ESTUDOS

SOBRE OS

CULOS DE TRIANGULAÇÃO E NIVELAMENTO GEODESICO

POR

Carlos Lemaire Teste

Engenheiro Civil, pela Escola Central de Pariz, Membro da Commissão da Carta Geral do Imperio

RIO DE JANEIRO
TYPOGRAPHIA NACIONAL
1876.

1304—76.

ADVERTENCIA.

Estes estudos não eram destinados á publicidade; tinham apenas por fim explicar parte dos trabalhos por mim executados na Commissão de Carta Geral do Imperio, durante o anno de 1875.

Tendo porém parecido ao Exm. Sr. Dr. Manoel Buarque de Macedo, sempre prompto a animar os esforços conscienciosos, que de alguma utilidade poderia ser a vulgarisação dos methodos succintamente expendidos naquelle tosco esboço, fico devedor á iniciativa do mesmo Exm. Sr. e á benevola autorização do Exm. Sr. Ministro da Agricultura, Commercio e Obras Publicas, de uma honra sem duvida pouco merecida, mas que esforçar-me-hei de justificar pelos trabalhos mais importantes de que me acho actualmente incumbido.

Rio de Janeiro em 10 de Maio de 1876.

Carlos Lemaire Teste.

1.º ESTUDO.

Compensação dos erros de observação na resolução dos triangulos.

1. Theoria dos erros proporcionaes.—Seja X o valor exacto de um angulo, determinado por n reiterações, e, para cada uma destas, x e e o valor aproximado e o erro correspondente, sendo portanto: $X = x + e$. (1)

Addicionando-se as n equações desta fórma, e dividindo-se a somma por n, acha-se :

$$X = \frac{\Sigma x}{n} + \frac{\Sigma e}{n} = \tilde{x} + \tilde{e}, \qquad (1a)$$

(fazendo-se $\frac{\Sigma x}{n} = \tilde{x}$ e $\frac{\Sigma e}{n} = \tilde{e}$), equação identica á primeira, salvo a substituição de x e e pelas médias respectivas.

Logo: Relativamente á média dos valores approximados, o erro é tambem a média dos parciaes correspondentes áquelles.

Designando-se, aliás, por δ a differença $x - \frac{\Sigma x}{n}$ entre cada valor parcial e a média dos mesmos, e suppondo-se as reiterações bastante numerosas para ser-lhes applicavel a theoria dos menores quadrados, ter-se-ha (*) :

$$\tilde{e} = \frac{q\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}} = q\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{\frac{n(n-1)}{2}}} = q\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{m}} = qr \quad (2)$$

sendo $r = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{m}}$ (2 a), $m = \frac{n(n-1)}{2}$ (numero de

(*) Veja-se (salvo as notações) a Astronomia espherica de Brunnow (pag. 67).

combinações de n objectos 2 a 2) e q um coefficiente numerico $= \pm 0{,}474694$, no caso de um angulo isolado, devendo-se, porém, no de p angulos de somma S conhecida, determinal-o da seguinte maneira:

Combinando-se, para cada um desses angulos, as equações (1 a) e (2) (abstrahindo-se o til indicador das médias) acha-se $X = x + qr$ (3); addicionando-se esta com as $(p-1)$ analogas e supponde-se q constante (pois, no caso contrario, seria o problema indeterminado) ter-se-ha:

$$\Sigma X = \Sigma x + q\,\Sigma r, \text{ ou } S = s + q\,\Sigma r$$

(fazendo-se $\Sigma X = S$ e $\Sigma x = s$) d'onde emfim:

$$q = \frac{S - s}{\Sigma r} \qquad (4)$$

O radical r constitue o erro médio ou antes proporcional de cada angulo parcial, sendo q seu coefficiente de probabilidade e qr o erro provavel.

Caso particular. Se fosse r constante, ter-se-hia: $q = \dfrac{S-s}{pr}$, sendo, portanto, $e = qr = X - x$ tambem constante e igual a $\dfrac{S-s}{p}$.

2. Applicação á resolução dos triangulos.

Sejam X, X', X'' os tres angulos de um triangulo espherico; X_1, X_1', X_1'' os do rectilineo de lados iguaes, ε o excesso espherico. Tem-se evidentemente

$$X = X_1 + \frac{1}{3}\varepsilon, \text{ e}$$

$$\Sigma X = \Sigma X_1 + \varepsilon \text{ ou } S = 180^\circ + \varepsilon \qquad (5),$$

visto como $\Sigma X_1 = 180^\circ$.

Substituindo-se, pois, em (4), acha-se:

$$q = \frac{180^\circ + \varepsilon - s}{\Sigma r} = \frac{\varepsilon - (s - 180^\circ)}{\Sigma r} = \frac{\varepsilon - \Delta}{\Sigma r} = -\frac{\Delta - \varepsilon}{\Sigma r}, \quad (6)$$

fazendo-se $s - 180^\circ = \Delta$

Caso particular. Se fosse $r = r' = r''$, ter-se-hia

$$q = \frac{\Delta - \varepsilon}{3r}, \; e = e' = e'' = -\frac{\Delta - \varepsilon}{3}, \; X_1 = X - \frac{1}{3}\varepsilon =$$

$$x + e - \frac{1}{3}\varepsilon = x - \frac{\Delta}{3}, \; X'_1 = x' - \frac{\Delta}{3}, \text{ e } X''_1 = x'' - \frac{\Delta}{3}.$$

N. B. Embora não se realize a hypothese acima, calcular-se-ha sempre pelas formulas precedentes um primeiro systema de valores dos angulos rectilineos X_1, X'_1, X''_1, afim de deduzir-se dos mesmos uma primeira approximação do excesso espherico ε, e, portanto, do coefficiente q, dos erros provaveis e, e', e'' e dos angulos esphericos X, X', X''; d'onde um segundo systema dos rectilineos e de ε. Se fosse este novo excesso muito differente do primeiro ter-se-hia de corrigir todas as mais quantidades, e assim seguindo-se; porém isso nunca acontece.

3. Extensão approximada da theoria dos erros proporcionaes a um numero insufficiente de reiterações.

Sendo sensivelmente constante, na hypothese contraria, o producto do erro proporcional pela raiz quadrada do numero de reiterações, póde ser elle calculado uma vez para todas, bastando dividil-o depois pela raiz quadrada de qualquer outro numero de reiterações para conhecer-se mais ou menos approximadamente o erro proporcional correspondente a este ultimo.

Aquelle producto constante constitue o erro médio por reiteração e determina-se mais exactamente multiplicando-se pela raiz quadrada do numero maximo de reiterações a média arithmetica dos p erros proporcionaes correspondentes áquelle numero, isto é, pela formula $\frac{\Sigma r}{p}\sqrt{n}$, que, para $p = 1$, reduz-se a

$$r\sqrt{n} = \sqrt{\frac{2\Sigma\delta^2}{n-1}}.$$

Os quocientes desse erro médio pelas raizes quadradas dos diversos outros numeros de reiterações podem ser tambem effectuados uma vez para todas e reunidos n'uma tabella.

Embora seja este methodo mais racional do que a extensão pura e simples da formula (2 a), a qualquer numero de reiterações, tem elle o inconveniente de ser independente da maior ou menor exactidão das respectivas observações. E por isso, parece preferivel combinar-se ambos os systemas, adoptando-se para erro proporcional a semisomma dos parciaes, determinados por cada um desses dous modos de calculo, o que, aliás, póde-se tambem praticar sem erro sensivel nos casos em que fosse licito applicar-se exclusivamente a formula (2 a).

4. Applicação numerica.

O angulo até hoje determinado com o maior numero de reiterações foi o azimuthal: «Castello, Bom-Jesus, S. Christovão», para o qual tem-se :

$$n=19,\ m=\frac{n(n-1)}{2}=171$$

$$\begin{array}{ll}
\Sigma\,\delta^2 = 1322{,}948120\,; & \log.\ \Sigma\,\delta^2 = 3{,}1215428 \\
\log.\ m = 2{,}2329962\,; & \overline{\log}.\ m = \bar{3}{,}7670039 \\
 & \log.\ \dfrac{\Sigma\,\delta^2}{m} = 0{,}8885467 \\
 & \log.\ r = 0{,}4442733 \\
\log.\ n = 1{,}2787536\,; & \log.\ \sqrt{n} = 0{,}6393768 \\
 & \log.\ r\sqrt{n} = 1{,}0836501
\end{array}$$

e, portanto: $r = 2{,}782$; $r\sqrt{n} = 12{,}124$

para $n' = 8$ reiterações ter-se-hia

successivamente: $\log.\ n' = 0{,}9030900$;

$$\begin{array}{ll}
\log.\ \sqrt{n'} = 0{,}4515450 & \overline{\log}.\ \sqrt{n'} = \bar{1}{,}5484550 \\
 & \log.\ r' = 0{,}6321051,
\end{array}$$

finalmente $r' = 4{,}287$.

