporisation: $L_1 = 496{,}6$; $L_2 = 574$ calories. On appliquera à la vapeur d'eau (même saturante) la formule d'état des gaz parfaits avec la constante spécifique $r = R.M = 45 \times 10^5$ CGS. L'exposant de la formule de Rankine (détente de la vapeur saturante) est $n = 1{,}14$. On admettra que la chaleur spécifique de l'eau sous la pression de sa vapeur saturante reste égale à 1. Enfin, pour faciliter les calculs numériques, on donnera $\log. \text{naturel } \frac{T_1}{T_2} = 0{,}3245$, $\log. \text{vulgaire } J \text{ (équivalent mécanique)} = 7{,}6218$.

(*Physique générale*, Paris, 1917 et 1926).

1° Pour calculer le travail $\mathcal{T}$ produit par la détente adiabatique, nous assimilons, d'après l'énoncé, la vapeur à un gaz parfait, en appliquant la formule de Rankine $p v^{1,14} = \text{cte}$. En tenant compte du changement de notations, la formule (7) du n° 23 donne

$$\mathcal{T} = \frac{F_1 v_1}{n-1}\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right] = \frac{r T_1}{n-1}\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right].$$

Dans cette formule, r représente la constante spécifique, c'à.d relative à 1 gramme de vapeur. C'est précisément la quantité x de l'énoncé, puisque $M = 1$. On a

$$\mathcal{T} = \frac{45 \times 10^5 \times 433}{}\left[1 - \frac{313}{433}\right] = 385{,}5 \times 10^7 \text{ ergs},$$

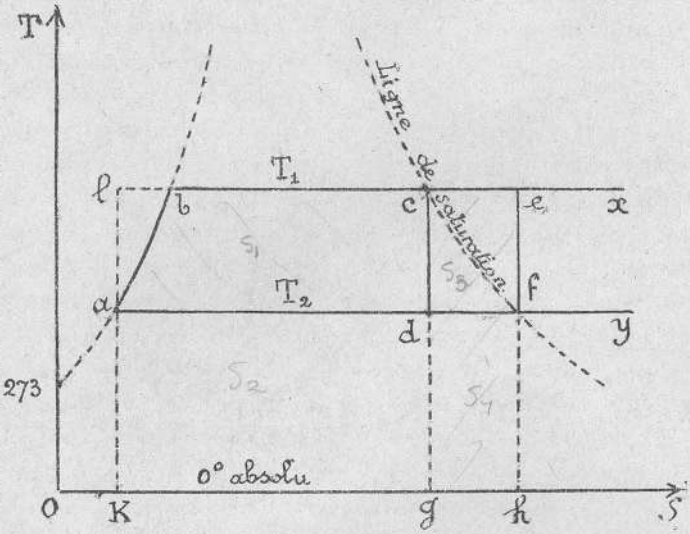
soit 385,5 joules ou $39{,}3$ kilogrammètres.

Le titre x de la vapeur est donné par la formule (4) établie au n° 84. En adoptant les notations de l'énoncé, on a $x = \frac{T_2}{L_2}\left[\frac{L_1}{T_1} + m \operatorname{Log} \frac{T_1}{T_2}\right]$. D'après l'énoncé, la chaleur spécifique m de l'eau liquide sous la pression de sa vapeur saturante

reste égale à 1 ; d'où $x = \frac{313}{574}\left[\frac{496,6}{433} + 0,3245\right] = 0,802$. A la fin de la détente adiabatique il y a donc $0^{kg},198$ de vapeur d'eau condensée.

2° Utilisons le diagramme entropique. Les isothermes T_1 et T_2 sont représentées par des droites bx et ay parallèles à OS. La détente adiabatique précédente est représentée par la verticale cd, le point c étant à l'intersection de bx et de la ligne de saturation, le point d étant sur ay.

Si on fait procéder la détente adiabatique d'une détente isothermique, celle-ci est représentée par l'horizontale ce, prolongement de bc et le point e doit être tel que la verticale ef qui représente la nouvelle détente adiabatique vienne couper l'isotherme T_2 en un point f situé sur la ligne de saturation. De cette façon, la vapeur sera exactement saturante à la fin de cette nouvelle détente adiabatique.



D'après la propriété bien connue du diagramme entropique, tirée de la relation $dQ = TdS$, la quantité de chaleur supplémentaire Q absorbée par la vapeur pendant la détente isothermique est égale à l'aire du rectangle gceh. Comme l'entropie a même valeur en c et en f ($S_e = S_f$), on a $Q = T_1(S_f - S_c)$.

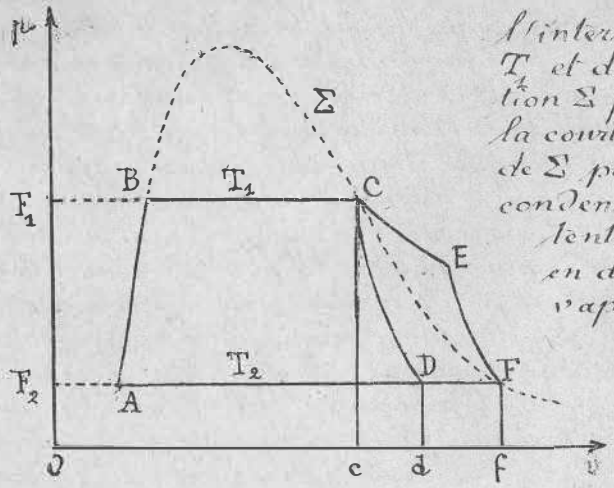
Appliquons la formule (3) du n° 84 ; les points c et f étant sur la ligne de saturation, on a, pour ces points, $x = 1$. En remarquant que $m = 1$ et en changeant les notations, il vient

$$S_f - S_c = \frac{L_2}{T_2} - \frac{L_1}{T_1} - \text{Log}\frac{T_1}{T_2},$$

$$Q = 413\left[\frac{574}{313} - \frac{496,6}{433} - 0,3245\right] = 149,71 \text{ calories}.$$

La détente étant isothermique, toute cette chaleur est transformée en travail E, puisque la vapeur étant considérée comme un gaz parfait, son énergie interne reste invariable à température constante. En utilisant la valeur donnée dans l'énoncé pour le logarithme décimal de J, on trouve $E = JQ = 626,7 \times 10^7$ ergs soit 626,7 joules.

3° Utilisons maintenant le diagramme en (p, v). La première détente adiabatique CD part du point C, situé à



l'intersection de l'isotherme T_1 et de la courbe de saturation Σ figurée en pointillé ; la courbe CD est à l'intérieur de Σ puisqu'on sait qu'il y a condensation partielle. La détente isothermique CE est en dehors de Σ puisque la vapeur est surchauffée ; la détente adiabatique EF doit par hypothèse aboutir au point F, intersection de l'isotherme T_2 avec Σ. Le travail produit par la première détente adiabatique est représenté par l'aire c CDd ; le travail produit par l'ensemble des deux détentes consécutives CE et EF est égal à l'aire c CEF f. On voit sans calcul que ce dernier travail est supérieur à l'autre.

Le diagramme entropique se prête particulièrement bien à l'étude du rendement théorique. Le rendement d'un cycle quelconque est $(Q_1 - Q_2) : Q_1$, Q_1 étant la chaleur enlevée à la source chaude, Q_2 la chaleur restituée à la source froide. Posons aire abcda $= \mathcal{S}_1$, aire Kabcg K $= \mathcal{S}_2$, aire cefd $= \mathcal{S}_3$, aire gcehK $= \mathcal{S}_4$. On a pour le rendement du cycle de Rankine $R = \mathcal{S}_1 : \mathcal{S}_2$ et pour le rendement du cycle avec détente isothermique préalable, $R' = (\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_3) : (\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_4)$. Je dis que l'on a $R < R'$. En écrivant cette condition, on a en effet

$$\mathcal{S}_1 (\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_4) < \mathcal{S}_2 (\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_3) \quad \text{ou} \quad \frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} < \frac{\mathcal{S}_3}{\mathcal{S}_4}.$$

Or si on désigne par $\mathcal{S}$ l'aire du triangle mixtiligne alb, et si on se rappelle qu'on augmente une fraction plus petite que l'unité quand on ajoute la même quantité à ses deux termes, on a $\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} < \frac{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}}{\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}} = \frac{\mathcal{S}_3}{\mathcal{S}_4} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, ce qui démontre la proposition. La détente isothermique préalable améliore donc le rendement.

4° La chemise de vapeur, imaginée par Watt, consiste en une enveloppe qui entoure le cylindre et dans laquelle circule de la vapeur provenant de la chaudière. Les parois du cylindre sont ainsi maintenues à une température voisine de celle de la chaudière. La détente a donc une tendance à prendre au début le caractère isothermique, et on est amené à penser, d'après ce que nous avons vu plus haut, que le rendement augmente. En réalité, l'étude du phénomène se ramène à celle de l'influence des parois du cylindre. Pour empêcher la condensation de la vapeur du cylindre pendant la détente, la paroi lui cède de la chaleur prise à la vapeur

de l'enveloppe, ce qui provoque la condensation partielle de celle-ci. La réduction de la consommation de vapeur dans le cylindre est donc achetée au prix d'une consommation supplémentaire de vapeur dans l'enveloppe et on ne peut pas affirmer, à priori, que l'emploi d'une chemise de vapeur augmente nécessairement le rendement de la machine. Mais les échanges de chaleur entre la paroi et la vapeur du cylindre sont peu importants, parce qu'il n'y a pas sur la paroi de gouttelettes susceptibles de s'évaporer, et qu'ils se réduisent aux échanges très faibles qui peuvent s'établir par conductibilité et rayonnement entre une paroi sèche et un gaz: la dépense de vapeur dans l'enveloppe est faible; le rendement thermique est amélioré, parce que la suppression de la rosée sur les parois réduit les échanges de chaleur irréversibles entre la vapeur et elles. L'expérience montre que l'emploi d'une chemise de vapeur relève le rendement thermique d'une machine d'une quantité qui est de l'ordre de 10 % de sa valeur.

Il faut cependant reconnaître que pour les machines polycylindriques (à expansion multiple) l'utilité de la chemise de vapeur est moins marquée. Cela provient de la réduction de l'action des parois, due à ce que les oscillations de la température dans chaque cylindre ne sont qu'une fraction de la différence de température entre la chaudière et le condenseur. Par contre, pour les machines monocylindriques, tous les constructeurs sont partisans de la chemise de vapeur.

---

108. – On suppose qu'une certaine masse d'eau évolue dans le cylindre d'une machine à vapeur parfaite suivant un cycle de Rankine théorique et d'une manière réversible. L'eau prise à T_0 est échauffée jusqu'à T_1; transformée en vapeur saturante (mais sèche) à T_1, puis détendue adiabatiquement jusqu'à T_0, et enfin condensée complètement.

I. Calculer le titre x de la vapeur à la fin de la détente et le rendement du cycle.

II. Si l'on voulait transformer le cycle de Rankine en un cycle de Carnot, il suffirait d'arrêter la condensation lorsque le titre de la vapeur serait tombé à y. Calculer y.

III. On propose de surchauffer la vapeur de T_1 à T_2 sous pression constante avant la détente adiabatique, de manière à éviter la condensation dans le cylindre. Calculer T_2.

IV. On sait que, dans la pratique, la vapeur sortant de la chaudière n'est pas sèche. En admettant qu'elle le soit à la sortie du surchauffeur, à T_2, dire si l'expression $\int \frac{dq}{T}$ le long du cycle fermé conserve la même valeur que dans le cas théorique (n° III) et si le rendement est modifié (la surchauffe n'est pas supposée gratuite, même partiellement).

Données numériques: $T_0 = 300°$, $T_1 = 400°$. Chaleurs latentes

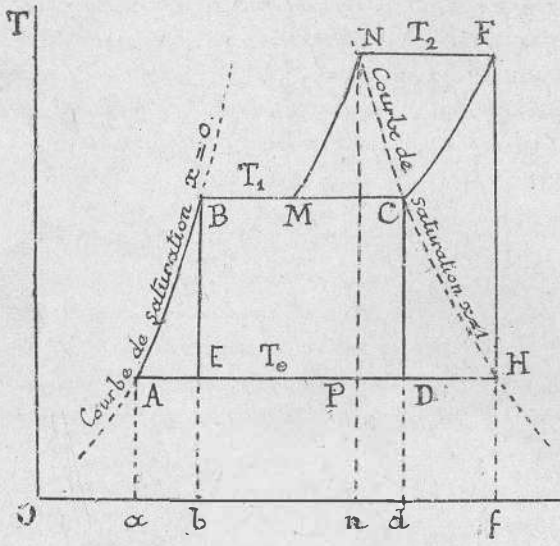
de vaporisation : $L_0 = 582$, $L_1 = 517,2$. Chaleur spécifique de l'eau supposée constante $m = 1$. Chaleur spécifique de la vapeur d'eau sous une pression constante égale à la pression maxima à T_1 : $C = 0,00115\,T$. Log nat $\frac{4}{3} = 0,287$.

(Physique générale, Paris Juillet 1921).

1. D'après la formule (4) établie au n° 84, le titre x à la fin de la détente est

$$x = \frac{T_0}{L_0}\left[\frac{L_1}{T_1} + m \operatorname{Log}\frac{T_1}{T_0}\right] = \frac{300}{582}\left[\frac{517,2}{400} + 0,287\right] = 0,814.$$

Représentons le cycle de Rankine par son diagramme entropique.



1° Échauffement et compression de l'eau liquide de T_0 à T_1, pour la porter à la température et à la pression de la chaudière. On obtient le trajet AB qui appartient à la courbe de saturation ($x = 0$).

2° Vaporisation BC dans la chaudière à la température T_1 ; le trajet BC est une droite horizontale.

3° Détente adiabatique CD jusqu'à la température T_0. Le trajet CD est une droite verticale.

4° Condensation complète DA à la température T_0 : Le trajet DA est une droite horizontale.

Dans ce cycle, la chaleur dépensée Q_1 est représentée par la somme des deux aires suivantes :

1° aire $aABb$, représentant la chaleur d'échauffement du liquide. La chaleur spécifique de l'eau étant supposée constante et égale à l'unité, la chaleur d'échauffement est, par kilogramme d'eau, égale à $T_1 - T_0$.

2° aire $bBCd$, représentant la chaleur de vaporisation L_1. Par suite $Q_1 = T_1 - T_0 + L_1$.

La chaleur Q_0 perdue au condenseur est représentée par l'aire du rectangle $aADd$. Ce rectangle a pour hauteur T_0 et pour base ad, c'est-à-dire $ab + bd$.

Or ab est la variation d'entropie relative à l'échauffement de l'eau liquide : $ab = \int_{T_0}^{T_1} \frac{dq}{T} = \operatorname{Log}\frac{T_1}{T_0}$. La quantité bd est la variation d'entropie relative à la vaporisation BC ; par suite, $bd = \frac{L_1}{T_1}$. On a donc, pour expression de la chaleur perdue, $Q_0 = T_0\left[\operatorname{Log}\frac{T_1}{T_0} + \frac{L_1}{T_1}\right]$, d'où l'expression du rendement du cycle de Rankine,

$$\rho = 1 - \frac{Q_0}{Q_1} = 1 - \frac{T_0}{T_1}\,\frac{\operatorname{Log}\frac{T_1}{T_0} + \frac{L_1}{T_1}}{1 - \frac{T_0}{T_1} + \frac{L_1}{T_1}} = 1 - \frac{3}{4}\,\frac{0,287 + \frac{517,2}{400}}{1 - \frac{3}{4} + \frac{517,2}{400}} = 0,232.$$

Remarquons en passant que le rendement du cycle de Carnot, compris entre les mêmes limites de température est $1-\frac{T_0}{T_1}=0,25$. On voit que, dans les conditions de l'énoncé, le rendement du cycle de Rankine est voisin de celui du cycle de Carnot, lequel, on le sait, est un rendement maximum, pour deux températures T_0 et T_1 données.

II. Le cycle de Carnot, compris entre les mêmes limites de température T_1 et T_0, est représenté par la figure par le rectangle EBCD. Il diffère du cycle de Rankine en ce que la condensation est arrêtée en D et que le cycle se termine par la compression adiabatique EB. Calculons le titre y au point E. Il suffit d'écrire que l'entropie est la même en B et en E, c'est-à-dire que l'on a $S_B = S_E$. D'après la formule (2) du n° 84, on a, en remarquant qu'au point B le titre x est nul, $S_B = \text{Log}\, T_1 + \text{Cte}$. Au point E, où le titre est y, on a $S_E = \frac{y L_0}{T_0} + \text{Log}\, T_0$. En écrivant que $S_B = S_E$ il vient

$$\frac{y L_0}{T_0} + \text{Log}\, T_0 = \text{Log}\, T_1, \quad y = \frac{T_0}{L_0}\,\text{Log}\,\frac{T_1}{T_0} = \frac{300}{582}\times 0,287 = 0,148.$$

III. La surchauffe de T_1 à T_2 sous pression constante est représentée par la courbe isobare CF ; la détente adiabatique est figurée par une droite verticale FH telle que le point d'intersection H de cette droite avec l'isotherme T_0 se trouve sur la courbe de saturation de titre $x = 1$. De cette façon il n'y aura aucune condensation dans le cylindre.

Pour calculer T_2, nous allons exprimer que l'entropie a la même valeur aux points figuratifs F et H.

Evaluons la variation d'entropie ΔS de A à F en suivant le trajet ABCF. On a $\Delta S = ab + bd + df$, $ab = \text{Log}\,\frac{T_1}{T_0}$, $bd = \frac{L_1}{T_1}$,

$$df = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C\,dT}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{0,00115\,T\,dT}{T} = 0,00115\,(T_2 - T_1),$$

$$\Delta S = \text{Log}\,\frac{T_1}{T_0} + \frac{L_1}{T_1} + 0,00115\,(T_2 - T_1).$$

Le long de l'isotherme AH, entre les deux courbes de saturation, on a $\Delta S = \frac{L_0}{T_0}$.

En égalant ces deux valeurs de ΔS, on trouve

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{0,00115}\left(\frac{L_0}{T_0} - \text{Log}\,\frac{T_1}{T_0} - \frac{L_1}{T_1}\right),$$

$$T_2 = 400 + \frac{1}{0,00115}\left(\frac{582}{300} - 0,287 - \frac{517,2}{400}\right) = 713^\circ \text{ absolus}.$$

IV. Si la vapeur ne sort pas sèche de la chaudière, et qu'elle le soit à la sortie du surchauffeur, à la température T_2, le point figuratif décrit d'abord le trajet ABMN, le point N étant à l'intersection de l'isotherme T_2 et de la courbe de saturation de titre $x = 1$. Le cycle se termine par l'adiabatique ND et la portion DA de l'isotherme T_0. La figure montre que le long de ABMN l'expression $\int \frac{dq}{T}$ a pour valeur $\frac{an}{}$, tandis qu'elle a pour valeur $\frac{af}{}$ le long du trajet ABCF du cycle n° III.

Le rendement est modifié. En effet des relations $dS = \frac{dq}{T}$, $q = \int T dS$ on déduit que le rendement est devenu égal au rapport $\frac{\text{aire } ABMNPA}{\text{aire } aABMNna}$, tandis que dans le cycle du n° III le rendement était égal au rapport $\frac{\text{aire } ABCFHA}{\text{aire } aABCFfa}$. Pour préciser la question quantativement, il faudrait connaître le titre de la vapeur au point M, quand elle sort de la chaudière. Alors que le point N est déterminé quand T_2 est donné, la position du point M dépend du titre de la vapeur au sortir de la chaudière.

---

109. – Un moteur à cylindre est alimenté en vapeur saturée et sèche à la température centigrade de 160°. La température au condenseur est de 48°. Après 100 coups de piston en marche sensiblement uniforme, l'eau de condensation recueillie dans le condenseur à surface est de 2400 grammes.

En assimilant chaque coup de piston à un cycle de Rankine, on demande quel est le titre à la fin de la détente et quel est le travail accompli au cours de celle-ci, à chaque coup de piston. La chaleur de vaporisation r est fournie par la formule connue. Les valeurs de la chaleur latente interne sont les suivantes: $r = 606,5 - 0,695t$

537,820 pour $t = 48°$; 448,901 pour $t = 160°$.

Enfin on pourra regarder comme constant le coefficient de chaleur spécifique de l'eau liquide.

(Mécanique physique et expérimentale. Paris 1921).

Le titre x à la fin de la détente est donné par la formule (4) du n° 84, $x = \frac{T}{r}\left[\frac{r_0}{T_0} - m \operatorname{Log} \frac{T}{T_0}\right]$ dans laquelle on fait $T = 48 + 273 = 321$, $T_0 = 160 + 273 = 433$, $r = 606,5 - 0,695 \times 48 = 573,1$; $r_0 = 606,5 - 0,695 \times 160 = 495,3$. Entre 48° et 160°, on prendra comme coefficient de chaleur spécifique de l'eau $m = 1,015$. On trouve $x = 0,8$.

L'eau de condensation recueillie par coup de piston est $2400 : 100 = 24$ gr. C'est également le poids de vapeur introduits par cycle. En répétant mot à mot le raisonnement du n° 87, le travail accompli au cours de la détente, à chaque coup de piston, est $\mathcal{T} = 0,024\, J\, (q_0 - q_1 + \rho_0 x_0 - \rho_1 x_1)$. D'ailleurs $q_0 - q_1 = (160 - 48) \times 1,015 = 113,68$; $x_0 = 1$; $x_1 = 0,8$, $\rho_0 = 448,901$; $\rho_1 = 537,820$. En faisant $J = 427$ kilogrammètres, on trouve $\mathcal{T} = 1356$ kilogrammètres.