Assim foi calculada a ultima columna da tabella abaixo, até $n = 11$, maior numero de reiterações depois de 19.

n	m	r
1	»	12,124
2	1	8,573
3	3	7
4	6	6,062
5	10	5,422
6	15	4,95
7	21	4,583
8	28	4,287
9	36	4,041
10	45	3,834
11	55	3,656

Quanto á 2.ª columna tem por fim facilitar a determinação pela formula (2 a) de um 2.° valor de r, cuja semisomma com o constante da 3.ª columna dará o erro proporcional procurado. (*)

(*) Para mais desenvolvimentos, veja-se o appendice.

2.º ESTUDO.

Determinação dos coefficientes de refracção terrestre e equações das distancias zenithaes correctas.

5. FORMULA FUNDAMENTAL. — A expressão do coefficiente de refracção γ em funcção: do poder refringente $\varpi = 0,00058876$ do ar secco; da sua densidade δ no ponto e instante considerados (tomando-se por unidade a normal correspondente á temperatura 0° e pressão $0^m,76$); do raio ρ da esphera osculatriz ao ellipsoide terrestre, segundo o parallelo daquelle ponto, e da altura l (em metros) de uma columna de ar de densidade δ equilibrando a de mercurio do barometro, é (salvo as notações) segundo Puissant:

$$\gamma = \frac{1}{4} \varpi \rho \delta \left(\frac{1}{l} - \beta \right), \quad (2)$$

sendo β um coefficiente numerico dependente da lei de variação da densidade do ar, e, portanto, variavel com a latitude e altitude do ponto considerado, podendo, comtudo, salvo circumstancias excepcionaes, ser approximadamente considerado constante e igual a 0,0000275.

6. TRANSFORMAÇÃO DA MESMA. — Sendo aliás, segundo Regnault, $\alpha = 0,003665$ o coefficiente de dilatação do ar, e $\Delta = 10517,3$ a densidade do mercurio a 0° relativamente á normal do ar, e designando-se por t e h a temperatura e a pressão barometrica correcta (isto é

reduzida a 0°) e expressa em millimetros, ter-se-ha evidentemente $\delta = \frac{h}{760\,(1+\alpha t)}$ (2)

e $l\,\delta = \Delta \frac{h}{1000}$, ou, por divisão :

$$l = 0{,}76\,\Delta\,(1+\alpha t), \qquad (3)$$

e para $t=0$, $l_0 = 0{,}76\,\Delta = 7993{,}148$; d'onde

$$l = l_0\,(1+\alpha t),\ \frac{1}{l} - \beta = \frac{1}{l_0\,(1+\alpha t)} - \beta = \frac{1}{1+\alpha t}\left(\frac{1}{l_0} - \beta - \alpha\beta t\right) =$$

$$= \frac{\beta' - \alpha\beta t}{1+\alpha t} = \frac{\beta'}{1+\alpha t}\left(1 - \frac{\alpha\beta}{\beta'} t\right) = \beta' \frac{1-\alpha' t}{1+\alpha t},$$

fazendo-se $\frac{1}{l_0} - \beta = \beta'$ e $\frac{\alpha\beta}{\beta'} = \alpha'$.

Substituindo-se em (1) acha-se :

$$\gamma = \frac{1}{4}\varpi\,\rho\frac{\beta'}{760}h\frac{1-\alpha' t}{(1+\alpha t)^2} = Kh\frac{1-\alpha' t}{(1+\alpha t)^2}. \qquad (1\ a)$$

sendo $K = \frac{1}{4}\varpi\frac{\beta'\rho}{760}$.

Tal é a formula do coefficiente de refracção em funcção da temperatura e pressão.

7. Determinação dos coefficientes numericos α', β' e K

$$\log.\ l_0 = 3{,}9027178$$
$$\overline{\log}.\ \text{»} = \bar{4}{,}0972822$$

$\frac{1}{l_0}$ = 0,0001251072;

β = 0,0000275 log. $\beta = \bar{5}{,}4393327$

β' = 0,0000976072; log. $\beta' = \bar{5}{,}9894819$; $\overline{\log}$. $\beta' = 4{,}0105181$

(*) log. ρ = 6,8048633; log. α = 3,5640740

$\frac{1}{4}\varpi$ = 0,00014709; log. $\frac{1}{4}\varpi = \bar{4}{,}1678783$; log. $\alpha' = \bar{3}{,}0139248$

log. 760 = 2,8808136; $\overline{\log}$. 760 = $\bar{3}{,}1191864$ α' = 0,001032581

log. $K = \bar{4}{,}0814099$ K = 0,0001206174

(*) Na latitude do Rio de Janeiro.

8. Applicação numerica da formula acima.

Facilitam-se muito semelhantes calculos pelo emprego da tabella n.º 10.

Tendo-a debaixo da vista e querendo-se determinar o coefficiente de refracção correspondente a $t = 25°,45$ e $h = 759,11$ dispôr-se-ha o calculo assim :

t	αt	$\alpha' t$
25° 0, 45	0,091625 0,00164925	0,025815 0,00046467
25°,45	0,09327425	0,02627967

$1 + \alpha\, t = 1,09327425$; $\log.\ (1 + \alpha t) \ = 0,0387391$

$\log.\ (1 + \alpha t)^2 = 0,0774782$

$\overline{\log}.\ (1 + \alpha t)^2 = \bar{1},9225218$

$1 - \alpha' t = 0,97372033$; $\log.\ (1 - \alpha' t) = \bar{1},9884343$

$\log.\ h \ = 2,8803047$

$\log.\ K \ = \bar{4},0814099$

$\log.\ \gamma \ = \bar{2},8726707$

$\gamma \ = 0,0745883$

9. Equações das distancias zenithaes correctas.

Seja Z o valor exacto de uma distancia zenithal, determinada por n reiterações, e, por cada uma destas : v' e v'' as leituras feitas nas visadas directa e reversa, salvo as primeiras correcções constantes das indicações do nivel ;

γ', γ'' e e', e'' os respectivos coefficientes de refracção e erros de observação.

Os productos daquelles pelo angulo C das verticaes da estação e do ponto visado constituem em valor absoluto as respectivas correcções da refracção, sendo, porém, additiva a da visada directa e subtractiva a da reversa. Designando-se, pois, por V' e V'' os angulos correctos de ambas essas visadas com o raio correspondente ao zero do limbo vertical, tem-se evidentemente: $V' = v' + \gamma' C + e'$, $V'' = v'' - \gamma'' C + e''$, e portanto

$$Z = \frac{V' - V''}{2} = \frac{v' - v''}{2} + \frac{\gamma' + \gamma''}{2} C + \frac{e' - e''}{2} = z + \gamma C + e \text{ (I)}$$

$$= \mathfrak{z} + e \text{ (II)}$$

sendo:

$$z = \frac{V' - V''}{2}, \gamma = \frac{\gamma' + \gamma''}{2}, e = \frac{e' - e''}{2}, \text{e } \mathfrak{z} = z + \gamma C \text{ (III)}$$

Logo, para cada reiteração:

1.°— Abstrahindo-se a correcção da refracção e os erros da observação, a distancia zenithal approximada z correspondente é a semi-differença das leituras directa e reversa;

2.°— A supradita correcção resultaria da multiplicação do angulo das verticaes por um coefficiente igual á semi-somma dos parciaes correspondentes ás visadas directa e reversa;

3.°— Suppondo-a effectuada, o novo valor approximado $\mathfrak{z}$ resultante ainda seria errado da semi-somma dos erros de observação nas supraditas visadas.

A não serem aliás γ' e γ'' determinados rigorosamente, mas sim pela formula approximada (1 *a*), nem por isso deixariam de subsistir as equações acima, devendo, porém, considerar-se incluidos nos erros e' e e'' os resultantes desse modo de determinação.

Applicando-se as equações (II) e (III) successivamente a cada reiteração, addicionando-se as n equações de cada um dos dous grupos resultantes e dividindo-se as sommas por n, acha-se:

$$\frac{\Sigma \mathfrak{z}}{n} = \frac{\Sigma z}{n} + C \frac{\Sigma \gamma}{n} \text{ ou } \tilde{\mathfrak{z}} = \tilde{z} + \tilde{\gamma} C \quad \text{(III')}$$

$$\text{e } Z = \frac{\Sigma \mathfrak{z}}{n} + \frac{\Sigma e}{n} = \tilde{\mathfrak{z}} + \tilde{e} \quad \text{(II')}$$

$$= \tilde{z} + \tilde{\gamma} C + \tilde{e} \quad \text{(I')},$$

$\left(\text{sendo } \tilde{\mathfrak{z}} = \frac{\Sigma \mathfrak{z}}{n}, \tilde{\gamma} = \frac{\Sigma \gamma}{n} \text{ e } \tilde{e} = \frac{\Sigma e}{n}\right)$ equações identicas ás tres correspondentes acima (*), salvo a substituição de z, $\mathfrak{z}$, γ e e pelas médias respectivas.

Logo: Relativamente ás médias dos valores approximados z e $\mathfrak{z}$, o coefficiente de refracção e o erro de observação são tambem as médias dos parciaes correspondentes áquelles.