---

110. Un cylindre de machine à vapeur, imperméable à la chaleur, reçoit de la vapeur d'eau sèche à 200 degrés centigrades. L'admission s'effectue jusqu'à ce que le volume soit de 0^{mc},015. On ferme l'admission et on laisse la vapeur se détendre adiabatiquement jusqu'au volume de 200 litres. 1° Partant de l'équation générale des adiabatiques du mélange d'eau et de vapeur d'eau saturée, on calculera les conditions finales de la détente (température, pression, eau condensée). 2° On donnera ensuite l'expression algébrique du travail effectué pendant la détente et on déduira des résultats du n° 1 la valeur numérique de ce travail. 3° Assimilant l'adiabatique à l'hyperbole supérieure

$pv^{\mu} = M$, où μ et M sont deux constantes, on calculera μ et M, puis le travail total. On comparera le résultat avec celui du n° 2 ; il doit être sensiblement le même.

Données numériques : a) On prend à toute température la chaleur spécifique de l'eau = 1,022 et sa densité = 1. b) La chaleur de vaporisation de l'eau est $L = 606,5 - 0,695\,t$ (en centigrades). c) Les tables donnent

Températures.	Pressions en m/m de Hg	Poids en kg. du mètre cube de vapeur d'eau.	Températures	Pressions en m/m de Hg	Poids en kg du mètre cube de vapeur d'eau.
75	288	0, 244	110	1075	0, 840
80	355	0, 296	115	1269	0, 982
85	433	0, 357	120	1491	1, 143
90	525	0, 428	125	1744	1, 324
95	634	0, 511	130	2030	1, 527
100	760	0, 606	.....	.....	.....
105	906	0, 715	200	11689	7, 955

(Agrégation de physique, 1902)

1° Nous avons établi au n° 84 que l'entropie d'un mélange liquide-vapeur de titre x et de température absolue T était à une constante près $S = \frac{Lx}{T} + m \operatorname{Log} T$, en désignant par L la chaleur latente de vaporisation et par m la chaleur spécifique de l'eau maintenue dans les conditions de saturation. On en déduit que l'équation générale des adiabatiques du mélange d'eau et de vapeur est $\frac{Lx}{T} + m \operatorname{Log} T = \text{Cte}$. Si donc on fait détendre la vapeur, prise à la température T_1 et au titre x_1, jusqu'à la température T_2, le titre final x_2 est donné par la relation (1) $\frac{L_2}{T_2} x_2 = \frac{L_1}{T_1} x_1 + m \operatorname{Log} \frac{T_1}{T_2}$. Mais nous ne connaissons pas T_2. Par contre l'énoncé donne le volume du mélange, 200 litres, à la fin de la détente. Il faut donc déterminer la valeur correspondante T_2. Pour cela nous allons construire la courbe qui représente les variations du volume v du mélange en fonction de la température T et de cette courbe on déduira la valeur de la température finale T_2. L'équation (1) donnera alors x_2. Enfin la table des pressions de l'énoncé fournira la pression finale p_2.

D'une façon générale, le volume v d'un gramme du mélange est donné par la formule évidente (2) $v = u(1-x) + u'x$, en désignant par u le volume spécifique du liquide, par u' celui de la vapeur et par x le titre du mélange (masse de la vapeur).

D'après l'énoncé, on a toujours $u = 1\,cm^3$.

Faisons le tableau des valeurs de u'. Pour 75°, on a $u' = 10^6 : 244 = 4098\,cm^3$. On trouve ainsi

t	75	80	85	90	95	100	105
u'	4098	3378	2801	2336	1957	1650	1399
t	110	115	120	125	130	.....	200
u'	1190	1018	875	755	655	.....	126

Dressons de même le tableau des valeurs de L :

t	75	80	85	90
L	554.375	550,9	547,425	543,95
t	95	100		200
L	540,475	537		467,50

Nous connaissons le point initial de la courbe de détente $v = f(T)$. Pour $T = 200 + 273 = 473°$ on a $x = 1$; d'où $v = u' = 126$. Mais remarquons tout d'abord que nous n'avons besoin de connaître cette courbe que dans la région voisine de la fin de la détente. La masse de fluide qui évolue est $P = 0{,}015 \times 7955 = 119{,}325$ grammes ; quand elle occupe 200 litres, son volume spécifique est $v = \frac{200000}{P} = 1676$ cm³. Comme dans la formule (2) qui donne v, c'est le terme ux qui est prépondérant, le tableau des valeurs de u' montre que la température finale est inférieure à 100°C. Cette remarque abrège considérablement les calculs.

Dans la formule (1), nous ferons toujours

$$T_1 = 200 + 273 = 473, \quad x_1 = 1, \quad m = 1{,}022, \quad L_1 = 467{,}50.$$

Mais pour T_2 on peut descendre de suite à $T_2 = 100 + 273 = 373$. On trouve $x_2 = 0{,}855$ et la relation (2) donne $v = 1411$.

Avec $T_2 = 95 + 273 = 368$, on trouve $v = 1659$.

Avec $T_2 = 90 + 273 = 363$, on trouve $v = 1963$.

Il est inutile d'aller plus loin. Sur un dessin à grande échelle, on marque ces trois points de la courbe $v = f(T)$. On trouve alors que pour $v = 1676$, on a $T_2 = 367{,}7$. La température finale demandée est donc $t_2 = 94°,7\,C$.

Si maintenant on construit dans le voisinage de t_2, d'après les données de l'énoncé, la courbe des pressions en fonction de la température, on trouve que la pression finale est $p_2 = 627{,}5$ m.m. de mercure.

En faisant $T_2 = 367{,}7$ dans l'équation (1) on trouve $x_2 = 0{,}847$ pour le titre final. L'eau condensée est donc

$$P(1 - x_2) = 119{,}325 \times 0{,}153 = 18{,}25.$$

2° Calculons le travail effectué pendant la détente adiabatique. Comme les échanges de chaleur sont nuls, ce travail est égal à la diminution d'énergie du mélange. Nous sommes donc amené à chercher l'expression de l'énergie d'un gramme de mélange liquide-vapeur au titre x, à la température T.

Considérons d'abord le gramme de fluide à l'état liquide, à la température T_0 et sous la pression maxima correspondante p_0. Donnons arbitrairement la valeur U_0 à l'énergie interne dans cet état. Portons ce liquide à la température T. En supposant la chaleur spécifique m de l'eau constante, l'énergie devient $U_0 + Jm(T - T_0) - \int_{T_0}^{T} p\,du$. Comme le volume du liquide est petit, le travail qu'il fournit est très faible et on peut négliger l'intégrale. A la température T, sous la pression maxima p, vaporisons x grammes du liquide ; la chaleur

absorbée est Lx et le travail restitué par le fluide est $p(u'-u)x$; l'énergie du mélange liquide-vapeur au titre x est donc

$$U = U_0 + Jm(T - T_0) + JLx - p(u'-u)x.$$

Par suite, le travail de la détente adiabatique d'un gramme de fluide quand on passe de l'état $(T_1\ x_1\ p_1)$ à l'état $(T_2\ x_2\ p_2)$ est

$$\mathcal{E}_1 = U_1 - U_2 = Jm(T_1 - T_2) + \left[JL_1 - p_1(u'_1 - u_1)\right]x_1 - \left[JL_2 - p_2(u'_2 - u_2)\right]x_2.$$

Faisons l'application numérique dans le système C.G.S. On a $p_1 = 1168{,}9 \times 13{,}596 \times 981 = 15{,}59 \times 10^6$ baryes; $p_2 = 62{,}75 \times 13{,}596 \times 981 = 0{,}8369 \times 10^6$ baryes; $L_1 = 467{,}5$; $L_2 = 606{,}5 - 0{,}695 \times 94{,}7 = 540{,}68$; $u'_1 = 126$; $u'_2 = 1979{,}7$; $u_1 = u_2 = 1$. On trouve $\mathcal{E}_1 = 435 \times 10^7$ ergs soit 435 joules. Pour les 119,325 de fluide, le travail est $\mathcal{E} = 435 \times 119{,}325 = 51.900$ joules.

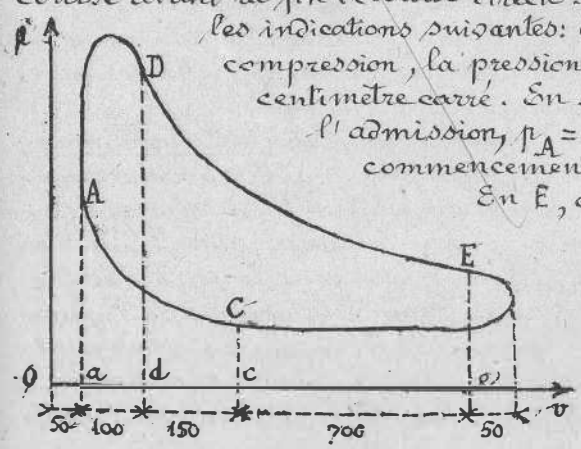
3° Déterminons les constantes μ et M de l'hyperbole supérieure $pv^\mu = M$. Il suffit de prendre deux couples de valeurs de p et de v parmi ceux déterminés plus haut, par exemple $p_1 = 11689$ et $v_1 = 126$ pour $t_1 = 200°$ C et $p_2 = 760$, $v_2 = 1411$ pour $t_2 = 100°$ C. On a donc $11689 \times 126^\mu = 760 \times 1411^\mu$, $\mu \log \frac{1411}{126} = \log \frac{11689}{760}$, $\mu = 1{,}13$. On en tire $M = 276 \times 10^4$. D'après la formule (6) du n° 23, le travail effectué par la détente est

$$\mathcal{E}_1 = \frac{p_1 v_1}{\mu - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right] = \frac{15{,}59 \times 126 \times 10^6}{0{,}13}\left[1 - \left(\frac{0{,}8369}{15{,}59}\right)^{\frac{0{,}13}{1{,}13}}\right],$$

$\mathcal{E}_1 = 432 \times 10^7$ ergs, soit 432 joules. Le travail total est $\mathcal{E} = 432 \times 119{,}325 = 51600$ joules environ. On voit que ce résultat est sensiblement le même que celui du n° 2.

---

111. — Une machine à cylindre dont le diamètre d'alésage est de 500 m/m et la course de 1000 m/m consomme 200 grammes de vapeur saturée et sèche par cylindrée. L'espace mort est 1/20 du volume balayé par le piston. La compression commence à 5/20 de course avant la fin de course rétrograde. L'admission commence à fin de course (donc avance nulle à l'admission). L'admission dure 2/20 de course. L'échappement commence 1/20 de course avant la fin de course directe. De plus, le diagramme donne les indications suivantes: En C, au commencement de la compression, la pression est $p_C = 300$ grammes par centimètre carré. En A, au commencement de l'admission, $p_A = 1800$ grammes. En D, au commencement de la détente, $p_D = 9033$ gr. En E, au commencement de l'échappement, $p_E = 1356$ gr. Le travail accompli, évalué en kilogrammètres, est égal à: pendant la compression 316 (en valeur absolue), pendant l'admission 1770, pendant la détente 3354, pendant



l'échappement 401 (en valeur absolue). On demande de calculer l'effet de paroi pendant les quatre phases de compression, d'admission, de détente et d'échappement. La vapeur sort sèche de la chaudière à la température de 180° centigrades. La chaleur rayonnée est de une demi-grande calorie par coup de piston. On calculera le poids de la vapeur résiduelle qui subit la compression en se servant de l'hypothèse de Hirn. On admettra que la chaleur spécifique de l'eau liquide est constante et l'on calculera la chaleur de vaporisation r par la formule linéaire connue.

Tableau des valeurs correspondantes de la pression p, de la température centigrade t, du poids w du mètre cube de vapeur saturée et sèche et de la chaleur interne ρ :

p	t	w	ρ
300	68°,74	0,188	521,028
1356	107°,76	0,783	490,158
1800	116°,30	1,019	483,416
9033	174°,52	4,632	437,352

(Mécanique physique et expérimentale. Paris).

Le problème consiste à déterminer les quantités de chaleur rendues ou absorbées par les parois pendant les quatre phases du cycle, compression, admission, détente et échappement. Ces quantités de chaleur sont comptées positivement quand elles sont rendues par la paroi, négativement quand elles sont absorbées. De même le travail $\mathcal{E}$ est compté positivement quand il est accompli par le fluide, négativement quand il est reçu par le fluide.

La surface du piston est égale à $\pi \times \frac{50^2}{4} = 1963,5 \text{ cm}^2$. On en déduit, pour les différents volumes qui nous intéressent, les valeurs suivantes :

Au commencement de la compression ... $Oc = 58905$ cm3,
Au commencement de l'admission ..... $Oa = 19817,5$ cm3,
Au commencement de la détente ..... $Od = 29.452,5$ cm3,
Au commencement de l'échappement ... $Oe = 196350$ cm3.

1ère Compression. — L'hypothèse de Hirn est que la vapeur est sèche en C à la fin de l'échappement, au moment où la compression commence. Le poids de la vapeur résiduelle qui subit la compression est $m = 58,905 \times 0,188 = 11,074$ gr. En A, le fluide n'occupe plus qu'un volume de 9817,5 cm3. Le poids de la vapeur est $9.817,5 \times 1,019 = 10,004$ gr. Il y a donc eu condensation de 1,07 gr.

Dans cette phase, le fluide emprisonné ne communique ni avec le condenseur ni avec la chaudière. S'il y a un échange de chaleur, cela ne peut donc avoir lieu qu'avec la paroi. En désignant d'une façon générale par la lettre U la chaleur interne ou l'énergie interne de 1 kg. de fluide, comptée depuis la température de 0° centigrade, la quantité de chaleur Q_C^A fournie par la paroi dans le trajet CA est

$Q_C^A = m(U_A - U_C) + \mathcal{E}_C^A$. On a

$$m U_A = \frac{11,074 \times 116,30 + 10,004 \times 483,416}{1000} = 6,124 \text{ calories-kg.}$$

$$m U_C = \frac{11,074 (68,74 + 521,028)}{1000} = 6,530 \text{ calories-kg,}$$

$\mathcal{E}_C^A = -316 : 427 = -0,740$ cal.-kg. Par suite $Q_C^A = -1,146$ cal-kg.. Cette valeur est négative; la paroi absorbe donc de la chaleur pendant la compression.

2° Admission. - Au point A, l'admission s'ouvre brusquement; l'espace mort achève de se remplir à la pression de la chaudière. On peut admettre que ce remplissage a lieu instantanément. L'énoncé indique que $\mu = 200$ grammes de vapeur saturée et sèche, à la température de 180° centigrades, sont introduits à ce moment. Soit D le point du diagramme pour lequel l'admission vient se fermer. Pendant le trajet de A à D, la chaudière fournit une quantité de chaleur égale à $q_1 = \frac{\mu(180 + r_1)}{1000}$, en désignant par r_1 la chaleur de vaporisation à la température de 180°, égale à $r_1 = 606,5 - 0,7 \times 180 = 480,5$. Par suite, $q_1 = 0,200 \times 660,5 = 132,10$ cal-kg. A cette quantité de chaleur q_1 fournie par la chaudière vient s'ajouter la quantité de chaleur $m U_A$ que possédait au point A la masse de fluide, liquide et vapeur, existant dans l'espace mort avant l'admission. D'autre part, pendant l'admission, c'est la masse $m + \mu$ qui évolue. La quantité de chaleur Q_A^D qui est fournie par la paroi pendant l'admission est donc, en continuant l'emploi des mêmes notations, (1) $Q_A^D = (m + \mu) U_D + \mathcal{E}_A^D - (q_1 + m U_A)$.

Le seul terme inconnu est $(m + \mu) U_D$. On a déjà $m + \mu = 211,074$ grammes. En D, le volume est 29,4525 litres. La vapeur qui existe dans cet espace pèse $29,4525 \times 4,632 = 136,424$ gr. Le reste, soit 74,650 grammes, est de l'eau liquide. On a donc, au point D où la température est 174°,52,

$(m + \mu) U_D = 0,211074 \times 174,52 + 0,136424 \times 437,352 = 96,502$ cal-kg,

$\mathcal{E}_A^D = \frac{1770}{427} = 4,145$ cal-kg. En portant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve $Q_A^D = -37,577$ cal.-kg. Cette valeur est négative ce qui montre que la paroi absorbe encore de la chaleur pendant l'admission.

3° Détente. - Depuis le point D au point E, où l'échappement s'ouvre, le poids du fluide qui évolue est $m + \mu$. Il n'y a communication ni avec la chaudière ni avec le condenseur, absolument comme dans la période de compression. On peut donc poser immédiatement (2) $Q_D^E = (m + \mu)(U_E - U_D) + \mathcal{E}_D^E$. Nous avons trouvé plus haut $(m + \mu) U_D = 96,502$ cal. kg. Calculons $(m + \mu) U_E$. En E le volume est 196,350 litres. Le poids de la vapeur qui existe dans ce volume est $196,350 \times 0,783 = 153,742$ grammes. Le reste, soit 57,332 grammes, est de l'eau liquide. On a donc, au point E où la température est 107°,76,

$(m + \mu) U_E = 0,211074 \times 107,76 + 0,153742 \times 490,158 = 98,103$ cal. kg.,

$\mathcal{E}_D^E = 3354 : 427 = 7,855$ cal-kg. En portant ces valeurs dans (2),

on trouve $Q_D^E = +9,456$ cal./kg. Cette valeur est positive, ce qui montre que pendant la détente la paroi fournit de la chaleur.

4° Échappement. — On pourrait par un raisonnement analogue calculer Q_E^C. Mais une simple remarque va faciliter le calcul de cette quantité de chaleur. En effet, les parois du cylindre, pendant le fonctionnement, atteignent un régime pour lequel leur état thermique est le même au commencement et à la fin de chaque période, c'est-à-dire que la quantité de chaleur qu'elles cèdent pendant la période est précisément celle qu'elles reçoivent.

La chaleur rayonnée e devant être comptée comme fournie par la paroi, on a donc l'équation

$$Q_C^A + Q_A^D + Q_D^E + Q_E^C + e = 0, \qquad Q_E^C = -Q_C^A - Q_A^D - Q_D^E - e.$$

Comme il y a deux corps de piston par cycle, on a $e = 1$ cal. En tenant compte des valeurs calculées plus haut, on trouve

$$Q_E^C = 1,146 + 37,577 - 9,456 - 1 = 28,267 \text{ cal.-kg.}$$

Cette valeur est positive, ce qui montre que pendant l'échappement la paroi fournit de la chaleur.

En résumé, la paroi fournit de la chaleur pendant la détente et l'échappement; elle en absorbe pendant la compression et l'admission.

---

112. — Le cylindre d'une machine à vapeur, monocylindrique à double effet a 300 m/m d'alésage et 500 m/m de course. On néglige le volume de la tige du piston. L'espace nuisible à chaque extrémité du piston est de 2% de la cylindrée. Le cylindre fonctionne suivant un cycle pression-volume défini comme suit: introduction à pression constante pendant 1:10 de la course, détente suivant une hyperbole équilatère jusqu'au volume maximum, chute instantanée de pression à la pression du condenseur et suite de l'émission sous cette même pression pendant 8:10 de la course du piston, compression pendant les deux derniers dixièmes suivant une hyperbole équilatère. Le cylindre est alimenté de vapeur humide au titre de 95% de vapeur (5% d'eau) à la pression absolue de 9 kilogrammes par centimètre carré. La machine tourne à la vitesse de 150 tours par minute et fonctionne à condensation. La température de l'eau à la sortie du condenseur est de 50 degrés centigrades. Elle entre à 15 degrés.

Sachant que le poids de vapeur humide consommée par course du piston est de 22 grammes, on demande: 1° De calculer en kilogrammètres le travail correspondant à chacune des phases du coup de piston: admission, détente, émission, compression; 2° De calculer la puissance de la machine en chevaux, et sa consommation spécifique; 3° D'écrire sans démonstration les équations en U (chaleur interne), T (travail) et R (quantité de chaleur échangée avec la paroi) correspondant à chaque phase; 4° De calculer le titre de la vapeur à la fin de chaque phase et les

échanges de chaleur avec la paroi pendant la phase. Pour simplifier, on considérera comme négligeable l'échange de chaleur entre la vapeur et la paroi pendant la compression; 5° De calculer la quantité de chaleur cédée au condenseur pendant l'émission et la portion de cette chaleur qui correspond au double échange avec la paroi (ou perte au condenseur). Calculer le volume de l'eau de condensation. On suppose naturellement que la chaleur restituée par la paroi pendant l'émission correspond exactement à la réévaporation au commencement de l'émission de l'eau condensée sur la paroi; 6° En admettant que la quantité de vapeur humide admise dans le cylindre est proportionnelle à l'introduction (fraction de la course), on suppose que l'introduction passe de 0,1 à 0,11 et que la température à la sortie du condenseur reste la même, comment variera le titre de la vapeur à la fin de la détente? On suppose que le type de diagramme ne change pas. — 7° Cette variation serait-elle la même si c'était la quantité d'eau admise au condenseur et sa température initiale (15°) qui demeuraient les mêmes?

Données numériques.

Température centigrade t	174,4	101,2	50
Tension maxima de vapeur: p en kilogrammes par m².	90.000	10588	1250
$dp : dt$	"	+375	+62
Chaleur interne de vaporisation ρ en grandes calories par kg	437,4	495,8	535,8
$d\rho : dt$	"	−0,79	−0,79
Volume spécifique de la vapeur u en m³ par kg.	0,215	1,694	12,17
$du : dt$	"	−0,055	−0,,58

On suppose que la chaleur de l'eau liquide a pour valeur le produit de son poids par la température. On donne $E = 425$, puis $\text{Log } 102 = 4,625$; $\text{Log } 22 = 3,091$; $\text{Log } 13 = 2,565$; $\text{Log } 12 = 2,485$; $\text{Log } 2 = 0,693$.

On rappelle que toute fonction $f(t)$ dans le voisinage de la valeur t_0 de la variable a pour valeur $f(t_0) + \left(\frac{df}{dt}\right) \Delta t_0$.

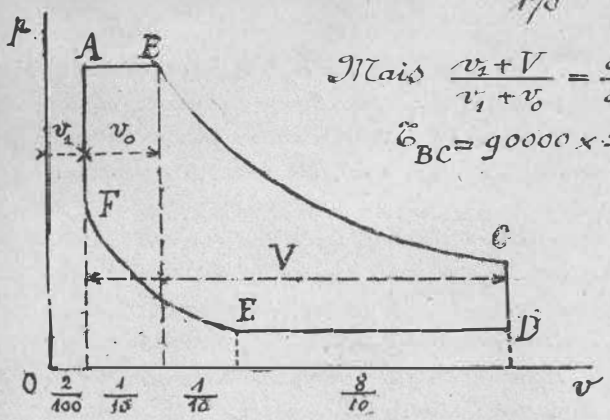
(*Mécanique physique*, Paris, 1925).

Soit V le volume de la cylindrée, v_1 le volume de l'espace mort, v_0 le volume de l'admission, C la course du piston, c_1 et c_0 les quantités correspondantes pour les volumes v_1 et v_0, D le diamètre du piston, p_0 la pression absolue à l'admission.

Dans la phase AB (admission); le travail est $\mathcal{C}_{AB} = p_0 v_0 = p_0 \frac{V}{10}$, avec $V = \frac{\pi D^2 C}{4} = \frac{\pi \times 0,3^2 \times 0,5}{4} = 0^{m3},03534$.

D'où $\mathcal{C}_{AB} = 90000 \times 0^4,003534 = 318,1$ kgm. D'après l'énoncé, la courbe BC est une hyperbole équilatère. Son équation est $pv = p_0 (v_1 + v_0)$. Le travail produit pendant la détente est

$$\mathcal{C}_{BC} = \int_{v_1+v_0}^{v_1+V} p\,dv = p_0 (v_1 + v_0) \int_{v_1+v_0}^{v_1+V} \frac{dv}{v} = p_0 (v_1 + v_0) \text{Log} \frac{v_1 + V}{v_1 + v_0}.$$



Mais $\frac{v_1+V}{v_1+v_0} = \frac{c_1+C}{c_1+c_0} = \frac{102}{12}$. Donc

$\mathcal{E}_{BC} = 90000 \times \frac{12}{100} \times 0{,}03534 \times (4{,}625 - 2{,}485) = 816{,}8$ Kgm.

Le travail pendant l'émission DE est, en désignant par $p' = 1250$ la pression correspondant, d'après les données de l'énoncé, à 50°, température de l'eau à la sortie du condenseur.

$$\mathcal{E}_{DE} = -p' \frac{8V}{10} = -1250 \times 8 \times 0{,}003534 = -35{,}3 \text{ Kgm.}$$

Calculons enfin le travail $\mathcal{E}_{EF}$ pendant la compression EF. L'hyperbole équilatère a pour équation $pv = p' \frac{22V}{100}$. Donc

$$\mathcal{E}_{EF} = -\int_{2V:100}^{22V:100} p\,dv = -p' \frac{22V}{100} \int_{2V:100}^{22V:100} \frac{dv}{v} = -p' \frac{22V}{100} \operatorname{Log} \frac{22}{2} = -23{,}3 \text{ Kgm.}$$

2° Le travail effectué par cycle est $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC} + \mathcal{E}_{DE} + \mathcal{E}_{EF} = 1076{,}3$ Kgm. La machine étant à double effet et tournant à 150 t/m, sa puissance est $P = 2 \times \frac{150}{60} \times \frac{1076{,}3}{75} = 71{,}75$ chevaux.

La consommation de vapeur est de $75 \times 2 \times 22 = 44$ gr par tour, soit $0{,}044 \times 150 \times 60 = 396$ Kgs par heure. La consommation spécifique est donc de $\frac{396}{71{,}75} = 5^{K}{,}52$ par cheval-heure.

3°, 4° et 5° Compression EF. — Nous admettons l'hypothèse de Hirn, à savoir que la vapeur en E est sèche à la fin de l'émission, au moment où la compression commence. Cette hypothèse découle d'ailleurs de l'énoncé qui spécifie que l'eau condensée sur la paroi à la fin de la détente est réévaporée pendant l'émission.

Nous comptons positivement les chaleurs R échangées entre le fluide et la paroi quand elles sont fournies par la paroi, négativement quand elles sont absorbées par elle. En E, le volume est $\frac{22}{100} \times 0{,}03534$ m³, la température est 50°, température de l'eau à la sortie du condenseur. Le volume spécifique étant 12,17, le poids de la vapeur résiduelle est $m = \frac{22}{100} \times \frac{35{,}34}{12{,}17} = 0{,}64$ gr. Si R_{EF} est l'effet de paroi, l'équation de Clausius donne en posant $A = \frac{1}{E}$ et en désignant l'énergie interne (en calories) par le symbole U,

(1) $R_{EF} = m(U_F - U_E) + A\,\mathcal{E}_{EF}$. Pour calculer U_F, il faut connaître la température en F. Les volumes en E et F sont dans le rapport de 22 à 2. La pression en E étant 1250, celle en F est $1250 \times 11 = 13750$, puisque, d'après l'énoncé, la courbe de compression EF est une hyperbole équilatère. Nous savons d'autre part, d'après le tableau de l'énoncé, qu'à 101°2 la pression est 10588. Par suite, $\Delta p = 13750 - 10588 = 3162$. Comme à cette température, $dp : dt = 375$, l'augmentation de température est $\Delta t = \frac{3162}{375} = 8°4$ et $t_F = 101{,}2 + 8{,}4 = 109°6$. Le volume spécifique de la vapeur est $1{,}694 - 8{,}4 \times 0{,}055 = 1{,}232$; le poids de la

vapeur est $\frac{2}{100}$ eu $\times \frac{35,34}{1,232} = 0^{gr},57$ et son titre est $0,57 : 0,64 = 0,89$. Il y a donc condensation. La raison physique de ce phénomène est la suivante : pendant la compression, la vapeur s'échauffe plus vite que les parois ; il en résulte une condensation partielle.

La chaleur interne de vaporisation est, en utilisant les nombres de l'énoncé, $\rho = 495,8 - 0,79 \times 8,4 = 489,2$. Pour obtenir la chaleur (ou énergie) interne U, il faut ajouter à ρ la chaleur de l'eau liquide. Nous pourrions prendre pour origine des températures celle de 0° par exemple. Toutefois pour pouvoir regarder le cycle décrit comme fermé, il convient de supposer que l'eau d'alimentation de la chaudière est empruntée au condenseur, dont nous prenons la température, 50°, comme origine des températures. (Cette hypothèse n'est pas réalisée en général, car la température de l'eau d'alimentation est le plus souvent inférieure à celle du condenseur). On a donc

$m U_F = 0,64 \times 10^{-3} (109,6 - 50 + 489,2 \times 0,89) = 0,317$ cal.-kg.,

$m U_E = 0,64 \times 10^{-3} \times 535,8 = 0,343$ cal. kg ; $A \mathcal{E}_{EF} = -\frac{23,3}{425} = -0,065$.

En portant ces valeurs dans (1), on trouve $R_{EF} = -0,08$ cal.-kg. Cette valeur étant négative, la paroi absorbe de la chaleur pendant la compression ; elle est d'ailleurs très faible et pourrait être négligée comme l'indique l'énoncé.

Admission FAB. — On introduit $\mu = 22$ gr. de vapeur au titre de 0,95 à la pression de 9 kgs, à la température de 174°,4. La quantité de fluide qui évolue ainsi pendant l'admission, la détente et l'échappement est $m + \mu = 22,64$ g. tandis que pendant la compression c'est seulement la vapeur résiduelle m qui évolue. Il n'y a donc pas véritablement de cycle dans la machine à vapeur.

Soit Q la quantité de chaleur fournie par la chaudière. Affectons de l'indice 1 les quantités se rapportant à la masse résiduelle m et de l'indice 2 celles qui se rapportent à la masse introduite μ. Le fluide nouveau communique X calories au fluide qui vient d'être comprimé. R^1_{FB} est l'effet de paroi s'exerçant sur m. L'équation de Clausius appliquée à m donne (2) $R^1_{FB} + X = A \mathcal{E}^1_{AB} + m (U_B - U_F)$

Appliquons la même équation à μ. Il faut retrancher de Q les calories X cédées à m, d'où

(3) $Q - X + R^2_{FB} = A \mathcal{E}^2_{AB} + \mu U_B$.

Ajoutons membre à membre les équations (2) et (3). En remarquant que $R^1_{FB} + R^2_{FB} = R_{FB}$ (effet de paroi totale pendant l'admission) et $A (\mathcal{E}^1_{AB} + \mathcal{E}^2_{AB}) = A \mathcal{E}_{AB}$ il vient

(4) $Q + R_{FB} = A \mathcal{E}_{AB} + (m + \mu) U_B - m U_F$.

D'ailleurs, $A \mathcal{E}_{AB} = 318,1 : 425 = 0,75$ cal. kg ; $Q = \mu \times 10^{-3} (q + 0,95 L)$, avec $q = 174,4 - 50$, $L = \rho + A p \mu = 437,4 + \frac{1}{425} \times 90000 \times 0,215 = 482,9$ ce qui donne $Q = 12,83$ cal. kg.

Pour calculer U_B, il faut connaître le titre de la vapeur en B ; son volume spécifique étant alors 0,215, sa masse est

$\frac{12}{100} \times \frac{35,34}{0,215} = 19^{g},72$ et le titre est $\frac{19,72}{22,64} = 0,87$. Par suite

$$(m+\mu)\, U_B = 22,64 \times 10^{-3} (174,4 - 50 + 437,4 \times 0,87) = 11,43 \text{ cal. kgs.}$$

On a trouvé plus haut $m U_F$. En portant dans (2), on trouve : $R_{FB} = -0,97$ cal. kg. La paroi absorbe de la chaleur pendant l'admission.

Explication physique du phénomène. Bien que la paroi se soit échauffée pendant la compression (et nous avons vu qu'elle s'échauffait moins vite que la vapeur), sa température est inférieure à celle de la vapeur de la chaudière pendant l'admission. La vapeur se condense donc partiellement par contact immédiat avec la paroi qui, à la fin de l'admission, est recouverte d'une couche liquide. Cette condensation dégage de la chaleur qui est absorbée par la paroi.

Du fait de cette condensation, la pression aurait une tendance à baisser ; mais la vapeur qui afflue empêche cet abaissement de se produire et une quantité déterminée de fluide vient remplacer celui qui s'est liquéfié.

Détente BC. — On a (3) $R_{BC} = (m+\mu)(U_C - U_B) + A\mathcal{T}_{BC}$.

La pression en C est $90000 \times \frac{12}{102} = 10588$ kg. A cette pression qui figure dans les données correspond la température 101°,2 et le volume spécifique 1,694. La masse de vapeur sèche en C est donc $\frac{102}{100} \times \frac{35,34}{1,694} = 21^{g},28$. Le titre est $\frac{21,28}{22,64} = 0,94$. Donc

$$(m+\mu)\, U_C = 22,64 \times 10^{-3} (101,2 - 50 + 495,8 \times 0,94) = 11,71 \text{ cal. kg.}$$

On a calculé plus haut $(m+\mu) U_B$. D'autre part, $A\mathcal{T}_{BC} = \frac{816,8}{425} = 1,92$. En portant ces valeurs dans (3), on trouve $R_{BC} = 2,20$ cal. kg. La paroi fournit de la chaleur pendant la détente.

L'interprétation physique du phénomène de la détente est assez délicate. Nous constatons qu'il y a eu vaporisation, puisque le titre est plus élevé qu'au commencement de la détente. On sait pourtant depuis longtemps que la détente de la vapeur est accompagnée d'une condensation ; mais c'est à la condition que cette détente soit adiabatique. L'influence de la paroi explique cette contradiction apparente ; comme elle est susceptible d'échanger de la chaleur avec le fluide, le phénomène n'est pas adiabatique.

On peut raisonner comme suit. Au début de la détente, la vapeur est plus chaude que la paroi et se condense en lui fournissant des calories. Puis, à mesure que la détente s'avance, la paroi s'échauffe et, dans la dernière partie de la course, fournit des calories au fluide en le vaporisant. Il n'y a d'ailleurs pas compensation, car les calories travaillent d'autant mieux qu'elles sont à température plus élevée. C'est donc la vaporisation qui l'emporte ; le titre augmente et la paroi fournit, en définitive, des calories pendant la détente.

Émission CDE. — Évaluons la chaleur R_{CE} restituée par la paroi pendant l'émission.

Analysons le phénomène. Quand la détente est terminée, l'ouverture de la soupape d'échappement produit une brusque diminution de pression. L'eau qui est condensée sur la paroi possédant, ainsi que cette paroi même, une température bien supérieure à celle du condenseur, se vaporise rapidement aux dépens de la chaleur de la paroi ; la vapeur ainsi produite ne travaille pas, puisqu'elle va au condenseur ; c'est la perte de calories à l'échappement ou perte au condenseur.
D'après l'énoncé, la perte R_{CE} correspond exactement à la réévaporation, au commencement de l'émission de l'eau condensée, c.à.d. à la température de 101°,2 de la paroi en C (car la paroi se refroidit lentement). Or, en C, à la fin de la détente, il y a 22 kg 64 de fluide dont 21 kg 28 de vapeur sèche et par suite 1 kg 36 d'eau condensée. Or à 101°,2, on a
$L = p + A\mu u = 495,8 + \frac{1}{425} \times 10588 \times 1,694 = 538$. Donc
$R_{CE} = 1,36 \times 10^{-3} \times 538 = 0,73$ cal. Kg.

Désignons par Q_1 la quantité de chaleur cédée au condenseur. Appliquons le théorème de Hirn. Le total des calories Q qui sort de la chaudière au cylindre à chaque cylindrée est égal à la somme des calories $A\mathcal{T}$ équivalentes au travail accompli $\mathcal{T}$, de celles Q_1 qui vont au condenseur et de celles qui sont perdues par rayonnement et par frottements. Comme nous négligeons les pertes par rayonnement et frottements, on a $Q = A\mathcal{T} + Q_1$.
D'ailleurs $A\mathcal{T} = A(\mathcal{T}_{AB} + \mathcal{T}_{BC} + \mathcal{T}_{DE} + \mathcal{T}_{EF}) = 2,53$ cal. Kg.
Par suite $Q_1 = Q - A\mathcal{T} = 12,83 - 2,53 = 10,30$ cal. Kg.
L'eau du condenseur entrant à 15° et sortant à 50°, c.à.d avec un échauffement de 35°, le volume de l'eau de condensation est 10,30 : 35 = 0,294 litre par cycle, soit $2 \times \frac{10,30}{35} \times 150 \times 60 \times 10^{-3} = 5,3$ m³ par heure, puisque la machine est à double effet et fait 150 tours par minute.

6° Supposons que l'introduction passe de 0,1 à 0,11. Le volume en B est alors $\frac{13}{100} V$. La pression en C est $90000 \times \frac{13}{102} = 11470$ kgs au lieu de 10588 kgs. On a $\Delta p = 882$, $\Delta t = \frac{882}{375} = 2°,35$.
La température est 101,2 + 2,35 = 103°,35. Le volume spécifique est 1,694 − 0,055 × 2,35 = 1,565. Le poids de vapeur en C est $\frac{102}{100} \times \frac{35,34}{1,565} = 23 kg,03$. Le poids de vapeur humide introduit est $\mu' = 22 \times \frac{11}{10} = 24 kg,2$. Le poids total de fluide est $\mu' + m = 24 kg,84$. Le titre à la fin de la détente est donc 23,03 : 24,84 = 0,927 au lieu de 0,94. Il a baissé de 0,013.
Evaluons le travail. On a $A\mathcal{T}_{AB} = 0,75 \times 1,1 = 0,825$;
$\mathcal{T}_{BC} = 90000 \times \frac{13}{100} \times 0,03534 \operatorname{Log} \frac{102}{13} = 851,77$ Kgm ; $A\mathcal{T}_{BC} = 2$.
Puisque la température n'a pas changé à la sortie du condenseur, $\mathcal{T}_{DE}$ et $\mathcal{T}_{EF}$ n'ont pas varié. Par suite,
$A(\mathcal{T}_{AB} + \mathcal{T}_{BC} + \mathcal{T}_{DE} + \mathcal{T}_{EF}) = 2,687$. La nouvelle quantité de chaleur fournie par la chaudière est $Q' = 1,1\,Q = 1,1 \times 12,83 = 14,113$ cal. Kg et la quantité de chaleur cédée au condenseur est :
$Q_1' = 14,113 - 2,687 = 11,426$ cal. Kg. Par suite, $Q_1' > Q_1$. Puisque la

température à la sortie du condenseur reste la même, il faudra soit augmenter la quantité d'eau admise au condenseur, soit diminuer la température d'entrée de l'eau, soit modifier ces deux facteurs à la fois. Par exemple, si la température d'entrée de l'eau est maintenue à 15°, il faudra, par cycle, un volume d'eau de condensation égal à $11,426 : 35 = 0^l,326$ au lieu de $0^l,294$.

7° Supposons maintenant que l'on maintienne constante la quantité d'eau admise par cycle au condenseur, soit $0^l,294$, ainsi que la température initiale 15°. La variation du titre ne sera certainement pas la même, car la température à la sortie du condenseur devant augmenter, le volume spécifique de la vapeur résiduelle diminue et sa masse m augmente. La masse totale de vapeur humide qui évolue augmente donc et comme la masse de vapeur sèche en C ne change pas, le titre diminue. La variation du titre est donc plus forte que dans le cas précédent.

Pour étudier quantitativement le phénomène nous allons procéder par approximations successives. Nous admettons, dans une première approximation, que la quantité de chaleur cédée au condenseur reste la même, soit $Q'_1 = 11,426$ cal. kg. La température t à la sortie du condenseur est alors telle que l'on ait $\frac{11,426}{t-15} = 0,294$, d'où $t = 53°,9$ au lieu de 50°. Cherchons le volume spécifique de la vapeur à 53°,9. On a :

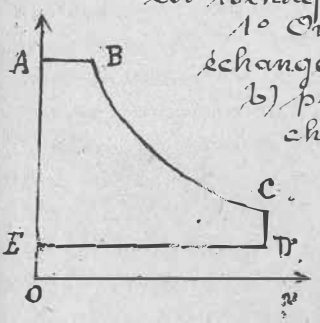
$\Delta u = -0,58\,\Delta t = -0,58 \times 3,9 = -2,26$ et $u = 12,17 - 2,26 = 9,91$. Le volume en E n'ayant pas changé, la masse de la vapeur résiduelle est $m' = \frac{22}{100} \times \frac{35,34}{9,21} = 0^g,785$ au lieu de $0^g,64$. Le poids total de fluide en C est $p' + m' = 24,2 + 0,785 = 24^g,985$ et le titre à la fin de la détente est $23,03 : 24,985 = 0,921$. La variation en moins serait donc de 0,019 au lieu de 0,013.

Mais du fait que la température à la sortie du condenseur et par suite la pression correspondante p' ont augmenté, le travail effectué $\mathcal{E}$ et la chaleur Q'_1 ont varié. Calculons la nouvelle pression p' au condenseur. On a $\Delta p' = 62\,\Delta t = 62 \times 3,9 = 242$, d'où $p' = 1250 + 242 = 1492$. Par suite, $\mathcal{E}_{DE} = -35,3 \times \frac{1492}{1250} = -42,13$; $\mathcal{E}_{EF} = -23,3 \times \frac{1492}{1250} = -27,81$; $\mathcal{E} = 1065$ et $A\mathcal{E} = 2,50$ cal. kg. On a donc $Q'_1 = Q' - 2,50 = 14,113 - 2,50 = 11,613$. La température t à la sortie du condenseur est donnée par $\frac{11,613}{t-15} = 0,294$, d'où $t = 54°,5$. Cherchons le volume spécifique de la vapeur à 54°5. On a $\Delta u = -0,58 \times 4,5 = -2,61$; $u = 9,56$; $m' = \frac{22}{100} \times \frac{35,34}{9,56} = 0^g,81$. La masse totale de vapeur humide est $24,2 + 0,81 = 25^g,01$ et le titre à la fin de la détente est $23,03 : 25,01 = 0,920$. On peut s'arrêter là et conclure que la diminution du titre est 0,020 au lieu de 0,013.

---

113. — Une machine à vapeur dont le cylindre a un alésage de 500 m.m. et le piston une course de 1000 mm. est alimentée de vapeur à une pression absolue de 9 kilogrammes par centimètre

carré. Le titre de cette vapeur est 0,90. Le degré d'admission est de 0,1. Le poids de vapeur admis par coup de piston est 110 grammes. On regarde l'espace nuisible comme négligeable et il en résulte que l'on doit admettre qu'il n'y a pas de compression. La pression absolue au condenseur est de 200 grammes. L'équation de la courbe de détente relevée sur le diagramme est pv = Constante. Ces hypothèses nous conduisent à admettre que le diagramme est identique au tracé figuré.



1° On demande d'évaluer la quantité de chaleur échangée avec la paroi a) pendant l'admission, b) pendant la détente. — 2° Calculer la perte de chaleur au condenseur. — 3° Calculer dans ce cycle la chaleur empruntée à la source chaude, la chaleur cédée à la source froide et le rendement thermodynamique du cycle. 4° Tous les éléments de la machine demeurant identiques ainsi que l'état de la vapeur d'admission, on suppose que le degré d'admission passe de 0,10 à 0,11, le poids de vapeur admis variant comme la longueur de la partie de la course consacrée à l'admission, on demande d'évaluer la variation du rendement thermodynamique du cycle. 5° Même question si l'on abaisse la pression du condenseur à 150 grammes par centimètre carré.