Designando-se, aliás, por δ a differença $\mathfrak{z} - \frac{\Sigma\, \mathfrak{z}}{n}$ entre qualquer valor de $\mathfrak{z}$ e a respectiva média, se fôr n bastante grande, ter-se-ha, como no caso dos angulos azimuthaes, $\tilde{e} = q\,r$, sendo $r = \frac{\sqrt{\Sigma\, \delta^2}}{m}$, $m = \frac{n(n-1)}{2}$, e q um coefficiente numerico a determinar-se (como ver-se-ha no 3.º estudo)] pelas proprias circumstancias do nivelamento que tiver motivado a determinação da distancia zenithal considerada.

Praticamente, porém, modificar-se-ha o valor de r acima como fica indicado no ultimo paragrapho do estudo precedente.

(*) Nas applicações substituem-se estas áquellas, abstrahindo-se nellas o til indicador das médias.

10. — Tabella de multiplicação das temperaturas pelos coefficientes α e α'.

t	$\alpha\,t$	$\alpha'\,t$	t	$\alpha\,t$	$\alpha'\,t$	t	$\alpha\,t$	$\alpha'\,t$	t	$\alpha\,t$	$\alpha'\,t$
1	0,003.665	0,0010.326	26	0,095 290	0,0268.476	51	0,186.915	0,0526.626	76	0,278.540	0,0784.776
2	7.330	20.652	27	98.955	278.802	52	190.580	536.952	77	282.205	795.102
3	0,010.995	30.978	28	0,102.620	289.128	53	194.245	547.278	78	285.870	805.428
4	14.660	41.304	29	106.285	299.454	54	197.910	557.604	79	289.535	815.754
5	18 325	51.630	30	109.950	309.780	55	201.575	567.930	80	293.200	826.080
6	21.990	61.956	31	113.615	320.106	56	205.240	578.256	81	296.865	836.406
7	25.655	72.282	32	117.280	330.432	57	208.905	588.582	82	300.530	846.732
8	29.320	82.608	33	120.945	340.758	58	212.570	598 908	83	304.195	857.058
9	32.985	92.934	34	124.610	351.084	59	216.235	609.234	84	307.860	867.384
10	36.650	0,0103.260	35	128.275	361.410	60	219.900	619.560	85	311.525	877.710
11	40.315	113.586	36	131.940	371.736	61	223.565	629.886	86	315.190	888.036
12	43.980	123.912	37	135.605	382.062	62	227.230	640.212	87	318.855	898.362
13	47.645	134.238	38	139.270	392.388	63	230.895	650.538	88	322.520	908.688
14	51.310	144.564	39	142.935	402.714	64	234.560	660.864	89	326.185	919.014
15	54.975	154.890	40	146.600	413.040	65	238.225	671.190	90	329.850	929.340
16	58.640	165.216	41	150.265	423.366	66	241.890	681.516	91	333.515	939.666
17	62.305	175.542	42	153.930	433.692	67	245.555	691.842	92	337.180	949.992
18	65.970	185.868	43	157.595	444.018	68	249.220	702.168	93	340.845	960.318
19	69.635	196.194	44	161.260	454.344	69	252.885	712.494	94	344.510	970.644
20	73.300	206.520	45	164.925	464.670	70	256.550	722.820	95	348.175	980.970
21	76.965	216.846	46	168.590	474.996	71	260.215	733.146	96	351.840	991.296
22	80.630	227.172	47	172.255	485 322	72	263.880	743.472	97	355.505	0,1001.622
23	84.295	237.498	48	175.920	495.648	73	267.545	753.798	98	359.170	1011.948
24	87.960	247.824	49	179.585	505.974	74	271.210	764.124	99	362.835	1022.274
25	91.625	258.150	50	183.250	516.300	75	274.875	774.450	100	366.500	1032.600

3.º ESTUDO.

Formulas e correcção dos nivelamentos geodesicos.

(fig. 1) 11. NOTAÇÕES E FORMULAS FUNDAMENTAES.— Sejam h e h' as altitudes dos pontos M e M' acima do nivel do mar $A_0 B_0$; I e S as alturas do instrumento A naquelle e do signal B neste: $\Delta = S - I$ a differença das mesmas; $H = h + I$ e $H' = h' + S$ as altitudes dos pontos A e B; $y = h' - h$ e $Y = H' - H = y + \Delta$ as differenças de nivel dos primeiros e dos ultimos pontos;

Z e Z' as distancias zenithaes de cada um destes relativamente ao outro;

ρ o raio do arco $\lambda = A_0 B_0$.

No triangulo hypsometrico ABC, tem-se $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}$;

$$a - b = Y; \qquad A + B + C = 180^\circ \quad (1)$$

$$a + b = Y + 2b; \quad A + B = 180^\circ - C. \quad \frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} B+C=Z \ (2) \\ A+C=Z' \ (3) \end{array}\right\} A - B = Z' - Z, \text{ e portanto } \frac{Y+2b}{Y} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C}{\operatorname{tg}\dfrac{Z'-Z}{2}}$$

$$\text{ou } \frac{Y}{2b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{Z'-Z}{2}}{\operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}C - \operatorname{tg}\dfrac{Z'-Z}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}C \operatorname{tg}\dfrac{Z'-Z}{2}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}C \operatorname{tg}\dfrac{Z'-Z}{2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}C \operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(Z'-Z)}{\cos\dfrac{1}{2}C \cos\dfrac{Z'-Z}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{1}{2}C \operatorname{sen}\dfrac{Z'-Z}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}C \operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(Z'-Z)}{\operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}(C + Z' - Z)}$$

ora, observando-se que $b = \rho + H = \rho\ (1 + \frac{H}{\rho})$ e que $\frac{H}{\rho}$ e $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (Z' - Z)$ são despresiveis em presença de 1, ter-se-hão as seguintes formulas, exacta e approximada:

$$Y = 2\ (\rho + H) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C \operatorname{sen} \frac{1}{2} (Z' - Z)}{\cos \frac{1}{2} (C + Z' - Z)} = \qquad (I)$$

$$= 2\rho \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \operatorname{tg} \frac{1}{2} (Z' - Z) \qquad (II)$$

Para eliminar-se Z', basta tirar-se successivamente das equações (1) (2) e (3)

$$\left.\begin{aligned} Z + Z' &= 180^\circ + C \\ Z' - Z &= 180^\circ + C - 2\,Z \\ Z' - Z + C &= 180^\circ + 2\,C - 2\,Z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \frac{Z' - Z}{2} &= 90^\circ - (Z - \frac{C}{2}) \\ \frac{Z' - Z + C}{2} &= 90^\circ - (Z - C) \end{aligned}$$

e substituir-se nas formulas precedentes, o que dá:

$$Y = 2(\rho + H) \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \frac{\cos (Z - \frac{C}{2})}{\operatorname{sen} (Z - C)} = \qquad (I')$$

$$= 2\rho \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \operatorname{cotg} (Z - \frac{C}{2}) \qquad (II')$$

Tem-se, aliás, $C \operatorname{sen} 1'' = \frac{\lambda}{\rho}$ ou $C = \frac{\lambda}{\rho \operatorname{sen} 1''}$, e lembrando-se as equações das distancias zenithaes:

$$\underset{(4)}{Z = z + \gamma C + e} = \underset{(5)}{\mathfrak{z} + e}, \text{ sendo } \mathfrak{z} = z + \gamma c \ (6).$$

(fig. 2) 12. Caso particular. — Visadas para o horisonte do mar. — Se a linha de visada $A\,B$ fôr tangente ao horisonte do mar, ter-se-ha:

$B = Z - C = 90^\circ$; $Z = 90^\circ + C$ (7); $Z - \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{C}{2}$, sendo aliás, $Y = -H$.

Substituindo-se esses valores em *(I')* e *(II')*, acha-se :

$$1.^{\circ} - H = 2(\rho + H)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C\left(-\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C\right)$$

$$= -2(\rho + H)\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,C,$$

ou $H\left(1 - 2\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,C\right) = 2\,\rho\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,C.$

Ora, $1 - 2\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,C = \cos^2\frac{1}{2}\,C - \text{sen}^2\,\frac{1}{2}\,C = \cos C$

$$2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C\cos\frac{1}{2}\,C = \text{sen}\,C, \text{ ou } 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C = \frac{\text{sen}\,C}{\cos\frac{1}{2}\,C};$$

logo, $H\cos C = \rho\,\text{sen}\,C\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,C$

$$\text{ou } H = \rho\,\text{tg}\,C\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,C \qquad (III)$$

$$2.^{\circ} - H = 2\,\rho\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,C\left(-\text{tg}\,\frac{1}{2}\,C\right) = -2\,\rho\,\text{tg}^2\,\frac{1}{2}\,C$$

$$\text{ou } H = 2\,\rho\,\text{tg}^2\,\frac{1}{2}\,C. \qquad (III')$$

Em cada uma dessas formulas fazendo-se approximadamente $\text{tg}\,\frac{1}{2}\,C = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,C$ (*) acha-se em ambos os casos:

$$H = \frac{1}{2}\,\rho\,\text{tg}^2\,C \qquad (III'')$$

Aliás, tem-se então :

$S = o$, e portanto $\Delta = I$ e $h = H - I$ (8)

Finalmente igualando-se os valores (4) e (7) de Z, acha-se: $90^{\circ} + C = z + \gamma C + e$, d'onde :

$$C\,(1-\gamma) = Z - 90 + e$$

$$\text{ou } C = \frac{Z - 90 + e}{1 - \gamma} \qquad (IV)$$

(*) Visto como, em geral, para x pequeno tem-se sensivelmente $\text{tg}\,mx = m\,\text{tg}\,x$.