Pressions en kg/m² p	Température de la vapeur prise égale à la chaleur du liquide t	Chaleur latente interne par kg de vapeur saturée ρ	Volume du kg de vapeur saturée pris égal à $\frac{1}{u}$ v
90000	174,4	437,5	0,217
9000	96,2	499,3	1,883
2000	59,7	528,1	7,800

On donne en outre

p	$dt : dp$	$d\rho : dp$	$dv : dp$
9000	0,0030	− 0,0024	− 0,00019
2000	0,0106	− 0,0084	− 0,00352

(*Mécanique physique et expérimentale*, Paris, 1929).

L'analogie de ce problème avec le précédent va nous permettre de simplifier les explications. Nous conservons les mêmes notations.

1° Le volume du cylindre est $V = \frac{1}{4}\pi D^2 C$ ou $\frac{1}{4}\pi \times 0{,}25 = 0^{m3}{,}1961$. Soit Q la quantité de chaleur fournie par la chaudière, R_{AB} l'effet de

paroi pendant l'admission, $\mu = 110$ g. la masse de fluide qui évolue. On a (1) $Q + R_{AB} = A\mathcal{E}_{AB} + \mu U_B$.

Puisqu'il est question de cycle dans l'énoncé, nous devons admettre pour calculer le rendement thermodynamique, les énergies internes U du fluide et la chaleur q du liquide, que l'eau d'alimentation de la chaudière est empruntée au condenseur dont nous prenons la température 59°,7 comme origine des températures.

Le titre de la vapeur introduite étant 0,90 et la température qui correspond à la pression de 9 Kg/cm² étant 174°,4, on a $Q = \mu.10^{-3}\left[174,4 - 59,7 + 0,90\,L\right]$ avec $L = \rho + A p u = 437,5 + A \times 90000 \times 0,217 = 483,3$ ce qui donne $Q = 60,46$ cal. Kg. D'autre part,

$$\mathcal{E}_{AB} = p_o \frac{V}{10} = 90000 \times 0,01961 = 1764,9 \text{ Kgm},$$

$$A\mathcal{E}_{AB} = 1764,9 : 426,6 = 4,14 \text{ cal. Kg}.$$

Pour calculer U_B, il faut connaître le titre de la vapeur en B. Son volume spécifique étant alors égal à 0,217, son poids est $\frac{196,1}{10} \times \frac{1}{0,217} = 90,4$ g. et le titre est 90,4 : 110 = 0,82. Par suite,

$$\mu U_B = 110.10^{-3}(174,4 - 59,7 + 0,82 \times 437,5) = 59,08.$$

En portant ces valeurs dans (1), on trouve $R_{AB} = -4,24$ cal. Kg. La paroi absorbe de la chaleur pendant l'admission.

Pendant la détente BC, on a (2) $R_{BC} = \mu(U_C - U_B) + A\mathcal{E}_{BC}$. Nous connaissons μU_B. Pour calculer μU_C, il faut connaître le titre de la vapeur en C. La pression en C est $\frac{90000}{10} = 9000$ kg/m². D'après l'énoncé, la température correspondante est 96°,2, la chaleur latente interne 499,3 et le volume spécifique 1,883. La masse de la vapeur est 196,1 : 1,883 = 104,14 g et le titre 104,14 : 110 = 0,95. Par suite, $\mu U_C = \frac{110}{1000}(96,2 - 59,7 + 0,95 \times 499,3) = 56,19$ cal. Kg.

Calculons maintenant le travail $\mathcal{E}_{BC}$. L'équation de l'hyperbole équilatère BC est $pv = \frac{1}{10} p_o V = 90000 \times 0,01961 = 1764,9$. Par suite,

$$\mathcal{E}_{BC} = \int_{V:10}^{V} p\,dv = 1764,9 \int_{V:10}^{V} \frac{dv}{v} = 1764,9 \text{ Log } 10,$$

$$A\mathcal{E}_{BC} = \frac{1}{426,6} \times 1764,9 \times 2,30 = 9,52 \text{ cal Kg}.$$

En portant ces valeurs dans (2), on trouve $R_{BC} = 13,64$ cal Kg. La paroi fournit de la chaleur pendant la détente.

2° D'après ce que nous avons vu au n° 112 la perte R_{CE} au condenseur correspond exactement à la réévaporation, au commencement de l'émission, de l'eau condensée, c.à.d. à la température de 96°,2 de la paroi en C. Or en C, à la fin de la détente, il y a 110 − 104,14 = 5,86 d'eau condensée. Par suite,

$R_{CE} = 5,86 \times 10^{-3}(\rho + A p u)$, avec $\rho = 499,3$, $p = 9000$, $u = 1,883$, d'où $R_{CE} = 3,16$ cal. Kg.

3° Nous avons vu plus haut que la chaleur empruntée à la source chaude était $Q = 60,46$ cal. Kg. Soit Q_1 la chaleur cédée à la source froide, $\mathcal{E}$ le travail total effectué par cycle. Le théorème de Hirn donne $Q = A\mathcal{E} + Q_1$. On a $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC} + \mathcal{E}_{DE}$. Nous connaissons $\mathcal{E}_{AB}$ et $\mathcal{E}_{BC}$. D'ailleurs $\mathcal{E}_{DE} = -2000 \times 0,1961 = -392,2$ kgm.

Donc $A\mathcal{E} = 12,75$ et $Q_1 = 47,71$ cal. Kg.

Le rendement thermodynamique du cycle est $R = \frac{Q - Q_1}{Q} = 0,210$.

Notons en passant que le rendement thermodynamique d'un cycle de Carnot qui fonctionnerait entre les mêmes limites de température serait égal à $\frac{174,4 - 59,7}{174,4 + 273} = 0,256$.

4° Le degré d'admission passant de 0,10 à 0,11 et le poids de vapeur admis variant comme la partie de la course consacrée à l'admission, la quantité de chaleur empruntée à la source chaude est $Q' = 1,1\,Q = 1,1 \times 60,46 = 66,5$ cal. Kg. On a $\mathcal{E}_{AB} = p_0 \frac{11V}{100} = 1941,4$ Kgm. L'équation de l'hyperbole équilatère est $pv = \frac{11}{100} p_0 V = 1941,4$. Par suite

$$\mathcal{E}_{BC} = 1941,4 \int_{11V:100}^{V} \frac{dv}{v} = 1941,4 \operatorname{Log} \frac{100}{11} = 4285,2 \text{ Kgm.}$$

D'ailleurs, $\mathcal{E}_{DE}$ n'a pas changé. On trouve $A\mathcal{E} = 13,68$ et le rendement thermodynamique est devenu $13,68 : 66,5 = 0,205$. Il a baissé de 0,005. Ce résultat était à prévoir ; la période de détente étant plus courte, la vapeur travaille dans de moins bonnes conditions économiques.

5° On conserve le degré d'admission de 0,1 mais on abaisse la pression du condenseur à 150 grammes par cm². La température correspondante est $59,7 - 0,0106 \times 500 = 54°4$. La chaleur fournie à la chaudière est devenue $Q = 110 \times 10^{-3}(174,4 - 54,4 + 0,90 \times 483,3) = 61,04$ cal. Kg. Les travaux $\mathcal{E}_{AB}$ et $\mathcal{E}_{BC}$ n'ont pas varié, mais on a $\mathcal{E}_{DE} = -1500 \times 0,1961 = -294,15$ Kgm. Par suite $A\mathcal{E} = 12,98$ et le rendement thermodynamique est devenu $R = 12,98 : 61,04 = 0,213$; il a légèrement augmenté, ce qui était à prévoir, puisque l'écart entre les températures des deux sources est devenu plus grand.

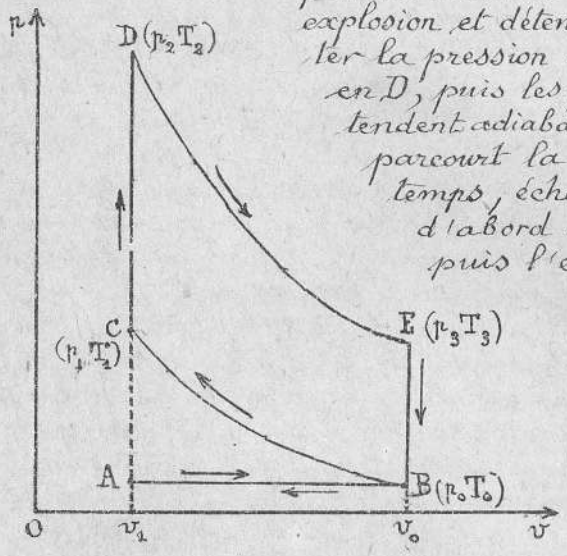
---

114. — Dans le cylindre d'un moteur à explosion à quatre temps, en régime de marche, sans aucune avance, on introduit un mélange formé d'hydrogène et d'oxyde de carbone à volumes égaux avec un volume d'air égal à 5 fois celui de l'oxygène nécessaire à la combustion complète. A la fin du premier temps, le mélange tonnant est à la pression atmosphérique et sa température est 77°. 1° Pendant le deuxième temps, son volume est réduit dans le rapport de 4 à 1. On calculera la température et la pression à la fin de cette compression supposée adiabatique, et le travail absorbé par celle-ci pour un gramme de mélange. 2° Puis, la combustion étant supposée instantanée on calculera la température et la pression qui en résultent. 3° En supposant que pendant le 3e temps les produits de la combustion soient ramenés au volume initial par détente adiabatique, on indiquera comment on calculerait la température et la pression finales. 4° Enfin, on indiquera comment on calculerait le rendement théorique du moteur dans ces conditions.

Données numériques. — Rapport des deux chaleurs spécifiques

principales du mélange tonnant $\frac{C}{c} = \gamma = 1,4$. Sa constante spécifique $\mathcal{R} = 3,7 \times 10^6$ C.G.S. Quantité de chaleur dégagée par la combustion d'un gramme de mélange tonnant $Q = 726$ calories. Chaleur spécifique à volume constant du mélange après combustion $c = 0,22$. (Physique générale. Paris).

Nous allons considérer le mélange tonnant et les produits de la combustion comme des gaz parfaits. Représentons le diagramme théorique du moteur à quatre temps en prenant pour abscisses les volumes et pour ordonnées les pressions. Au premier temps, l'admission se fait sous la pression de l'atmosphère, le point figuratif décrit la droite AB parallèle à Ov. Au second temps la compression est adiabatique; la pression monte de B en C. Au troisième temps, explosion et détente, l'inflammation fait monter la pression d'une façon brusque de C en D, puis les gaz de la combustion se détendent adiabatiquement; le point figuratif parcourt la courbe DE. Au quatrième temps, échappement, la pression baisse d'abord à volume constant de E en B, puis l'expulsion se fait à la pression atmosphérique; le point figuratif revient de B en A.



1° Soient p_0, T_0 la pression et la température du mélange tonnant à la fin du premier temps en B. Calculons la pression p_1 et la température T_1 en C, à la fin de la compression adiabatique. On a $p_1 = p_0 \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^\gamma = 1^{atm} \times 4^{1,40} = 6^{atm},964$.

L'équation (4) du n° 23 donne

$$T_1 = T_0 \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1} = (77 + 273) \times 4,^{0,4} = 609° \text{ absolus.}$$

D'après la formule (11) du n° 23, le travail absorbé par la compression adiabatique BC, pour un gramme de mélange est

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{R}(T_1 - T_0)}{\gamma - 1} = \frac{1}{0,4} \times 3,7 \times 10^6 \times (609 - 350) = 2396 \times 10^6 \text{ ergs}$$

soit 239,6 joules.

2° De C à D, les 726 calories dégagées par la combustion d'un gramme de mélange tonnant sont employées à réchauffer de T_1 à T_2 les produits de la combustion. On a donc

$$726 = c\,(T_2 - T_1) = 0,22\,(T_2 - 609), \quad T_2 = 3909°.$$

Comme nous sommes à volume constant on a

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 6,964 \times \frac{3909}{609} = 44,7 \text{ atmosphères.}$$

3° On demande comment on <u>calculerait</u> la température T_3

et la pression p_3 à la fin de la détente adiabatique du troisième temps. Les données du problème ne sont pas suffisantes pour permettre de faire ce calcul avec précision. Il faudrait en effet que nous connaissions le rapport des chaleurs spécifiques $\gamma' = \frac{C'}{c'}$ du mélange après combustion. Or nous ne connaissons que c'. Nous pouvons toutefois nous tirer d'affaire par approximation en appliquant la formule de Mayer valable pour les gaz parfaits (1) $J(C' - c') = r'$, en désignant par r' la constante spécifique du mélange après combustion. Calculons r'.

Supposons qu'on ait introduit 2 volumes d'hydrogène et 2 volumes d'oxyde de carbone. D'après les deux réactions de combustion $2H^2 + O^2 = 2H^2O$, $2CO + O^2 = 2CO^2$, on voit qu'il faut leur adjoindre 2 volumes d'oxygène pour les brûler complètement, et par conséquent 10 volumes d'air. Cela fait donc au total 14 volumes. Après combustion, il ne reste que 12 volumes, soit 2 volumes de vapeur d'eau, 2 volumes d'anhydride carbonique et 8 volumes d'azote. (Nous admettons ainsi, pour simplifier, que l'air ne contient que de l'oxygène et de l'azote et que l'oxygène occupe le cinquième du volume de l'air, ce qui n'est pas tout à fait exact). Comme la constante spécifique d'un gaz est proportionnelle à son volume spécifique, on a

$$r' = \frac{12}{14} r = \frac{6}{7} \times 3{,}7 \times 10^6 = 3{,}17 \times 10^6.$$

Remarque. — Nous aurions pu, pour obtenir r', appliquer la formule (3) du n° 4 en calculant au préalable les constantes spécifiques de chacun des gaz du mélange après combustion (vapeur d'eau, anhydride carbonique et azote). Mais nous avons remarqué que la valeur donnée $r = 3{,}7 \times 10^6$ diffère assez sensiblement de celle qui résulterait de cette même formule (3) appliquée au gaz du mélange donnant avant combustion. Nous avons donc préféré partir de la valeur r donnée dans l'énoncé.

Portons cette valeur de r' dans (4), il vient

$$C' = c' + \frac{r'}{J} = 0{,}22 + \frac{3{,}17 \times 10^6}{4{,}18 \times 10^7} = 0{,}296.$$

Par conséquent, $\gamma' = \frac{C'}{c'} = \frac{0{,}296}{0{,}22} = 1{,}35$.

Calculons la pression p_3 et la température T_3 à la fin de la détente adiabatique en E. On a

$$p_3 = p_2 \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^{\gamma'} = 44{,}7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{1{,}35} = 6{,}88 \text{ atm.}$$

De E en B, on passe de la pression p_3 à la pression p_0 à volume constant. On a donc $T = T_0 \frac{p_3}{p_0} = 350 \times 6{,}88 = 2408°$.

4° On serait tenté, pour trouver le rendement théorique ρ du moteur, de calculer la quantité de chaleur Q' abandonnée par le mélange des gaz après combustion le long de DE, et d'écrire $\rho = (Q - Q') : Q$. Mais en opérant ainsi, nous appliquons le principe de l'équivalence, ce que nous n'avons pas le droit de faire, parce que le système qui évolue change de nature

et ne revient pas à l'état initial : le diagramme n'est pas un cycle. Nous écrirons donc $\rho = (\mathcal{E}' - \mathcal{E}) : JQ$, en désignant par $\mathcal{E}'$ le travail fourni par les produits de la combustion pendant la détente adiabatique DE, par $\mathcal{E}$ le travail reçu par le mélange avant combustion pendant la compression adiabatique BC, et par Q la quantité de chaleur dégagée par la combustion du mélange tonnant. Nous avons évalué $\mathcal{E}$ plus haut; l'énoncé donne Q ; il ne reste plus qu'à calculer $\mathcal{E}'$. Or d'après la formule (8) du n° 23, on a $\mathcal{E}' = Jc'(T_2 - T_3) = 4{,}18 \times 10^7 \times 0{,}22 \times 1501 = 1380 \times 10^7$ ergs, soit 1380 joules. Par suite $\rho = \frac{1380 - 239{,}6}{4{,}18 \times 726} = 0{,}375$.

---

115. — Dans un avant-projet de moteur à combustion on se fixe les données suivantes : Puissance effective à réaliser sur l'arbre : 150 CV ; nombre de cylindres : 3 ; nombre de tours par minute : 180. Cycle à quatre temps, à combustion à pression constante, avec injection mécanique du combustible. Consommation de combustible par cheval-heure effectif à pleine charge : 250 g. d'huile de pétrole d'un pouvoir calorifique de 10800 grandes calories au kilogramme. Vitesse linéaire moyenne du piston : 3 m/sec ; rendement organique : 0,75 ; température des gaz en fin d'aspiration : 40°C ; pression de l'air ambiant : 1 kg par cm². Larges soupapes d'admission et d'échappement permettant de négliger les pertes de charge au passage des gaz.

Déterminer d'après ces données : 1° La course et l'alésage des pistons moteurs, et le rendement thermique indiqué ; 2° le volume de la chambre de compression pour que la pression en fin de compression atteigne 35 K : cm² ; la température des gaz en ce moment ; 3° le tracé du diagramme théorique d'évolution en (p, v) en supposant que les 3/5 de la quantité de chaleur libérée par la combustion à pression constante servent à échauffer la masse gazeuse contenue dans le cylindre.

Déduire de ce diagramme la valeur du rendement thermique indiqué et en tirer une conclusion au sujet de l'hypothèse faite ci-dessus sur la valeur d'utilisation de la quantité de chaleur libérée par la combustion.

Le poids d'air nécessaire à la combustion est de 20 fois le poids du combustible. Poids du litre d'air à 0°C sous la pression de 1 K par cm² : 1,275 g. Équivalent mécanique de la calorie : 427 Kilogm. Chaleur spécifique de l'air à pression constante : 0,238. Chaleur spécifique de l'air à volume constant : 0,170. Chaleur spécifique des gaz à pression constante pendant et après la combustion : 0,425. Rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant des mêmes gaz : 1,25. La compression et la détente sont supposées adiabatiques.

(École Supérieure d'Électricité, 1926).

1° et 2°. — Reportons-nous à la figure et aux notations du n° 114. Le moteur fait 180 tours par minute, soit 3 tours par seconde. Les pistons font donc 6 courses par

seconde et comme leur vitesse linéaire moyenne est de 3 m/sec, la course est égale à 50 cm.

La puissance effective à réaliser sur l'arbre étant de 150 CV et le nombre des cylindres étant égal à 3, chaque cylindre doit développer 50 CV effectifs sur l'arbre. Le travail effectif $\mathcal{E}_e$ développé par un cycle est donné par la formule $\mathcal{E}_e \times \frac{180}{60} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{75} = 50$, d'où $\mathcal{E}_e = 2500$ kgmètres.

Comme on consomme 250 g. d'huile de pétrole par cheval heure effectif, c.à.d. pour 75×3600 kgmètres, la consommation par cycle est $\frac{250 \times 2500}{75 \times 3600} = \frac{250}{108}$ gr. Le poids d'air qui est 20 fois plus grand est $P = \frac{5000}{108}$ gr, occupant à 40° et sous la pression de 1 kg : cm² le volume du cylindre

$$v_0 = \frac{5000}{108 \times 1{,}275}\left(1 + \frac{40}{273}\right) = 41{,}63 \text{ litres.}$$

Le volume v_1 de la chambre de compression est donné par la condition que la pression au point C, en fin de compression adiabatique BC, atteigne 35 kg : cm², d'où $v_1 = v_0 \left(\frac{1}{35}\right)^{\gamma}$. Nous devons prendre pour γ le rapport des chaleurs spécifiques de l'air $0{,}238 : 0{,}170 = 1{,}4$ puisque la combustion ne s'est pas encore produite. On trouve $v_1 = 3{,}28$ litres.

Le volume balayé par le piston est donc $v_0 - v_1 = 38^l{,}35$ et comme sa course est de 50 cm., son alésage D en cm est donné par la formule $\frac{\pi D^2}{4} \times 50 = 38350$ d'où l'on tire $D = 31{,}25$ cm.

La température T_1 à la fin de la compression adiabatique est donnée par la formule (3) du n° 23,

$T_1 = T_0 \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 313 \times 35^{\frac{0{,}4}{1{,}4}} = 864°$ abs., soit 591°C.

Le rendement thermique indiqué est $\rho = \frac{\mathcal{E}}{JQ}$ en désignant par $\mathcal{E}$ le travail développé par cycle dans le cylindre (et non sur l'arbre) et par Q la chaleur fournie par cycle. Comme le rendement organique du moteur est 0,75, on a $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_e}{0{,}75} = \frac{2500}{0{,}75} = 3333$ kgm. Nous avons vu plus haut qu'il fallait $\frac{250}{108}$ g d'huile de pétrole par cycle. Leur combustion dégage $Q = \frac{250}{108} \times 10800 = 25$ grandes calories équivalant à 25×427 kilogrammètres. On a donc $\rho = \frac{2500}{0{,}75 \times 25 \times 427} = 0{,}31$.

3° Déterminons le diagramme théorique en (p, v). L'énoncé donne déjà : pression en B, 1 K ; pression en C, 35 K. Pour avoir la pression p_2 en D, calculons la température T_2. Nous connaissons $T_1 = 864°$ et d'après l'énoncé on suppose que les 3/5 de la chaleur Q libérée par la combustion, c'est-à-dire 15000 cal. gr, servent à échauffer la masse gazeuse contenue dans le cylindre. Comme le poids d'air représente 20 fois celui de l'huile de pétrole, le poids de la masse gazeuse totale est 21 fois celui du pétrole soit $21 \times \frac{250}{108} = \frac{1750}{36}$ g. Nous devons prendre $c = \frac{0{,}425}{1{,}25}$ comme chaleur spécifique à volume constant, des gaz brûlés. On a donc $\frac{1750}{36} \times \frac{0{,}425}{1{,}25}(T_2 - T_1) = 15000$. En faisant $T_1 = 864°$, on trouve $T_2 = 1771°$. Le volume restant

constant le long de CD, on a $p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 71^K,7$.