13. Transformação da formula approximada (II').— Subtrahindo-se de $90+\frac{C}{2}$ cada membro da equação (5), tem-se: $90-Z+\frac{C}{2}=90-\zeta+\frac{C}{2}-e=\varphi-e$ (fazendo-se abreviadamente $90-\zeta+\frac{2}{C}=\varphi$), d'onde:

$$Z-\frac{C}{2}=90-(\varphi-e),\ \text{e portanto:}$$

$$\operatorname{cotg}\left(Z-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{tg}(\varphi-e)=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}e}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}e}=\frac{(\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}e)(1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}e)}{(1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}e)(1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}e)}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}e-\operatorname{tg}^2.\varphi\operatorname{tg}e-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}^2.e}{1-\operatorname{tg}^2.\varphi\operatorname{tg}.^2e}$$

$$=\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}e\,(1+\operatorname{tg}.^2\varphi)=\operatorname{tg}\varphi-\sec.^2\varphi\operatorname{tg}e$$

desprezando-se os termos em $\operatorname{tg}.^2 e$.

Substituindo-se em (II') e fazendo-se nesta $2\rho\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=T$ acha-se: Y ou $y+\Delta=T(\operatorname{tg}\varphi-\sec.^2\varphi\operatorname{tg}e)$, d'onde, tirando-se o valor de y, e fazendo-se approximadamente $\operatorname{tg}e=e\operatorname{sen}1''=q\,r\operatorname{sen}1''$:

$y=T\operatorname{tg}\varphi-\Delta-T\,r\sec.^2\varphi\operatorname{sen}1''\,q=b-aq$, (V) sendo $a=Tr\sec.^2\varphi\operatorname{sen}1''$ e $b=T\operatorname{tg}\varphi-\Delta$.

N. B. Póde-se muitas vezes, sem erro sensivel, substituir T por λ. Com effeito, fazendo-se $x=\frac{1}{2}C\operatorname{sen}1''=$ $=\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\rho}$, tem-se $\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{3.5}+\ldots\ldots.$ ou, passando-se x para o 1.º membro e desprezando-se os termos de gráo superior ao 3.º: $\operatorname{tg}x-x=\frac{x^3}{3}$.

Multiplicando-se por 2ρ e substituindo-se x por seu valor, acha-se: $2\rho\operatorname{tg}\frac{1}{2}C-\lambda$ ou $T-\lambda=\frac{1}{12}\frac{\lambda^3}{2}$.

Querendo-se saber para que valor de λ reduzir-se-hia esta differença a 1^{mm}, far-se-hia $\frac{1}{12}\frac{\lambda}{\rho^2}=0{,}001$ ou $\lambda^3=0{,}012\,\rho^2$.

Ora $\log \rho = 6{,}8048633$; $\log \rho^2 = 13{,}6097266$

$\lg 0{,}012 = \bar{2}{,}0791813$

d'onde: $\log \lambda^3 = 11{,}6889079$

$\log \lambda = 3{,}8963026$ e $\lambda = 7875^m{,}944$.

Abaixo deste limite o erro resultante da referida substituição seria sempre $< 1^{mm}$.

Foram neste caso todas as distancias contempladas no § IV do Appendice.

(fig. 3) 14. Theoria das visadas successivas.—Considerando-se $p+1$ pontos M_0, M_1, M_2, ... M_{p-1}, M_p de altitudes h_0, h_1, h_2 ... h_{p-1}, h_p, visados successivamente cada um do precedente, e suppondo-se conhecida a differença de nivel $y_0 = h_p - h_0$ dos extremos, seja proposto determinar-se as successivas $y_1 = h_1 - h_0$. $y_2 = h_2 - h_1$ .... $y_p = h_p - h_{p-1}$, entre cada um e o precedente.

Addicionando-se estas p ultimas equações e simplificando-se o total, tem-se:

$$\Sigma\, y = h_p - h_0 = y_0 \text{, (VI)}$$

o que mostra que:—A somma algebrica das denivelações successivas iguala á dos pontos extremos.

Applicando-se, aliás, a equação geral (V) successivamente ás p visadas e sommando-se, ter-se-ha:

$$\Sigma\, y \text{ ou } y_0 = \Sigma\, b - \Sigma\, aq \text{ (VII)}$$

A não haver mais condição alguma para preencher-se, far-se-ha $q_1 = q_2 = \ldots\ldots = q_{p-1} = q_p$, isto é, q constante, d'onde: $y_0 = \Sigma\, b - q\, \Sigma\, a$, e portanto $q = \dfrac{\Sigma\, b - y_0}{\Sigma\, a}$.

Casos particulares.—I. Se os pontos extremos são de nivel ou coincidem, tem-se $y_0 = o$ e $q = \dfrac{\Sigma\, b}{\Sigma\, a}$.

(fig. 4) II. Considerando-se sómente tres pontos e designando-se por y e y' suas denivelações successivas, terse-hia $q = \frac{b + b' - y_0}{a + a'}$.

III. Se então $y_0 = o$, $q = \frac{b + b'}{a + a'}$.

(fig. 5) 15. Visadas reciprocas. — Se neste ultimo caso particular M e M'' coincidem, as duas visadas (ditas então reciprocas) são dirigidas em sentidos contrarios no mesmo plano vertical, e quasi segundo a mesma recta, sendo ditas conjugadas as respectivas differenças de nivel iguaes e de signaes contrarios.

(fig. 6) Caso particular.—As visadas reciprocas feitas de instrumento a instrumento são directamente oppostas, as respectivas distancias zenithaes satisfazendo então á equação:

$$Z + Z' = 180^\circ + C.$$

Ora, $Z = \zeta + e$, $Z' = \zeta' + e'$, $\varphi = 90^\circ - \zeta + \frac{C}{2}$, $\varphi' = 90^\circ - \zeta' + \frac{C}{2}$, d'onde, por addição das quatro ultimas equações, e subtracção da 1.ª: $\varphi + \varphi' = e + e' = qr + q'r'$, e finalmente:

$$q = q' = \frac{\varphi + \varphi'}{r + r'}.$$

Assim simplifica-se, nesta hypothese, a determinação de q.

(fig. 7.) 16. Visadas successivas reciprocas duas a duas Imaginando-se que, depois de feitas p visadas successivas, volte-se de M_p para M_0 por p visadas reciprocas das p primeiras, cada uma a cada uma; designando-se então todas as quantidades relativas a duas visadas reciprocas pelas mesmas notações, salvo o accento ' nas reversas, e applicando-se ás reversas e a cada par de reciprocas a equação geral (VI); ter-se-ha, além desta, p parciaes da fórma $y + y'$ ou $b + b' - (aq + a'q') = o$, ou ainda $b + b' = aq + a'q'$ (1), isto é, $p + 1$ equações a $2\,p$ incognitas.

Para remediar-se esta indeterminação exprimir-se-hão q e q' em funcção das suas semi-sommas e differença σ e δ, considerando-se esta ultima constante.

Tem-se assim: $q = \sigma + \delta$, $q' = \sigma - \delta$, e substituindo-se em (1): $b + b' = a\ (\sigma + \delta) + a'\ (\sigma - \delta) = \sigma\ (a + a')$ $+ \delta (a - a')$, d'onde: $\sigma = \dfrac{b + b' - \delta (a - a')}{a + a'} = \beta - \alpha\delta$ (2),

fazendo-se abreviadamente $\dfrac{a - a'}{a + a'} = \alpha$ e $\dfrac{b + b'}{a + a'} = \beta$

Substituindo-se, aliás, na equação (VI) q por seu valor $\sigma + \delta = \beta + \delta\,(1 - \alpha)$, acha-se:

$y_0 = \Sigma\, b - \Sigma\, a\,(\beta + \delta\,(1 - \alpha)) = \Sigma\,(b - a\,\beta) - \delta\Sigma\, a\,(1 - \alpha)$ $= \Sigma\, B - \delta\,\Sigma\, A$, fazendo se $a\,(1 - \alpha) = A$ e $b - a\,\beta = B$, d'onde emfim: $\delta = \dfrac{\Sigma\, B - y_0}{\Sigma\, A}$

CASOS PARTICULARES. I.—Se os pontos extremos são de nivel ou coincidem, tem-se $y_0 = o$ e $\delta = \dfrac{\Sigma\, B}{\Sigma\, A}$.

(fig. 8) II. Se forem $p = 2$, e os tres pontos designados por M, M' e M'', substituir-se-ha o indice 1 ao accento ′ na designação das quantidades relativas ás visadas reversas, tendo-se assim para estas y_1, y'_1 ; q_1, q'_1 e para as directas y, y' ; q, q'.