La pression p_3 à l'extrémité E de la détente adiabatique est $p_3 = p_2 \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^{\gamma'} = 71,7 \times \left(\frac{3,28}{41,63}\right)^{1,25} = 3^K$.

On a ainsi tous les éléments pour tracer le diagramme théorique en (p, v).

Déduisons de ce diagramme la valeur du rendement thermique indiqué. D'après la formule (10) du n° 23, le travail reçu par l'air dans la compression adiabatique BC est $\mathcal{E}_1 = \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$. On doit faire $\gamma = 1,4$; $\frac{p_1}{p_0} = 35$. Pour avoir des kilogrammètres, nous devons écrire $p_0 = 10^4$, $v_0 = 41,63 \times 10^{-3}$. On trouve $\mathcal{E}_1 = 1833$ Kgm.

De même, d'après la formule (5) du n° 23, le travail fourni par les gaz brûlés pendant la détente adiabatique DE est, en tenant compte du changement de notation,

$\mathcal{E}_2 = \frac{p_2 v_1}{\gamma' - 1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^{\gamma'-1}\right] = 4421$ Kgm. Le travail développé par le cycle est donc $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 2588$ Kgm. Ce chiffre est notablement inférieur à celui 3333 Kgm. trouvé au 2° ; le rendement thermique indiqué est $\frac{2588}{25 \times 427} = 0,24$ au lieu de 0,31. On en conclut que l'hypothèse suggérée dans l'énoncé que les 3/5 de la quantité de chaleur libérée par la combustion servent à échauffer la masse gazeuse n'est pas exacte. Pour retrouver avec le diagramme le rendement thermique déterminé au 2°, un calcul rapide montre que sont les 4/5 et non les 3/5 de la chaleur de combustion qui devraient être considérés comme utilisés à échauffer la masse gazeuse.

---

116. – Calculer le rendement d'un moteur à essence qui fonctionne dans une atmosphère dont la pression est de 1 kilog, sachant qu'on opère une compression de 4 kilogs préalable à l'explosion et que celle-ci développe une pression de 16 kilogs. On se rappelle que le rapport des chaleurs spécifiques de l'air est C : c = γ = 1,4

(*Mécanique physique et expérimentale*. Paris).

Reportons-nous à la figure du n° 114 et adoptons les mêmes notations. La quantité de chaleur fournie par le foyer le long de CD, à volume constant, est $Q = c(T_2 - T_1)$. La quantité de chaleur restituée au foyer le long de EB, à volume constant, est $Q' = c(T_3 - T_0)$. Le rendement cherché a pour expression

$$(1) \qquad \rho = \frac{Q - Q'}{Q} = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}.$$

Nous connaissons simplement les pressions $p_0 = 1$ Kg., $p_1 = 4$ Kg, $p_2 = 16$ Kg. Nous allons donc calculer les températures T_1, T_2, T_3 en fonction de ces pressions et de T_0 et nous verrons que T_0 s'éliminera dans l'expression de $\frac{\gamma-1}{\gamma}$.

La formule (3) du n° 23 donne $T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

On passe de C à D à volume constant. Par suite,

$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{p_2}{p_1}$. La formule (4) du n° 23 montre que $\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_3}$. Donc $T_3 = T_0 \frac{T_2}{T_1} = T_0 \frac{p_2}{p_1}$. En substituant dans (1), il vient

$$\rho = 1 - 1 : \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - 1 : 4^{\frac{0,4}{1,4}} = 0,327.$$

On n'a pas besoin de la donnée p_2.

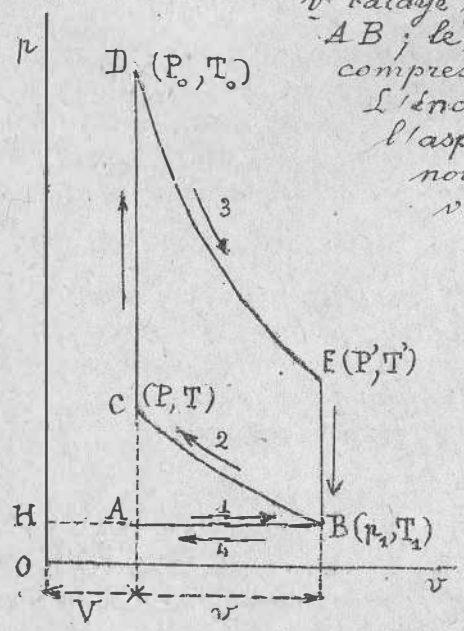
Hâtons-nous d'ajouter que, pour un moteur à essence, c'est là un rendement purement théorique pour les raisons exposées au 4° du n° 114.

---

117. – Un moteur à essence à quatre temps, dont la chambre de compression est du volume $V = 1$ litre, développe à la compression une pression $P = 4$ kg par cm^2, tandis que par l'explosion la pression est portée à $P_0 = 21$ kg/cm^2. 1° Calculer la valeur de la compression en volume $\frac{V+v}{V}$ où v représente le volume balayé par le piston dans le cylindre et V le volume déjà dit de la chambre de compression. 2° Calculer le travail T_{ra} absorbé par la compression. 3° Calculer la pression P' à la fin de la détente. 4° Calculer le travail T_{rd} accompli au cours de la détente ainsi que le travail indiqué T_{ri} développé au cours du cycle. 5° Calculer le rendement. 6° Calculer en chevaux la puissance indiquée développée par le moteur marchant à 1200 tours par minute ou à 1800 tours. On rappelle que $C : c = \gamma = 1,4$.

(*Mécanique physique et expérimentale*, Paris 1919)

Figurons le diagramme du moteur à quatre temps, dont nous avons analysé les différentes phases au début du n° 114. Le volume v balayé par le piston est représenté par AB ; le volume V de la chambre de compression est représenté par HA.



L'énoncé ne donne pas la pression p_1 à l'aspiration. Pour simplifier les calculs, nous la supposerons égale à 1 kg/cm^2 voisine de la pression atmosphérique normale.

Le long de l'adiabatique BC, on a (1) $p_1 (V+v)^\gamma = PV^\gamma$. La valeur de la compression est donc $\frac{V+v}{V} = \left(\frac{P}{p_1}\right)^{1:\gamma} = 4^{1:1,4} = 2,5918$. On en déduit $p_1 V + v = 2^l,6918$ et $v = 1^l,6918$.

2° D'après la formule (10) du n° 23, le travail reçu par le gaz pendant la compression adiabatique BC est (2) $\mathcal{E} = \frac{p_1 (V+v)}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$. Utilisons le système métrique. On a $p_1 = 10^4$, $V + v = 2,6918 \times 10^{-3}$. On trouve $\mathcal{E} = 32,705$ kgmètres.

Mais la pression atmosphérique p_1 fournit le travail $p_1 v = 10^4 \times 1,6918 \times 10^{-3} = 16,918$ kgmètres, de sorte que le travail réel $\mathcal{T}_{ra}$ absorbé par la compression, c.à.d. celui qui est transmis au piston par la bielle qui l'entraîne est $\mathcal{T}_{ra} = 32,705 - 16,918 = 15,787$ kgm.

3° Calculons la pression P' à la fin de la détente, en E. On a d'abord (3) $P'(V+v)^\gamma = P_0 V^\gamma$. En divisant membre à membre les relations (1) et (3), il vient (4) $P' = p_1 \frac{P_0}{P} = \frac{21}{4} = 5^K,25$.

4°) D'après la formule (6) du n° 23, le travail fourni par le gaz pendant la détente adiabatique DE est (5) $\mathcal{T}' = \frac{P_0 V}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{P'}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$. Or à cause de (4), $\frac{P'}{P_0} = \frac{p_1}{P} = \frac{1}{4}$. On trouve $\mathcal{T}' = 171,701$ kgm. En tenant compte, comme plus haut, du travail de la pression atmosphérique, le travail transmis à la bielle est $\mathcal{T}_{rd} = 171,701 - 16,918 = 154,783$ kgm.

Le travail suivant AB étant égal et de signe contraire au travail suivant BA, le travail indiqué $\mathcal{T}_{ri}$ développé au cours du cycle est $\mathcal{T}_{ri} = \mathcal{T}_{rd} - \mathcal{T}_{ra} = \mathcal{T}' - \mathcal{T} = 138,996$ kgm.

5° Nous allons établir une expression intéressante du rendement thermique théorique ρ en fonction du rapport de compression $a = \frac{V+v}{V}$. Le gaz reçoit en CD la quantité de chaleur $Q = c(T' - T)$ et restitue en EB la quantité de chaleur $Q' = c(T'' - T_1)$. La chaleur transformée en travail est $Q - Q'$ et le rendement thermique théorique est (4) $\rho = \frac{Q - Q'}{Q} = 1 - \frac{T'' - T_1}{T' - T}$. Mais le gaz étant considéré comme parfait, la formule (4) du n° 23 donne $\frac{T}{T_1} = a^{\gamma-1} = \frac{T_0}{T''} = \frac{T_0 - T}{T' - T_1}$. Donc $\rho = 1 - 1 : a^{\gamma-1}$. Ainsi le rendement thermique théorique ne dépend que du rapport de compression a et de γ. Il est d'autant plus grand que la compression est plus grande. En faisant $a = 2,6918$, on trouve $\rho = 0,327$.

Hâtons-nous d'ajouter que c'est un rendement purement théorique, car en appliquant la formule (4) nous avons appliqué le principe de l'équivalence. Or, ainsi que nous l'avons fait remarquer au 4° du n° 114, dans un moteur à essence, le système qui évolue change de nature et ne revient pas à l'état initial. En pareil cas, il faut déterminer Q par les données thermochimiques. Comme l'énoncé est muet sur la quantité de chaleur dégagée par le mélange tonnant, nous n'avons pu opérer autrement que nous ne l'avons fait.

6° Soit N le nombre de tours par minute. Dans un moteur à quatre temps à simple effet, le diagramme complet est parcouru en deux tours du moteur. La puissance indiquée, évaluée en chevaux, est donc donnée par la formule $P_i = \mathcal{T}_{ri} \times \frac{N}{60} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{75}$. En faisant $N = 1200$, on trouve $P_1 = 18,5$ chevaux; en faisant $N = 1800$ on trouve $P_2 = 27,8$ chevaux.

118. — Un moteur à gaz monocylindrique à 4 temps a 380 millimètres d'alésage et 500 millimètres de course; son coefficient volumétrique de compression $\frac{V+v}{V}$ est égal à 5. Le mélange explosif est admis à la pression de 1 Kgr : cm^2. Le moteur tourne à 200 tours à la minute. Il est équilibré par un frein de Prony. 1° Calculer la puissance indiquée que l'on observerait si le cycle décrit était le cycle théorique (deux adiabatiques et deux droites à volume constant) avec une pression maxima d'explosion de 22 Kilogs : cm^2. 2° Le cycle réel fournit en réalité une puissance indiquée égale aux 9 dixièmes de cette puissance. Le rendement organique est d'autre part égal à 0,8. Quelle charge faut-il placer à 1 m 06 du plan vertical passant par l'axe de rotation, pour maintenir en équilibre le frein de Prony. 3° Le poids propre du frein de Prony est de 100 Kilogs et son centre de gravité est placé (dans la position normale) sur la verticale de l'axe, à 40 centimètres au-dessous de celui-ci. Quelle variation relative peut subir le couple de frottement sans que le frein vienne toucher ses butées, situées à 1 mètre du plan vertical passant par l'axe de rotation et à 5 centimètres de part et d'autre du levier horizontal, lui-même situé à 1 mètre au-dessous du plan horizontal passant par l'axe de rotation. On donne $\frac{C}{c} = 1,41$. (Mécanique physique et expérimentale. Paris, 1931).

1° Reportons-nous à la figure et aux notations du n° 117. Le volume v balayé par le piston est, en litres, $v = \pi \times 1,9^2 \times 5 = 56^l,7$. Le volume de la chambre de compression est $V = \frac{v}{4} = 14^l,175$. La pression P au point C est donnée par $5 = \left(\frac{P}{p_1}\right)^{1,4}$. En faisant $p_1 = 1$ Kgf m^2, on trouve $P = 9^K,67$. L'énoncé donnant $P_0 = 22$ Kg, la pression P' en E est telle que $\frac{P'}{P_0} = \frac{p_1}{P}$, d'où $P' = 1 \times \frac{22}{9,67} = 2^K,27$. D'après la formule (2) du n° 117, le travail reçu par le gaz pendant la compression adiabatique BC est dans le système métrique, en faisant $p_1 = 10^4$, $V+v = 70,875 \times 10^{-3}$, $\mathcal{C} = 1615$ kilogrammètres. De même en faisant $P_0 = 22 \times 10^4$, $V = 14,175 \times 10^{-3}$ dans la formule (5) du n° 117, le travail fourni par le gaz pendant la détente adiabatique DE est $\mathcal{C}' = 3677$ kilogrammètres. Le travail indiqué développé au cours d'un cycle est donc $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}' - \mathcal{C} = 2062$ Kgmètres. La puissance indiquée est $P_i = 2062 \times \frac{200}{60} \times \frac{1}{2} = 3437$ Kgmètres par seconde, soit 45,8 chevaux.

2° La puissance développée réellement sur l'arbre est $P_a = 3437 \times 0,9 \times 0,8 = 2474$ Kgmètres / seconde. La charge Q qu'il faut placer à $1^m,06$ du plan vertical passant par l'axe de rotation pour maintenir en équilibre le frein de Prony est donnée par la relation $2474 = 2\pi \frac{200}{60} \times Q \times 1,06$ qui exprime la puissance en fonction du couple et de la vitesse angulaire ($P = C\omega$). On trouve $Q = 111^K,4$.

3° Supposons que le couple de frottement de moment C_1 s'exerce dans le sens de la flèche 1. Deux cas peuvent se présenter suivant que C_1 est supérieur ou inférieur au

moment C du couple d'équilibre. Dans le premier cas (fig. 1), le levier qui était d'abord horizontal et dirigé suivant OX tourne autour de l'axe ω d'un angle θ dans le sens de la flèche 1 et vient prendre la position O'B en s'appuyant sur la butée inférieure B. L'angle limite θ est donné par

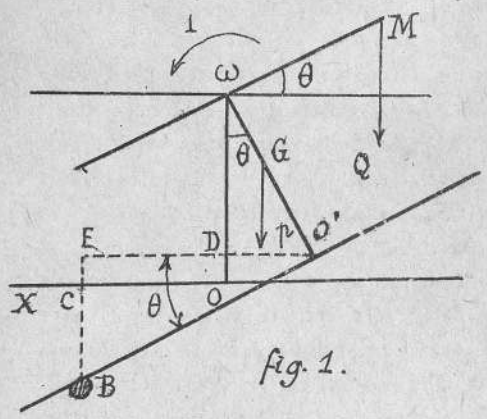


fig. 1.

(1) $tg\,\theta = \frac{BE}{O'E} = \frac{BC+CE}{O'D+DE}$. On a $BC = 5\,cm$, $CE = OD = O\omega - D\omega = 100 - 100\cos\theta$, $O'D = 100\sin\theta$, $DE = 100$. L'équation (1) s'écrit $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5+100(1-\cos\theta)}{100(1+\sin\theta)}$ ou $100\sin\theta - 105\cos\theta + 100 = 0$. En exprimant $\sin\theta$ et $\cos\theta$ en fonction de $tg\frac{\theta}{2}$, on trouve $tg\frac{\theta}{2} = \frac{5}{205}$ d'où $\theta = 2°48'$. Soit $p = 100\,kg$ le poids propre du frein appliqué au centre de gravité G tel que $\omega G = 0^m,40$. Prenons les moments par rapport à l'axe ω. Les moments des couples dus aux poids p et Q sont opposés à C_1. On a donc $C_1 = Q \times \omega M \cos\theta + p \times \omega G \sin\theta$. En faisant $\omega M = 1^m,06$, on trouve $C_1 = 119,89$. Or le couple normal d'équilibre est $C = Q \times \omega M = 118,08$. La variation relative que peut subir le couple de frottement est donc $\frac{C_1 - C}{C} = \frac{1,81}{118,08}$ soit 1,53 %. Supposons maintenant que C_1 soit inférieur à C. Le levier vient prendre la position O'B' (fig. 2) en s'appuyant sur la butée supérieure B'. On a

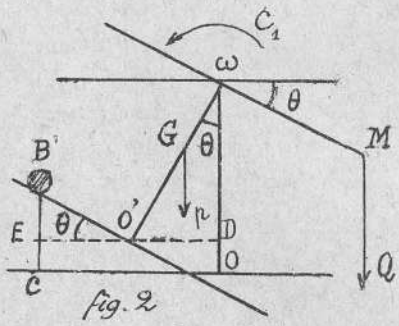


fig. 2

(2) $tg\,\theta = \frac{B'E}{O'E} = \frac{B'C - CE}{DE - DO'}$. On a $B'C = 5\,cm$, $CE = OD = 100(1-\cos\theta)$, $DE = 100$, $DO' = 100\sin\theta$, et l'équation (2) qui s'écrit $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5 - 100(1-\cos\theta)}{100(1-\sin\theta)}$ donne $tg\frac{\theta}{2} = \frac{5}{195}$ d'où $\theta' = 2°56'$. Il ne faut pas s'étonner de trouver pour θ une valeur différente de la précédente, car l'appareil n'est pas symétrique. En prenant les moments par rapport à l'axe ω, on remarque que le moment dû au poids p est de même signe que C_1. On a donc $C_1 + 100 \times 0,4 \sin\theta = 111,4 \times 1,06 \times \cos\theta$. On trouve $C_1 = 115,88$. Cette fois, la variation relative que peut subir le couple de frottement est $\frac{C - C_1}{C} = \frac{2,20}{118,08}$ soit 1,86 %. Elle est notablement supérieure à la précédente.

119. - Dans un avant-projet de moteur à gaz, à explosion, à un cylindre, à quatre temps, simple effet, on se fixe les données suivantes: Alésage 300 mm; Course 300 mm.; Volume de la chambre de compression 3.532 cm³; Nombre de tours par minute 180; Pression et température des gaz contenus dans le cylindre à fin de course de détente: $p = 2$ kilogs par cm² et $t = 320°$ centigrade, Pression et température des gaz contenus dans le cylindre au début de la course de compression: $p = 0,8$ Kg par cm² et $t = 40°$ centigrade. On après les données:

1° Tracer le diagramme théorique en (p, v) de la machine, en supposant la compression et la détente adiabatiques et en prenant comme rapport $\frac{C}{c}$ des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant, la valeur fixe 1,32. Pour tracer ce diagramme, on calculera les ordonnées des points des deux adiabatiques dont les abscisses comptées à partir de la fin de course de détente mesurent respectivement: 175 mm., 250 mm. et 300 mm.

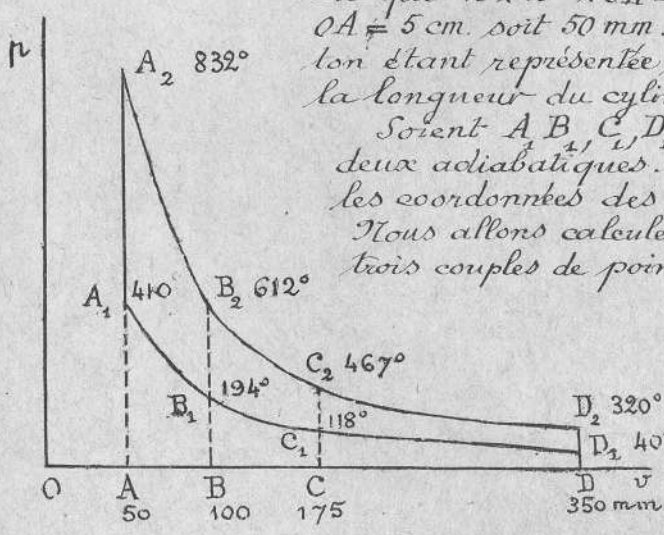
2° Déterminer la température centigrade des gaz en chacun des 6 points ainsi déterminés et l'indiquer sur le diagramme.

3° Calculer la puissance indiquée approximative de la machine au moyen du diagramme que l'on assimilera à un contour polygonal ayant pour sommets les six points précédents et les deux points des données.

(École Supérieure d'Électricité, 1930).

1° La longueur OA de la chambre de compression est telle que $\pi \times \overline{15}^2 \times OA = 3532$ cm³, d'où $OA = 5$ cm. soit 50 mm. La course du piston étant représentée par $AD = 300$ m.m. la longueur du cylindre est $OD = 350$ mm.

Soient $A_1 B_1 C_1 D_1$, $A_2 B_2 C_2 D_2$ les deux adiabatiques. Nous connaissons les coordonnées des points D_1 et D_2. Nous allons calculer les ordonnées des trois couples de points (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) ayant respectivement pour abscisses $OA = 50$, $OB = 100$, $OC = 175$ mm.



L'adiabatique de compression $D_1 A_1$ est représentée par l'équation $p = 0,8 \left(\frac{350}{v}\right)^{1,32}$. Nous supposons dans cette première partie que v représente une longueur, ce qui n'a aucun inconvénient puisque les volumes sont proportionnels aux abscisses. En donnant à v successivement les valeurs

175, 100 et 50, on trouve : pression en C_1 : 2 kg ; pression en B_1 : $4^K,18$; pression en A_1 : $10^K,44$.

L'adiabatique de détente $A_2 D_2$ est représentée par l'équation $p = 2 \times \left(\frac{350}{v}\right)^{1.32}$. Il suffit donc de multiplier les ordonnées précédentes par le rapport $\frac{2}{0,8} = 2,5$, ce qui donne : pression en C_2 : 5 K ; pression en B_2 : $10^K,45$; pression en A_2 : $26^K,1$.