(fig. 9) III. Se forem $p = 3$ e os pontos extremos coincidentes, isto é, no caso do nivelamento simultaneo e reciproco dos tres vertices de um triangulo, modificar-se-hão as notações geraes como no 2.° caso particular acima, applicando-se porém a formula do 1.°

No appendice encontrar-se ha um completo exemplo do 3.°

17.— VISADAS CONVERGENTES OU DIVERGENTES.

PROBLEMA.—Conhecendo-se a differença de nivel y_0 de dous pontos M e M' determinar-se as y e y', quér de um 3.º ponto relativamente aos dous primeiros (fig. 10), quér destes relativamente áquelle (fig. 11).—Afim de identificar-se as duas soluções, das differenças de nivel iguaes e de signaes contrarios entre os dous primeiros pontos, escolher-se-ha sempre para y_0 a correspondente á visada do mesmo sentido que y_1, isto é, de M para M' (fig. 10) ou de M' para M (fig. 11).

Isto posto, sendo y_1 a denivelação conjugada de y, aquella, y' e y_0 são em ambos os casos (com a só differença da ordem) tres visadas successivas, tendo-se portanto $y_0 + y_1 + y' = o$ e bem assim $y + y_1 = o$. Subtrahindo-se esta ultima equação da precedente acha-se: $y_0 + y' - y = o$ ou $y - y' = y_0$ (1)

Ora $y = b - aq, y' = b' - a'q'$; d'onde, por subtracção, suppondo-se $q' = -q$, $y - y'$ ou $y_0 = b - b' = q\ (a + a')$ e finalmente $q = \frac{b - b' - y_0}{a + a'}$.

CASO PARTICULAR.— Se M e M' são de nivel ou coincidem, tem-se $y_0 = o$, $y' = y$ e $q = \frac{b - b'}{a + a'}$.

N. B. Achar-se-hia realizada a 2.ª hypothese, se se tratasse de determinar uma differença de nivel por meio de dous grupos distinctos de reiterações, com o fim de remediar-se a indeterminação de q. Neste caso, porém, seria mais simples fazer-se $Z = \zeta + e$, e $Z' = \zeta' + e'$, d'onde $e - e'$ ou $q(r + r') = \zeta' - \zeta$, e portanto $q = \frac{\zeta' - \zeta}{r + r'}$

§ *III. — 24. Determinação das distancias zenithaes e respectivos erros medios.*

ESTAÇÕES.	PONTOS VISADOS.	ANGULOS DAS VERTICAES.	NUMERAÇÃO DAS REITERAÇÕES.	REFRACÇÃO.		DISTANCIAS ZENITHAES.		AFASTAMENTOS DA MÉDIA.		QUADRADO DOS MESMOS.
				COEFFICIENTES.	CORRECÇÕES.	OBSERVADAS.	CORRECTAS.	+	—	
					′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	
S. Christovão.	Castello	3,20.799	1.ª	0,07166336	14.39	90.33.	90.33.14,39	2,371	......	5,621641
			2.ª	7444476	14,948	32.58,135	13,083	1,064	......	1,132096
			3.ª	7472523	15,005	53,58	8,585	......	3,434	11,792356
			Total...	0,22083335	44,343	271.38.51,715	271.39.36,038	3,435	2,434	18,546093
			Termos e erro médios........	0,07361112	14,781	90.32.57,238	90.33.12.019	......	......	2,486
	Bom Jesus....	2,56.493	1.ª	0,07223972	12,75	90.56.25,115	90.56.37,865	......	7,104	50,466816
			2.ª	7441024	13,133	31,685	44,818	......	0,151	0,022801
			3.ª	7389132	13,041	28,57	41,611	......	3,358	11,276164
			4.ª	7480069	13,201	34,89	48,091	3,122	......	9,746884
			5.ª	7312519	12,906	39,48	52,386	7,417	......	55,011889
			6.ª	7291115	12,868	33,17	46,038	1,069	......	1,142761
			7.ª	7178870	12,67	31,325	43,995	......	0,974	0,948676
			8.ª	7349082	12,97	30,805	43,775	......	1,194	1,425636
			9.ª	7582584	13,383	37,155	50.538	5,569	......	31,013761
			10.ª	7355834	12,982	40,855	53,837	8,868	......	78,641424
			11.ª	7283121	12,854	18,85	31,704	......	13,265	175,960225
			Total...	0,80887262	2.22,758	1000.21.51,9	1000.24.14,658	36,045	26,016	415,657037
			Termos e erro médios........	0,07353387	12,978	90.56.31,991	90.56.44,969	......	......	2,749
Castello.	S. Christovão.	3,20.799	1.ª	0,0771862	15,499	89.26. 9,825	89.26.25,324	0,92	.....	0,8464
			2.ª	771646	15,494	7,99	23,484	......	0,92	0,8464
			Total...	0,1543478	30,993	178.52.17,815	178.52.48,808	0,92	0,92	1,6928
			Termos e erro médios........	0,0771739	15,496	89.26. 8,908	89.26.24,404			1,301
	Bom Jesus....	3,32.53	1.ª	0,0785606	16,696	90.14.51,335	90.15. 8,031	0,57	......	0,3249
			2.ª	785120	686	50,205	6,891	......	0,57	0,3249
			Total...	0,1570726	33,382	180.29.41,54	180.30.14,922	0,57	0,57	0,6498
			Termos e erro médios........	0,0785363	16,691	90.14.50,77	90.15. 7,461	......	......	0,806
Bom Jesus.	S. Christovão.	2.56,493	1.ª.............	0,07764412	13,704	89. 5.20,035	89. 5.32,739	......	7,212	52,012944
			2.ª.............	7635623	476	25,99	39,466	......	1,485	2.205225
			3.ª.............	7745392	670	13	26,67	......	14,281	203 946961
			4.ª.............	7748135	675	49,39	6. 3,065	22,114	......	483 028996
			5.ª.............	7672429	541	23.745	5.37,286	......	3,665	13,432225
			6.ª.............	7620826	450	32,03	45,48	4,529	......	20,511841
			Total...........	0,46186817	1.21,516	534.32.44, 19	534.34. 5,706	26,643	26,643	781,138192
			Termos e erro médios.......	0,07697803	13,586	89. 5 27,365	89. 5.40,951	......	......	7,216
	Castello......	3.32,53	1.ª.............	0,07516212	15,974	89.45.59,875	89.46.15,849	......	1, 63	2,6569
			2.ª.............	7235270	376	53,94	9.316	......	8.163	66,634569
			3.ª.............	7252286	413	46. 7,655	23.068	5.589	......	31,236921
			4.ª.............	7450152	834	4,96	20.794	3.315	......	10,989225
			5.ª.............	7456450	847	1,975	17.822	0,343	......	0,117649
			6.ª.............	7376775	678	2.345	18,023	0,544	.....	0,295936
			Total...........	0,44287145	1.34,122	538.36.10.75	538 37.44,872	9,791	9,793	111,931200
			Termos e erro médios.......	0,0738191	15,687	89.46. 1,792	89.46.17,479	......	......	2,732

APPENDICE.

Resolução e nivelamento geodesico correctos do triangulo de 1.ª ordem.

S. Christovão *(A)*, **Castello** *(B)*, **Bom Jesus** *(C)*.

§ I. 18. — *Determinação dos angulos azimuthaes e respectivos erros médios.*

ANGULOS.			AFASTAMENTOS DA MÉDIA.		QUADRADOS DOS MESMOS
Designações.	Numeração das reiterações.	Valores.	+	—	
A	1.ª	° ' " 68.12.54,375	....	" 14,062	197,739844
	2.ª	16,25	" 7,813	....	61,042969
	3.ª	10,25	1,563	....	2,442969
	4.ª	1,25	....	7,187	51,652969
	5.ª	16,25	7,813	....	61,042969
	6.ª	10	1,563	....	2,442969
	7.ª	2,5	....	5,937	35,247969
	8.ª	16 875	8,438	....	71,199844
	Total....	545.45. 7,5	27,190	27,186	482,812502
	Termo e erro médios....	68.13. 8,437	....	......	4,152
B	1.ª	50.27.15,5	....	16,522	274,299844
	2.ª	36,25	7,188	....	51,667344
	3.ª	51,25	22,188	....	492,307344
	4.ª	16,25	....	12,812	164,147344
	Total....	201.49.56,25	29,376	29,374	982,421876
	Termo e erro médios....	50.27.29,062	....	....	12,796

Angulos azimuthaes (continuação).