2° L'application de la formule (4) du n° 23 donne, pour la température au point C_1, $(273+40) \times \left(\frac{350}{175}\right)^{0,32} = 391°$ abs. soit 118° centigrade. On trouve de même : température en B_1, 194° C ; en A_1, 410° C ; en C_2, 467° C ; en B_2, 612° C ; en A_2, 832° C.

3° Pour calculer le travail représenté par l'aire du cycle, il faut traduire les abscisses en volumes. D'après l'énoncé, le volume de la chambre de compression est $v_A = 3532$ cm³ et nous avons trouvé OA = 50 mm. Par suite, $v_B = 2 v_A = 7064$ cm³ ; $v_C = 1,75\, v_B = 12362$ cm³ ; $v_D = 2 v_C = 24724$ cm³. Assimilons, comme le permet l'énoncé, les courbes adiabatiques à des contours polygonaux ayant pour sommets les points A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2. L'aire du cycle est $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$, en posant $\mathcal{E}_1 =$ aire $A A_1 B_1 C_1 D_1 D A$, $\mathcal{E}_2 =$ aire $A A_2 B_2 C_2 D_2 D A$. Mais comme les ordonnées de la ligne $A_2 D_2$ sont égales à celles de la ligne $A_1 D_1$ dilatées dans le rapport 2,5 on a $\mathcal{E}_2 = 2,5\, \mathcal{E}_1$ et par suite $\mathcal{E} = 1,5\, \mathcal{E}_1$. Il suffit donc de calculer $\mathcal{E}_1$.

Utilisons le système métrique. Il faut multiplier les pressions en kgs/cm² par 10^4 et les volumes en cm³ par 10^{-6}. L'aire $\mathcal{E}_1$ qui va être exprimée ainsi en kilogrammètres se compose de 3 trapèzes et on a

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{100}\left[7,31 \times 3532 + 3,09 \times 5298 + 1,4 \times 12362\right] = 595 \text{ Kgm.}$$

Par suite $\mathcal{E} = 595 \times 1,5 = 892,5$ Kgm.

Le moteur à quatre temps, à un seul cylindre, étant à simple effet et tournant à N = 180 tours par minute, le diagramme complet est parcouru en deux tours. La puissance indiquée, évaluée en chevaux est

$$P_i = \mathcal{E} \times \frac{N}{60} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{75} = \frac{892,5 \times 3}{150} = 17,85 \text{ chx.}$$

---

120. - Un moteur à essence fonctionne suivant le cycle de Beau de Rochas. Le volume balayé par un piston est v, le volume de la chambre de compression est V. On donne le rapport de compression en volume $\frac{V+v}{V} = 4$. On suppose que l'air remplissant le cylindre au commencement de la compression est à la température de 15° centigrades et à la pression de 1 Kg par centimètre carré. On rappelle que la chaleur spécifique sous volume constant de l'air a pour valeur

$c = 0,170$ et la chaleur spécifique sous pression constante $C' = 0,238$ de plus, le poids du litre d'air à 15° et à 1 Kg de pression est égal à 1 gr. 23.

1° - On demande de calculer le rendement théorique du cycle en supposant que la pression dans le cylindre immédiatement après l'explosion est de 24 kg par cm^2. On suppose que le moteur est à quatre cylindres de 90 m/m d'alésage et de 140 m/m de course et qu'il tourne à 1200 tours par minute. Le poids d'essence consommée par cylindre est le vingtième du poids de l'air admis et son pouvoir calorifique supérieur est de 11500 calories au kilogramme.

2° Calculer la puissance utile du moteur en supposant que son rendement organique soit égal à 0,70.

(Mécanique physique et expérimentale. Paris, 1923).

1° Reportons-nous à la figure et aux notations du n° 117. L'énoncé fournissant les données thermochimiques nécessaires pour calculer la quantité de chaleur fournie Q, nous n'utiliserons pas, dans le calcul du rendement, pour les raisons exposées au 4° du n° 114, l'expression $\rho = (Q - Q') : Q$ ou celle qui en résulte (1) $\rho = 1 - 1 : a^{\gamma-1}$ établie au 5° du n° 117, en posant $a = \frac{V+v}{V}$.

Nous évaluerons le travail $\mathcal{E}$ que fournit le gaz pendant la détente adiabatique DE et le travail $\mathcal{E}'$ qu'il reçoit pendant la compression adiabatique BC. On calculera le rendement par la formule (2) $\rho = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{\mathcal{E}}$.

Les formules (5) et (9) du n° 23 ^{bis} donnent

$$\mathcal{E} = \frac{p_0 V}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V}{v+V}\right)^{\gamma-1}\right], \quad \mathcal{E}' = \frac{p_1 (v+V)}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{v+V}{V}\right)^{\gamma-1} - 1\right].$$

Utilisons le système métrique. Le volume balayé par un des pistons est $v = \pi \times 0,140 \times 0,045^2 = 0^{m3},000890\,64$. Comme $v + V = 4V$, on a $V = v : 3 = 0^{m3},000296\,38$. D'autre part, $p_1 = 10^4$, $p_0 = 24 \times 10^4$, $\gamma = \frac{C'}{C} = \frac{0,238}{0,170} = 1,4$. On trouve : $\mathcal{E} = 76$ Kgmètres, $\mathcal{E}' = 22^{Kgm}$, $\mathcal{E} - \mathcal{E}' = 54$ Kgm.

Calculons Q. Le poids d'air admis par cycle est $\varpi = 0,890\,64 \times 1,23 = 1^g,0955$. Le poids d'essence mélangée à l'air est $\varpi_e = \varpi : 20 = 0^g,0548$. L'énoncé donne le pouvoir calorifique supérieur de l'essence, 11500 calories au kilogramme. Ce chiffre doit être corrigé de la manière suivante. Supposons que le carburant employé soit de l'heptane C^7H^{16}. L'équation de la combustion $C^7H^{16} + 22\,O = 7CO^2 + 8H^2O$ montre que 100 grammes d'heptane donnent 144 gr. d'eau, soit $1^K,44$ d'eau pour 1 Kg d'essence. Or en déterminant le pouvoir calorifique à la bombe calorimétrique, on refroidit cette dernière. L'eau vaporisée se condense ; les calories correspondantes sont accusées par la bombe. Il faut donc les retrancher pour avoir le pouvoir calorifique dit inférieur. Prenons 537 calories

pour chaleur de vaporisation de l'eau. Nous devons donc retrancher $1,44 \times 537 = 773$ calories, de sorte que le pouvoir calorifique inférieur est $11500 - 773 = 10727$ calories. La quantité de chaleur fournie par la combustion est donc $Q = 0,0548 \times 10727 = 0,5878$ calorie. En substituant dans la formule (2), il vient $\rho = \frac{54}{426,6 \times 0,5878} = 0,215$.

Si on avait appliqué la formule (1), on aurait trouvé $\rho = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{0,4} = 0,426$, valeur presque double du rendement thermique pratique.

2° Le moteur étant à 4 cylindres, le diagramme complet est parcouru 2 fois par tour du moteur. Si N est le nombre de tours par minute et si η est le rendement organique, la puissance utile du moteur est

$$P_u = 2 (\mathcal{C} - \mathcal{C}') \times \frac{N}{60} \times \frac{1}{75} \times \eta = \frac{108 \times 1200 \times 0,7}{60 \times 75} = 20,2 \text{ ch.}$$

---

121. — Un moteur à explosion monocylindrique, de cylindrée V égale à 2 litres est supposé fonctionner suivant le cycle théorique de Beau de Rochas (2 adiabatiques de gaz parfait et deux droites à volumes constants $V+v$ et V). On le maintient à la vitesse de 1000 tours à la minute, avec une pression de remplissage toujours égale à 1 kgm par cm^2 et une température de remplissage toujours égale à 50°C. On fait varier v en substituant les uns aux autres des pistons de hauteurs appropriées. On admet que la chaleur fournie au gaz dans la phase d'explosion reste toujours la même, et que sa chaleur spécifique est constante et reste toujours la même. Lorsque $V = 0,5$ litre, la pression d'explosion est égale à 15 kilos par cm^2.

1° Quelle est, pour $v = 0,5$ litre la pression en fin de compression. 2° Étudier, en fonction de v, les variations de la pression en fin de compression. 3° Étudier, en fonction de v, les variations de la pression en fin d'explosion. 4° Calculer, pour $v = 0,5$ litre la puissance du moteur, en admettant que son rendement mécanique est égal à 0,8. 5° Étudier, en fonction de v les variations de la puissance du moteur. Chacune des études de variations devra être traduite par une courbe très soigneusement établie. On prendra pour le rapport $\frac{C}{C'}$ la valeur 1,41. (*Mécanique physique et expérimentale*, Paris 1931).

1° Reportons-nous à la figure et aux notations du n° 117, avec cette seule différence que les significations des lettres v et V sont interverties. La pression P en fin de compression est $P = p_1 \left(\frac{V+v}{v}\right)^{\gamma} = 5^{1,41} = 9^k,67$.

2° En écrivant (1) $P = p_1 \left(1 + \frac{V}{v}\right)^{\gamma}$, on voit que la pression en fin de compression décroît d'une façon continue de $+\infty$ à p_1 quand v croît de 0 à $+\infty$. La courbe

représentative, qui a une forme hyperbolique, a pour asymptotes l'axe des P et la droite $P = p_1$.

3° La pression P_0 en fin d'explosion est $P_0 = P\frac{T_0}{T} = p_1\left(1+\frac{V}{v}\right)^\gamma \frac{T_0}{T}$. Il faut donc calculer T_0 et T en fonction de v. Mais cette recherche est facilitée du fait que l'on admet par hypothèse que la chaleur fournie au gaz dans la phase d'explosion reste toujours la même et que sa chaleur spécifique est constante et reste toujours la même. Il en résulte en effet que la différence $T_0 - T$ est constante et que l'on peut poser $T_0 = T + a$. Par suite, (2) $P_0 = p_1\left(1+\frac{V}{v}\right)^\gamma \times \frac{T+a}{T}$. Il suffira d'exprimer T en fonction de v et de calculer a dans un cas particulier, précisément dans le cas de l'énoncé où $v = 0{,}5$ litre et $P_0 = 15$ Kg. Or, d'après la formule (4) du n° 23, on a (3) $T = T_1\left(\frac{V+v}{v}\right)^{\gamma-1}$. Pour $T_1 = 273 + 50 = 323°$, on trouve $T = 625°$. D'autre part, $T_0 = T \times \frac{P_0}{P} = 625 \times \frac{15}{9{,}67} = 969°{,}5$. Par suite

$$a = T_0 - T = 969{,}5 - 625 = 344{,}5.$$

En tenant compte de (3), l'expression (2) devient (4) $P_0 = p_1\left(1+\frac{V}{v}\right)\left[\left(1+\frac{V}{v}\right)^{\gamma-1} + \frac{a}{T_1}\right]$. La pression P_0 en fin d'explosion décroît d'une façon continue de $+\infty$ à $p_1\frac{a}{T_1} = 1{,}07\,p_1$ quand v croît de 0 à $+\infty$. La courbe représentative qui a encore une forme hyperbolique admet également pour première asymptote l'axe des pressions et pour seconde asymptote la droite $P_0 = 1{,}07\,p_1$. Bien entendu, cette courbe est toujours au-dessus de la première, comme il résulte des expressions (1) et (2).

4° D'après la formule (3) du n° 23, le travail reçu par le gaz pendant la compression adiabatique BC est (5) $\mathcal{E}_1 = \frac{p_1(V+v)}{\gamma-1}\left[\left(\frac{v+V}{v}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$. D'après la formule (5) du n° 23, le travail fourni par le gaz pendant la détente adiabatique DE est (6) $\mathcal{E}_2 = \frac{P_0 v}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{v}{V+v}\right)^{\gamma-1}\right]$. Utilisons le système métrique : $p_1 = 10^4$, $P_0 = 15\times10^4$, $v = 0{,}5\times10^{-3}$, $V = 2\times10^{-3}$. On trouve $\mathcal{E}_1 = 57$ kgmètres, $\mathcal{E}_2 = 88{,}35$ Kgmètres. Le travail par cycle est $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 31{,}35$ Kgmètres. Le moteur étant à simple effet et la vitesse étant de 1000 tours à la minute, la puissance du moteur, en notant que son rendement mécanique est égal à 0,8 est

$$\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \frac{1000}{60} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{75} \times 0{,}8 = 2{,}79 \text{ CV}.$$

5° En remarquant que $\mathcal{P} = k\mathcal{E}$, on voit que pour étudier en fonction de v, les variations de $\mathcal{P}$, il suffit d'étudier les variations de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$. En nous reportant aux relations (6), (5) et (2), on a

$$\mathcal{E} = \frac{p_1(v+V)}{\gamma-1}\left[\left(\frac{v+V}{v}\right)^{\gamma-1} + \frac{a}{T_1}\right]\left[1 - \left(\frac{v}{v+V}\right)^{\gamma-1}\right] - \frac{p_1(v+V)}{\gamma-1}\left[\left(\frac{v+V}{v}\right)^{\gamma-1} - 1\right];$$

Au facteur constant près $\frac{p_1}{\gamma-1}$ et en posant $\frac{a}{T_1} = b$, on est ramené à

étudier les variations de la fonction $y = b(v+V)\left[1-\left(\frac{v}{v+V}\right)^{\gamma-1}\right]$. Comme v ne peut prendre que des valeurs positives, nous le faisons varier de 0 à $+\infty$. La fonction $\frac{v}{v+V}$ étant croissante avec v et l'exposant $\gamma-1$ étant positif, y décroît constamment quand v augmente. Pour $v=0$, on a $y=bV$. Pour avoir la tangente au point correspondant A, situé sur Oy, nous cherchons la limite de $\frac{y-bV}{v} = b - b\left(\frac{v+V}{v}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma}$ pour $v=0$. Cette limite étant infinie, la courbe part du point A tangentiellement à l'axe des y. Pour v infini, y se présente sous la forme $\infty \times 0$. Écrivons $y = b\left[1-\left(\frac{v}{v+V}\right)^{\gamma-1}\right] : \frac{1}{v+V}$ et appliquons la règle de l'Hôpital. On voit facilement que la limite est $(\gamma-1)\,bV$. La courbe a donc une asymptote horizontale d'ordonnée $(\gamma-1)\,bV$.

Nous laissons au lecteur le soin de tracer soigneusement les courbes, comme le demande l'énoncé, en calculant les ordonnées correspondant à quelques valeurs simples de v. Ce travail est fastidieux, à cause des calculs logarithmiques; mais il ne présente aucune difficulté.

Applications des principes de la Thermodynamique aux phénomènes électriques et magnétiques. Phénomènes électro-capillaires.

---

122. — Pour résoudre le problème du numéro suivant nous aurons à faire l'application des principes de la Thermodynamique aux piles réversibles. On dit qu'une pile est réversible lorsque les réactions chimiques et les effets caloriſiques qui ont lieu dans son intérieur sont exactement renversés par le changement de sens du courant, c'est-à-dire que la pile est le siège de phénomènes réversibles dans le sens que la Thermodynamique attache à cette expression.

Soit E la force électromotrice de la pile. Prenons comme variables indépendantes la température absolue T de tout le système que nous supposerons être uniforme et la quantité m d'électricité qui a circulé à partir d'une époque prise pour origine en comptant comme positives les quantités d'électricité

qui passent dans le sens déterminé par la f.é.m. E. Soit dQ' la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la pile pour produire les variations dm et dT. On peut poser

$$(1) \qquad dQ = a\,dT + P\,dm.$$

Le passage de la quantité dm d'électricité produit une diminution $E\,dm$ de l'énergie électrique de la pile. On a donc, d'après le principe de l'équivalence, U désignant l'énergie totale interne de la pile,

$$dU = J\,dQ - E\,dm = J\,a\,dT + (JP - E)\,dm.$$

Écrivons que dU est la différentielle dS de l'entropie

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{a\,dT}{T} + \frac{P\,dm}{T}$$

sont deux différentielles totales exactes, il vient

$$J\frac{\partial a}{\partial m} = J\frac{\partial P}{\partial T} - \frac{\partial E}{\partial T}, \quad \frac{1}{T}\frac{\partial a}{\partial m} = \frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial T} - \frac{P}{T^2}, \text{ et, en éliminant } \frac{\partial a}{\partial m} - \frac{\partial P}{\partial T},$$

$$P = \frac{T}{J}\frac{\partial E}{\partial T} \text{ ou } (2) \quad P = \frac{T}{J}\frac{dE}{dT},$$

puisque, E n'étant fonction que de la température T, la dérivée partielle se confond avec la dérivée ordinaire. Telle est la relation d'Helmholtz.

L'équation (1) nous donne la signification de P. On voit que $P\,dm$ est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la pile pour maintenir sa température constante ($dT = 0$) quand la quantité dm d'électricité la traverse dans le sens positif. Quand $\frac{dE}{dT}$ est positif, il faut vraiment lui fournir de la chaleur; sinon la pile se refroidirait. Quand $\frac{dE}{dT}$ est négatif, il faut lui enlever de la chaleur, sinon elle se réchaufferait.

---

123. — Une pile impolarisable composée d'un grand nombre d'éléments identiques produit un courant dans un circuit qui comprend en outre un voltamètre à sulfate de cuivre et une machine Gramme. La température étant 10°, la machine Gramme soulève d'un mouvement uniforme un poids de 63 kgs à 10^m de hauteur en une minute. Pendant ce temps, il s'est déposé sur la cathode du voltamètre 28,37 mmg de cuivre. La résistance de la pile est de 20 ohms et celle du reste du circuit de 30 ohms. On recommence la même expérience, sauf que la température est 30°; l'anneau de la machine Gramme tourne avec la même vitesse que dans le premier cas; mais pendant une minute il s'est déposé sur la cathode 30,83 mmg de cuivre et la résistance de la pile n'est plus que de 12 ohms, tandis que celle du reste du circuit s'est élevée à 32,6 ohms. On demande de calculer la force électromotrice de la pile dans la première et la deuxième expérience. En supposant que la variation de la f.é.m entre 10° et 30° est une fonction linéaire de la température, quelle est la quantité de chaleur qu'a reçue le milieu extérieur ou qu'a perdue la pile pendant la minute qu'a duré la première expérience pour que sa température reste égale à 10°. Quelle a été la variation d'énergie

de cette pile pendant la durée de cette première expérience?

On donne $g = 981$ et on rappelle qu'un coulomb dépose 1,119 mmg d'argent. On sait que la masse atomique du cuivre est 63,18, sa valence étant 2. On donne $J = 4,185 \times 10^7$.

(Physique Générale. Paris).

Soit E la f.é.m. de la pile, e la f.é.m. de la machine Gramme, i le courant, r la résistance de la pile, R celle du reste du circuit. On a (1) $R = (r+R)i + e$. Un coulomb dépose $1,119 \times \frac{63,18}{2 \times 107,67}$ mmg de cuivre. Dans la première expérience la pile a donc débité $q_1 = \frac{28,37 \times 2 \times 107,67}{1,119 \times 63,18} = 86,412$ coulombs, et par suite le courant fourni a été $i_1 = \frac{86,412}{60} = 1,4402$ ampères. Donc $(r_1 + R_1) i_1 = 50 \times 1,4402 = 72,01$ volts. Soit $\mathcal{E}$ le travail mécanique produit, en joules. On a $e_1 = \frac{\mathcal{E}}{q_1} = \frac{63 \times 10 \times 9,81}{86,412} = 71,521$ V.

En portant ces valeurs dans (1), on trouve, pour la f.é.m E_1 de la pile à la température de 10°

$$E_1 = 72,01 + 71,521 = 143,531 \text{ volts.}$$

Dans la seconde expérience, à 30°, on a

$$q_2 = \frac{30,83 \times 2 \times 107,67}{1,119 \times 63,18} = 93,905 \text{ coulombs} ; \quad i_2 = \frac{93,905}{60} = 1,5651 \text{ amp.}$$

$$(r_2 + R_2) i_2 = (12 + 32,6) \times 1,5651 = 69,803 \text{ volts.}$$

Le travail mécanique $\mathcal{E}$ n'a pas varié puisque la vitesse est la même. Par suite $e_2 = \frac{\mathcal{E}}{q_2} = \frac{63 \times 10 \times 9,81}{93,905} = 65,814$ volts

$$E_2 = 69,803 + 65,814 = 135,617 \text{ volts.}$$

D'après l'énoncé, T désignant la température absolue, on peut poser $E = B + CT$. On a donc

$$\text{à } 10°, \quad 143,531 = B + 283\,C ;$$
$$\text{à } 30°, \quad 135,617 = B + 303\,C.$$

On déduit de là, en retranchant, $C = -0,3957$, d'où

$$E = B - 0,3957\,T.$$

D'après ce que nous avons vu au numéro précédent, la quantité de chaleur Q à fournir à la pile pendant la première expérience pour que sa température reste constante et égale à 10° a pour expression Pq_1, P étant donné par la formule (2) du n° précédent. Dans le cas actuel $\frac{dE}{dT} = -0,3957$ et P est négatif; on voit qu'il faut enlever de la chaleur à la pile pour la restituer au milieu extérieur ainsi que l'indique l'énoncé.