ANGULOS.			AFASTAMENTOS DA MÉDIA.		QUADRADOS DOS MESMOS
Designação.	Numeração das reiterações.	Valores.	+	—	
		° ' "		"	
C	1.ª	61.19.27,5	....	0,651	0,423801
	2.ª	21,25	....	6,901	47,623801
	3.ª	22,75	....	5,401	29,170801
	4.ª	23,75	....	4,401	19,368801
	5.ª	27,5	....	0,651	0,423801
			"		
	6.ª	31,25	3,099	....	9,603801
	7.ª	24,288	6,137	....	37,662769
	8.ª	30,32	2,169	....	4,704561
	9.ª	5,25	....	22,901	524,455801
	10.ª	27,93	....	0,221	0,048841
	11.ª	37,65	9,499	....	90,231001
	12.ª	21,45	....	6,701	44,903401
	13.ª	37,65	9,499	....	90,231001
	14.ª	39,675	11,524	....	132,802576
	15.ª	27,849	....	0,302	0,091204
	16.ª	21,45	....	6,701	44,903401
	17.ª	26,512	....	1,639	2,686321
	18.ª	27,12	....	1,031	1,062961
	19.ª	43,725	15,574	....	242,549476
	Total....	1165.19.54,869	57,501	57,501	1322,948120
	Termo e erro médios....	61.19.28,151	....	....	2,781

§ II. Resolução.

19. DADOS.

ANGULOS.		NUMERO DE REITERAÇÕES.	ERROS PROPORCIONAES.		
Designações.	Valores.		Calculados. (r_c)	Tabulares. (r_t)	Correctos. (r)
	° ′ ″		″	″	″
A	68.13. 8,437	8	4,153	4,287	4,22
B	50.27.29,062	4	12,806	6,062	9,429
C	61.19.28,151	19	2,782	2,782	2,782
Total.	180. 0. 5,65		19,741	13,131	16,431 (Σr)
Lado medido c=6211^m,543					

XX. PRIMEIRA APPROXIMAÇÃO DOS ANGULOS DO TRIANGULO RECTILINEO EQUIVALENTE E DO EXCESSO ESPHERICO.

1.° *Angulos.*

DESIGNAÇÕES.	DIFFERENÇAS COM OS ESPHERICOS ACIMA.	VALORES.
	″	° ′ ″
A	1,833	68.13. 6,554
B	1,833	50.27.27,179
C	1,844	61.19.26,267
Total.	$\triangle = 5,65$	180. 0. 0.

2.º EXCESSO ESPHERICO.—Formula : $\varepsilon = \frac{\theta}{\rho^2 \text{ sen } 1''} =$
$\frac{bc \text{ sen } A}{2\rho^2 \text{ sen } 1''} = k\ bc \text{ sen } A = k\ c^2 \frac{\text{sen } A \text{ sen } B}{\text{sen } C}$ (sendo $\theta =$
$= \frac{1}{2}\ bc$ sen A a área do triangulo, ρ o raio da esphera os
culatriz, $k = \frac{1}{2\ \rho^2 \text{ sen } 1''}$ e $b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen A}}$)

$$
\begin{aligned}
\log.\ \rho = 6{,}804.8633\ ;\ \log.\ \rho^2 &= 13{,}609.7266 \\
\log.\ \text{sen}.\ 1'' &= \overline{16}{,}685.5749 \\
\log.\ 2 &= 0{,}301.0300 \\
\hline
\log.\ 2\ \rho^2\ \text{sen}.\ 1'' &= 8{,}596.3315 \\
\log.\ k = \overline{\log}.\ 2\rho^2\ \text{sen}.\ 1'' &= \overline{9}{,}403.6685 \\
\log.\ c = 3{,}793.1995\ ;\ \log.\ c^2 &= 7{,}586.3990 \\
\log.\ \text{sen}.\ A &= \overline{1}{,}967.8313 \\
\log.\ \text{sen}.\ B &= \overline{1}{,}887.1406 \\
\log.\ \text{sen}\ (C = \overline{1}{,}9431714\ ;\ \overline{\log}.\ \text{sen}.\ C &= 0{,}056.8286 \\
\hline
\log.\ \varepsilon &= \overline{2}{,}901.8680
\end{aligned}
$$

$\varepsilon = 0{,}07977522$, seja 0,08.

21.— DETERMINAÇÃO DOS ERROS PROVAVEIS ($e = qr$, sendo $q = \frac{\Delta - \varepsilon}{\Sigma r}$) e correcção dos angulos.

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 5'',65 \\
\varepsilon &= 0\ ,08 \\
\hline
\Delta - \varepsilon &= 5'',57
\end{aligned}
$$

$\log.\ \Sigma r = 1{,}215.6640$

$\overline{\log}.\ \Sigma r = \overline{2}{,}784.3360$
$\log.\ (\Delta - \varepsilon) = 0{,}745.8552$

$\log.\ q =$	$\overline{1}{,}530.1912$......	$\overline{1}{,}530.1912$.......	$\overline{1}{,}530.1912$
$\log.\ r =$	0,625.3125......	0,974.4656.......	0,444.3571
$\log.\ e =$	0,155.5037......	0,504.6568.......	$\overline{1}{,}974.5483$

DESIGNAÇÃO DOS ANGULOS.	CORRECÇÕES.			VALORES CORRECTOS DOS ANGULOS.	
	Erros provaveis. (e)	Excessos esphericos. $(\frac{1}{3}\varepsilon)$	Total.	Esphericos.	Rectilineos.
	$''$	$''$	$''$	$°\ '\ ''$	$°\ '\ ''$
A	— 1,431	— 0,027	— 1,458	68.13. 7,006	68.13. 6,979
B	— 3,196	— 0,027	— 3,223	50.27.25,866	50.27.25,839
C	— 0,943	— 0,026	— 0,969	61.19.27,208	61.19.27,182
Total.	— 5,57	— 0,08	— 5,65	180. 0. 0,08	180. 0. 0.

22. — Determinação dos lados a e b e conferencia do excesso espherico.

$$\log.\ \text{sen}\ C = \bar{1},943.1724$$

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{\log}.\ \text{»} & = 0,056.8276 \\ \log.\ c & = 3,793.1995\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3,859.0271$$

$$\left.\begin{array}{ll}\log.\ c & = 3,793.1995 \\ \log.\ \text{sen}\ A & = \bar{1},967.8317\end{array}\right\} (\star)$$

$$\log.\ a = 3,817.8588$$

$$\log.\ \text{sen}\ B = \bar{1},887.1383$$

$$\log.\ b = 3,737.1654$$

$$(\star)\ \log\ \text{c. sen}\ A = 3,761.0312$$

$$\log.\ k = \bar{9},403.6685$$

$$\log.\ \varepsilon = \bar{2},901.8651$$

$$a = 6574^m,411$$

$$b = 5459^m,658$$

$\varepsilon = 0'',0797747$ seja $0'',08$.

23. — Expressão dos tres lados em minutos e segundos:

$$\log.\ \rho \qquad = 6{,}804.8633$$

$$\log.\ \text{sen}\ 1'' = \bar{6}{,}685.5749$$

$$\log.\ \rho\ \text{sen}\ 1'' = 1{,}490.4382$$

$$\overline{\log}.\ \ \text{»} \qquad = \bar{2}{,}509.5618 \ldots\ldots\ldots \bar{2}{,}509.5618 \ldots\ldots\ldots \bar{2}{,}509.5618$$

$$\log.\ a \qquad = 3{,}817.8588;\ \log.\ b = 3{,}737.1654;\ \log.\ c = 3{,}793.1995$$

$$\log.\ \widehat{a} \qquad = 2{,}327.4206;\ \log.\ \widehat{b} = 2{,}246.7272;\ \log.\ \widehat{c} = 1{,}302.7613$$

$$\widehat{a} = 212'',53 \qquad = 3'.32'',53$$

$$\widehat{b} = 176{,}493 \qquad = 2.56{,}493$$

$$\widehat{c} = 200{,}799 \qquad = 3.20{,}799$$

§ IV. NIVELAMENTO.

25. *Calculo de r, φ, a e b.*

	M (S. Christovão.)	M' (Castello.)		M'' (Bom Jesus.)		M'''=M
r_c	2,486	1,301	0,806	2,732	7,216	2,749
r_t	7	8,573	8,573	4,95	4,95	3,656
$r_c + r_t$	9,486	9,874	9,379	7,682	12,166	6,405
r	4,743	4,937	4,689	3,841	6,083	3,203
ζ	90°33'12",019	89°26'24",404	90°15' 7",461	89°46'17",479	89° 5'40",951	90°56'44",969
$90-\zeta$	−33 12 ,019	33 35 ,596	−15 7 ,461	13 42 ,521	54 19 ,049	−56 44 ,969
$\frac{C}{2}$	1 40 , 4	1 40 , 4	1 46 ,265	1 46 ,265	1 28 ,246	1 28 ,246
φ	−31 31 ,629	35 15 ,996	−13 21 ,196	15 28 ,786	55 47 ,295	−55 16 ,723
log. cos. φ	$\bar{1}$,9999818	$\bar{1}$,9999772	$\bar{1}$,9999967	$\bar{1}$,9999956	$\bar{1}$,9999428	$\bar{1}$,9999438
log. sec. φ	0,0000182	0,0000228	0,0000033	0,0000044	0,0000572	0,0000562
log. sec.^{2} φ	0,0000364	0,0000456	0,0000066	0,0000088	0,0001144	0,0001124
log. r	0.6760531	0,6934631	0,6710802	0,5844443	0,7841178	0,5055569
log. T	3,7931995	3,7931995	3,8178588	3,8178588	3,7371654	3,7371654
log. sen. 1"	$\bar{6}$,6855749	$\bar{6}$,6855749	$\bar{6}$,6855749	$\bar{6}$,6855749	$\bar{6}$,6855749	$\bar{6}$,6855749
log. a	$\bar{1}$,1548639	$\bar{1}$,1722831	$\bar{1}$,1745205	$\bar{1}$,0878868	$\bar{1}$,2069725	$\bar{2}$,9284096
log. tg. φ	$\bar{3}$,9624207	$\bar{2}$,0111050	$\bar{3}$,5893158	$\bar{3}$,6534929	$\bar{2}$,2103070	$\bar{2}$,2063215
log. T	3,7931995	3,7931995	3,8178588	3,8178588	3,7371654	3,7371654
log. T tg. φ	1,7556202	1,8043045	1,4071746	1,4713517	1,9474724	1,9434869
S	4^m,72	4^m,8	1^m,47	4^m,72	4^m,5	0
I	2	0 ,681	0 ,681	1 ,65	1 ,69	2
$\Delta = S - I$	2 ,72	4 ,119	0 ,789	3 ,07	2 ,81	− 2
T tg. φ	−56 ,966.59	63 ,724.21	−25 ,537.28	29 ,604.09	88 .607.9	−87,798.46
b	−59 .686.59	59 ,605.21	−26 ,326.28	26 ,534.09	85 ,797.9	−85,798.46