Exprimons les quantités dans le système d'unités électromagnétiques; la quantité de chaleur Q qu'il faut enlever à la pile est

$$Q = \frac{283}{4,185 \times 10^7} \times 0,3957 \times 10^8 \times \frac{86,412}{10} = 2312,2 \text{ calories.}$$

L'énergie totale perdue par la pile dans la première expérience est

$$U_1 = JQ + E_1 q_1 = 4,185 \times 2312,2 + 143,531 \times 86,412 = 22080 \text{ joules.}$$

$Q = \frac{T}{J} \frac{dE}{dT} \cdot q_m = \frac{273+10}{4,185 \cdot 10^7} \cdot 0,3957 \cdot \frac{86,416}{10} \cdot 10^8$

124. – Le diélectrique d'un condensateur plan est une lame de quartz d'épaisseur e, perpendiculaire à l'un des axes piézo-électriques. – La surface des armatures est S. On établit entre les armatures une différence de potentiel V en même temps qu'on exerce sur elles une pression uniforme au moyen d'un poids P convenablement disposé. On demande : 1° de calculer la charge M que prennent les armatures ; 2° de calculer la variation de température θ du diélectrique, le phénomène étant supposé adiabatique et réversible ; 3° de dire si la chaleur spécifique du quartz dépend de P et de V.

Données numériques. – $S = 50\,cm^2$; $e = 0{,}02$ cm ; $P = 15{,}290$ kilogs ; $V = 6$ volts. Pouvoir inducteur spécifique du quartz dans la direction considérée $K = 4{,}55$ C.G.S. Coefficient de dilatation linéaire du quartz perpendiculairement à l'axe optique $\lambda = 14 \times 10^{-6}$ C.G.S ; coefficient de dilatation linéaire du quartz parallèlement à l'axe optique $\lambda' = 8 \times 10^{-6}$ C.G.S. Densité du quartz $D = 2{,}65$. Chaleur spécifique du quartz $c = 0{,}185$ Coefficient piézo-électrique $h = 6{,}5 \times 10^{-8}$ C.G.S. Température de l'expérience $t = 27°$ centigrades. Les coefficients K, h, λ, λ' sont supposés indépendants de la température.

(Physique générale. Proposé à la Sorbonne).

1° Appelons C la capacité du condensateur formé par le quartz. La charge électrique M est la somme de 2 termes, l'un égal à CV, l'autre égal à $\pm hP$, selon le sens dans lequel on électrise le quartz. On a donc

$$(1)\quad M = CV \pm hP = \frac{KSV}{4\pi e} \pm hP.$$

Employons le système électrostatique ; $V = \frac{6}{300}$, et on a

$$M = \frac{4{,}55 \times 50 \times 6}{4\pi \times 0{,}02 \times 300} \pm 6{,}5 \times 10^{-8} \times 15290 \times 981 = 18{,}104 \pm 0{,}975\ U.ES.$$

On voit que la charge due aux phénomènes piézo-électriques n'est nullement négligeable.

2° L'état de la lame dépend de la température T, de la d.d.p. V, du poids P, de la pression extérieure p (qui sera par exemple la pression atmosphérique). On peut donc poser, pour la quantité de chaleur élémentaire absorbée par la lame,

$$dQ = \beta\, dT + a\, dV + b\, dP + \alpha\, dp.$$

Nous supposerons pour simplifier que la pression extérieure ne change pas ($dp = 0$). On a donc (2) $dQ = \beta\, dT + a\, dV + b\, dP$. Notons pour la suite que le coefficient β est la capacité calorifique de la lame, $\beta = S e Dc$.

Pour évaluer la variation dU de l'énergie, nous remarquons que la charge augmente de dM à potentiel constant ; l'accroissement d'énergie électrique est $V\,dM$. D'autre part, sous l'action du poids P, la lame éprouve une variation d'épaisseur de ; le travail reçu est $-P\,de$. Enfin, la lame éprouve une variation de volume dv. On a donc

$$dU = T\,dQ + V\,dM - P\,de - p\,dv.$$

Employons un artifice bien connu. Au lieu d'écrire que dU est une différentielle exacte, écrivons que $dX = d(U - MV + Pe + pv)$ en est une. On a

$$dX = J\,dQ + V\,dM - P\,de - p\,dv - M\,dV - V\,dM + P\,de + e\,dP + p\,dv + v\,dp,$$

et comme dp est nul,

$$dX = J\,dQ - M\,dV + e\,dP = J\beta\,dT + (Ja - M)\,dV + (Jb + e)\,dP,$$

$$dS = \frac{\beta\,dT}{T} + \frac{a\,dV}{T} + \frac{b\,dP}{T}.$$

Écrivons que dX et dS sont des différentielles exactes :

$$J\frac{\partial\beta}{\partial V} = J\frac{\partial a}{\partial T} - \frac{\partial M}{\partial T},\quad (3)\ \frac{\partial\beta}{\partial V} = \frac{\partial a}{\partial T} - \frac{a}{T},\ \text{d'où l'on tire}$$

$$(4)\ a = \frac{T}{J}\frac{\partial M}{\partial T}.\ \text{Puis},\ J\frac{\partial\beta}{\partial P} = J\frac{\partial b}{\partial T} + \frac{\partial e}{\partial T},\ (5)\ \frac{\partial\beta}{\partial P} = \frac{\partial b}{\partial T} - \frac{b}{T},$$

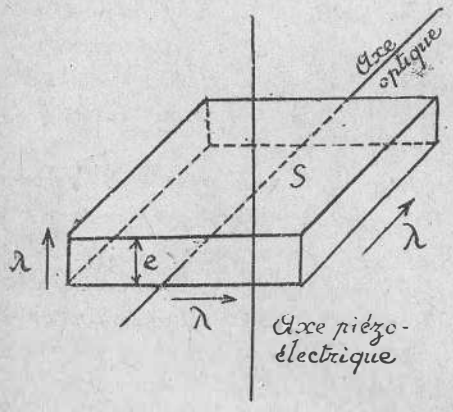
d'où l'on tire (6) $b = -\frac{T}{J}\frac{\partial e}{\partial T}$.

Les autres relations qu'on pourrait établir ne sont pas utiles pour notre problème.

Calculons maintenant la variation de température, le phénomène étant supposé adiabatique, on a $dQ = 0$, c'est à dire, à cause de (2), (4) et (6),

$$(7)\ \beta\,dT = -a\,dV - b\,dV = -\frac{T}{J}\frac{\partial M}{\partial T}dV + \frac{T}{J}\frac{\partial e}{\partial T}dP.$$

Mais le coefficient piézo-électrique h étant supposé indépendant de la température, on a, à cause de la relation (1), $\frac{\partial M}{\partial T} = V\frac{\partial C}{\partial T}$ avec $C = \frac{KS}{4\pi e}$. Prenons les dérivées logarithmiques, il vient $\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial T}$; $\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial T}$ est le coefficient de dilatation superficielle de la lame de quartz ; il est égal à $\lambda + \lambda'$, puisque une des dimensions de la surface S est parallèle à l'axe optique et que l'autre lui est perpendiculaire. De même $\frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial T} = \lambda$ puisque la dimension e est perpendiculaire à l'axe optique. On a donc $\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T} = \lambda + \lambda' - \lambda = \lambda'$; $\frac{\partial M}{\partial T} = CV\lambda'$.



Portons ces valeurs dans (7) on a

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{J\beta}\left[e\lambda\,dP - C\lambda' V\,dV\right].$$

Soit T_0 la température initiale ; la température finale est $T_0 + \theta$.

Intégrons : $\text{Log}\frac{T_0 + \theta}{T_0} = \frac{1}{J\beta}\left(e\lambda P - C\lambda'\frac{V^2}{2}\right)$. Comme nous allons le voir, θ est très faible ; on peut donc écrire, en se bornant au premier terme du développement en série,

$$\text{Log}\frac{T_0 + \theta}{T_0} = \text{Log}\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) = \frac{\theta}{T_0},\quad \theta = \frac{T_0}{J\beta}\left(e\lambda P - C\lambda'\frac{V^2}{2}\right),$$

$$\beta = SeDc = 50 \times 0{,}02 \times 2{,}65 \times 0{,}185 = 0{,}49025,$$

$$e\lambda P = 0{,}02 \times 14 \times 10^{-6} \times 15290 \times 981 = 4{,}2,$$

$$\frac{C\lambda' V^2}{2} = \frac{KS\lambda'}{4\pi e}\cdot\frac{V^2}{2} = 1{,}45 \times 10^{-6}.$$

Le second terme de la parenthèse est donc absolument négligeable vis-à-vis du premier. Il faudrait employer des milliers de volts pour qu'il devienne du même ordre de grandeur. Cela montre que le phénomène de piézo-électricité est le seul intéressant. On a

$$\theta = \frac{300 \times 4,2}{4,19 \times 10^7 \times 0,49025} = 6,13 \times 10^{-5} \text{ degré.}$$

Cet échauffement est très faible et justifie la simplification de calcul employée plus haut.

3° Pour voir si la chaleur spécifique c dépend de P et de V, au lieu de former $\frac{\partial c}{\partial P}$ et $\frac{\partial c}{\partial V}$, nous allons former $\frac{\partial \beta}{\partial P}$ et $\frac{\partial \beta}{\partial V}$ puisque $\beta = Se\,Dc$. On a $b = -\frac{T}{J}\frac{\partial e}{\partial T} = -\frac{Te\lambda}{J}$,

$$\frac{\partial b}{\partial T} = -\frac{e\lambda}{J} - \frac{T\lambda}{J}\frac{\partial e}{\partial T} = -\frac{e\lambda}{J} - \frac{Te\lambda^2}{J}.$$

La relation (5) devient alors simplement (8) $\frac{\partial \beta}{\partial P} = -\frac{Te\lambda^2}{J}$. De même, $a = \frac{T}{J}\frac{\partial M}{\partial T} = \frac{TCV\lambda'}{J}$,

$$\frac{\partial a}{\partial T} = \frac{CV\lambda'}{J} + \frac{TV\lambda'}{J}\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{CV\lambda'}{J} + \frac{TCV\lambda'^2}{J}.$$

La relation (3) devient alors simplement (9) $\frac{\partial \beta}{\partial V} = \frac{TCV\lambda'^2}{J}$.

Les quantités λ^2 et λ'^2 étant extrêmement petites, les formules (8) et (9) montrent que $\frac{\partial \beta}{\partial P}$ et $\frac{\partial \beta}{\partial T}$ sont pratiquement nulles. La chaleur spécifique du quartz est donc indépendante de P et de V.

---

125. — On considère la charge q d'un condensateur à diélectrique comme étant à dimensions constantes (surface des armatures, épaisseur du diélectrique) une fonction bien déterminée de la différence de potentiel V des armatures et de la température T. Cela posé, on demande d'expliciter la valeur du coefficient A de dV dans l'expression de la quantité de chaleur élémentaire dQ à fournir au condensateur pour produire les variations élémentaires dV et dT (Physique Générale. Paris).

On peut écrire (1) $dQ = A\,dV + B\,dT$.

Lorsque la charge du condensateur est augmentée de la quantité dq au potentiel V, l'augmentation correspondante d'énergie électrique est $V\,dq$. On a donc, d'après le principe de l'équivalence, U désignant l'énergie totale interne de la pile, (2) $dU = J\,dQ + V\,dq$. Mais $V\,dq = d(qV) - q\,dV$. En portant cette valeur dans (2) et entenant compte de (1), il vient $dU - d(qV) = (JA - q)\,dV + JB\,dT$,

ou $dX = (JA - q)\,dV + JB\,dT$.

Si dU est une différentielle totale exacte, il en est de même de dX. Ecrivons donc que dX ainsi que la différentielle de l'entropie $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{A\,dV}{T} + \frac{B\,dT}{T}$ sont deux différentielles exactes, il vient $J\left(\frac{\partial A}{\partial T} - \frac{\partial B}{\partial V}\right) = \frac{\partial q}{\partial T}$, $\frac{\partial A}{\partial T} - \frac{\partial B}{\partial V} = -\frac{A}{T}$ d'où l'on tire $A = \frac{T}{J}\frac{\partial q}{\partial T}$. Mais, en désignant par C la capacité du condensateur, on a $q = CV$, $\frac{\partial q}{\partial T} = V\frac{\partial C}{\partial T}$. La formule cherchée est donc $A = \frac{TV}{J}\frac{\partial C}{\partial T}$.

Remarque. — On voit intervenir la quantité $\frac{\partial C}{\partial T}$ qui n'est nullement négligeable. MM. Pellat et Sacerdote ont en effet montré que la capacité d'un condensateur dépendait de sa température.

La quantité de chaleur à fournir à un condensateur pour augmenter son potentiel de dV, à température constante T, s'obtient en faisant $dT = 0$ dans l'expression (1) ce qui donne

$$dQ = A\,dV = \frac{T}{J}\,\frac{\partial C}{\partial T}\,V\,dV.$$

Posons $\frac{1}{C}\,\frac{\partial C}{\partial T} = K$, coefficient de température du condensateur, quantité sensiblement constante. On peut écrire $dQ = \frac{T}{J} KCV\,dV$. Si le potentiel varie de zéro à V, on aura $Q = \frac{T}{J}\,\frac{KCV^2}{2}$. Le signe de K varie d'ailleurs avec les différents corps; ainsi il est positif pour l'ébonite, négatif pour le verre.

L'énergie totale W à fournir à un condensateur pour faire varier son potentiel de zéro à V, à température constante T, a donc pour expression $W = \frac{CV^2}{2} + JQ = \frac{CV^2}{2}(1 + KT)$, et non pas simplement $\frac{CV^2}{2}$.

---

126. L'état d'un condensateur fermé dépend de la différence de potentiel V entre ses armatures, de la température et de la pression p à l'intérieur, la pression extérieure p' étant supposé invariable. Écrire la différentielle de l'entropie et expliciter les coefficients de dV et de dp. Calculer ensuite la variation de l'entropie de ce condensateur lorsqu'on porte de 0 à 10000 volts la différence de potentiel entre les armatures, à température et pressions constantes. Pour le calcul de l'entropie, on fera intervenir seulement le diélectrique et non les armatures métalliques du condensateur.

Données numériques : Capacité $C = 0{,}02$ microfarad; Coefficient de dilatation linéaire du diélectrique $\lambda = 8.10^{-6}$; Coefficient de température de la constante diélectrique $\frac{1}{K}\,\frac{dK}{dt} = -15.10^{-6}$. On pourra supposer que ce condensateur est formé par un ballon de verre argenté sur ses deux faces, l'épaisseur du verre étant faible et uniforme.

(Physique Générale. Paris).

Soit dQ la quantité élémentaire de chaleur à fournir au condensateur. On peut poser $dQ = c\,dT + a\,dV + b\,dp$.

La différentielle de l'entropie est $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c}{T}\,dT + \frac{a}{T}\,dV + \frac{b}{T}\,dp$.

Le principe de l'équivalence donne, en désignant par U l'énergie totale interne du système, $dU = J\,dQ + d\mathcal{E}$.

Le travail $d\mathcal{E}$ reçu par le système se compose du travail électrique et du travail des pressions.

En désignant par M la masse électrique, le travail électrique est $+V\,dM$, avec le signe +, car l'énergie U augmente quand dM est positif.

Soit v le volume intérieur du ballon, v' son volume extérieur. Le volume du diélectrique est $v' - v$. La pression intérieure

effectue un travail $+p\,dv$; la pression extérieure produit $-p'dv'$. On a donc $dU = Jc\,dT + Ja\,dV + Jb\,dp + V\,dM + p\,dv - p'dv'$.

Usant d'un artifice bien connu, on écrit

$V\,dM = d(VM) - M\,dV$, $p\,dv = d(pv) - v\,dp$,

$p'dv' = d(p'v') - v'dp' = d(p'v')$ puisque $dp' = 0$. On peut donc écrire $dU - d(VM) - d(pv) + d(p'v') = dX = Jc\,dT + (Ja - M)\,dV + (Jb - v)\,dp$.

Si dU est une différentielle exacte, il en est de même de dX. Écrivons que dX et dS sont des différentielles exactes, en ne prenant que les relations indispensables pour obtenir $\underline{a}$ et $\underline{b}$. On obtient

(1) $J\dfrac{\partial c}{\partial V} = J\dfrac{\partial a}{\partial T} - \dfrac{\partial M}{\partial T}$, (2) $J\dfrac{\partial c}{\partial p} = J\dfrac{\partial p}{\partial T} - \dfrac{\partial v}{\partial T}$,

(3) $\dfrac{\partial c}{\partial V} = \dfrac{\partial a}{\partial T} - \dfrac{a}{T}$, (4) $\dfrac{\partial c}{\partial p} = \dfrac{\partial b}{\partial T} - \dfrac{b}{T}$

Des relations (1) et (3), on tire $J\dfrac{a}{T} = \dfrac{\partial M}{\partial T}$, (5) $a = \dfrac{T}{J}\dfrac{\partial M}{\partial T}$.

Des relations (2) et (4) on tire

$J\dfrac{b}{T} = \dfrac{\partial v}{\partial T}$, $b = \dfrac{T}{J}\dfrac{\partial v}{\partial T}$ Celles sont les valeurs explicites de $\underline{a}$ et de $\underline{b}$.

Nous allons maintenant calculer la variation de l'entropie du diélectrique du condensateur, lorsqu'on porte de 0 à 10000 volts la d.d.p. entre les armatures. On suppose, d'après l'énoncé, que la température et les pressions intérieure et extérieure restent constantes. On a donc, en tenant compte de (5) $dS = \dfrac{a}{T}\,dV = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial M}{\partial T}\,dV$. Or $M = CV$, $\dfrac{\partial M}{\partial T} = V\dfrac{\partial C}{\partial T}$, puisque V est une variable indépendante.

On peut donc écrire

$$dS = \frac{1}{J}\frac{\partial C}{\partial T}\,V\,dV = \frac{1}{J}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T}\right)C V\,dV.$$

La variation ΔS d'entropie s'obtient en intégrant dans les limites de 0 à V, ce qui donne (6) $\Delta S = \dfrac{1}{J}\left(\dfrac{1}{C}\dfrac{\partial C}{\partial T}\right)\dfrac{CV^2}{2}$.

D'ailleurs $C = \dfrac{K\delta}{4\pi e}$, δ désignant la surface d'une armature, et e l'épaisseur du diélectrique. Par suite,

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial T} + \frac{1}{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial T} - \frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial T},$$

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial T} + 2\lambda - \lambda = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial T} + \lambda,$$

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial T} = -15.10^{-6} + 8.10^{-6} = -7.10^{-6}.$$

Utilisons le système pratique. On a

$$J = 4,185, \quad C = \frac{2}{100}\times\frac{1}{10^6} = 2.10^{-8}, \quad V = 10^4.$$

En portant ces valeurs dans (6), on trouve

$$\Delta S = -\frac{7}{4,185}\times 10^{-6} = -1,67\times 10^{-6}.$$

La variation de l'entropie est donc négative.

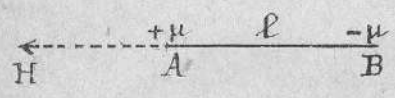
---

127. - L'état d'une aiguille ferromagnétique étant supposé parfaitement défini par sa température T, la valeur H du champ magnétique uniforme dans lequel elle se trouve, et l'angle α que fait son axe avec la direction du champ, on demande d'expliciter : 1° le coefficient a de $d\alpha$ dans l'expression de la quantité de chaleur à fournir pour une transformation élémentaire ; 2° le coefficient b de dH dans les mêmes conditions. Rechercher enfin la condition pour que la température de l'aiguille ne varie pas quand on la fait osciller. (Physique générale. Paris).

Soit dQ la quantité élémentaire de chaleur à fournir au système. On peut poser (1) $dQ = a\,d\alpha + b\,dH + c\,dT$.

D'autre part le principe de l'équivalence donne $dU = J\,dQ + d\mathcal{E}$, $d\mathcal{E}$ étant le travail fourni par l'extérieur à l'aiguille. Ce travail comprend deux parties. La première correspond au déplacement de l'aiguille dans le champ H, c'est à dire à la variation $d\alpha$ de l'angle α ; elle est égale à $C\,d\alpha$, C désignant le moment des forces magnétiques appliquées à l'aiguille. On sait que $C = MH\sin\alpha$, M représentant le moment magnétique de l'aiguille. Ce travail élémentaire $C\,d\alpha$ est bien du travail fourni à l'aiguille, car pour augmenter l'angle α il faut travailler contre les forces appliquées à l'aiguille. La seconde partie du travail est le travail d'aimantation, c.à.d. le travail qu'il faut fournir pour orienter les éléments magnétiques de façon à constituer un aimant ; montrons qu'il est égal à $H\,dM$.

Pour cela, cherchons le travail qu'il faut fournir à deux petites masses magnétiques $\pm\mu$ pour les amener de l'infini en deux points A et B, distants de l, de façon à constituer dans un champ uniforme H un petit aimant de moment magnétique $m = \mu\lambda$. Pour la masse $+\mu$, amenée de l'infini en A où le potentiel est V, le travail à fournir est μV ; pour amener la masse $-\mu$, au point B où le potentiel est $V + \lambda\frac{\partial V}{\partial x}$, le travail à fournir est $-\mu\left(V + \lambda\frac{\partial V}{\partial x}\right)$. La somme de ces travaux est $-\mu\lambda\frac{\partial V}{\partial x} = H\,dM$ en désignant par dM le moment élémentaire $\mu\lambda$. On sait en effet que $-\frac{\partial V}{\partial x}$ représente le champ H, si l'on suppose que la direction du petit aimant coïncide avec celle du champ.