26. *Calculo de α, β, A e B.*

a	0,1428446	0,1494584	0,1610544
a_1	0,1486904	0,1224297	0,0848027
$a + a_1$	0,2915350	0,2718881	0,2458571
$a - a_1$	− 0,0058458	0,0270287	0,0762517
b	−59,68658	−26,32628	85,7979
b_1	59,60521	26,53409	−85,79846
$b + b_1$	− 0,08137	0,20781	− 0,00056
log. $(a+a_1)$	$\bar{1}$,4646907	$\bar{1}$,4343902	$\bar{1}$,3906828
$\overline{\text{log}}$. »	0,5353093	0,5656098	0,6093172
log. $(a-a_1)$	$\bar{3}$,7668440	$\bar{2}$,4318252	$\bar{2}$,8822495
log. α	$\bar{2}$,3021533	$\bar{2}$,9974350	$\bar{1}$,4915667
log. a	$\bar{1}$,1548639	$\bar{1}$,1745205	$\bar{1}$,2069725
log. $\alpha\, a$	$\bar{3}$,4570172	$\bar{2}$,1719555	$\bar{2}$,6985392
log. $(b+b_1)$	$\bar{2}$,9104643	$\bar{1}$,3176664	$\bar{1}$,7481880
log. »	0,5353093	0,5656098	0,6093172
log. β	$\bar{1}$,4457736	$\bar{1}$,8832762	$\bar{3}$,3575052
log. a	$\bar{1}$,1548639	$\bar{1}$,1745205	$\bar{1}$,2069725
log. $\beta\, a$	$\bar{2}$,6006375	$\bar{1}$,0577967	$\bar{5}$,5644777
a	0,1428446	0,1494584	0,1610544
$\alpha\, a$	− 0,0028643	0,0148578	0,0499504
$A = a\,(1-\alpha)$	0,1457089	0,1346006	0,1111040
b	−59,68659	−26,32618	85,79790
$\beta\, a$	− 0,03986.9	0,11423	−0,00003.6684
$B = b - \beta\, a$	−59,64672	−26,44041	85,79794

27. *Calculo de δ.*

$A = 0,1457089$	$B = -\ 59,64672$	$-86,08713$
$A' = 0,1346006$	$B' = -\ 26,44041$	
$A'' = 0,1111040$	$B'' = \dots\dots\dots\dots$	$85,79794$
$\Sigma\ A = 0,3914135$	$\Sigma\ B = \dots\dots\dots\dots$	$-\ 0,28919$
log. » $= \bar{1},5926358$	log. » $= \bar{1},4611833$	
	$\overline{\log}.\ \Sigma\ A = 0,4073642$	
	log. $\delta = \bar{1},8685475$	

28. *Calculo de σ, q e q_1.*

log. α	$\bar{2},3021533$	$\bar{2},9974350$	$\bar{1},4915667$
log. δ	$\bar{1},8685475$	$\bar{1},8685475$	$\bar{1},8685475$
log. $\alpha\ \delta$	$\bar{2},1707008$	$\bar{2},8659825$	$\bar{1},3601142$

β	$-\ 0,2791088$	$0,7643218$	$-\ 0,0022777$
$\alpha\ \delta$	$0,0148150$	$-\ 0,0734484$	$-\ 0,2291470$
$\sigma = \beta - \alpha\ \delta$	$-\ 0,2939238$	$0,8377702$	$0,2268693$
δ	$-\ 0,7388350$	$-\ 0,7388350$	$-\ 0,7388350$
$q = \sigma + \delta$	$-\ 1,0327588$	$0,0989352$	$-\ 0,5119657$
$q_1 = \sigma - \delta$	$0,4449112$	$1,5766052$	$0,9657043$

29.—*Calculo de* y, *e* e Z.

log. q	0,0139990	$\bar{1}$,6482734	$\bar{2}$,9953587	0,1977229	$\bar{1}$,7092409	$\bar{1}$,9848441
log. a	$\bar{1}$,1548639	$\bar{1}$,1722831	$\bar{1}$,1745205	$\bar{1}$,0878868	$\bar{1}$,2069725	$\bar{2}$,9284096
log. aq	$\bar{1}$,1688629	$\bar{2}$,8205565	$\bar{2}$,1698792	$\bar{1}$,2856097	$\bar{2}$,9162134	$\bar{2}$,9132537

b	— 59,686.59	59,605.21	—26,326.28	26,534.09	85,797.90	—85,788.46
aq	— 0,147.52	0,066.154	0,014.787	0,193.02	— 0,082.454	0,081.894
$y = b - aq$	— 59,539.07	59,539.06	—26,341.07	26,341.07	85,880.35	—85,880.35

log. q	0,0139990	$\bar{1}$,6482734	$\bar{2}$,9953587	0,1977229	$\bar{1}$,7092409	$\bar{1}$,9848441
log. r	0,6760531	0,6934631	0,6710802	0,5844443	0,7841178	0,5055549
log. e	0,6900521	0,3417365	$\bar{1}$,6664389	0,7821672	0,4933587	0,4903990

	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
e	— 4,898.4	2,196.5	0,463.91	6,055.7	— 3,114.3	3,093.1
ζ	90.33.12,019	89.26.24,404	90.15. 7,461	89.46.17,479	89. 5.40,951	90.56.44,969
$Z = \zeta + e$	90 33. 7,221	89.26.26,601	90.15. 7,925	89.46.23,535	89. 5.37,837	90 56.48,062

30.—*Recapitulação dos resultados acima e conferencia do nivelamento.*

1.° Erros provaveis.

$$
\begin{array}{ll|ll}
e & = -\ 4{,}898'' & e_1 & = 2{,}197'' \\
e' & = \quad 0{,}464 & e'_1 & = 6{,}056 \\
e'' & = -\ 3{,}114 & e''_1 & = 3{,}093
\end{array}
$$

2.° Distancias zenithaes correctas.

$$
\begin{array}{ll|ll}
Z & = 90^\circ.33'.\ 7{,}221'' & Z_1 & = 89^\circ.26'.26{,}601'' \\
Z' & = 90.15.\ 7{,}925 & Z'_1 & = 89.46.23{,}535 \\
Z'' & = 89.\ 5.37{,}837 & Z''_1 & = 90.56.48{,}062
\end{array}
$$

3.° Differenças de nivel.

$$
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} y = -\ 59{,}539^{\mathrm{m}} \\ y' = -\ 26{,}341 \end{array}\right\} -\ 85{,}880^{\mathrm{m}} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} y_1 = 59{,}539^{\mathrm{m}} \\ y'_1 = 26{,}341 \end{array}\right\}\ 85{,}880^{\mathrm{m}} \left\{\begin{array}{l} y + y_1 = 0 \\ y' + y'_1 = 0 \end{array}\right. \\
y'' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 85{,}880 \ldots\ldots\ldots\ldots\ y''_1 = \ldots\ldots\ldots\ 85{,}880 \quad y'' + y''_1 = 0 \\
\Sigma y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \Sigma y_1 = \ldots\ldots\ldots\ 0
\end{array}
$$

Figuras relativas ao 3º Estudo.