Si cette dernière condition n'était pas remplie et si AB faisait un angle α avec le champ, le potentiel en B serait $V + \lambda\cos\alpha\frac{\partial V}{\partial x}$ et le travail d'aimantation serait $-\mu\lambda\cos\alpha\frac{\partial V}{\partial x}$, c.à.d. $Hm\cos\alpha$. Mais, par définition, le moment magnétique d'un aimant constitué par un assemblage de petits aimants a pour expression $M = \Sigma m\cos\alpha$. Donc dans tous les cas le travail d'aimantation est $H\,dM$. Par suite

$$dU = J\,dQ + C\,d\alpha + H\,dM.$$

Usant d'un artifice bien connu, nous remarquons que

$HdM = d(HM) - MdH$, ce qui permet d'écrire

$$DU - d(HM) = dX = (Ja + C)\,d\alpha + (Jb - M)\,dH + Jc\,dT.$$

Ecrivons que dX ainsi que la différentielle de l'entropie

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{a\,d\alpha}{T} + \frac{b\,dH}{T} + \frac{c\,dT}{T}$$

sont deux différentielles totales exactes, en ne prenant que les relations nécessaires pour obtenir a et b. Il vient

$$J\left(\frac{\partial c}{\partial \alpha} - \frac{\partial a}{\partial T}\right) = \frac{\partial C}{\partial T}, \qquad J\left(\frac{\partial b}{\partial T} - \frac{\partial c}{\partial H}\right) = \frac{\partial M}{\partial T},$$

$$\frac{\partial c}{\partial \alpha} - \frac{\partial a}{\partial T} = -\frac{a}{T}, \qquad \frac{\partial b}{\partial T} - \frac{\partial c}{\partial H} = \frac{b}{T}.$$

De la première et de la troisième on tire

$$a = -\frac{T}{J}\frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{TH\sin\alpha}{J}\frac{\partial M}{\partial T}.$$

De la deuxième et de la quatrième on tire

$$b = \frac{T}{J}\frac{\partial U}{\partial T}.$$

Faisons osciller l'aiguille. Nous supposerons, bien que cela ne soit pas spécifié dans l'énoncé, que dans ce mouvement l'aiguille n'absorbe ni ne cède de chaleur. Sa température ne devant pas varier, nous annulons dT et dQ dans l'expression (1) ce qui donne, en tenant compte des valeurs de a et de b,

$$\frac{T}{J}\frac{\partial M}{\partial T}\left[dH - H\sin\alpha\,d\alpha\right] = 0.$$

Il ne peut être question d'annuler le crochet, car H et α sont deux variables indépendantes et ne sauraient par conséquent dépendre l'une de l'autre. La condition cherchée est donc $\frac{\partial M}{\partial T} = 0$.

Or, J désignant l'intensité d'aimantation et V le volume de l'aiguille, on a

$$M = JV, \qquad \frac{\partial M}{\partial T} = J\frac{\partial V}{\partial T} + V\frac{\partial J}{\partial T};$$

$\frac{\partial V}{\partial T}$ est bien positif; mais d'après les expériences de Curie $\frac{\partial J}{\partial T}$ est négatif; il peut y avoir compensation et $\frac{\partial M}{\partial T} = 0$ est bien la condition cherchée.

---

128. — On peut interpréter les phénomènes électrocapillaires en admettant que la tension superficielle au contact du mercure avec l'eau acidulée est suffisamment représentée, entre certaines limites, par la formule (1) $A = 425 - 28\,[V - 1 + 0{,}0003\,t]^2$ dans laquelle V désigne la différence de potentiel, en volts établie par l'opérateur entre les deux bornes de l'électromètre, et t la température. D'autre part on peut assimiler la couche de passage à un condensateur de surface S dont le diélectrique aurait une épaisseur constante ε et pour constante diélectrique l'unité. 1° Prenant pour variables indépendantes S, V et $T = 273 + t$, on appliquera les deux principes de la Thermodynamique et l'on tiendra compte de ce que la charge M de ce condensateur est une fonction des variables S, V et T (Conser-

vation de l'électricité). 2° Considérant une transformation isothermique à potentiel constant donnant lieu à une variation de surface égale à 1 cm², on calculera en unités électrostatiques C.G.S la charge électrique développée et en petites calories, la quantité de chaleur évoluée. 3° Que représente la dérivée partielle $\frac{\partial M}{\partial s}$? En déduire E en utilisant la valeur de $\frac{\partial M}{\partial s}$ fournie par le n°1.

Application numérique. — $\frac{\partial V}{\partial s} = 0,47$ volt, $t = 100°$. (Physique générale. Paris).

1° Soit dQ la quantité élémentaire de chaleur à fournir au système. On peut poser (2) $dQ = a\,ds + b\,dV + c\,dT$.

Lorsque la charge du condensateur augmente de la quantité dM au potentiel V, l'augmentation correspondante d'énergie électrique est $V\,dM$. D'autre part, le travail effectué par l'opérateur contre les forces de tension superficielle au contact du mercure avec l'eau acidulée a pour expression $A\,ds$. On a donc, d'après le principe de l'équivalence, U désignant l'énergie totale interne du système, $dU = J\,dQ + V\,dM + A\,ds$. Il ne peut y avoir de doute sur le signe à mettre devant $A\,dS$, car lorsqu'on augmente la surface de contact, l'énergie potentielle du système augmente et comme A est positif il faut bien mettre le signe +.

Usant d'un artifice bien connu, nous écrirons successivement

$$V\,dM = d(MV) - M\,dV.$$

$$dU - d(MV) = J\,dQ + A\,ds - M\,dV,$$

$$dX = (Ja + A)\,ds + (Jb - M)\,dV + Jc\,dT,$$

et nous écrivons que dX, et la différentielle de l'entropie

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{a\,ds}{T} + \frac{b\,dV}{T} + \frac{c\,dT}{T}$$

sont deux différentielles totales exactes. Nous obtenons les six relations suivantes :

(3) $J\frac{\partial a}{\partial V} + \frac{\partial A}{\partial V} = J\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{\partial M}{\partial s}$, (4) $J\frac{\partial a}{\partial T} + \frac{\partial A}{\partial T} = J\frac{\partial c}{\partial s}$,

(5) $J\frac{\partial b}{\partial T} - \frac{\partial M}{\partial T} = J\frac{\partial c}{\partial V}$, (6) $\frac{\partial a}{\partial V} = \frac{\partial b}{\partial s}$,

(7) $\frac{\partial a}{\partial T} - \frac{a}{T} = \frac{\partial c}{\partial s}$ (8) $\frac{\partial b}{\partial T} - \frac{b}{T} = \frac{\partial c}{\partial V}$.

Des équations (3) et (5) on tire $\frac{\partial A}{\partial V} = -\frac{\partial M}{\partial s}$, c'est-à-dire en tenant compte de (1)

(9) $\frac{\partial M}{\partial s} = 56\left[V - 1 + 0,0003\,t\right]$. De (4) et (7) on tire

(10) $a = -\frac{T}{J}\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{56\,T}{J} \times 0,0003\left[V - 1 + 0,0003\,t\right]$. Enfin de (5) et de (8) on tire (11) $b = \frac{T}{J}\frac{\partial M}{\partial T}$.

L'application des deux principes de la Thermodynamique fournit donc les trois relations (9), (10) et (11).

2° D'après le principe de la conservation de l'électricité, on doit avoir, pour un cycle fermé d'opérations, $\int dM = 0$. Donc dM doit être la différentielle exacte d'une fonction des variables indépendantes et on peut poser (12) $dM = \frac{\partial M}{\partial V}\,dV + \frac{\partial M}{\partial T}\,dT + \frac{\partial M}{\partial s}\,ds$.

Si la transformation est isothermique et à potentiel constant, nous devons faire $dV = dT = 0$, ce qui donne, pour la charge électrique développée, en tenant compte de (9),

$$\Delta M = \frac{\partial M}{\partial s}\,\Delta s = 56\,\Delta s\,[V - 1 + 0{,}0003\,t].$$

Pour obtenir $\frac{\partial M}{\partial s}$ en unités électrostatiques C.G.S., nous remarquerons que la formule (1) donne la tension superficielle A en unités C.G.S., bien que V doive être, d'après l'énoncé, exprimé en volts. On a donc, en faisant $\Delta s = 1\,cm^2$, $V = 0{,}47$ volt, $t = 100°$, $\Delta M = -28$ C.G.S. Cette quantité étant négative, on voit que pour accroître la surface de $1\,cm^2$, à la température de 100°, il faut enlever une quantité d'électricité égale à 28 unités électrostatiques C.G.S.

D'après la formule (2) la quantité de chaleur évaluée est, en faisant $dV = dT = 0$, et en tenant compte de (10),

$$\Delta Q = a\,\Delta s = -\frac{56 \times 373 \times 0{,}0003 \times 0{,}5}{4{,}185 \times 10^7} = -\frac{0{,}748}{10^7}\ \text{calories.}$$

Il faut donc <u>enlever</u> de la chaleur au système.

3° En se reportant à l'expression (12), on voit que $\frac{\partial M}{\partial V}$ est le rapport de l'accroissement dM de la charge à l'accroissement dV de la différence de potentiel, à température et à surface constantes ($ds = dT = 0$). C'est donc la <u>capacité</u> de la surface à température et à surface constantes. Puisque l'on peut assimiler la couche de passage à un condensateur de surface s dont le diélectrique aurait une épaisseur constante ε et pour constante diélectrique l'unité, on a $\frac{\partial M}{\partial V} = \frac{s}{4\pi\varepsilon}$. De cette relation et de l'identité $\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial M}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial M}{\partial s}$, on tire, en tenant compte de (9)

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} = 56\,, \qquad \varepsilon = \frac{1}{224\,\pi} = 0{,}0014\ cm.$$

Energie rayonnante.

129. Le rayonnement qui nous arrive du Soleil, reçu normalement sur une surface noire placée hors de l'atmosphère terrestre, produit un dégagement de chaleur de 2 petites calories par centimètre carré et par minute. — 1° Admettant que le Soleil rayonne comme un corps noir on demande de calculer sa température. — Diamètre apparent du Soleil : 32 minutes. — Constante de la loi de Stefan donnant le rayonnement total de l'unité de surface $\sigma = 5{,}7 \times 10^{-12}$ en prenant comme unités le watt et le centimètre carré. — 2° Ce rayonnement tombe normalement sur une des faces d'un disque noir, dont l'autre face est, thermiquement isolée. Calculer la température d'équilibre de ce disque. On fera successivement les deux hypothèses suivantes : a) Le disque est seul, dans l'espace vide, éloigné de tout autre corps. b) Il est placé dans une grande enceinte isotherme à 27° centigrades, avec une petite ouverture

pour laisser passer le faisceau polaire. 3°- Résoudre la même question pour une sphère, isolée dans l'espace, noire sur toute sa surface, exposée au rayonnement polaire. On la supposera assez conductrice de la chaleur pour que sa température soit uniforme. - 4° On utilise le rayonnement polaire pour chauffer, au moyen d'un système convenable de lentilles ou de miroirs, une chaudière qui sert à alimenter un moteur thermique. Les pertes d'énergie de cette chaudière par conductibilité et rayonnement sont supposées nulles, et sa température se maintient à 100° centigrades. Le moteur fonctionne d'une manière parfaite selon un cycle de Carnot, avec une source froide à 27° centigrades. On veut, de cette manière, réaliser un moteur qui développe une puissance de 1 kilowatt. Sur quelle surface faudra-t-il capter le rayonnement polaire pour arriver à ce résultat? (Physique générale, Paris, 1925)

1° La loi de Stefan exprime que l'énergie totale émise par un corps noir est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue T. Soit R le rayon du soleil. L'énergie émise par seconde est $4\pi R^2 \sigma T^4$. Si L la distance L du Soleil à la Terre, cette énergie se répartit sur une sphère de surface $4\pi L^2$ et la valeur de l'énergie reçue par centimètre carré est alors équivalente, d'après l'énoncé, à $\frac{2}{60}$ petites calories par minute, soit $\frac{2}{60}$ 4,18 watts. On a donc la relation

$$4\pi R^2 \sigma T^4 = 4\pi L^2 \times \frac{2}{60} \times 4{,}185 \quad \text{ou} \quad T^4 = \left(\frac{L}{R}\right)^2 \times \frac{2}{60} \times \frac{4{,}185}{\sigma}.$$

Mais $\frac{R}{L}$ est la moitié du diamètre apparent du Soleil, soit 16 minutes ou 0,004654 radians. En remplaçant σ par la valeur de l'énoncé, on a $T^4 = \frac{10^{12}}{5{,}7} \times \left(\frac{1}{0{,}004654}\right)^2 \times \frac{2}{60} \times 4{,}185$. On en déduit $T = 5798°$ absolus soit 5525° centigrades.

2°a) Sur sa surface S, le disque reçoit $S \times \frac{2}{60} \times 4{,}185 = 0{,}1395\,S$ watts. Si X est sa température absolue, il émet $\frac{2}{60}\sigma X^4 S$ watts. Lorsque l'équilibre est atteint, la puissance émise est égale à la puissance reçue d'où l'équation

$$0{,}1395\,S = 5{,}7 \times 10^{-12} X^4 S, \quad X = 395° \text{ abs } (122°C).$$

b) Supposons d'abord l'enceinte complètement close, le disque reçoit et émet par seconde $5{,}7 \times 10^{-12}(273+27)^4 S$. Ouvrons maintenant la petite ouverture; le disque reçoit de l'enceinte, supposée très grande, le même rayonnement. Il reçoit en outre normalement 0,1395 S watts. En écrivant qu'il émet autant qu'il reçoit, nous aurons, en désignant par Y sa température absolue,

$$5{,}7 \times 10^{-12}\, 300^4 S + 0{,}1395\,S = 5{,}7 \times 10^{-12} Y^4 S$$

d'où $Y = 425°$ abs. soit 152°C.

3°a) Le raisonnement est le même que précédemment, mais cette fois la sphère de rayon $\frac{r}{2}$ reçoit du Soleil autant qu'une surface normale égale à πr^2 tandis qu'elle émet à travers sa surface totale $4\pi r^2$. Si donc x est sa température absolue on a:

$0{,}1395\,\pi r^2 = 5{,}7 \times 10^{-12} x^4 \times 4\pi r^2$, d'où $x = \frac{X}{\sqrt{2}} = \frac{395}{\sqrt{2}} = 280$ abs (7°C).

b) La sphère reçoit encore la même puissance $\frac{1}{\sqrt{2}}$ du Soleil. Elle reçoit

en outre, par toute sa surface, le rayonnement issu de l'enceinte. Si donc y est sa température absolue, on a

$$0{,}1395\,\pi x^2 + 5{,}7\times10^{-12}\cdot 300^4\cdot 4\pi x^2 = 5{,}7\times10^{-12} y^4\cdot 4\pi x^2$$

d'où $y = 345°$ abs. (72° c).

4°) Soit T_1 la température absolue de la chaudière, T_0 celle du condenseur; Q_1 l'énergie cédée par seconde par la chaudière; Q_0 celle reçue par le condenseur. L'équation de Carnot donne $\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{T_1}{T_0} = \frac{273+100}{273+27} = \frac{373}{300}$. D'autre part, on doit avoir, d'après l'énoncé, $Q_1 - Q_0 = 1000$ watts. On en déduit $\frac{Q_1}{Q_1 - 1000} = \frac{373}{300}$ d'où $Q_1 = 5110$ watts. Le Soleil envoyant 0,1395 watts par cm², la surface sur laquelle il faudra capter le rayonnement solaire sera égale à $\frac{5110}{0{,}1395} = 36630$ cm², soit 3,663 m².

Appendice.

130. - Ce problème est relatif à l'étude thermodynamique d'un liquide compressible et dilatable. On suppose constants le coefficient de dilatation et le coefficient de compressibilité, ce qui conduit à mettre l'équation caractéristique sous la forme (1) $v = v_0(1 + at - Kp)$ dans laquelle v est le volume spécifique sous la pression p et à la température centigrade t; v_0 est le volume spécifique à 0° et sous pression nulle (il est évident que le liquide ne peut exister sous une pression nulle, mais la tension de vapeur étant faible au voisinage de 0°, on peut prendre le liquide sous une pression assez faible pour qu'on puisse la regarder comme nulle); a est le coefficient de dilatation, K est le coefficient de compressibilité, supposés constants tous les deux. On donne les valeurs numériques suivantes, qui se rapportent à l'alcool: Densité à 0°, sous pression nulle, 0,80; coefficient de dilatation $a = 1{,}1\times10^{-3}$; coefficient de compressibilité, en prenant l'atmosphère comme unité de pression, $K = 0{,}90\times10^{-4}$; , chaleur spécifique à pression constante $C = 0{,}54$ (cette chaleur spécifique est supposée constante).

1° Le liquide étant à 0° sous une pression nulle, on le comprime adiabatiquement. A quelle pression faut-il arriver pour que sa température atteigne 1 degré? (On regardera cette pression comme infiniment petite. Calculer la variation de volume du liquide, en supposant l'expérience faite sur un volume initial de 1 litre. - 2° Calculer la valeur à 0° de $C - c$, différence des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant ainsi que la valeur du rapport $\gamma = \frac{C}{c}$. 3° Prenant comme variables indépendantes la température absolue et la pression, trouver en fonction de ces variables, l'expression de l'énergie interne et celle de l'entropie. 4° Dans une transformation adiabatique quelconque (non infiniment petite) trouver la loi qui relie la température et la pression.

(Physique générale. Paris, 1931).

La forme de l'équation caractéristique (1) nous conseille de prendre t et p comme variables indépendantes. La compression étant adiabatique, on a $dQ = C\,dt + h\,dp = 0$ ou $C\Delta t + h\Delta p = 0$, puisque d'après l'énoncé on doit regarder la pression Δp comme infiniment petite. D'ailleurs, $\Delta t = 1°$. Par suite $\Delta p = -\frac{C}{h}$. Une des formules de Clapeyron donne $h = -\frac{T}{J}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{T}{J}v\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)$. Le terme entre parenthèses est le coefficient de dilatation α de l'alcool. Le volume spécifique v est $v = 1 : 0,8$. On fait $T = 273$, $J = 4,18 \times 10^7$ et on trouve $h = -9 \times 10^{-9}$ C.G.S, d'où $\Delta p = 0,54 : 9 \times 10^{-9}$ C.G.S, soit $\Delta p = 60$ atmosphères. Telle est la pression énorme à laquelle il faut arriver pour que la température passe de 0 à 1 degré. On voit que c'est une façon de parler de dire dans l'énoncé que c'est une pression infiniment petite.

Cherchons maintenant la variation de volume en supposant $v_0 = 1$ litre. Dans l'équation (1) faisons $t = 1$, $p = 60$ avec $\alpha = 1,1 \times 10^{-3}$, $K = 0,90 \times 10^{-4}$, on trouve $v = 0,9957$ litre. La diminution de volume est donc de $4,3\ cm^3$.

2° Dans la relation connue $C = c + l\frac{dv}{dt}$, faisant $l = \frac{T}{J}\frac{\partial p}{\partial t}$ (relation de Clapeyron), il vient (1) $C - c = \frac{T}{J}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial t}$. D'autre part, $dv = \frac{\partial v}{\partial p}dp + \frac{\partial v}{\partial t}dt$. Donc à volume constant ($dv = 0$), $\frac{dp}{dt}$ se confond avec $\frac{\partial p}{\partial t}$ et on a $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t} : \frac{\partial v}{\partial p}$. En portant cette valeur dans (1), on a

$$C - c = -\frac{T}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 : \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{Tv}{J}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 : \left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{Tv}{J}\frac{a^2}{K}.$$

Pour l'application numérique, utilisons le système C.G.S, ce qui nous entraîne à faire $K = 0,90 \times 10^{-4} : 10^6$, avec $T = 273$, $v = 1 : 0,8$, $J = 4,18 \times 10^7$. On trouve $C - c = 0,11$. Par suite, $c = 0,54 - 0,11 = 0,43$ et $\gamma = \frac{C}{c} = \frac{0,54}{0,43} = 1,25$.

3° Soient U l'énergie interne, S l'entropie. On a $dU = J(C\,dT + h\,dp) - p\,dv = \left(JC - p\frac{\partial v}{\partial T}\right)dT + \left(Jh - p\frac{\partial v}{\partial p}\right)dp$. De (1) on tire $\frac{\partial v}{\partial T} = \alpha v_0$, $\frac{\partial v}{\partial p} = -Kv_0$, $Jh = -T\frac{\partial v}{\partial T} = -T\alpha v_0$ d'où $dU = JC\,dT - \alpha v_0(p\,dT + T\,dp) + Kv_0\,p\,dp$,

$$U = JCT - \alpha v_0 pT + \frac{Kv_0}{2}p^2 + C^{te}$$

Puis, $dS = \frac{dQ}{T} = C\frac{dT}{T} - \frac{\alpha v_0}{J}dp$, $S = C\,Log\,T - \frac{\alpha v_0}{J}p + C^{te}$

4° Dans une transformation adiabatique quelconque, on a $C\,dt + h\,dp = 0$ ou $C\frac{dT}{T} = \frac{1}{J}\alpha v\,dp$. L'intégration donne, en faisant $T = T_0$ pour $p = 0$, $C\,Log\frac{T}{T_0} = \frac{1}{J}\alpha v_0 p$, $T = T_0 e^{\frac{\alpha v_0 p}{CJ}}$. Et titre de vérification, on trouve $T = 274°$ pour $T_0 = 273$ et $p = 60$ atmosphères, c.à.d. les résultats de la première partie (échauffement de 1 degré).

Table des Matières.

	Pages
Introduction.	
Rappel de quelques unités et de certaines constantes	3
Note sur les gaz parfaits	4
Coefficients calorimétriques	5
Remarques sur l'application des deux principes. Transformations réversibles et irréversibles. — Diagrammes	7
Thermomètre. Calorimétrie. Loi de refroidissement de Newton	14
Compression des fluides	23
Théorie cinétique des gaz	26
Gaz parfaits et gaz réels. Détentes et compressions adiabatiques et isothermes	29
Applications des deux principes de la thermodynamique	100
Fusion	110
Vaporisation	115
Loi de Guldberg et Waage	138
Etude des corps solides	139
Moteurs thermiques, à vapeur et à explosion	150
Application des principes de la Thermodynamique aux phénomènes électriques et magnétiques. Phénomènes électrocapillaires	192
Energie rayonnante	203
Appendice	205