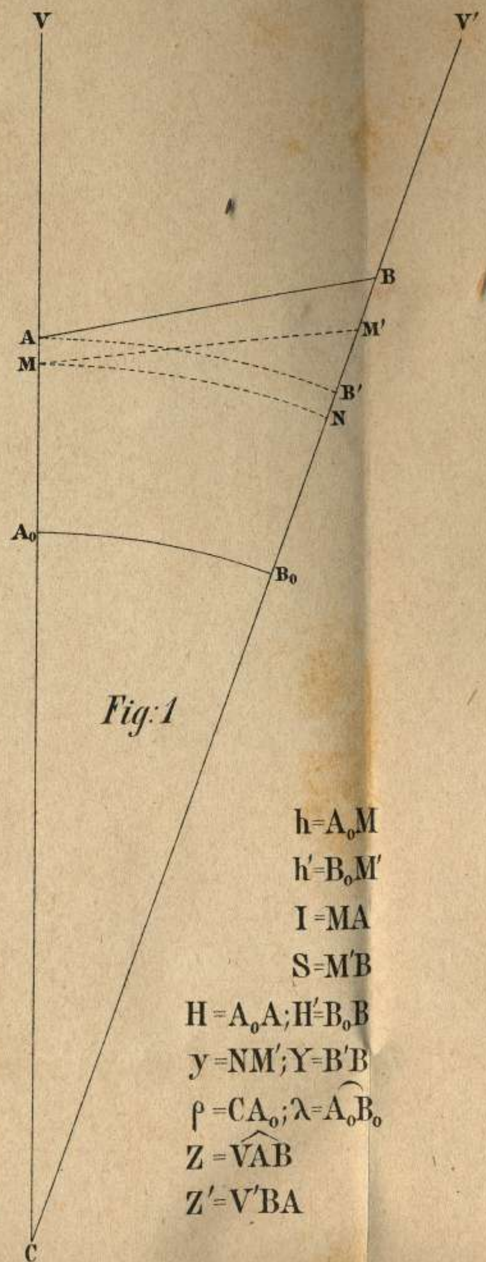

Fig: 1

$h = A_0M$

$h' = B_0M'$

$I = MA$

$S = M'B$

$H = A_0A;\ H' = B_0B$

$y = NM';\ Y = B'B$

$\rho = CA_0;\ \lambda = \widehat{A_0B_0}$

$Z = \widehat{VAB}$

$Z' = V'BA$

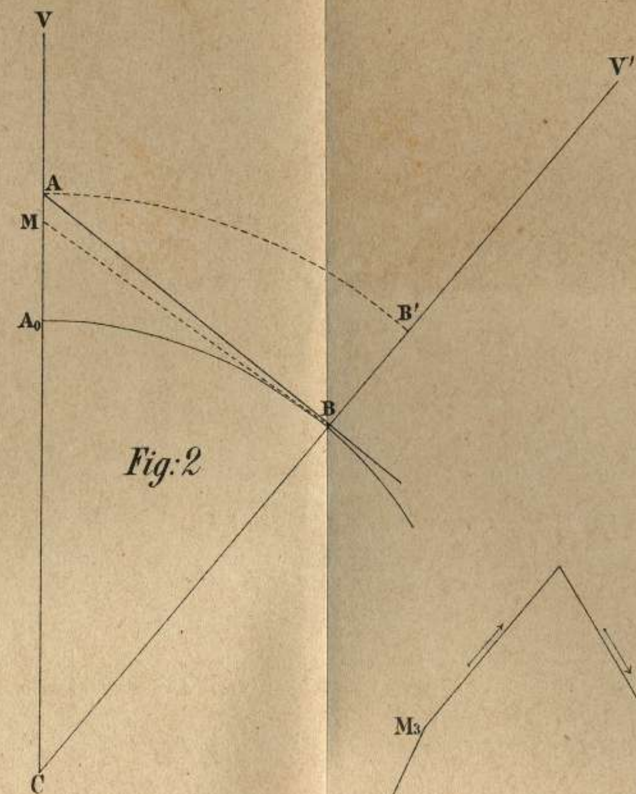

Fig: 2

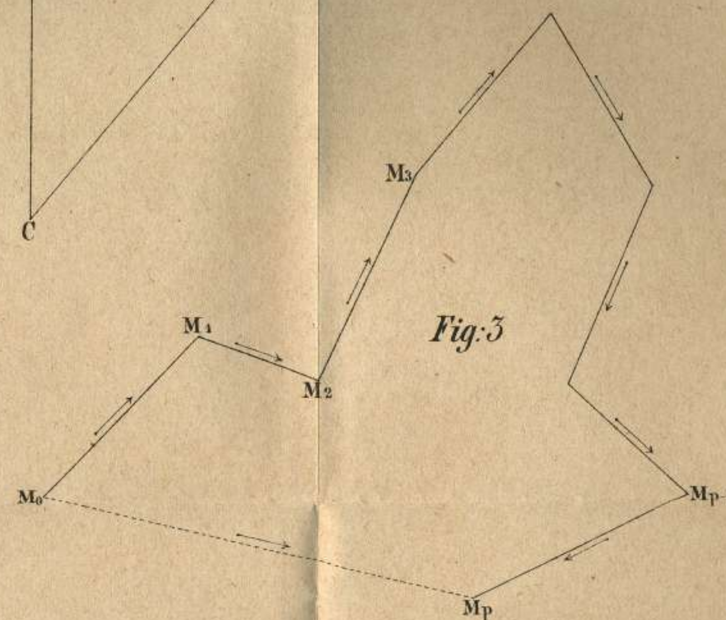

Fig: 3

$\rho = CA_0 ; \lambda = A_0B_0$

$Z = \widehat{VAB}$

$Z' = V'\widehat{BA}$

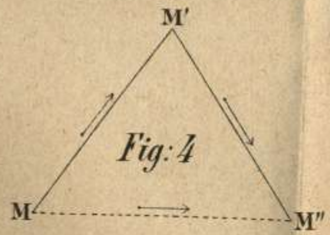

Fig: 4

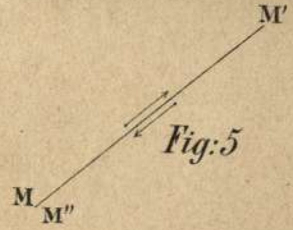

Fig: 5

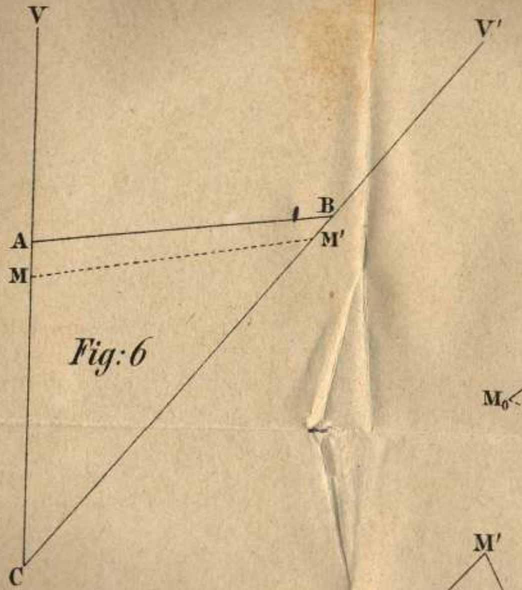

Fig: 6

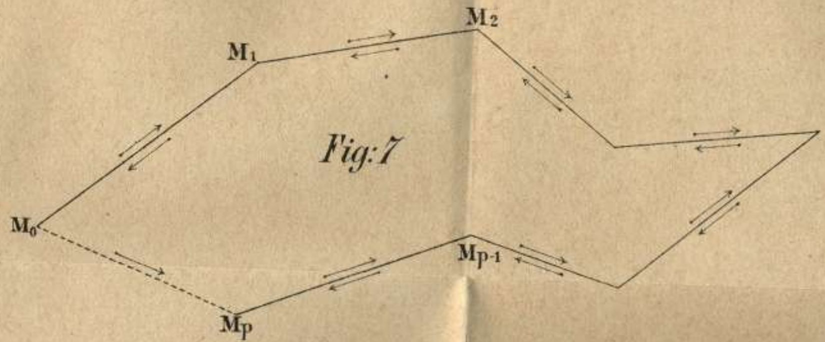

Fig: 7

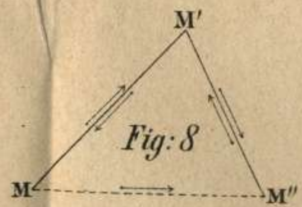

Fig: 8

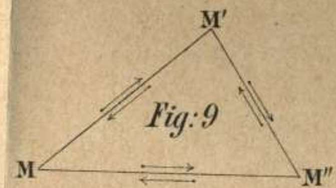

Fig: 9

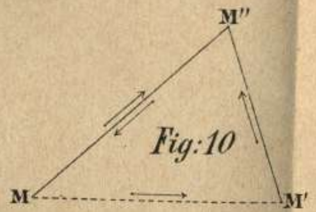

Fig: 10

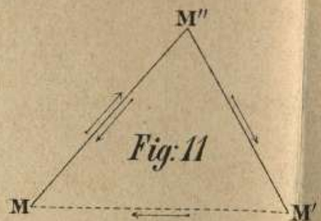

Fig: 11

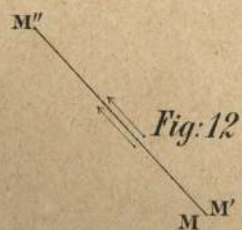

Fig: 12

Lith: a Vapor, Angelo & Robin. R. d'Assembléa 44.